

Вопросы к экзамену по ТФДП, гр. 8131, 2012 г.

1. Понятие мощности множества. Счетные множества. Свойства счетных множеств.
2. Несчетность множества действительных чисел. Сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна.
3. Теорема Кантора о мощности множества подмножеств. Свойства множеств мощности континуума.
4. Структура открытых и замкнутых подмножеств прямой.
5. Структура ограниченных совершенных множеств. Канторово совершенное множество. Теорема о мощности совершенного множества.
6. Понятие функции ограниченной вариации на отрезке.
7. Основные свойства функций ограниченной вариации.
8. Необходимое и достаточное условие спрямляемости плоской кривой.
9. Внешняя мера на прямой и ее свойства.
10. Внутренняя мера ограниченного множества. Корректность определения (независимость от выбора отрезка). Свойства внутренней меры.
11. Понятие измеримого множества и меры Лебега. Основные свойства измеримых множеств.
12. Критерий измеримости ограниченного множества.
13. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Лебега.
14. Измеримость счетных объединений и пересечений измеримых множеств. Счетная аддитивность меры Лебега. Свойства непрерывности меры Лебега.
15. Регулярность меры Лебега. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов. Пример неизмеримого множества.
16. Измеримые функции. Равносильность различных условий измеримости. Эквивалентные функции. Измеримость эквивалентных функций.
17. Измеримость операций над измеримыми функциями. Измеримость суммы, произведения и частного измеримых функций. Измеримость непрерывных функций.
18. Последовательности измеримых функций. Понятия сходимости “почти всюду” и “по мере”. Теоремы Лебега и Рисса.
19. Соотношение между сходимостью “почти всюду” и равномерной сходимостью. Теорема Егорова.
20. Аппроксимации измеримых функций непрерывными. Теорема Лузина.
21. Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции. Свойства интегральных сумм. Определение интеграла.
22. Корректность определения интеграла Лебега. Оценки интеграла и их следствия.
23. Конечная и счетная аддитивность интеграла по области интегрирования.
24. Равенство интегралов от эквивалентных функций. Линейность интеграла от ограниченной измеримой функции. Оценка модуля интеграла.
25. Неравенство Чебышева и его следствия. Свойства неотрицательных измеримых функций с нулевым интегралом. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
26. Сравнение интегралов Лебега и Римана.
27. Приложения интеграла Лебега: восстановление дифференцируемой функции по ее производной.
28. Интеграл Лебега от неотрицательной суммируемой функции и его основные свойства.

29. Предельный переход под знаком интеграла. Лемма Фату и теорема Леви. Почленное интегрирование рядов.
30. Интеграл Лебега от произвольной суммируемой функции и его свойства.
31. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла для равномерно суммируемых последовательностей.
32. Пространство суммируемых функций $L^1(E)$. Полнота этого пространства.
33. Пространство квадратично суммируемых функций $L^2(E)$. Полнота пространства $L^2(E)$.
34. Ортогональные системы функций в $L^2(E)$. Ряды Фурье и их сходимость.