УДК 621.396:517.9

МЕТОД ГАЛЕРКИНА В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ *E*-ПОЛЯРИЗАЦИИ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И.С.Эминов, В.С.Эминова

Институт электронных и информационных систем НовГУ, eminovsi@mail.ru

Методом Галеркина решена задача дифракции *E*-поляризованных электромагнитных волн на произвольной цилиндрической поверхности. Проведены численные расчеты и продемонстрирована высокая эффективность метода Галеркина.

Ключевые слова: интегральное уравнение, метод Галеркина, логарифмическая особенность, ядро, параболическая поверхность

Problem of *E*-polarized electromagnetic waves diffraction on the arbitrary cylindrical surface is solved by the method of Galerkin. We conducted the numerical calculations and demonstrated high efficiency of the method.

Keywords: integral equation, Galerkin method, logarithmic singularity, core, parabolic surface

1. Введение

Интегральные уравнения имеют место в теории дифракции, теории антенн, а также в теории упругости. В связи с этим наблюдается огромный интерес исследователей к ним.

Существуют несколько методов решения интегральных уравнений. Так, в [1] для решения интегральных уравнений развит метод механических квадратур, а в [2] используется метод коллокации на основе кусочно-постоянного базиса. В работах [3-5] для решения интегральных уравнений теории дифракции на полосе развит метод Галеркина. В этих работах показана высокая скорость сходимости метода Галеркина, преимущества этого метода по сравнению с другими численными методами.

Таким образом, представляются актуальным разработка алгоритмов и программ решения интегрального уравнения на цилиндрической криволинейной поверхности, основанных на методе Галеркина.

2. Интегральное уравнение дифракции для волн *E*-поляризации на идеально-проводящей полосе

Известно [1], что неизвестная функция плотности поверхностных токов в задаче дифракции *E*-поляризации на идеально-проводящей полосе удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_{-1}^{1} j_z(t) H_0^{(2)}\left(a^э|\tau-t|\right)dt = E^0(\tau)\frac{4}{a^э}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}},\ -1\le\tau\le1, \quad (1)$$

где $a^э = ak = a\dfrac{2\pi}{\lambda}$ — электрическая полуширина полосы; $H_0^{(2)}(z)=J_0(z)-iN_0(z)$ — функция Ханкеля 2-го рода, нулевого порядка; $J_0(z)$ — функция Бесселя; $N_0(z)$ — функция Неймана.

Заметим, что функция Бесселя является бесконечно дифференцируемой, а функция Неймана имеет логарифмическую особенность в нуле.

Выделяя логарифмическую особенность в ядре, сведем интегральное уравнение (1) к стандартному виду

$$(Aj)(\tau)+(Mj)(\tau)=e^0(\tau), \quad (2)$$

где

$$(Aj)(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} j(t)\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt,$$

$$(Mj)(\tau)=\frac{-i}{2}\int_{-1}^{1} j(t)J_0(a|\tau-t|)dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} j(t)\left[N_0(a|\tau-t|)-\frac{2}{\pi}\ln|\tau-t|\right]dt,$$

$$e^0(\tau)=\frac{-2i}{a}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^0(\tau).$$

3. Метод Галеркина

Для нахождения приближенного решения интегрального уравнения (2) будем применять метод Галеркина на основе следующих базисных функции

$$\varphi_m(\tau)=\alpha_m\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}T_{m-1}(\tau),$$

где $\alpha_1=\sqrt{\dfrac{1}{\pi\ln2}}$, $\alpha_m=\sqrt{\dfrac{2(m-1)}{\pi}}$; $T_{m-1}(\tau)$ — полиномы Чебышева 1-го рода, т.е. $T_{m-1}(\tau)=\cos[(m-1)\arccos\tau]$.

Замечательным свойством этих базисных функций является то, что матрица оператора A в этом базисе является единичной, т.е.

$$(A\varphi_m,\varphi_n)=\begin{cases}1, \text{если } m=n,\\ 0, \text{если } m\ne n.\end{cases} \quad (3)$$

Кроме того, удается найти интегралы от произведения базисных функций и тригонометрических в аналитическом виде.

