

20 коп.

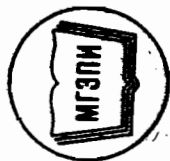


**ЗАДАЧНИК-
ПРАКТИКУМ
ПО ГЕОМЕТРИИ**

Ч а с т ь III



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РСФСР
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ



Handwritten signature or initials.

ЗАДАЧНИК- ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ

Часть III

*Учебное пособие для студентов-заочников
II курса физико-математических факуль-
тетов педагогических институтов*

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

Б. И. Аргунов, И. В. Парнасский, О. Е. Парнасская, М. М. Цаленко.

Рекомендовано к печати Главным управлением высших и средних педагогических учебных заведений.

Рецензенты: Г. Б. Гуревич, А. П. Карташов, И. В. Стеллецкий.

Редактор МГЗПИ Павлович О. А.

Изучение любого математического курса невозможно без выработки навыков решения задач, что приобретает особое значение для студентов-заочников, поскольку позволяет им самостоятельно контролировать степень усвоения материала. Предлагаемый задачник-практикум написан в соответствии с действующей программой курса «Геометрия» и содержит задачи по следующим ее разделам: аффинные n -мерные пространства, евклидовы пространства, квадратичные формы и квадратичные формы в аффинном и евклидовом пространствах.

Прежде чем приступить к разбору и решению задач, студент должен ознакомиться с необходимым теоретическим материалом, ссылки на который даются в начале каждого параграфа по одному из следующих учебных пособий: [1] Атанасян Л. С. Геометрия. Ч. I. М., 1978; [2] Базылев В. Т., Дунинчев К. И., Иванникова В. П. Геометрия. Ч. I. М., 1974; [3] Парнасский И. В., Парнасская О. Е. Многомерные пространства. Квадратичные формы и квадратичные формы. М., 1978.

Авторы будут благодарны читателям за критические замечания.

З 60602—389

4309020400 заказное

103(03)—79

© Московский государственный заочный педагогический институт (МГЗПИ), 1979 г.

Глава I

АФФИННЫЕ n -МЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Действительные n -мерные векторные пространства

Л и т е р а т у р а: [3], § 1.

1.1. Доказать, что подмногожество V векторов обычного трехмерного пространства является одномерным векторным пространством относительно обычного сложения векторов и обычного умножения вектора на число тогда и только тогда, когда V состоит из всех векторов, параллельных некоторой прямой l .

Р е ш е н и е. Пусть $\vec{p}$ — направляющий вектор прямой l и векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ параллельны прямой l . Тогда $\vec{x} = \lambda_1 \vec{p}$, $\vec{y} = \lambda_2 \vec{p}$, поскольку векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны ненулевому вектору $\vec{p}$. Отсюда:

$$\vec{x} + \vec{y} = \lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{p} = (\lambda_1 + \lambda_2) \vec{p},$$

т. е. сумма векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ также коллинеарна вектору $\vec{p}$. Кроме того, для любого числа λ вектор $\lambda \vec{x} = \lambda (\lambda_1 \vec{p}) = (\lambda \lambda_1) \vec{p}$ коллинеарен вектору $\vec{p}$. Таким образом, операции сложения векторов и умножения на число не выводят за пределы подмногоества векторов V , параллельных прямой l . Выполнение для этих операций аксиом векторного пространства вытекает из известных свойств действий над векторами.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть V — одномерное пространство векторов. По определению размерности векторного пространства в V можно выбрать базис, состоящий из единственного вектора $\vec{e} + \vec{o}$. Для любого вектора $\vec{x} \in V$ система $\vec{x}, \vec{e}$ линейно зависима по определению базиса. Значит, векторы $\vec{x}$ и $\vec{e}$ коллинеарны, т. е. $\vec{x} = \lambda \vec{e}$. Следовательно, все векторы из V параллельны прямой с направляющим вектором $\vec{e}$. Остается показать, что всякий вектор $\vec{u}$, параллельный такой прямой, принадлежит пространству V . Из коллинеарности векторов $\vec{u}$ и $\vec{e}$ следует, что $\vec{u} = \mu \vec{e}$ для некоторого числа μ . Так как $\vec{e} \in V$, то по определению векторного пространства вектор $\mu \vec{e} = \vec{u} \in V$.

1.2. Доказать, что подмногоество векторов V трехмерного пространства является двумерным векторным пространством относи-

тельно обычного сложения векторов и обычного умножения вектора на число тогда и только тогда, когда V состоит из всех векторов, ортогональных ненулевому вектору n .

1.3. Доказать, что множество всех векторов V трехмерного пространства является трехмерным векторным пространством.

1.4. Является ли векторным пространством относительно обычных операций сложения и умножения на число подмножество векторов единичной длины трехмерного пространства?

Решение. Указанное множество не является векторным пространством, хотя бы потому, что вектор λe , $|\lambda| \neq 1$, $|e| = 1$ не принадлежит указанному множеству.

1.5. Пусть L — множество прямых на плоскости, проходящих через точку пересечения прямых l и m и лежащих внутри одной из пар вертикальных углов. Является ли векторным пространством множество векторов, коллинеарных какой-либо прямой множества L ?

1.6. Привести пример такого множества векторов, чтобы сложение векторов было операцией на этом множестве, а умножение на которое числа λ на векторы этого множества не было бы операцией на нем.

1.7. В трехмерном пространстве даны точки A_0, A_1, A_2, A_3 . Известно, что точки A_1, A_2, A_3 лежат на одной прямой. Образуют ли векторы $\vec{A_0A_1}, \vec{A_0A_2}, \vec{A_0A_3}$ базис трехмерного векторного пространства?

1.8. В трехмерном пространстве даны точки A_0, A_1, A_2, A_3 . Доказать, что векторы $\vec{A_0A_1}, \vec{A_0A_2}, \vec{A_0A_3}$ образуют базис трехмерного векторного пространства V_3 тогда и только тогда, когда точки A_0, A_1, A_2, A_3 не лежат на одной плоскости.

1.9. Доказать, что любой ненулевой вектор одномерного векторного пространства образует базис этого пространства.

Указание. В соответствии с определением базиса n -мерного векторного пространства (§3, глава I, §1) докажите, что любой ненулевой вектор линейно независим.

Аналогичные указания относятся к задачам 1.10 и 1.11.

1.10. Доказать, что базисом векторного пространства из задачи 1.2 является любая пара неколлинеарных векторов этого пространства.

1.11. Доказать, что базисом векторного пространства из задачи 1.3 является любая тройка некопланарных векторов.

В следующих задачах координаты всех векторов считаются заданными в некотором фиксированном базисе.

1.12. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{x} &= 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3, \\ \vec{a}_1 &= (1; -2; 3), \vec{a}_2 = (2; -2; 1), \vec{a}_3 = (-1; -1; -1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \vec{x} &= 4\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 6\vec{a}_3, \\ \vec{a}_1 &= (1; 3; -1; 2; 5), \vec{a}_2 = (2; 0; -3; 4; 2), \\ \vec{a}_3 &= (-1; -3; 1; 2; 1). \end{aligned}$$

1.13. Выяснить, являются ли линейно зависимыми следующие системы векторов:

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{a}_1 &= (1; 3; -7), \vec{a}_2 = (-4; 1; 5), \\ \vec{a}_3 &= (-5; 11; -11); \\ \text{б) } \vec{a}_1 &= (2; 1; 3; 1), \vec{a}_2 = (1; 2; 0; 1), \\ \vec{a}_3 &= (-1; 1; -3; 0); \\ \text{в) } \vec{a}_1 &= (1; 2; 1; 0), \vec{a}_2 = (2; -1; 0; 1), \\ \vec{a}_3 &= (5; -2; -3; -4); \\ \text{г) } \vec{a}_1 &= (1; 2; -1; -2), \vec{a}_2 = (3; 1; 1; 1), \\ \vec{a}_3 &= (-1; 0; 1; 1). \end{aligned}$$

Решение. б) Чтобы ответить на поставленный в задаче вопрос, достаточно определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если ранг этой матрицы равен 3, то система векторов линейно независима, в противном случае она линейно зависима.

Для вычисления ранга можно использовать любой из методов, рекомендованных в курсе алгебры:

$$\begin{aligned} \text{ранг} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} &= \text{рангу} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \text{рангу} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2. \end{aligned}$$

1.14. Доказать, что следующие системы векторов образуют базис четырехмерного векторного пространства V_4 :

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{u}_1 &= (1; 1; 1; 0), \vec{u}_2 = (1; 2; 1; 1), \\ \vec{u}_3 &= (1; 1; 2; 1), \vec{u}_4 = (1; 3; 2; 5); \\ \text{б) } \vec{u}_1 &= (2; 3; 4; -3), \\ \vec{u}_2 &= (1; 0; 0; 0), \vec{u}_3 = (3; 5; 5; 3); \\ \text{в) } \vec{u}_1 &= (1; 0; 3; 3), \vec{u}_2 = (-2; -3; -5; -4), \\ \vec{u}_3 &= (2; 2; 5; 4), \vec{u}_4 = (-2; -3; -4; -4); \\ \text{г) } \vec{u}_1 &= (1; -1; 2; -2), \\ \vec{u}_2 &= (-5; 0; 2; 3), \vec{u}_3 = (3; 4; -1; -3), \\ \vec{u}_4 &= (3; 7; -2; 4). \end{aligned}$$

Решение. а) Для решения задачи достаточно проверить, что определитель матрицы, составленной из координат данных векторов, отличен от нуля.

Вычислим этот определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 2 \neq 0.$$

Поскольку определитель отличен от нуля, система векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ является линейно независимой системой, состоящей из четырех векторов, и поэтому образует базис пространства V_4 .

1.15. Векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{x}$ заданы своими координатами относительно некоторого базиса. Проверить, что векторы $\vec{u}_1 = (2; 1; 2; 1), \vec{u}_2 = (3; 1; 1; 1), \vec{u}_3 = (11; 5; 3; 3), \vec{u}_4 = (5; 2; 2; 4)$ образуют базис пространства V_4 , и найти относительно этого базиса координаты вектора $\vec{x}$:

а) $\vec{x} = (2; 1; -3; -3)$, б) $\vec{x} = (1; 2; 0; -1)$, в) $\vec{x} = (8; 4; 7; 6)$.

Указание. Для проверки того, что векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ образуют базис, воспользуйтесь задачей 1.14.

а) Чтобы найти координаты вектора $\vec{x} = (2; 1; -3; -3)$ относительно базиса $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$, нужно представить вектор $\vec{x}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$:

$$\vec{x} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3 + x_4 \vec{u}_4,$$

и решить систему:

$$\begin{cases} 2 = 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4, \\ 1 = -x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4, \\ -3 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4, \\ -3 = x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4. \end{cases}$$

Решение этой системы: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$ — это координаты вектора $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$.

1.16. Доказать, что векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ образуют базис в n -мерном векторном пространстве V_n , и найти координаты вектора $\vec{u}$ в этом базисе, если векторы $\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ относительно некоторого базиса имеют координаты:

а) $\vec{u}_1 = (1; 2; 3), \vec{u}_2 = (1; 0; 1),$

$\vec{u}_3 = (-1; 4; -3), \vec{u} = (6; 2; 2);$

б) $\vec{u}_1 = (-1; -2; 1; 2), \vec{u}_2 = (3; 1; 0; -1),$

$\vec{u}_3 = (1; 1; 1; 1), \vec{u}_4 = (0; 3; 6; 4), \vec{u} = (-3; -1; 7; 11);$

в) $\vec{u}_1 = (1; -2; 3; 1; 0), \vec{u}_2 = (3; 0; 2; -1; -1),$
 $\vec{u}_3 = (2; 2; -1; -1; 3), \vec{u}_4 = (0; 2; 0; 0; 0),$
 $\vec{u} = (5; -2; 8; 0; -5).$

1.17. Найти связь между координатами одного и того же вектора четырехмерного пространства V_4 , если известны координаты новых базисных векторов относительно старого базиса:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1' &= (0; 1; 3; 2), & \vec{e}_2' &= (2; 0; 4; -1), \\ \vec{e}_3' &= (1; 1; 0; -5), & \vec{e}_4' &= (1; 1; 1; 1). \end{aligned}$$

Решение. Если $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ и $\vec{u}_1', \vec{u}_2', \dots, \vec{u}_n'$ — координаты вектора $\vec{u}$ в старом и новом базисах, то связь между этими координатами выражается формулами:

$$u_i = a_{1i} u_1' + a_{2i} u_2' + \dots + a_{ni} u_n', \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ — координаты нового базисного вектора $\vec{e}_j'$ относительно старого базиса (см. [3], гл. I, § 1.3 и 1.4).

Таким образом, в рассматриваемой задаче связь между координатами выражается формулами:

$$\begin{cases} u_1 = 2u_2' + u_3' + u_4', \\ u_2 = u_1' + u_3' + u_4', \\ u_3 = 3u_1' + 4u_2' + u_4', \\ u_4 = 2u_1' - u_2' - 5u_3' + u_4'. \end{cases}$$

1.18. Доказать, что следующие множества векторов являются подпространствами n -мерного векторного пространства, и найти размерности этих подпространств.

- Множество векторов, у которых координаты с нечетными номерами равны нулю;
- множество векторов, у которых сумма координат с четными номерами равна нулю;
- множество векторов, все координаты которых равны между собой;
- множество векторов, являющихся линейными комбинациями векторов $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, k \leq n$.

1.19. Доказать, что подпространство n -мерного векторного пространства V_n , о котором идет речь в пункте г) задачи 1.18, является наименьшим подпространством этого пространства, содержащим векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$.