Решение интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} j(t)\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt+\int_{-1}^{1} M(\tau,t)j(t)dt=e^0(\tau) \quad (4)$$

будем искать в виде

$$j(\tau)=\sum_{m=1}^{N} c_m\varphi_m(\tau). \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{m=1}^{N}c_m\varphi_m(t)\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt+\sum_{m=1}^{N}c_m\int_{-1}^{1}M(\tau,t)\varphi_m(t)dt=e(\tau). \quad (6)$$

Умножая уравнение (6) на базисные функции $\varphi_n(\tau)$ и интегрируя, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{N}c_m\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|\tau-t|}\varphi_m(t)\varphi_n(t)dtd\tau+$$

$$+\sum_{m=1}^{N}c_m\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}M(\tau,t)\varphi_m(t)\varphi_n(\tau)dtd\tau=$$

$$=\int_{-1}^{1}e(\tau)\varphi_n(\tau)d\tau,\ 1\le n\le N.$$

Учитывая свойство (3) эту систему можно записать в виде

$$c_n+\sum_{m=1}^{N}c_mM_{mn}=e_n,$$

где $M_{mn}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}M(\tau,t)\varphi_m(t)\varphi_n(\tau)dtd\tau.$

4. Результаты численных расчетов

Правую часть интегрального уравнения (4) будем задавать в виде $E_z^0(\tau)=E_0e^{-ia^э\tau\sin\theta}$, что соответствует падению плоской волны на полосу под углом θ, постоянную E_0 положим равной $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$

В табл.1 показана сходимость метода Галеркина в зависимости от числа базисных функций.

Таблица 1

Зависимость решения от числа базисных функций

N	$a^э=\pi,\ \theta=0,\ \tau=0$		$a^э=\pi/2,\ \theta=0,\ \tau=0$	
	$\mathrm{Re}(j)$	$\mathrm{Im}(j)$	$\mathrm{Re}(j)$	$\mathrm{Im}(j)$
2	1,276769	–0,574979	1,336703	–0,380770
4	2,003910	0,187737	1,583669	0,080651
6	2,068187	0,162933	1,595322	0,087705
8	2,071617	0,159237	1,595522	0,087784
10	2,071723	0,159066	1,595523	0,087783

Как видно из таблицы, достаточно быстро наступает стабилизация. Для полуволновой полосы результаты при N = 8 и N = 10 совпадают с точностью до шестого знака. Такая быстрая сходимость связана с выбором базисных функций.

5. Интегральное уравнение дифракции для волн *E*-поляризации на произвольной цилиндрической незамкнутой поверхности

Рассмотрим падение *E*-поляризованной волны на произвольную незамкнутую цилиндрическую поверхность. Параметризация контура, образованного пересечением этой поверхности с плоскостью z = 0, выглядит следующим образом: $x=\xi(\tau),\ y=\eta(\tau),\ -1\le\tau\le1,$ $L=\sqrt{[\xi(\tau)-\xi(t)]^2+[\eta(\tau)-\eta(t)]^2}$.

Интегро-дифференциальное уравнение относительно плотности поверхностных токов имеет вид

$$\frac{k}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_{-1}^{1}j_z(t)H_0^{(2)}(kL)\sqrt{\xi'^2(t)+\eta'^2(t)}dt=E_z^0(\tau), \quad (7)$$

где $H_0^{(2)}(z)=J_0(z)-iN_0(z)$ — функция Ханкеля 2-го рода, нулевого порядка; $J_0(z)$ — функция Бесселя, $N_0(z)$ — функция Неймана. Введем в него новую неизвестную по формуле

$$u(\tau)=j_z(\tau)\left(k\sqrt{\xi'^2(\tau)+\eta'^2(\tau)}\right),$$

тогда уравнение (7) примет вид

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\int_{-1}^{1}u(t)H_0^{(2)}(kL)dt=E_z^0(\tau). \quad (8)$$