1.20. Являются ли подпространствами n -мерного векторного пространства:

- множество векторов, первая координата которых равна 1;
- множество векторов, сумма всех координат которых равна 3;

в) множество векторов, все координаты которых неотрицательны;

г) множество векторов, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - \dots + (-1)^{n-1}x_n = 0$;

1.21. Найти размерность и базис каждого из подпространств, натянутого на векторы:

а) $\vec{u}_1 = (2; -1; 0; 4), \vec{u}_2 = (3; 0; 0; 1),$

$\vec{u}_3 = (8; -1; 0; 6);$

б) $\vec{u}_1 = (1; -4; 3; 2), \vec{u}_2 = (3; 2; -1; -4),$

$\vec{u}_3 = (0; 1; 2; -5), \vec{u}_4 = (-1; -7; 13; -7);$

в) $\vec{u}_1 = (4; 6; -2; 5), \vec{u}_2 = (-3; -5; 1; 1),$

$\vec{u}_3 = (7; 11; -3; 4), \vec{u}_4 = (5; 7; -3; 11).$

У к а з а н и е. Из данных векторов необходимо выделить максимальное число линейно независимых векторов — базис искомого подпространства, размерность которого определяется числом этих базисных векторов.

а) Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

составленной из координат векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, равен двум. Значит, число линейно независимых векторов (и соответственно размерность искомого подпространства) равно двум. Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

составленной из координат векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, также равен двум, следовательно, векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ образуют базис.

1.22. Найти базис пересечения двух подпространств L_k и L_m векторного пространства V_n , натянутых на векторы:

а) $\vec{v}_1 = (4; 3; -2; 1), \vec{v}_2 = (-1; 5; 4; 3)$ и

$\vec{v}_3 = (3; 8; 2; -2), \vec{v}_4 = (0; 0; 1; 4);$

б) $\vec{u}_1 = (0; 0; 3; -2), \vec{u}_2 = (0; 0; 0; 3),$

$\vec{u}_3 = (0; -5; 0; 0)$ и $\vec{u}_4 = (0; 0; 3; 1),$

$\vec{v}_5 = (0; -5; 0; 3), \vec{v}_6 = (1; 0; 0; 0).$

§ 2. Координаты точек в аффинном пространстве

Л и т е р а т у р а: [3], § 3.

1.23. Пусть $R(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5)$ аффинный репер в пятимерном аффинном пространстве A_5 . Найти координаты точек $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, M, N, L, K$, если

$$\vec{OE}_1 = \vec{e}_1, \vec{OE}_2 = \vec{e}_2, \vec{OE}_3 = \vec{e}_3, \vec{OE}_4 = \vec{e}_4, \vec{OE}_5 = \vec{e}_5,$$

$$\vec{OM} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 + \vec{e}_5, \vec{ON} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - \vec{e}_5,$$

$$\vec{OL} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_4 + 4\vec{e}_5, \vec{OK} = -\vec{e}_3 - 6\vec{e}_5.$$

Р е ш е н и е. Координаты произвольной точки M аффинного пространства A_n совпадают с координатами ее радиус-вектора $\vec{OM}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ n -мерного векторного пространства V_n , связанного с пространством A_n . Поэтому точка M , для которой $\vec{OM} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - \vec{e}_5$, имеет координаты $(0; 1; -1; 2; -3)$. Аналогично находятся координаты остальных точек.

1.24. Найти координаты точек $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ относительно аффинного репера $R(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4)$, если $\vec{NM}_1 = \vec{a}_1$ и $\vec{a}_1 = (1; 3; 0; -1), \vec{a}_2 = (2; 4; -1; 5), \vec{a}_3 = (1; 1; -5; 2), \vec{a}_4 = (4; 3; 0; 0), \vec{a}_5 = (4; -3; 7; 2), \vec{a}_6 = (1; 1; 3; 4), N(1; -2; 4; 3)$.

Р е ш е н и е. Сначала найдем координаты радиус-векторов $\vec{OM}_i$. В соответствии с аксиомами аффинного пространства A_n $\vec{OM}_i = \vec{ON} + \vec{NM}_i$. Координаты вектора $\vec{ON}$ совпадают с координатами точки N , координаты векторов $\vec{NM}_i$ известны, следовательно, точка M_1 , например, имеет координаты $(2; 1; 4; 2)$. Аналогично находятся координаты остальных точек.

1.25. Известны координаты точек $A(1; 3; 7; 8; 11), B(2; 4; -8; 3; 8)$.

а) Написать параметрические уравнения отрезка AB ;
б) написать параметрические уравнения луча, проходящего через точку B и имеющего начало в точке A ;

в) написать параметрические уравнения прямой AB .
З а м е ч а н и е. Напомним, что отрезком с концами A и B n -мерного аффинного пространства A_n называется множество точек M , для которых $\vec{AM} = t \cdot \vec{AB}$, где $0 \leq t \leq 1$. На основании этого можно определить такие понятия, как *ломаная*, *треугольник*, *параллелограмм*, *трапеция* и т. п. Ломаная $A_1A_2A_3 \dots A_k$ называется плоской, если система векторов $\vec{A_1A_2}, \vec{A_2A_3}, \dots, \vec{A_{k-1}A_k}$ компланарна (ранг системы не больше двух).

1.26. Даны точки $M(2; -2; -5; 2; 3)$ и $N(6; 6; 0; -30; -12)$ аффинного пространства A_5 . Найти координаты точек P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , которые делят отрезок MN в отношении: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = \frac{1}{3}, \lambda_4 = -3, \lambda = -\frac{1}{2}$.

Решение. Известно, что координаты точки P , делящей отрезок MN в отношении $\lambda \neq -1$ в n -мерном пространстве, находятся по формуле:

$$z_i = \frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda},$$

где x_i — координаты точки M , y_i — координаты точки N , z_i — координаты точки P , $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому точка P_1 имеет следующие координаты:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2+6}{2} = 4, \quad z_2 = \frac{-2+6}{2} = 2, \quad z_3 = \frac{-5+0}{2} = -\frac{5}{2}, \\ z_4 &= \frac{2-30}{2} = -14, \quad z_5 = \frac{3-12}{2} = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Отметим, что точка P_1 является серединой отрезка MN . Точка P_2 имеет следующие координаты:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2+2 \cdot 6}{3} = \frac{14}{3}, \quad z_2 = \frac{-2+2 \cdot 6}{3} = \frac{10}{3}, \\ z_3 &= \frac{-5+2 \cdot 0}{3} = -\frac{5}{3}, \quad z_4 = \frac{3+2 \cdot (-12)}{3} = -\frac{21}{3} = -7. \end{aligned}$$

Аналогично находятся координаты точек P_3, P_4, P_5 .

1.27. Исходя из условий задачи 1.23 найти координаты середин отрезков $E_1E_3, E_4E_5, EM, MN, LK$.

1.28. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC в пространстве A_5 , зная координаты его вершин $A(1; 3; 4; -2; 1), B(3; 1; -6; -2; 5), C(5; -3; 4; 6; 3)$.

1.29. Найти вершину D параллелограмма $ABCD$ в пространстве A_4 , зная координаты вершин $A(1; 3; -2; 1), B(4; -1; 6; 5), C(8; -5; 2; 3)$.

1.30. Даны точки $A(0; 3; -4; 5; -1), B(1; 1; -2; -1; 5), C(1; -7; 2; -9; 8), D(-1; -3; -2; 3; -4)$ в A_5 . Доказать, что четырехугольник $ABCD$ является трапецией.

1.31. Даны точки $M_1(1; 3; 2; -1), M_2(4; 1; 6; 7), M_3(5; -3; -8; 1), M_4(8; -5; -4; 9), M_5(8; 6; -2; -2)$ в пространстве A_5 . Является ли ломаная $M_1M_2M_3M_4M_5$ плоской?

1.32. Найти вершину C треугольника ABC в пространстве A_6 , зная координаты вершин $A(1; -3; -1; -5; 0; 3)$ и $B(4; -2; 3; -1; 4; 1)$ в репере $R(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5; \vec{e}_6)$ и зная, что системы векторов $\vec{AC}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{BC}, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6$ линейно зависимы.

Решение. Пусть точка C имеет в репере $R(O; \vec{e}_1; \dots; \vec{e}_6)$ координаты $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Тогда вектор $\vec{AC} = (x_1 - 1; x_2 + 3;$

$x_3 + 1; x_4 + 5; x_5; x_6 - 3)$. Так как вектор $\vec{AC}$ линейно выражается через векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, то его последние четыре координаты в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6$ равны нулю. Отсюда:

$$x_3 = -1, \quad x_4 = -5, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 3.$$

Аналогично, так как вектор

$$\vec{BC} = (x_1 - 4; x_2 + 2; x_3 - 3; x_4 + 1; x_5 - 4; x_6 - 1)$$

линейно выражается через векторы $\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6$, то его первые две координаты равны нулю. Отсюда $x_1 = 4, x_2 = -2$. Таким образом, точка C имеет координаты $(4; -2; -1; -5; 0; 3)$.

1.33. Показать, что формулы:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + 5x'_2 + x'_4 + 2, \\ x_2 = -2x'_2 - x'_3 + 3x'_4 + 6, \\ x_3 = x'_3 + x'_4, \\ x_4 = x'_1 - x'_4 + 4 \end{cases} \quad (1)$$

можно рассматривать как формулы преобразования координат то-чек аффинного пространства A_4 при изменении реперов. Найти: а) формулы, выражающие новые координаты точек через старые;

б) новые координаты точек $M(1; 10; 0; 1), N(-9; 10; 4; 3), P(2; 9; -1; 5), Q(3; 12; -2; 3)$;

в) точки, соответствующие координаты которых в новом и старом реперах совпадают.

Указание. Чтобы доказать, что написанные формулы являются формулами преобразования координат, следует проверить равенство $\Delta \neq 0$, где Δ — определитель матрицы, составленной из коэффициентов при x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 .

Разрешив формулы преобразования координат (1) относительно x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 , можно найти формулы выражения новых координат через старые. Подставив в полученные формулы старые координаты точек M, N, P, Q , получим их новые координаты.

Новые координаты, например, точки $M(1; 10; 0; 1)$, можно найти, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = x'_1 + 5x'_2 + x'_4 + 2, \\ 10 = -2x'_2 - x'_3 + 3x'_4 + 6, \\ 0 = x'_3 + x'_4, \\ 1 = x'_1 - x'_4 + 4, \end{cases}$$

$$x'_1 = -2, \quad x'_2 = 0, \quad x'_3 = -1, \quad x'_4 = 1.$$

Точки, старые и новые координаты которых совпадают, являются решениями следующей системы уравнений:

$$\begin{array}{l} x_1 = x_1 + 5x_2 + x_4 + 2, \\ x_2 = -2x_2 - x_3 + 3x_4 + 6, \\ x_3 = x_3 + x_4, \\ x_4 = x_1 - x_4 + 4. \end{array}$$

1.34. Выяснить, какие из следующих формул можно рассматривать как формулы преобразования координат точек аффинного пространства A_4 :

$$a) \begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_2' - x_4' + 5, \\ x_2 = 2x_1' - x_2' + x_3' - 5x_4' - 6, \\ x_3 = 3x_1' + x_2' + x_3' - 6x_4' - 4, \\ x_4 = x_1' + 3x_2' - x_3' - 5x_4' + 1; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 = 2x'_1 + 1, \\ x_2 = 3x'_2 + 3, \\ x_3 = -4x'_3 - 1, \\ x_4 = x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + 2x_2' - 3x_3' - x_4' + 6, \\ x_2 &= 5x_2' - 3x_3' + 2x_4' - 7, \\ x_3 &= -3x_3' + 5x_4' + 2, \\ x_4 &= -6x_4'. \end{aligned}$$

1.35. Показать, что формулы

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x'_1 + 3x'_2 - x'_4 + 2x'_5 + 5, \\ x_2 &= x'_1 + x'_3 + 4x'_4 + 2x'_5 + 1, \\ x_3 &= 3x'_1 - 2x'_2 + 5x'_3 - x'_5 - 2, \\ x_4 &= x'_1 + x'_2 - 6x'_3 + x'_4 + 3, \\ x_5 &= 3x'_1 + x'_3 - 7x'_4 - 2x'_5 - 7 \end{aligned} \right\}$$

являются формулами преобразования координат точек аффинного пространства A_k при изменении реперов. Найти:

а) новые координаты точек $M(1; 3; -2; 1; 2)$, $N(2; 1; 1; 0; 0)$, $P(3; 2; 0; -1; -2)$, $Q(0; 2; 0; -3; 1)$;

б) точки, соответствующие координаты которых в новом и старом реперах совпадают;

в) формулы, выражающие новые координаты точек через их старые.

1.36. Написать формулы преобразования координат точек аффинного пространства A_4 , если известны старые координаты нового начала $O' (2; 1; 5; 4)$ и старые координаты новых базисных векторов $\vec{e}'_1 = (1; 2; 4; -1)$, $\vec{e}'_2 = (1; 1; 2; 3)$, $\vec{e}'_3 = (0; 0; 2; 2)$, $\vec{e}'_4 = (-3; -5; 0; 0)$.

Указание. Искомые формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \dots + a_{1n'}x_n' + \dot{x}_1, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \dots + a_{2n'}x_n' + \dot{x}_2, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \dots + a_{nn'}x_n' + \dot{x}_n, \end{aligned}$$

где $A = (a_{ij})$ транспонированная матрица перехода от старого базиса к новому (см. решение задачи 1.18), $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ — координаты произвольной точки в старом и новом реперах.

1.37. Написать формулы преобразования координат точек аффинного пространства A_6 , если известны старые координаты нового начала $O' (0'; 3; -1; 2; 5)$ и старые координаты новых базисных векторов $\vec{e}_1 = (1; 3; 0; 2; -1)$, $\vec{e}_2 = (2; 1; 0; 0)$, $\vec{e}_3 = (1; 1; 1; 0; 0)$, $\vec{e}_4 = (-1; -3; -1; 1; 0)$, $\vec{e}_5 = (2; 3; -1; -3; 1)$.

1.38. Написать формулы преобразования координат точек аффинного пространства A_n , если:

а) базисные векторы остаются прежними, а началом нового репера является точка O' (4; 3; -1; 1; 5);

б) начало нового репера остается прежним, а новый базис образуют векторы. $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 + 5\vec{e}_5$, $\vec{e}_4' = 2\vec{e}_4$, $\vec{e}_5' = 7\vec{e}_5$.

в) новым началом является точка $O'(-1; -2; -3; 0; 4)$ и новыми базисными векторами являются векторы $\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1$, $\vec{e}'_2 = 5\vec{e}_2$, $\vec{e}'_3 = 4\vec{e}_3$, $\vec{e}'_4 = -2\vec{e}_4$, $\vec{e}'_5 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 + \vec{e}_5$.

§ 3. Плоскости в аффинном пространстве

Литература: [3], § 4, 5.

1.39. На гиперплоскости $x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 - x_5 = 0$ в аффинном пространстве A_4 найти несколько точек, у которых:

а) $x_1 = 60$; б) $x_4 = 9$; в) $x_8' = x_4 = x_8 = 0$.

Указание. Подставьте известные значения координат в уравнение плоскости так, чтобы уравнение превратилось в верное числовое равенство.

1.40. На плоскости, заданной в аффинном пространстве параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 + 2t_1 - t_2 + 5t_3, \\ x_2 &= t_1 + 3t_2 - t_3, \\ x_3 &= 5 + 7t_1 - 4t_2 + t_3, \\ x_4 &= 6 - t_1 + 3t_2 + 5t_3, \\ x_5 &= 1 + 2t_1 - t_2 + t_3, \\ x_6 &= 0. \end{aligned}$$

найти несколько точек.

1.41. На плоскости, заданной в аффинном пространстве системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_6 - 2x_6 = 0, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 - x_6 + 12 = 0, \end{cases}$$

найти несколько точек.

1.42. На плоскости, заданной в аффинном пространстве A_6 системой уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 - 2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 + 2 = 0, \\ x_5 - x_6 = 0, \end{cases}$$

найти несколько точек, у которых: а) $x_6 = 2$, $x_3 = 1$;

б) $x_2 = 1$; в) $x_1 = x_3 = 0$.

1.43. Какие из точек $M_1(-1; 3; 2; 6)$, $M_2(2; 3; -1; 11)$, $M_3(3; 4; 0; 7)$, $M_4(0; 7; -1; 2)$, $M_5(1; 1; 6; 5)$ принадлежат гиперплоскости

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 6 = 0?$$

1.44. Какие из точек $M_1(-1; 1; 1)$, $M_2(5; 3; 0; -2)$, $M_3(0; 29; 7; 0)$, $M_4\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 2; 3\right)$ принадлежат плоскости, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 1 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 + 6 = 0? \end{cases}$$

1.45. Какие из точек $M_1(16; 0; 3; 4; -7)$, $M_2(3; 4; -1; -1; 2)$, $M_3(18; 4; -3; -7; -2)$, $M_4(3; -5; 6; -10; 1)$ принадлежат плоскости, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 6t_1 - t_2 + 3t_3, \\ x_2 = t_1 + 2t_2 - t_3, \\ x_3 = 2 - t_1 - 3t_2 + 2t_3, \\ x_4 = 4 - 2t_1 - 4t_2 + 5t_3, \\ x_5 = -6 + t_1 + 3t_2 - t_3? \end{cases}$$

1.46. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей:

- через точку $M(1; 3; 5; -2; -4; -6)$ пространства A_6 с направляющим вектором $\vec{u} = (0; 1; -1; 2; -2; 3)$;
- через точку $M(2; 1; 3; 0; -1)$ пространства A_6 с направляющим вектором $\vec{u} = (4; 1; 3; -2; 1)$;
- через точки $M_0(1; 3; 2; -4)$ и $M_1(3; -2; 4; 6)$ пространства A_4 ;
- через точки $M_0(4; 3; 2; 7; -1; 2)$, $M_1(6; 9; 2; 1; 3; 4)$ пространства A_6 .

Решение. а) Прямая с направляющим вектором $\vec{u}$, проходящая через точку M , состоит из тех и только тех точек N , для ко-

торых $\vec{MN} = t\vec{u}$, где $-\infty < t < \infty$. Если координаты точки N обозначить $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)$, то написанное векторное равенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 1 = t \cdot 0, \\ x_2 - 3 = t \cdot 1, \\ x_3 - 5 = t \cdot (-1), \\ x_4 + 2 = t \cdot 2, \\ x_5 + 4 = t \cdot (-2), \\ x_6 + 6 = t \cdot 3. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим параметрические уравнения искомой прямой:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 3 + t, \\ x_3 = 5 - t, \\ x_4 = -2 + 2t, \\ x_5 = -4 - 2t, \\ x_6 = -6 + 3t. \end{cases}$$

Указание. в) Направляющим вектором искомой прямой является M_0M_1 , координаты которого равны разностям соответствующих координат точек M_1 и M_0 .

1.47. Написать параметрические уравнения осей координат пространства A_6 относительно аффинного репера

$$R = (0; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \vec{e}_4; \vec{e}_5).$$

1.48. Сформулировать условие принадлежности точек $M_1, M_2, \dots, M_n$ n -мерного аффинного пространства одной прямой.

1.49. Выяснить, принадлежат ли одной прямой следующие точки:

- $M_1(1; 3; -5; 2)$, $M_2(4; -1; 3; 12)$, $M_3(-5; 11; -21; -18)$ четырехмерного пространства A_4 ;
- $M_1(2; -1; 3; 1; 5)$, $M_2(4; 1; 3; -2; 4)$, $M_3(0; -3; 3; 4; 6)$, $M_4(0; -3; 3; 1; 5)$ пятимерного пространства A_5 ;
- $M_1(1; 3; -2; 1; 5)$, $M_2(3; 1; 1; -4; 2)$, $M_3(4; 7; 6; -5; 1)$ пятимерного пространства A_5 .

1.50. В пространстве A_6 задана плоскость, проходящая:

- через точку $M_0(-2; -5; 0; -1; 3)$ с направляющим подпространством, натянутым на векторы $\vec{u}_1(4; 3; -1; 5; 2)$ и $\vec{u}_2 = (0; -2; 3; -4; 7)$;
- через точку $M_0(1; -2; 5; 1; 2)$ с направляющим подпространством, натянутым на векторы $\vec{u}_1(2; -1; 1; 0; 0)$, $\vec{u}_2 = (3; 0; 1; -1; -3)$, $\vec{u}_3 = (1; 2; -2; 3; -5)$;
- через точку $M_0(-6; 7; 10; 11; -2)$ с направляющим подпространством, натянутым на векторы $\vec{u}_1 = (1; 3; 5; 7; 9)$, $\vec{u}_2 = (-4; 2; -1; 3; 0)$, $\vec{u}_3 = (3; -3; 1; 0; 0)$, $\vec{u}_4 = (1; 2; 0; 0; 0)$.

Составить параметрические уравнения каждой из плоскостей. Решить в. а) Плоскость, проходящая через точку M_1 с направляющим подпространством, натянутым на векторы u_1 и u_2 , состоит из тех и только тех точек $M(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$, для которых $\vec{M_1M} = t_1 u_1 + t_2 u_2$, где $-\infty < t_1, t_2 < \infty$. Указанное векторное равенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{array}{r} +2 = 4t_1 + 0 \cdot t_2, \\ x_2 + 5 = 3t_1 - 2t_2, \\ x_3 - 0 = -t_1 + 3t_2, \\ x_4 + 1 = 5t_1 - 4t_2, \\ x_5 - 3 = 2t_1 + 7t_2. \end{array}$$

Из этой системы находим параметрические уравнения искомой плоскости:

$$\begin{cases} x_1 = -2 + 4t_1, \\ x_2 = -5 + 3t_1 - 2t_2, \\ x_3 = -t_1 + 3t_2, \\ x_4 = -1 + 5t_1 - 4t_2, \\ x_5 = 3 + 2t_1 + 7t_2. \end{cases}$$

1.51. Если в n -мерном аффинном пространстве A_n задан координатный аффинный репер $R(0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, то k -мерной координатной плоскостью называется плоскость, проходящая через начало координат с направляющим подпространством, натянутым на k различных базисных векторов $\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_k}$, $1 \leq k \leq n - 1$. Составить параметрические уравнения произвольной k -мерной координатной плоскости в A_n . Найти общее число всех координатных плоскостей различных размерностей.

1.52. В пространстве A_6 задана плоскость, натянутая на точки:

а) $M_1(0; 2; -3; 4; 1; 6)$, $M_2(5; 4; 3; 0; -2; 1)$, $M_3(1; 3; 0; 0; -1; 2)$;

б) $M_1(0; -3; -5; 4; 6; 1)$, $M_2(2; 1; -1; 1; 0; 3)$, $M_3(4; 3; 1; 5; 6; 2)$, $M_4(2; 2; -5; 6; 1; 0)$;

в) $E_1(1; 0; 0; 0; 0; 0)$, $E_2(0; 1; 0; 0; 0; 0)$, $E_3(0; 0; 1; 0; 0; 0)$, $E_4(0; 0; 0; 1; 0; 0)$, $E_5(0; 0; 0; 0; 1; 0)$, $E_6(0; 0; 0; 0; 0; 1)$.

Составить параметрические уравнения каждой из плоскостей (наименьших размерностей).

..., M_k , то направляющее подпространство этой плоскости натянуто на векторы $M_0M_1, M_0M_2, \dots, M_0M_k$.

1.53. Составить систему уравнений плоскости пространства A_4 , если известно, что эта плоскость:

а) проходит через точку $M_0(4; 2; -3; 1)$ и имеет направляющий вектор $\vec{u} = (2; -7; 6; 5)$;

б) проходит через точку $M_0(3; -5; 1; -2)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s} = (2, -1, 0, 0)$.

16

шее подпространство, натянутое на векторы $\vec{u}_1 = (2; -1; 0; 3)$ и $\vec{u}_3 = (0; -2; 1; 5)$;

в) проходит через точку $M_0(-1; 0; -2; -6)$ и имеет направляющее подпространство, натянутое на векторы $u_1 = (4; 3; -1; 1)$, $u_2 = (0; 3; -5; 6)$, $u_3 = (4; 0; -2; 5)$.

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 2t_1 + 0 \cdot t_2, \\ x_2 = -5 - t_1 - 2t_2, \\ x_3 = 1 + 0 \cdot t_1 + t_2, \\ x_4 = -2 + 3t_1 + 5t_2. \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{x_1 + 3}{2}, t_2 = x_3 - 1.$$

Теперь, воспользовавшись какими-либо двумя уравнениями системы, например первым и третьим, нужно выразить параметры ζ_1 и ζ_2 через соответствующие координаты:

Подставив полученные выражения во второе и четвертое уравнения, найдем искомую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_4 = -3, \\ 3x_1 + 10x_3 - 2x_4 = 23. \end{cases}$$

1.54. Составить систему уравнений плоскости пространства A_6 , если известно, что она натянута на точки:

- a) $M_1(3; -4; 1; 1; 1)$, $M_2(-3; 5; 6; 0; 0)$;
 6) $N_1(0; 0; 1; 1; 0)$, $N_2(0; 0; 0; 1)$, $N_3(7; 3; 1; 2; 0)$;
 б) $K_1(1; 1; 1; 1; 1)$, $K_2(4; 13; 1; 1; 5)$, $K_3(-3; -5; -7; 1; 10)$.
 $K_4(5; 7; 0; 0; 6)$;
 л) $L_1(1; 3; 4; 1; -1)$, $L_2(2; 3; -1; 6; 8)$, $L_3(1; 2; -3; -4; 0)$,
 $L_4(3; 5; 7; 10; 5)$.

1.55. В пространстве A_4 гиперплоскость задана уравнением:

$$x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 12x_4 + 5 = 0.$$

Составить ее параметрические уравнения.

Решение. Пусть имеем систему r уравнений с n неизвестными переменными $n \geq r$ ранга r :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + \dots + a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases}$$

Для определенности будем считать, что минор

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{array} \right| \neq 0.$$

Задав произвольно значения $x_{r+1}, \dots, x_n$, получим систему из r уравнений с r неизвестными, определитель которой отличен от нуля. По теореме Крамера такая система имеет единственное решение. Поэтому переменные $x_{r+1}, \dots, x_n$ можно принять за параметры общего решения исходной системы. В рассматриваемом примере за параметры можно принять переменные x_2, x_3, x_4 , т. е. можно положить

$$x_2 = t_1, x_3 = t_2, x_4 = t_3, \text{ тогда } x_1 = 3t_1 - 6t_2 + 12t_3 - 5.$$

Таким образом, заданная плоскость имеет следующие параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = -5 + 3t_1 - 6t_2 + 12t_3, \\ x_2 = t_1, \\ x_3 = t_2, \\ x_4 = t_3. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. Полезно иметь в виду, что полученный результат не является единственно возможным и зависит, в частности, от переменных, выбираемых в качестве параметров. Это замечание остается в силе для последующих аналогичных задач.

1.56. В пространстве A_7 гиперплоскость задана системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_6 - x_7 = 0, \\ x_1 + x_6 = 2. \end{cases}$$

Составить параметрические уравнения этой плоскости.

Р е ш е н и е. В соответствии со сказанным в решении задачи 1.55 составим матрицу данной системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее ранг равен 4, так как определитель, составленный из элементов первого, третьего, пятого и шестого столбцов, отличен от нуля. Поэтому за параметры можно принять переменные $x_2 = t_1, x_4 = t_2, x_7 = t_3$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2t_1, \\ x_3 = 1 + t_2, \\ x_5 + x_6 = t_3, \\ x_1 + x_6 = 2, \end{cases}$$

получим выражения для переменных x_1, x_3, x_5, x_6 через параметры t_1, t_2, t_3 . Окончательно параметрические уравнения данной плоскости

скости можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2t_1, \\ x_2 = t_1, \\ x_3 = 1 + t_2, \\ x_4 = t_2, \\ x_5 = 2 - 2t_1 + t_3, \\ x_6 = -2 + 2t_1, \\ x_7 = t_3. \end{cases}$$

1.57. Составить параметрические уравнения плоскости пространства A_5 , заданной системой уравнений:

$$\text{а) } x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 - 15x_5 + 6 = 0;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 16 = 0, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + 3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - 3x_3 + 6x_5 - 1 = 0, \\ 2x_2 + x_4 - 4x_5 - 12 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 16x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_5 - 12 = 0, \\ x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

1.58. В пространстве A_7 плоскость задана системой уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_3 - x_6 = 0, \\ x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ x_6 + x_7 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 1, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_6 - x_7 = 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_3 - x_4 = 1, \\ x_5 + x_6 + x_7 = 0, \\ x_1 + x_6 = 2; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 + 3x_5 = 6, \\ x_5 + 2x_7 = 0, \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 8. \end{cases}$$

Составить параметрические уравнения каждой из плоскостей.