А теперь в уравнении (8) выделим логарифмическую особенность. В результате получим стандартное интегральное уравнение с выделенным логарифмическим оператором

$$(Aj)(\tau)+(Mj)(\tau)=e^0(\tau),$$

где

$$(Aj)(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}u(t)\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt,$$

$$(Mj)(\tau)=-\frac{i}{2}\int_{-1}^{1}u(t)J_0^{(2)}(kL)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u(t)\left[N_0(kL)-\frac{2}{\pi}\ln|\tau-t|\right]dt,\ e^0(\tau)=-2i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_z^0(\tau).$$

В качестве примера рассмотрим уравнение дифракции на параболическом цилиндре:

$$x=a\tau,\ y=\frac{a^2\tau^2}{2p},\ -1\le\tau\le1.$$

Таблица 2

Зависимость решения от числа базисных функций

N	$\theta=\pi/6,\ a^э=\pi/2,\ p^э=2,\ \tau=0$	
	$\mathrm{Re}(j)$	$\mathrm{Im}(j)$
2	1,219612	0,042190
4	1,014287	0,074782
6	0,939045	0,085494
8	0,939017	0,090356
10	0,939338	0,090471
20	0,939346	0,090474
40	0,939348	0,090462

Как следует из табл.2, метод Галеркина быстро сходится в задаче дифракции на параболической поверхности.

Увеличение параметра $p^э$ приводит к уменьшению кривизны (табл.3). При этом форма параболы приближается к форме отрезка.

Таблица 3

Зависимость распределения тока от кривизны

$p^э$	$\theta=0,\ a^э=\pi/2,\ N=10,\ \tau=0$	
	$\mathrm{Re}(j)$	$\mathrm{Im}(j)$
1	0,289232	0,530130
10	1,488292	0,164256
100	1,585181	0,095397
1000	1,594492	0,088544
10000	1,595420	0,087859

Как следует из таблицы, результаты решения интегрального уравнения совпадают с соответствующими решениями интегрального решения для полосы.

6. Об обосновании метода Галеркина

Для исследования уравнения с логарифмической особенностью в ядре

$$(Ax)(\tau)+(Mx)(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}x(t)\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt+\int_{-1}^{1}M(\tau,t)x(t)dt=e^0(\tau)$$

вначале рассмотрим уравнение вида

$$(Ax)(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}x(t)\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt=e(\tau),$$

которое можно решить в аналитическом виде

$$x=A^{-1}x=\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\int_{-1}^{1}e(t)\,\varphi_m(t)dt\right)\varphi_m(\tau). \qquad (9)$$

Умножая обе части уравнения (9) на обратный A^{-1}, получим

$$x+Kx\equiv x+A^{-1}Mx=A^{-1}e\,. \qquad (10)$$

Используя методы функционального анализа, можно доказать, что оператор $A^{-1}M$ вполне непрерывен, а уравнение (10) является уравнением Фредгольма второго рода. Отсюда можно получить обоснование сходимости метода Галеркина.

7. Заключение

Таким образом, в работе получены следующие основные результаты.

1. Развит метод Галеркина, а в качестве базисных функций использованы полиномы Чебышева, помноженные на функцию $\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

2. Разработана программа для решения интегрального уравнения в задаче дифракции на произвольной незамкнутой цилиндрической поверхности. В качестве примера рассмотрен параболический цилиндр. Продемонстрирована высокая скорость сходимости метода Галеркина по мере увеличения числа базисных функций. Также показано, что полученные результаты совпадают с результатами других авторов, полученными другими методами.

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наук. думка, 1984. 344 с.
2. Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982. 184 с.
3. Артемьев В.В., Плотников В.Н., Эминов С.И. // ЖТФ. 1995. Т.65. Вып.3. С.72-79.
4. Артемьев В.В., Плотников В.Н., Эминов С.И. // ЖТФ. 1994. Т.64. Вып.11. С.117-126.
5. Эминов С.И. // Радиотехника и электроника. 1993. Т.38. №12. С.2160-2168.