1.59. Пусть L'_k и L'_m k -мерная и m -мерная плоскости n -мерного аффинного пространства A_n с направляющими подпространствами V'_k и V'_m соответственно. Доказать, что если $V'_k \cap V'_m = \vec{0}$, то существует единственная $(k+m)$ -мерная плоскость L , содержащая L'_k и параллельная L'_m .

З а м е ч а н и е. При $k=0, m=1, n=2$ сформулированное утверждение совпадает с утверждением, принятым в средней школе в качестве аксиомы о параллельных.

Р е ш е н и е. Пусть M_0 — произвольная точка плоскости L'_k и пусть $u_1, u_2, \dots, u_k$ и $v_1, v_2, \dots, v_m$ — базисы направляющих подпространств V'_k и V'_m соответственно. Так как $V'_k \cap V'_m = \vec{0}$, то система векторов $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m$ линейно независима и по-

этому является базисом подпространства V_{k+m} , натянутого на эту систему. Плоскость L_{k+m} , проходящая через точку M_0 с направляющим подпространством V_{k+m} , является искомой плоскостью. Так как направляющее подпространство плоскости L_{k+m} определено однозначно условиями задачи, то единственность плоскости L_{k+m} очевидна.

1.60. Составить параметрические уравнения четырехмерной плоскости L_4 пространства A_6 , содержащей плоскость

$$\begin{cases} x_1 = 2t_1 - 3t_2, \\ x_2 = 5 - t_1 + 2t_2, \\ x_3 = 4 + 3t_1 + 5t_2, \\ x_4 = -2 + t_1 - 15t_2, \\ x_5 = -1 + 4t_1 - 7t_2, \\ x_6 = -3 + 5t_1 - 6t_2 \end{cases}$$

и параллельной плоскости

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_6 = 0, \\ x_4 - x_5 - 1 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4 = 0, \\ x_4 - 2x_5 - 10 = 0. \end{cases}$$

Решение. В силу 1.59, надо найти какую-либо точку первой плоскости и базисы направляющих подпространств обеих плоскостей. Полагая $t_1 = t_2 = 0$, получим $M_0(0; 5; 4; -2; -1; -3)$. Координаты векторов u_1 и u_2 — это коэффициенты при параметрах t_1 и t_2 , т. е. $u_1 = (2; -1; 3; 1; 4; 5)$ и $u_2 = (-3; 2; 5; -15; -7; -6)$. Для нахождения базиса направляющего подпространства второй плоскости перейдем к параметрическим уравнениям этой плоскости (см. решение задачи 1.67):

$$\begin{cases} x_1 = -4 - t_1 + 3t_2, \\ x_2 = t_1, \\ x_3 = t_2, \\ x_4 = -8, \\ x_5 = -9, \\ x_6 = -4 - 4t_1 + 8t_2. \end{cases}$$

Отсюда, как и выше, $\vec{v}_1 = (-1; 1; 0; 0; 0; -4)$, $\vec{v}_2 = (3; 0; 1; 0; 0; 8)$. Поэтому параметрические уравнения искомой плоскости таковы:

$$\begin{cases} x_1 = 2t_1 - 3t_2 - t_3 + 3t_4, \\ x_2 = 5 - t_1 + 2t_2 + t_3, \\ x_3 = 4 + 3t_1 + 5t_2 + t_4, \\ x_4 = -2 + t_1 - 15t_2, \\ x_5 = -1 + 4t_1 - 7t_2, \\ x_6 = -3 + 5t_1 - 6t_2 - 4t_3 + 8t_4. \end{cases}$$

1.61. Доказать, что плоскость наименьшей размерности, содержащая k -мерную и m -мерную плоскости L_k и L_m n -мерного аффинного пространства, имеет размерность r , для которой $\max(k, m) \leq r \leq k + m + 1$. Указать способ построения базиса направляющего подпространства этой плоскости.

Указание. Пусть $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ и $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ — базисы направляющих подпространств плоскостей L_k и L_m . Кроме того, $M \in L_k$, $N \in L_m$. Пусть $\vec{V}$ — подпространство, натянутое на векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{MN}$, тогда плоскость L_r , проходящая через точку M с направляющим подпространством $\vec{V}$, содержит L_k и L_m и имеет размерность $r \leq k + m + 1$.

1.62. Найти базис направляющего подпространства плоскости наименьшей размерности и пространства A_6 , если известно, что эта плоскость содержит плоскости:

$$\begin{cases} x_1 = -3 + t_1 - t_2, \\ x_2 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x_3 = -4 + 3t_1 - 5t_2, \\ x_4 = 5 - 2t_1, \\ x_5 = -1 - 3t_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = t_1 + 2t_2, \\ x_2 = -5 + 4t_1 - 9t_2 + 6t_3, \\ x_3 = -1 + 5t_2 + 3t_3, \\ x_4 = -6 + t_1 - t_2 + t_3, \\ x_5 = -2t_1 + t_2 - 2t_3. \end{cases}$$

1.63. Составить параметрические уравнения плоскости наименьшей размерности пространства A_6 , если известно, что искомая плоскость содержит плоскости:

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 2t_1 - 3t_2 - t_3, \\ x_2 = 1 + t_1 - 4t_2, \\ x_3 = -5 + t_1 + 2t_2, \\ x_4 = -2 + t_1, \\ x_5 = -1 - t_1 + 2t_2 - 3t_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = -4 + t_1 + 3t_2 + 3t_3, \\ x_2 = 1 + 2t_1 + 5t_2, \\ x_3 = 3 + 4t_1 - 2t_2 + t_3, \\ x_4 = -1 + 2t_1 + t_3, \\ x_5 = -2 - 2t_2 + 2t_3. \end{cases}$$

Решение. Базис направляющего подпространства первой плоскости состоит из векторов $\vec{u}_1 = (2; 1; 1; 1; -1)$, $\vec{u}_2 = (-3; 0; 2; 0; 2)$, $\vec{u}_3 = (-1; -4; 0; 0; -3)$, а базис направляющего подпространства второй плоскости — из векторов $\vec{v}_1 = (1; 2; 4; 2; 0)$, $\vec{v}_2 = (3; 0; -2; 0; -2)$, $\vec{v}_3 = (3; 5; 1; 1; 2)$. Выберем точку $M(-3; 1; -5; -2; -1)$ на первой плоскости и точку $N(-4; 1; 3; -1; -2)$ на второй плоскости. Найдем максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{MN}$. Такой подсистемой является, например, система векторов:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= (2; 1; 1; 1; -1), \vec{u}_2 = (-3; 0; 2; 0; 2), \\ \vec{u}_3 &= (-1; -4; 0; 0; -3), \vec{v}_1 = (1; 2; 4; 2; 0). \end{aligned}$$

Рассматривая эту подсистему как базис направляющего подпространства искомой плоскости, можно написать ее параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 2t_1 - 3t_2 - t_3 + t_4, \\ x_2 = 1 + t_1 - 4t_3 + 2t_4, \\ x_3 = -5 + t_1 + 2t_2 + 4t_4, \\ x_4 = -2 + t_1 + 2t_2 + 2t_4, \\ x_5 = -1 - t_1 + 2t_2 - 3t_3. \end{cases}$$

1.64. Составить параметрические уравнения и систему уравнений трехмерной плоскости L_3 пространства A_5 , если известно, что искомая плоскость проходит через точки $M_1(1; -1; 2; -3; 0)$, $M_2(3; -1; 0; -1; 0)$ и прямую

$$\begin{cases} x_1 = 3t, \\ x_2 = 5 - t, \\ x_3 = 4 + 2t, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = -5t. \end{cases}$$

1.65. Найти базис пересечения направляющих подпространств V и V' плоскостей L и L' пространства A_6 , если известно, что эти плоскости заданы параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 = -1 + t_1 + 2t_2 + t_3, \\ x_2 = 2 + 2t_1 + 3t_2 + 2t_3, \\ x_3 = 1 + t_1 + t_2 + 2t_3, \\ x_4 = 3 - 2t_1 - 3t_2, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 + t_3, \\ x_2 = 4 + t_1 + 3t_3, \\ x_3 = 3 + t_1 + t_2, \\ x_4 = t_1 - t_2 - 4t_3. \end{cases}$$

Решение. Выберем базисы $\vec{u}_1 = (1; 2; 1; -2)$, $\vec{u}_2 = (2; 3; 1; 0)$, $\vec{u}_3 = (1; 2; 2; -3)$ и $\vec{v}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{v}_2 = (1; 0; 1; -1)$, $\vec{v}_3 = (1; 3; 0; -4)$. Каждый вектор $x \in V \cap V'$ можно разложить как по базису пространства V , так и по базису пространства V' :

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \mu_3 \vec{v}_3.$$

Это векторное равенство равносильно следующей системе однородных уравнений (относительно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$):

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = \mu_1 + 3\mu_3, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = \mu_1 + \mu_2, \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_3 = \mu_1 - \mu_2 - 4\mu_3. \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений:

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 0, \mu_3 = 0, \lambda'_1 = 5, \lambda'_2 = -1, \lambda'_3 = -2, \mu'_1 = 0, \mu'_2 = 0, \mu'_3 = 1.$$

Положим:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 + \mu_3 \vec{v}_3 = \vec{v}_1; \\ \vec{x}' &= \mu'_1 \vec{v}_1 + \mu'_2 \vec{v}_2 + \mu'_3 \vec{v}_3 = \vec{v}_3. \end{aligned}$$

Векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_3$ образуют базис пересечения.

Отметим, что эту же задачу можно решить другим способом. Из курса алгебры известно, что каждое линейное подпространство можно задать однородной системой линейных уравнений. Найдя соответствующие системы для подпространств V и V' и объединив их в общую систему, мы получим систему уравнений для $V \cap V'$. Фундаментальная система решений этой системы уравнений дает базис пространства $V \cap V'$.

1.66. Найти базис пересечения направляющих подпространств V и V' плоскостей L и L' пространства A_6 , если известно, что эти плоскости заданы параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + 3t_2, \\ x_2 = -2 - 3t_1 - t_2, \\ x_3 = -3 + 4t_1 + 2t_2 - 2t_3, \\ x_4 = 4 + 2t_1 + 4t_2 - t_3, \\ x_5 = 1 + 5t_1 - t_2 + t_3, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = 4 + 3t_1 + t_2, \\ x_2 = 2 - t_1 + 3t_2, \\ x_3 = -3 + 2t_2, \\ x_4 = -5 + 3t_1 + 4t_2, \\ x_5 = -1 - 4t_2. \end{cases}$$

1.67. Составить параметрические уравнения пересечения плоскостей L и L' пространства A_4 , если известно, что эти плоскости: а) заданы параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 = -2 + t_1, \\ x_2 = 5 + t_1 + t_2, \\ x_3 = -1 + t_2 + t_3, \\ x_4 = -3 + t_3, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = t_1 + t_2, \\ x_2 = 3 + 2t_2 + 2t_3, \\ x_3 = 1 + t_1 + t_2 + t_3, \\ x_4 = -1 + t_2 + 2t_3, \end{cases}$$

б) заданы системами уравнений:

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1; \end{cases}$$

в) заданы системами уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$$

г) заданы системами уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Указание. Найдите базис пересечения направляющих подпространств плоскостей L и L' и их общую точку.

1.68. Составить параметрические уравнения пересечения плоскостей L и L' пространства A_6 , если известно, что эти плоскости заданы системами уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

1.69. Доказать, что размерность непустого пересечения двух плоскостей n -мерного аффинного пространства равна размерности пересечения направляющих подпространств этих плоскостей. В частности, две плоскости имеют единственную общую точку тогда и только тогда, когда их пересечение пусто и размерность пересечения направляющих подпространств равна нулю.

1.70. Плоскости L и L' n -мерного аффинного пространства называются параллельными, если направляющее подпространство одной из них содержится в направляющем подпространстве другой. Доказать, что для параллельных плоскостей L и L' либо $L \subset L'$, либо $L' \subset L$, либо $L \cap L' = \emptyset$.

1.71. Плоскости L и L' n -мерного аффинного пространства называются скрещивающимися, если их пересечение пусто и пересечение направляющих подпространств содержит только нулевой вектор. Доказать, что для скрещивающихся плоскостей сумма их размерностей меньше размерности пространства.

1.72. Пусть L_k k -мерная плоскость n -мерного аффинного пространства A_n , $k < n - 1$. Доказать существование такой плоскости L_m , что L_k и L_m скрещиваются. Какой максимальной размерности можно выбрать плоскость L_m ?

Указание. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ — базис направляющего подпространства плоскости L_k . Выберите точки $M_1 \in L_k$ и $M_2 \in L_m$ и выберите вектор $\vec{u}$, не являющийся линейной комбинацией векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k, M_1M_2$. В качестве L_m можно взять, например, прямую, проходящую через точку M_2 с направляющим вектором $\vec{u}$.

При исследовании взаимного расположения двух плоскостей L_k и L_m с направляющими подпространствами V_k и V_m размерностей k и m соответственно в n -мерном аффинном пространстве удобно пользоваться следующей таблицей, в которой $L = L_k \cap L_m$, $V = V_k \cap V_m$.

$\dim V$	$L = \emptyset$	$L \neq \emptyset$
0	Плоскости скрещиваются	Плоскости имеют одну общую точку
$0 < r < \min(k, m)$	Плоскости не параллельны	Плоскости пересекаются по r -мерной плоскости
$\min(k, m)$	Плоскости параллельны	Плоскость меньшей размерности принадлежит плоскости большей размерности (параллельны и пересекаются)

1.73. Исследовать взаимное расположение двух плоскостей в пространстве A_4 , если известно, что эти плоскости заданы следующими системами уравнений:

- а) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 = 1; \end{cases}$
- б) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 = 1; \end{cases}$
- в) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7; \end{cases}$
- г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$
- д) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$
- е) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7; \end{cases}$
- ж) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -2; \end{cases}$
- з) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_3 - 2x_4 - 2 = 0, \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -8, \\ 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

Указание. Для решения задач типа а) — е) в n -мерном аффинном пространстве A_n нужно исследовать систему уравнений, получающуюся объединением систем уравнений заданных плоскостей. Исследование проводится путем сравнения рангов основной и расширенной матриц полученной таблицы, после чего можно воспользоваться следующей таблицей, в которой r — ранг основной матрицы полученной системы, r' — ранг расширенной матрицы полученной системы, r_1 и r_2 — ранги основных матриц заданных систем уравнений.

$r = n, r' = n + 1$	Плоскости скрещиваются
$r = r' = n$	Плоскости пересекаются в единственной точке
$\max(r_1, r_2) < r < n, r' > r$	Плоскости не параллельны
$\max(r_1, r_2) < r = r' < n$	Плоскости пересекаются по $(n - r)$ -мерной плоскости
$r' > r = \max(r_1, r_2)$	Плоскости параллельны и не пересекаются
$\max(r_1, r_2) = r = r' < n$	Плоскость меньшей размерности принадлежит плоскости большей размерности (параллельны и пересекаются)

1.74. Исследовать взаимное расположение двух плоскостей в пространстве A_5 :

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 - t_2, \\ x_2 = t_2 + t_3, \\ x_3 = 3 - t_1 - t_2 - t_3, \\ x_4 = 5 + t_1 + 2t_2 + t_3, \\ x_5 = 1 + t_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 - 3x_5 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 - 15 = 0. \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x_1 = 2 - t_1 + t_2, \\ x_2 = 2 + 3t_1 - t_3, \\ x_3 = -1 + t_2, \\ x_4 = 3 - t_1 + 2t_2, \\ x_5 = -4 - 3t_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 - 3x_5 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 - 15 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1.75. Исследовать взаимное расположение двух плоскостей в пространстве A_6 , если известно, что эти плоскости заданы следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} x_1 = -3 + 5t_1 - 3t_2 + t_3, \\ x_2 = 4t_1 - 2t_2 - 5t_3, \\ x_3 = 1 + t_1 + 4t_2 + 3t_3, \\ x_4 = -4 + 2t_1 - 2t_2 + 3t_3, \\ x_5 = -4 - 5t_1 - 8t_2 + 9t_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = 2 + 9t_1 + 6t_2 - t_3, \\ x_2 = 3 + 4t_1 - 2t_2 + 8t_3, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 0; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x_1 = 2 + t_1 - t_2 + 2t_3, \\ x_2 = -1 + 2t_1 + t_2 - t_3, \\ x_3 = 3 - t_2 + 3t_3, \\ x_4 = 1 + 3t_1 - t_3, \\ x_5 = 5 + 4t_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = -1 - t_2, \\ x_2 = 3 - 3t_1 + 2t_2, \\ x_3 = 3 + t_1 - 2t_2, \\ x_4 = 1 - 3t_1 + 2t_2, \\ x_5 = -2 - 4t_1 + 2t_2; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x_1 = -2 + t_1 - 3t_2, \\ x_2 = -5 + 2t_1 - t_2, \\ x_3 = 3 + 3t_1 + t_2, \\ x_4 = 1 + t_1 - 4t_2, \\ x_5 = 2 + 5t_1 - 3t_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = -1 - 2t_1, \\ x_2 = -3 - 3t_1, \\ x_3 = 6 + 3t_2, \\ x_4 = 2 - t_2, \\ x_5 = 7 + t_1 + t_2; \end{cases} \\ \text{г) } \begin{cases} x_1 = 2 + t_1 - t_2 - t_3 + 2t_4, \\ x_2 = -1 + 2t_1 - t_2 + t_3 + 3t_4, \\ x_3 = -3 + 3t_1 - 2t_2 - 3t_3 + t_4, \\ x_4 = 5 + t_1 - t_2 + 3t_3 - 2t_4, \\ x_5 = -2 - 5t_1 + t_4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = 1 - 3t_2 + t_3, \\ x_2 = -2 + t_1 - 5t_2, \\ x_3 = -5 + t_1 - 4t_2, \\ x_4 = 4 + t_2 - 2t_3, \\ x_5 = -2 - 5t_1 + 4t_2. \end{cases} \end{aligned}$$

1.76. Исследовать взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве A_4 , если известно, что прямая с направляющим вектором $\vec{u} = (-3; 2; 1; 6)$ проходит через точку $M(1; 0; -3; 2)$, а плоскость с направляющим подпространством, натянутым на векторы $\vec{v}_1 = (1; 3; -2; 0)$, $\vec{v}_2 = (3; -4; 0; 1)$, $\vec{v}_3 = (2; 0; 0; 0)$, — через точку $N(-3; 1; 4; 2)$.

1.77. Исследовать взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве A_6 , если известно, что прямая с направляющим вектором $\vec{u} = (0; 5; -1; 3; 2)$ проходит через точку $M(-1; 4; 2; -3)$, а плоскость с направляющим подпространством, натянутым на векторы $\vec{v}_1 = (1; 0; 3; 2; -1)$, $\vec{v}_2 = (0; 3; 2; -1; 0)$, $\vec{v}_3 = (3; -2; 4; 0; 0)$, — через точку $N(1; -2; 4; -3; 0)$.

1.78. В пространстве A_6 одна из плоскостей, направляющее подпространство которой натянуто на векторы $\vec{u}_1 = (4; -6; 8; 1; 2)$ и $\vec{u}_2 = (1; 2; -1; 0; 0)$, проходит через точку $M(-3; 2; -1; 4; 5)$; другая, направляющее подпространство которой натянуто на векторы $\vec{v}_1 = (-3; 4; -5; -1; -3)$, $\vec{v}_2 = (1; -2; 3; 0; -1)$, $\vec{v}_3 = (-5; 3; -2; -1; 0)$, — через точку $N(-1; 0; 2; -3; 1)$. Исследовать взаимное расположение этих плоскостей.

1.79. В пространстве A_4 одна из плоскостей, направляющее подпространство которой содержит вектор $\vec{u} = (4; -6; 8; 1)$, проходит через точки $M_1(4; 8; -3; 1)$, $M_2(0; 2; 5; 4)$; другая, направляющее подпространство которой натянуто на векторы $\vec{v}_1 = (-4; 2; -5; 3)$, $\vec{v}_2 = (0; -4; 3; -2)$, — через точку $N(-3; 4; 0; 1)$. Исследовать взаимное расположение этих плоскостей.

1.80. В пространстве A_6 одна из плоскостей задана точками $M_1(1; -7; 2; 0)$, $M_2(3; 1; 0; -2; -1)$, $M_3(-4; 5; 0; 2; -1)$, а другая — точками $N_1(2; -1; 3; 4; -1)$, $N_2(-3; 2; 1; -2; -1)$, $N_3(-2; -5; 1; 0; -1)$, $N_4(1; -3; 4; 1; 5)$. Исследовать взаимное расположение этих плоскостей.

1.81. В пространстве A_6 одна из плоскостей задана точкой $M(1; -3; 2; 0; -1; 0)$ и направляющим подпространством, натянутым на векторы $\vec{u}_1 = (2; -2; 1; 3; 1; 0)$, $\vec{u}_2 = (-3; 1; -2; -5; -2; 1)$, $\vec{u}_3 = (2; -1; 0; -2; 0; -3)$, а другая — точками $N_1(4; -5; 7; 8; 0; 1)$, $N_2(0; -3; 0; 5; 1; 4)$, $N_3(0; -2; -1; 0; 0; 0)$. Исследовать взаимное расположение этих плоскостей.

1.82. В пространстве A_6 одна из плоскостей задана системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 - 8 = 0, \\ x_2 + 4x_3 - x_4 + 10 = 0, \\ x_3 - 4x_4 + 2x_5 - 1 = 0, \end{cases}$$

другая — своими точками $Q_1(-3; 2; 0; 0; 0; 0)$, $Q_2(1; 0; -4; -1; 0; -3)$, $Q_3(0; -1; -1; 1; 9)$ и $Q_4(0; 0; 0; -3; 2; 1)$. Исследовать взаимное расположение этих плоскостей.

§ 4. Аффинные преобразования аффинных пространств

Литература: [3], § 6, 7.

1.83. Выяснить, какие из следующих формул задают аффинное преобразование аффинного пространства A_3 :

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 1, \\ x'_2 = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3, \\ x'_3 = 10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 2; \end{cases} \quad \text{б)} \quad \begin{cases} x'_1 = 4x_1 + 3x_2 - 2x_3, \\ x'_2 = 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 6, \\ x'_3 = -3x_1 - 5x_2 + x_3 + 7; \end{cases} \\ \text{в)} \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2, \\ x'_2 = 2x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 1, \\ x'_3 = -3x_1 + x_2 - 6x_3 + 3; \end{cases} \quad \text{г)} \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + 3x_2 - x_3 - 1, \\ x'_2 = x_2 - x_3 + 4, \\ x'_3 = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Указание. Если формулы преобразования линейны относительно x_1, x_2, x_3 , то для ответа на вопрос задачи следует воспользоваться теоремой 2 § 7.4 [3], в силу которой заданные формулы определяют аффинные преобразования, если определитель матрицы, составленной из коэффициентов при x_1, x_2, x_3 , отличен от нуля. Если же формулы нелинейны относительно x_1, x_2, x_3 , то они не задают аффинные преобразования, в чем можно убедиться, показав, что ассоциированное отображение векторного пространства нелинейно.

1.84. Выяснить, какие из следующих формул задают аффинное преобразование аффинного пространства A_4 :

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 1, \\ x'_2 = x_1 + x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 3, \\ x'_3 = x_2 + x_4 - 6, \\ x'_4 = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 1; \end{cases} \quad \text{б)} \quad \begin{cases} x'_1 = -x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3, \\ x'_2 = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 1, \\ x'_3 = x_1 - x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 5, \\ x'_4 = 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - 1; \end{cases} \\ \text{в)} \quad \begin{cases} x'_1 = -x_1^2 + x_2 - x_3 - x_4 + 1, \\ x'_2 = 2x_1 + x_2 - x_3, \\ x'_3 = -x_1 + 3x_2 - x_4, \\ x'_4 = 4x_4 + 5; \end{cases} \quad \text{г)} \quad \begin{cases} x'_1 = -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 10, \\ x'_2 = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 - 1, \\ x'_3 = 6x_4 + 5, \\ x'_4 = x_1 + 4x_2 - 7. \end{cases} \end{aligned}$$

1.85. Написать формулы аффинного преобразования пространства A_3 , если известны формулы ассоциированного линейного преобразования векторного пространства V_3 :

$$\begin{cases} u'_1 = 2u_1 - 3u_2 + 5u_3, \\ u'_2 = -u_1 + 3u_2 + 4u_3, \\ u'_3 = -2u_1 + 4u_2 - u_3 \end{cases}$$

и если:

- а) начало репера переходит в точку $O' (1; -1; 2)$;
- б) точка $M (3; 2; 1)$ переходит в начало репера;
- в) точка $M (-2; 1; 4)$ переходит в точку $M' (6; 3; 2)$.

Указание. Воспользуйтесь теоремой 1 § 7.4 [3].

1.86. Написать формулы аффинного преобразования пространства A_4 , если известны формулы ассоциированного линейного преобразования векторного пространства V_4 :

$$\begin{cases} u'_1 = 4u_1 - 2u_2 + 3u_3 - u_4, \\ u'_2 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \\ u'_3 = u_2 - u_3 + 2u_4, \\ u'_4 = 3u_2 - 5u_4 \end{cases}$$

и если:

- а) начало репера переходит в точку $O' (-3; 2; 3)$;
- б) точка $M (5; 7; 2; 1)$ переходит в начало репера;
- в) точка $M (4; 8; 6; 1)$ переходит в точку $M' (12; 4; 6; 2)$.

1.87. Написать формулы аффинного преобразования аффинного пространства A_3 , если ассоциированное линейное преобразование векторного пространства V_3 переводит базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в векторы $\vec{e}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_3 = 4\vec{e}_1$ соответственно и если:

- а) начало репера остается неподвижным;
- б) точка $M (3; 4; -2)$ остается неподвижной;
- в) точка $M (-5; 8; 10)$ переходит в точку $M' (1; 2; 0)$.

Указание. Так как векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеют координаты $\vec{e}'_1 = (1; 1; 1), \vec{e}'_2 = (2; -1; 0), \vec{e}'_3 = (4; 0; 0)$, то формулы искомого аффинного преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_1, \\ x'_2 = x_1 - x_2 + x_2, \\ x'_3 = x_1 + x_3 \end{cases}$$

формулы (1) и (2) § 7.4 [3].

1.88. Написать формулы аффинного преобразования аффинного пространства A_4 , если ассоциированное линейное преобразование векторного пространства V_4 переводит базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ в векторы $\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4, \vec{e}'_2 = 3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3, \vec{e}'_3 = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2, \vec{e}'_4 = 3\vec{e}_4$ соответственно и если:

- а) начало репера остается неподвижным;
- б) точка $M (4; -1; 3; 2)$ остается неподвижной;
- в) точка $M (3; 6; -9; 0)$ переходит в точку $M' (2; 1; 6; -3)$.

1.89. Пусть $M_0, M_1, \dots, M_k$ и $N_0, N_1, \dots, N_k$ — две системы линейно независимых точек аффинного n -мерного пространства. Доказать, что $k \leq n$ и что существует такое аффинное преобразование f , для которого $f(M_i) = N_i, i = 0, 1, \dots, k$.

У к а з а н и е. Используйте следствие 2 § 7.4 [3].

1.90. Проверить, что системы точек $M_0(1; 2; -1)$, $M_1(3; 4; 2)$, $M_2(1; 4; -1)$, $M_3(4; 1; -1)$ и $N_0(-1; 0; 2)$, $N_1(0; 13; 10)$, $N_2(-7; 2; 4)$, $N_3(8; 2; 2)$ независимы, и написать формулы аффинного преобразования, для которого:

- а) $f(M_0) = N_0$, $f(M_1) = N_1$, $f(M_2) = N_2$, $f(M_3) = N_3$;
б) $f(M_0) = N_3$, $f(M_1) = N_2$, $f(M_2) = N_1$, $f(M_3) = N_0$.

Р е ш е н и е. Найдем координаты векторов $\vec{M_0M_1}$, $\vec{M_0M_2}$, $\vec{M_0M_3}$:
 $\vec{M_0M_1} = (2; 2; 3)$, $\vec{M_0M_2} = (0; 2; 0)$, $\vec{M_0M_3} = (3; -1; 0)$ — и вычислим определитель, составленный из координат этих векторов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -18.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то векторы $\vec{M_0M_1}$, $\vec{M_0M_2}$, $\vec{M_0M_3}$ линейно независимы и, значит, точки M_0 , M_1 , M_2 , M_3 также независимы. Аналогично проверяется, что точки N_0 , N_1 , N_2 , N_3 независимы. По следствию 2 § 7.4 [3] существует единственное аффинное преобразование f , для которого $f(M_i) = N_i$. По теореме 1 § 7.4 [3] формулы этого преобразования имеют вид:

$$x'_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n + b_i.$$

Положим $i = 1$ и подставим в эти формулы поочередно координаты точек M_0 и N_0 , M_1 и N_1 , M_2 и N_2 , M_3 и N_3 . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -1 = b_{11} + b_{12} + b_{13}(-1) + b_1, \\ 0 = b_{11}3 + b_{12}4 + b_{13}2 + b_1, \\ -7 = b_{11} + b_{12}4 + b_{13}(-1) + b_1, \\ 8 = b_{11}4 + b_{12} + b_{13}(-1) + b_1, \end{cases}$$

откуда $b_{11} = 2$, $b_{12} = -3$, $b_{13} = 1$, $b_1 = 4$. Аналогично найдя остальные коэффициенты.

1.91. Проверить, что системы точек $A_0(1; 3; -1)$, $A_1(0; 3; 5)$, $A_2(1; 7; 1)$, $A_3(1; 3; 4)$ и $B_0(7; 12; 7)$, $B_1(-19; -17; -8)$, $B_2(-5; 14; -1)$, $B_3(-13; -13; -3)$ независимы, и написать формулы аффинного преобразования f , для которого:

$$f(A_0) = B_0, f(A_1) = B_1, f(A_2) = B_2, f(A_3) = B_3.$$

1.92. Доказать, что для любых $k + 1$ независимых точек $M_0, M_1, \dots, M_k$ аффинного пространства A_n существует единственная k -мерная плоскость P , содержащая эти точки, и что всякое аффинное преобразование, которое оставляет на месте точки $M_0, M_1, \dots, M_k$, оставляет на месте все точки этой плоскости P .

У к а з а н и е. Составьте параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно направляющим векторам $\vec{M_0M_1}$, $\vec{M_0M_2}$, ..., $\vec{M_0M_k}$. Докажите, что эта плоскость

имеет размерность k и содержится в любой плоскости, содержащей заданные точки. Дополните векторы $\vec{M_0M_1}$, $\vec{M_0M_2}$, ..., $\vec{M_0M_k}$ до базиса векторного пространства V_n , связанного с A_n , и покажите, что направляющие векторы остаются неподвижными при ассоциированном линейном преобразовании.

1.93. Написать формулы аффинного преобразования аффинного пространства A_4 , оставляющего неподвижными все точки гиперплоскости

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

и переводящего начало репера в точку $O'(1; 1; 1; 1)$. Доказать единственность такого аффинного преобразования.

Р е ш е н и е. Выберем на гиперплоскости точки $A_1(1; 0; 0; 0)$, $A_2(0; 1; 0; 0)$, $A_3(0; 0; 1; 0)$, $A_4(0; 0; 0; 1)$. Система точек O, A_1, A_2, A_3, A_4 независима, так как векторы $\vec{OA_1}$, $\vec{OA_2}$, $\vec{OA_3}$, $\vec{OA_4}$ образуют базис. Система точек O', A_1, A_2, A_3, A_4 также независима, поскольку легко проверить, что векторы $\vec{O'A_1} = (0; -1; -1; -1)$, $\vec{O'A_2} = (-1; 0; -1; -1)$, $\vec{O'A_3} = (-1; 0; -1; 0)$, $\vec{O'A_4} = (-1; -1; -1; 0)$ линейно независимы. По следствию 2 § 7.4 [3] существует единственное аффинное преобразование f , которое переводит точку O в точку O' и оставляет неподвижными точки A_1, A_2, A_3, A_4 . В силу задачи 1.104 преобразование f оставляет неподвижными все точки заданной гиперплоскости.

Теперь найдем формулы аффинного преобразования f . Ассоциированное линейное преобразование переводит векторы $e_1 = \vec{OA_1}$, $e_2 = \vec{OA_2}$, $e_3 = \vec{OA_3}$, $e_4 = \vec{OA_4}$ в векторы $e'_1 = \vec{O'A_1}$, $e'_2 = \vec{O'A_2}$, $e'_3 = \vec{O'A_3}$, $e'_4 = \vec{O'A_4}$. Используя формулы (1) § 7.4 [3], окончательно получим:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 - x_3 - x_4 + 1, \\ x'_2 = -x_1 - x_3 - x_4 + 1, \\ x'_3 = -x_1 - x_2 - x_4 + 1, \\ x'_4 = -x_1 - x_2 - x_3 + 1. \end{cases}$$

1.94. В аффинном пространстве A_3 задано аффинное преобразование:

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 + 2, \\ x'_2 = x_2 - 3x_3 - 1, \\ x'_3 = x_1 + x_2 + 3x_3 + 3. \end{cases}$$

Найти: а) образы точек $P(3; -1; 2)$, $Q(-1; 4; 0)$, $T(0; 0; 0)$; б) множество неподвижных точек преобразования; в) образ плоскости $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$; г) образ прямой

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_3 = 1; \end{cases}$$

д) образ прямой

$$\begin{cases} x_1 = -1 + t_1, \\ x_2 = 2 + 2t_1, \\ x_3 = -3 + 4t_1. \end{cases}$$

У к а з а н и е. а) Образ любой точки находится подстановкой ее координат в формулы заданного преобразования вместо x_1, x_2, x_3 ;

б) неподвижные точки являются решениями следующей системы:

$$\begin{cases} x_1 = -x_1 + 2, \\ x_2 = x_2 - 3x_1 - 1, \\ x_3 = x_1 + x_2 + 3x_3 + 3; \end{cases}$$

в) из формул преобразования найдите выражения x_1, x_2, x_3 через x'_1, x'_2, x'_3 и подставьте их в уравнения плоскости;

г) используйте указание в);

д) подставьте выражения для x_1, x_2 и x_3 в формулы преобразования и найдите формулы зависимости x'_1, x'_2, x'_3 от параметра t .

1.95. Написать формулы гомотетии пространства A_4 с центром $M_0(1; -3; 4; 2)$ и коэффициентами $k_1 = 3, k_2 = \frac{1}{2}, k_3 = -\frac{1}{4}, k_4 = -1$.

У к а з а н и е. Используйте формулы преобразования гомотетии § 8.4.[3].

1.96. В аффинном пространстве A_4 задано аффинное преобразование:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5, \\ x'_2 = -x_2 + 3x_3 - x_4, \\ x'_3 = 4x_3 + x_4 + 1, \\ x'_4 = x_1 - 2x_4 + 3. \end{cases}$$

Найти: а) образы точек $P(1; -3; 2; 1), Q(0; -3; 2; -5), S(0; 0; 0; 0), T(-3; -5; 1; 4)$; б) множество неподвижных точек преобразования; в) образ гиперплоскости $x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$; г) образ плоскости

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_2 - x_4 = 2; \end{cases}$$

д) образ прямой

$$\begin{cases} x_1 = -3 + t_1 + 6t_2, \\ x_2 = 1 + 2t_1 + 4t_2, \\ x_3 = -4 + t_1 - 8t_2, \\ x_4 = 6 + 3t_1 - 2t_2. \end{cases}$$

1.97. Пусть задан репер $R(0; e_1; e_2; e_3; e_4)$. Написать формулы аффинного преобразования в заданном репере, переводящего точку $M(1; 3; 0; -2)$ в точку $M'(6; -4; 10; 1)$, если ассоциированное преобразование φ переводит векторы e_1, e_2, e_3, e_4 в векторы

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \varphi(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \\ \vec{e}'_2 &= \varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= \varphi(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{e}'_4 &= \varphi(\vec{e}_4) = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Р е ш е н и е. Матрица линейного преобразования имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(§ 7.4 [3]).

Поэтому формулы искомого преобразования должны быть:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_1, \\ x'_2 = -3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_2, \\ x'_3 = x_1 + x_2 - 2x_4 + x_3, \\ x'_4 = -x_1 + x_3 + x_4, \end{cases}$$

где x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 — координаты образа точки O .

Для нахождения этих координат подставим известные координаты точек M и M' в выше приведенные уравнения:

$$\begin{cases} 6 = 2 + 3 + 3(-2) + x'_1, \\ -4 = -3 + 3 \cdot 3 + x'_2, \\ 10 = 1 + 3 - 2(-2) + x'_3, \\ 1 = -1 + x'_4, \end{cases}$$

откуда $x'_1 = 7, x'_2 = -10, x'_3 = 2, x'_4 = 2$.

В окончательном виде преобразование f задается следующими формулами:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 7, \\ x'_2 = -3x_1 + 3x_2 - x_3 - 10, \\ x'_3 = x_1 + x_2 - 2x_4 + 2, \\ x'_4 = -x_1 + x_3 + 2. \end{cases}$$

1.98. Пусть $R(0; e_1; e_2; e_3; e_4)$ — репер аффинного пространства. Найти образ прямой, проходящей через точки $A(1; 2; -4; 5)$ и $B(3; 6; 2; -3)$ при аффинном преобразовании f , которое оставляет неподвижной середину отрезка AB . Известно, что линейное преобразование φ , ассоциированное f , переводит векторы e_1, e_2, e_3, e_4 в векторы:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \vec{e}'_2 &= \varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= \varphi(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_4, \\ \vec{e}'_4 &= \varphi(\vec{e}_4) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Так же, как и в предыдущей задаче, сначала найдите формулы преобразования f (роль точек M и M' играет середина отрезка AB), а затем напишите параметрические уравнения прямой AB . Воспользуйтесь указанием д) к задаче 1.106.

1.99. Пусть в трехмерном пространстве задан тетраэдр $SABC$. Написать относительно репера $R(S; \vec{SA}; \vec{SB}; \vec{SC})$ формулы аффинного преобразования, переводящего точки S, A, B, C в точки S', K, L, M , где K, L, M — середины отрезков AB, BC, AC соответственно. Сколько существует аффинных преобразований, удовлетворяющих условиям задачи.

У к а з а н и е. Выразите векторы $\vec{SK}, \vec{SL}$ и $\vec{SM}$ через базисные векторы $\vec{SA}, \vec{SB}$ и $\vec{SC}$. Например, $\vec{SK} = \frac{1}{2}\vec{SA} - \vec{SB}$. Дальнейший ход решения аналогичен решению задачи 1.100.

1.100. Заданы формулы аффинных преобразований f и g аффинного пространства A_4 :

$$f: \begin{cases} x'_1 = 2x_1 - x_2 - x_3 - 1, \\ x'_2 = 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2, \\ x'_3 = x_3 + 2x_4 - 1, \\ x'_4 = 4x_4 - 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad g: \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + 2, \\ x'_2 = 3x_2, \\ x'_3 = -x_3, \\ x'_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1. \end{cases}$$

Найти формулы аффинных преобразований

$$f \circ g, g \circ f, f^{-1}, g^{-1}, (f \circ g)^{-1}.$$

У к а з а н и е. Чтобы найти формулы преобразования $g \circ f$, надо в формулы преобразования g вместо x_1, x_2, x_3, x_4 подставить выражения для x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 из формулы преобразования f :

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2(2x_1 - x_2 - x_3 - 1) + 2 = 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2, \\ x'_2 &= 3(2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2) = 6x_2 + 9x_3 - 3x_4 + 6, \\ x'_3 &= -(x_3 + 2x_4 - 1) = -x_3 - 2x_4 + 1, \\ x'_4 &= (2x_1 - x_2 - x_3 - 1) + (2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2) + \\ &+ (x_3 + 2x_4 - 1) + (4x_4 - 2) + 1 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 1. \end{aligned}$$

Чтобы найти формулы обратного преобразования f^{-1} , надо из формул преобразования f выразить x_1, x_2, x_3, x_4 через x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 , а затем координаты со штрихами заменить координатами без штрихов, и наоборот.

1.101. Образуют ли группу аффинные преобразования, формулы которых имеют следующий вид:

$$\text{а) } \begin{cases} x'_1 = kx_1 + r_1, \\ x'_2 = kx_2 + r_2, \\ x'_3 = kx_3 + r_3, \\ x'_4 = kx_4 + r_4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x'_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4, \\ x'_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4, \\ x'_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4, \\ x'_4 = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4. \end{cases}$$

k, r_1, r_2, r_3, r_4 — любые действительные числа.

1.102. Найти общий вид формул аффинных преобразований аффинного пространства A_3 , если эти преобразования: а) оставляют на месте точки $O(0; 0; 0)$, $A(1; 1; 1)$; б) оставляют на месте какую-то точку плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; в) отображают плоскость $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ на себя.

Является ли группой множество аффинных преобразований, обладающих одним из указанных свойств?

1.103. Доказать, что все аффинные преобразования аффинного пространства A_n , оставляющие на месте все точки некоторого множества $S \subset A_n$, образуют подгруппу группы аффинных преобразований. От скольких параметров зависит эта подгруппа, если: а) множество S состоит из $(k+1)$ независимых точек, $k=0, 1, \dots, n$; б) множество S является плоскостью размерности k .

У к а з а н и е. Число независимых параметров есть наименьшее число коэффициентов b_{ij}, b_i из формул аффинного преобразования (1), § 7.4 [3], которые можно задавать произвольно и которые однозначно определяют аффинные преобразования заданной подгруппы (см. [2], § 32.3).

1.104. Доказать, что все гомотетии с центром M_0 образуют подгруппу группы аффинных преобразований. От скольких параметров зависит эта подгруппа?

1.105. Какие из следующих свойств инвариантны относительно группы аффинных преобразований аффинного пространства A_n : а) параллельность плоскостей; б) пересечение плоскостей; в) скрещивание плоскостей; г) деление отрезка в данном отношении; д) неподвижность некоторого множества?

1.106. Являются ли аффинно-эквивалентными следующие фигуры: а) два произвольных треугольника; б) два произвольных параллелограмма; в) две произвольные трапеции; г) две произвольные m -мерные плоскости?

1.107. Перечислить свойства аффинного пространства A_n , инвариантные относительно группы параллельных переносов.

1.108. Перечислить свойства аффинного пространства A_n , инвариантные относительно группы гомотетий с центром в точке M_0 .

§ 5. Евклидовы векторные пространства

Литература: [3], § 10.

2.1. Доказать, что пространство обычных трехмерных векторов с обычными операциями сложения и умножения на числа с помощью известного определения скалярного произведения векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\widehat{uv})$$

превращается в евклидово векторное пространство.

Указание. Свойства скалярного произведения следует использовать для проверки аксиом евклидова векторного пространства.

2.2. Арифметическим n -мерным пространством называется множество последовательностей действительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с покомпонентными операциями сложения и умножения на числа:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Доказать, что арифметическое пространство превращается в евклидово, если за скалярное произведение последовательностей $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ принять число

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

В последующих задачах координаты векторов считаются заданными в некотором ортонормированном базисе соответствующего евклидова векторного пространства.

2.3. В евклидовом пространстве V_4 заданы векторы $\vec{u} = (3; 0; 1; 0)$, $\vec{v} = (3; 2; 1; 1)$, $\vec{w} = (4; -2; -1; 1)$. Найти следующие скалярные произведения:

- $\vec{u}^2, \vec{u} \cdot \vec{v}, \vec{u} \cdot \vec{w}, \vec{v} \cdot \vec{w};$
- $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}), (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{v};$
- $(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}), (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})^2.$

2.4. В евклидовом векторном пространстве V_8 найти длины следующих векторов: $\vec{u} = (-2; 0; 6; 0; 3)$, $\vec{v} = (1; -3; 0; 10; \sqrt{11})$, $\vec{w} = (-1; -2; 0; 2; 4)$, $\vec{r} = (4; -3; -1; 2; 2)$.

2.5. В евклидовом векторном пространстве V_6 даны следующие пары векторов:

- $\vec{p} = (1; -3; 2; 1); \vec{q} = (0; -2; 1; 3);$
- $\vec{r} = (-2; 0; 0; -1), \vec{s} = (4; 6; 7; -8);$
- $\vec{t} = (4; -3; 0; -5), \vec{u} = (0; 10; 7; -6);$
- $\vec{v} = (6; -7; 1; -2), \vec{w} = (4; 0; -4; 10).$

Определить, какие из этих векторов ортогональны.

2.6. В евклидовом векторном пространстве V_6 даны следующие пары векторов:

- $\vec{u} = (-3; 4; 3; -1; 1), \vec{v} = (6; 2; -2; -1);$
- $\vec{w} = (2; 1; 0; 2; -4), \vec{r} = (1; 3; -4; 2; \sqrt{6});$
- $\vec{s} = (3; -1; 8; 8; -4), \vec{t} = (2; 6; -1; 5; 8).$

Найти углы между этими векторами.

2.7. В евклидовом векторном пространстве V_6 даны следующие пары векторов:

- $\vec{p} = (4; 3; -5; 1; 2), \vec{q} = (2; -1; 3; 0; 5);$
- $\vec{r} = (2; -3; 0; 4; 5), \vec{s} = (-7; 1; 6; 2; 1);$
- $\vec{t} = (4; -6; 2; -7; 1), \vec{u} = (2; 1; 5; -2; 3);$
- $\vec{v} = (-4; 3; 2; 5; 1), \vec{w} = (1; 5; -7; -1; 6).$

Определить, какие углы — острые, тупые или прямые — образуют векторы каждой пары.

2.8. Проверить, что векторы $\vec{u} = (1; 3; 2; -1)$, $\vec{v} = (5; 1; -4; 0)$, $\vec{w} = (0; 4; 1; 14)$ попарно ортогональны, и дополнить их до ортогонального базиса евклидова векторного пространства V_4 .

Указание. В качестве $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ можно взять любое ненулевое решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_2 + x_3 + 14x_4 = 0. \end{cases}$$

2.9. Пусть L — подпространство размерности k евклидова векторного пространства V_n . Вектор $\vec{x}$ называется ортогональным подпространству L , если он ортогонален каждому вектору $\vec{y} \in L$. Доказать, что множество всех векторов, ортогональных L , является подпространством L^* размерности $n - k$ пространства V_n . (Подпространство L^* называется ортогональным дополнением подпространства L .)

Указание. Пусть $\vec{u}_1 = (u_{11}; u_{12}; \dots; u_{1n})$, ..., $\vec{u}_k = (u_{k1};$

$u_{k_1}, \dots, u_{k_n}$ — базис подпространства L . Всякий вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n = 0, \\ \vdots \\ u_{p1}x_1 + u_{p2}x_2 + \dots + u_{pn}x_n = 0. \end{array} \right. \quad (*)$$

Из курса алгебры известно, что решения этой системы образуют подпространство размерности $n - k$. Поэтому остается показать, что вектор $\vec{x}$ ортогонален L тогда и только тогда, когда он ортогонален векторам $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$.

Отметим, что одновременно указана система уравнений (*), задающая пространство L^* .

2.10. Подпространство L евклидова пространства V_4 задано системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Найти систему уравнений, задающую ортогональное дополнение L^* подпространства L .

Укажите. Найдите фундаментальную систему решений заданной системы уравнений (базис подпространства L) и воспользуйтесь замечанием, сделанным в конце решения задачи 2.14.

2.11. Пусть L — подпространство евклидова векторного пространства V_n . Доказать, что каждый вектор $\vec{x} \in V_n$ можно единственным образом представить в виде $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, где $\vec{y} \in L$ и вектор $\vec{z}$ ортогонален L .

У к а з а н и е. Воспользовавшись результатом задачи 2.14, выберите в пространстве V_n такой базис $\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n$, что $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k \in L, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n \in L^*$. Разложите вектор x по этому базису. Единственность разложения вытекает из того, что $L \cap L^* = \vec{0}$. (Вектор u называется ортогональной составляющей вектора x относительно пространства L .)

2.12. Пусть L — подпространство евклидова векторного пространства V_n и пусть $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, где $\vec{y} \in L, \vec{z} \in L^*$. Доказать, что $\vec{x}^2 = \vec{y}^2 + \vec{z}^2$.

§ 6. Евклидовы пространства

Литература: [3], § 12.

Во всех задачах данного параграфа предполагается, что координаты точек заданы в прямоугольном декартовом репере.

2.13. В евклидовом пространстве E_4 найти расстояние между следующими парами точек:

- a) $A(-3; 6; -7; 1)$,
 b) $C(8; -4; 2; 3)$,
 B) $E(10; -2; 6; -4)$,
 r) $K(11; 3; -5; 1)$,
 $B(1; 6; -4; 1)$,
 $D(2; 1; 6; 5)$,
 $F(6; 2; 2; 0)$,
 $M(7; 7; -9; 5)$.

Указание. Необходимо воспользоваться формулой расстояния между точками A и B ([3], § 12.1).

2.14. В евклидовом пространстве E_5 найти расстояние между следующими парами точек:

- a)** $A(3; -4, 5; 1, 2),$ $B(2; 1; 0; -2, 0);$
b) $C(7; 2; -3; 1, 5),$ $D(3; 1; -1; 3, 5);$
c) $E(1; 0; -7, 5, 2),$ $F(4; 5; -6, 4, 2);$
d) $K(16; 5; 3; -2, 7),$ $M(10; 5; -1; 3, 5);$

2.15. Косинусы углов, которые составляет радиус-вектор произвольной точки M с базисными векторами, называются направляющими косинуса радиус-вектора. В евклидовом пространстве E_4 найти направляющие косинусы радиус-векторов точек $M(1; -3; 4; 2)$, $N(2; -4; 6; -1)$, $P(1; 3; -6; -2)$, $Q(4; -1; -3; 0)$.

2.16. Доказать, что сумма квадратов направляющих косинусов радиус-вектора произвольной точки M евклидова пространства E_n , отличной от начала репера, равна 1.

2.17. В евклидовом пространстве E_3 известны вершины A (4; 3; 3; 4; 5), B (-2; 2; 5; 4), C (-1; 2; 2; 1; 5) треугольника ABC . Найти длины сторон, медиан и величины углов этого треугольника.

2.18. В евклидовом пространстве E_4 известны координаты вершин $A(4; 3; 2; -1)$, $B(4; -1; 5; -1)$, $C(5; 6; 1)$ треугольника ABC . Доказать, что треугольник ABC прямоугольный.

2.19. В евклидовом пространстве E_3 известны координаты вершин $A(1; 4; 2; -1; 3)$, $B(1; 2; -2; 3; 3)$, $C(-2; -1; 1; -2; 3)$ треугольника ABC . Доказать, что треугольник равнобедренный.

2.20. В евклидовом пространстве E_4 известны координаты вершин треугольника $A(1; -3; 2; 1)$, $B(2; -4; 7; 4)$, $C(2; -3; 0; 3)$. Найти длину биссектрисы AD .

У к а з а н и е. В любом евклидовом пространстве справедливы теоремы планиметрии. Поэтому для решения задачи надо найти координаты точки D , делящей отрезок BC в отношении

$$\lambda = \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|}.$$

2.21. В евклидовом пространстве E_5 известны координаты вершин $A(3; 5; -1; 2; 4)$, $B(-2; 0; 2; 4; 3)$, $C(2; 2; -1; 4)$ треугольника ABC . Найти длины биссектрисы и медианы, проходящих через точку A .

Указание. Воспользуйтесь указанием к задаче 2.30.

$$\begin{aligned}\vec{AC} \cdot \vec{BD} &= (\vec{AB} + \vec{BC})(\vec{BC} - \vec{AB}) = \vec{BC}^2 - \vec{AB}^2 = \\ &= |\vec{BC}|^2 - |\vec{AB}|^2 = 0,\end{aligned}$$

так как $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$ по условию.

Остальные утверждения можно доказать аналогично (см. также следующую задачу).

2.24. Доказать, что в любом евклидовом пространстве E_n , $n \geq 2$, справедливо любое утверждение евклидовой планиметрии (планиметрии, построенной на основе либо аксиоматики Гильберта¹, либо аксиоматики, принятой в новой школьной программе).

Решение. Пусть некоторое утверждение относится к множеству точек, лежащих в некоторой двумерной плоскости L_2 пространства E_n . Из курса геометрии известно, что L_2 можно рассматривать как двумерное евклидово пространство E_2 . Кроме того, известно, что все двумерные евклидовы пространства изоморфны. Можно показать также, что плоскость, удовлетворяющая системе аксиом Гильберта или системе аксиом, принятой в школе, является двумерным евклидовым пространством и обратно². Следовательно, пространство E_2 и евклидова плоскость L_2 изоморфны, и поэтому всякое утверждение, справедливое для евклидовой плоскости L_2 , справедливо в E_2 .

2.25. Доказать, что в любом евклидовом пространстве E_n , $n \geq 3$, справедливо любое утверждение евклидовой стереометрии (стереометрии, построенной на основе либо аксиоматики Гильберта, либо аксиоматики, принятой в новой школьной программе).

Указание. См. решение предыдущей задачи.

2.26. Две плоскости L и L' называются ортогональными, если направляющее подпространство V плоскости содержится в ортогональном дополнении V^* направляющего подпространства V плоскости L . Доказать ортогональность следующих пар плоскостей евклидова пространства E_4 :

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 = 3 + t_1 + t_2, \\ x_2 = -1 + t_1 + t_2, \\ x_3 = 2 + t_1 - t_2, \\ x_4 = 5 + t_1 - t_2, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = 5 + t_1 + t_2, \\ x_2 = 3 - t_1 - t_2, \\ x_3 = -1 + t_1 - t_2, \\ x_4 = 2 - t_1 + t_2, \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 1 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 + 5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. а) Направляющее подпространство V натянуто на векторы $\vec{u}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; -1; -1)$, а направляющее

¹ Система аксиом Гильберта была исторически первой полной системой аксиом, содержащей все аксиомы Евклида. На ее основе был построен школьный курс планиметрии до 1970 г.

² Доказательство этого факта выходит за рамки настоящего пособия.

2.22. Доказать, что точки $A(4; 3; 2; -1; 3)$, $B(4; -1; 5; -1; 3)$, $C(5; 6; 1; 3)$, $D(5; 10; 3; 1; 3)$ евклидова пространства E_5 являются вершинами прямоугольника $ABCD$.

Указание. Для доказательства следует проверить, что вектор $\vec{AB} = \vec{DC}$ и $\vec{AB}$ ортогонален $\vec{AD}$.

2.23. Доказать, что в любом евклидовом точечном пространстве E_n справедливы следующие утверждения евклидовой планиметрии:

- а) в каждом треугольнике длина любой стороны меньше суммы длин двух других сторон и больше их разности;
- б) в равнобедренном треугольнике углы при основании конгруэнтны;
- в) в каждом параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон;
- г) диагонали ромба ортогональны;
- д) параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда длины диагоналей равны;
- е) в каждом треугольнике ABC

$$|\vec{AC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 - 2|\vec{AB}||\vec{BC}|\cos(\widehat{ABC}).$$

Решение. а) Пусть ABC — произвольный треугольник в евклидовом пространстве E_n . Тогда:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}.$$

В силу неравенства Коши — Буняковского (§3, § 10.2)

$$|\vec{AB} \cdot \vec{BC}| \leq |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|\vec{AC}|^2 &= \vec{AC} \cdot \vec{AC} = (\vec{AB} + \vec{BC})(\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{AB}^2 + \\ &+ \vec{BC}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} \leq |\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + 2|\vec{AB}||\vec{BC}| = \\ &= (|\vec{AB}| + |\vec{BC}|)^2.\end{aligned}$$

Отсюда:

$$|\vec{AC}| \leq |\vec{AB}| + |\vec{BC}|.$$

Что и требовалось доказать.

Второе утверждение доказывается аналогично.

г) Пусть $ABCD$ — произвольный ромб в евклидовом пространстве E_n . Это значит, что $\vec{AB} = \vec{DC}$ и $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$. Кроме того, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ и $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = \vec{BC} - \vec{AB}$. Чтобы доказать ортогональность диагоналей AC и BD , достаточно проверить, что скалярное произведение $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$. В силу написанных выше равенств

подпространство V на векторы $\vec{u}_1 = (1; -1; 1; -1)$, $\vec{u}_2 = (1; -1; -1; 1)$. В силу задачи 2.14 для доказательства включения $V \subset V^*$ достаточно проверить, что каждый из векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ ортогонален векторам $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0, \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 0, \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0, \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 &= 0.\end{aligned}$$

б) Чтобы свести решение задачи к задаче а), следует найти базис направляющих подпространств V и V^* , т. е. фундаментальные системы решений следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

2.27. Написать уравнение гиперплоскости евклидова пространства E_n , проходящей через точку $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ перпендикулярно вектору $\vec{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$.

Укажите, что уравнение искомого гиперплоскости имеет следующий вид:

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \dots + a_n(x_n - x_n^0) = 0.$$

2.28. Написать уравнение гиперплоскости евклидова пространства E_6 , проходящей через точку $M_0(3; 2; -1; 5; 0)$ ортогонально прямой

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2t, \\ x_2 = 4 + 2t, \\ x_3 = 5 + 4t, \\ x_4 = -2 - t, \\ x_5 = 1 + 5t. \end{cases}$$

2.29. Найти проекцию точки $M_0(1; -3; 2; 1; 6; 7)$ евклидова пространства E_6 на гиперплоскости

$$2x_1 - 3x_2 + x_4 - x_5 + 2x_6 + 18 = 0.$$

2.30. Написать уравнения множества точек евклидова пространства E_6 , равноудаленных от следующих пар точек:

$$\begin{aligned} \text{а) } & A(3; -2; 1; 4; 1), & B(2; 4; -3; 1; 2); \\ \text{б) } & C(-1; 3; 5; 6; 1), & D(-2; 3; -5; -7; 1); \\ \text{в) } & E(1; 4; -2; 1; 3), & F(4; 1; -3; -1; 2). \end{aligned}$$

2.31. Написать уравнения множества точек евклидова пространства E_4 , равноудаленных от следующих трех точек:

$$\begin{aligned} \text{а) } & A(-3; 0; -2; 1), & B(-2; 2; 4; -3), & C(1; -2; -3; 1); \\ \text{б) } & D(-2; -5; 1; 6), & E(-4; -1; 6; -2), & F(1; 3; 0; -2); \\ \text{в) } & K(1; 4; -1; 2), & M(5; 1; -2; 1), & N(2; -3; 1; 0). \end{aligned}$$

2.32. Найти длины высот треугольника ABC евклидова пространства E_4 , если известны координаты вершин

$$A(4; 3; 2; -1), B(1; 3; 1; -2), C(0; 3; 2; 1).$$

2.33. Найти длины высот треугольника ABC евклидова пространства E_6 , если известны координаты точек

$$A(4; 3; -2; 1; 5), B(3; 1; 0; 2; -1), C(2; 1; 6; 3; 0).$$

2.34. Расстоянием от точки A до плоскости L евклидова пространства E_n называется точная нижняя грань расстояний от точки O до точек плоскости L . Доказать, что все векторы $\vec{AM} \in V$, $M \in L$, где V — направляющее подпространство плоскости L , имеют одну и ту же ортогональную компоненту относительно V^* ; длина этой компоненты равна расстоянию от A до L .

Решение. В силу задачи 2.16 $\vec{AM} = \vec{y} + \vec{z}$, где $\vec{y} \in V$, $\vec{z} \in V^*$.

Пусть $\vec{AM}' = \vec{y}' + \vec{z}'$, где снова $M' \in L$, $\vec{y}' \in V$, $\vec{z}' \in V^*$. Тогда:

$$\vec{MM}' = \vec{AM}' - \vec{AM} = (\vec{y}' - \vec{y}) + (\vec{z}' - \vec{z}).$$

Векторы $\vec{MM}'$ и $\vec{y}' - \vec{y}$ принадлежат подпространству V . Из последнего равенства следует, что вектор $\vec{z}' - \vec{z}$, равный $\vec{MM}' - (\vec{y}' - \vec{y})$, также принадлежит V , но этот вектор принадлежит и V^* . Так как $V \cap V^* = \{0\}$, то $\vec{z}' - \vec{z} = 0$ и $\vec{z}' = \vec{z}$.

Докажем теперь, что расстояние от A до L равно $|\vec{z}|$. В силу задачи 2.17

$$|\vec{AM}|^2 = |\vec{y}|^2 + |\vec{z}|^2 \geq |\vec{z}|^2,$$

откуда $|\vec{AM}| \geq |\vec{z}|$ и $|\vec{z}|$ — нижняя грань всех расстояний $|\vec{AM}|$.

Построим точку M_0 , для которой $\vec{AM}_0 = \vec{z}$, и покажем, что $M_0 \in L$. Так как

$$\vec{AM} = \vec{y} + \vec{z} = \vec{AM}_0 + \vec{M_0M},$$

то $\vec{y} = \vec{M_0M}$. Поскольку $M \in L$ и $\vec{y} \in V$, точка $M_0 \in L$. Тем самым показано, что длина $|\vec{z}| = |\vec{AM}_0|$ является не только точной нижней гранью, но и наименьшим из расстояний от A до точек плоскости L .

2.35. Доказать, что расстояние от произвольной точки $M^*(x_1^*, \dots, x_n^*)$ до гиперплоскости

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$$

евклидова пространства E_n выражается формулой:

$$d = \frac{a_1x_1^* + a_2x_2^* + \dots + a_nx_n^* + a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}.$$

2.36. Найти расстояние от точки M^* до гиперплоскости евклидова пространства E_6 , если известны координаты точки M^* и уравнение гиперплоскости:

- $M^*(1; 4; -5; 3; 2); 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - 3 = 0;$
- $M^*(3; -2; 1; 3; 4); 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_5 = 0;$
- $M^*(2; 1; 3; 1; -4); 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 + x_5 - 6 = 0.$

Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

2.37. Найти расстояние от точки A до плоскости L евклидова пространства E_4 , если известны координаты точки A и уравнение плоскости L :

- $A(4; 2; -5; 1), \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12; \end{cases}$
- $A(2; 4; -4; 2), \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

Указание. Сначала необходимо найти точку M на плоскости L и базис u_1, u_2 направляющего подпространства V этой плоскости, затем ортогональную компоненту $\vec{u}$ вектора $\vec{AM}$ относительно V . Это можно сделать следующим образом:

$$\vec{AM} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \vec{z},$$

где $\vec{z} \in V^*$, и потому,

$$\begin{aligned} \vec{AM} \cdot \vec{u}_1 &= \lambda_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1, \\ \vec{AM} \cdot \vec{u}_2 &= \lambda_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + \lambda_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2. \end{aligned}$$

Из полученной системы находим λ_1 и λ_2 .

В заключение следует вычислить длину вектора $\vec{AM} - \vec{u}$ (см. задачу 2.43).

2.38. Пусть L_k k -мерная плоскость евклидова пространства E_n с направляющим подпространством V_k . Написать параметрические уравнения плоскости L_n , имеющей максимальную размер-

ность и проходящей через данную точку $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ ортогонально плоскости L_k .

Решение. По определению ортогональности плоскостей (см. задачу 2.9) направляющее подпространство V_n искомой плоскости L_n должно содержаться в ортогональном дополнении V_k^* подпространства V_k . Подпространство V_k^* имеет размерность $n - k$ (см. задачу 2.9). Следовательно, направляющее подпространство V_n искомой плоскости L_n должно совпадать с V_k^* , так как требуется написать уравнение плоскости максимальной размерности.

Выберем в подпространстве V_k^* базис

$$\vec{u}_1 = (u_{11}; \dots; u_{nn}), \vec{u}_{n-k} = (u_{1n-k}; \dots; u_{nn-k}).$$

Параметрические уравнения плоскости L_n можно теперь записать следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t_1 u_{11} + t_2 u_{12} + \dots + t_{n-k} u_{1n-k}, \\ \dots \\ x_n = x_n^0 + t_1 u_{n1} + t_2 u_{n2} + \dots + t_{n-k} u_{nn-k}. \end{cases}$$

2.39. Написать уравнения плоскости, имеющей максимальную размерность в евклидовом пространстве E_6 и проходящей через точку $M_0(1; 1; 1; 1; 1; 1)$ ортогонально следующим плоскостям:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_4 + 10 = 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_6 - 4 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 = 3 - 2t_1 + 4t_2, \\ x_2 = -4 + t_1 - 5t_2, \\ x_3 = 1 + 4t_1 - t_2, \\ x_4 = -2 - 2t_1 + 2t_2, \\ x_5 = t_1 + t_2. \end{cases}$$

2.40. Написать уравнение гиперсферы евклидова пространства E_6 с центром $O(1; 2; 3; 1; \sqrt{6})$, проходящей через точку $M(2; 4; -1; 4; 0)$.

Указание. Уравнение гиперсферы евклидова пространства E_n имеет вид:

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — координаты центра гиперсферы, r — ее радиус. (Радиус гиперсферы, о которой идет речь в задаче, равен $|OM|$.)

2.41. В евклидовом пространстве E_6 дана гиперсфера с центром $O(3; 5; 4; 5; 2)$. Написать уравнение этой гиперсферы и гиперплоскости, касающейся гиперсферы в точке $M(-1; 2; 1; 3; 4; 1)$.

2.42. Определить взаимное расположение следующих гиперсфер и гиперплоскостей:

$$\text{a) } \begin{aligned} &(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 5)^2 = 4, \\ &x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 5 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 1)^2 + (x_4 - 2)^2 = 25, \\ & 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 36 = 0; \\ \text{в)} \quad & (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 4)^2 + (x_4 - 1)^2 + (x_5 + \\ & + 5)^2 = 36, \\ & 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - 17 = 0. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Сравните расстояние от центра гиперболы до гиперплоскости с радиусом гиперболы.

§ 7. Движения и преобразования подобия евклидовых пространств

Л и т е р а т у р а: [3], § 11, 13, 14.

Во всех задачах этого параграфа рассматриваются только ортонормированные реперы евклидовых пространств.

2.43. Выяснить, какие из следующих матриц являются ортогональными:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}; \\ \text{б)} \quad & \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \\ \text{в)} \quad & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \quad & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}; \\ \text{д)} \quad & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\ \text{е)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Напомним, что матрица A называется ортогональной, если $A^{-1} = A^T$, что равносильно равенству $A \cdot A^T = E$.

2.44. Выяснить, какие из следующих преобразований евклидова векторного пространства E_4 являются ортогональными:

¹ В школе используется термин «перемещение».

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \begin{cases} u'_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4, \\ u'_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4, \\ u'_3 = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4, \\ u'_4 = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_4; \end{cases} \\ \text{б)} \quad & \begin{cases} u'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}u_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}u_3, \\ u'_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}u_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}u_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}u_3, \\ u'_3 = \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3, \\ u'_4 = -u_4; \end{cases} \\ \text{в)} \quad & \begin{cases} u'_1 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 - \frac{1}{3}u_4, \\ u'_2 = u_1 - \frac{2}{3}u_3, \\ u'_3 = u_1 - u_2 - \frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_4, \\ u'_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4. \end{cases} \end{aligned}$$

2.45. Доказать, что существуют ровно два ортогональных преобразования одномерного векторного евклидова пространства. У к а з а н и е. Всякое линейное преобразование одномерного векторного пространства определяется образом любого ненулевого вектора. Необходимо воспользоваться тем, что ортогональное преобразование сохраняет длину вектора.

2.46. Доказать, что произвольная ортогональная матрица второго порядка может быть представлена в виде:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

2.47. Пусть r — собственный вектор ортогонального преобразования φ евклидова векторного пространства V_n . Доказать:

а) собственное значение λ вектора r равно ± 1 ; б) если векторы x и r ортогональны, то векторы $\varphi(x)$ и r также ортогональны.

Р е ш е н и е. а) По определению собственного вектора $\varphi(r) = \lambda r$, причем $r \neq 0$. Так как ортогональное преобразование сохраняет модуль любого вектора, то

$$|\vec{r}| = |\varphi(\vec{r})| = |\lambda \vec{r}| = |\lambda| \cdot |\vec{r}|.$$

Отсюда: $|\lambda| = 1$, т. е. $\lambda = \pm 1$.

б) По теореме 1 § 11.3 [3] ортогональное преобразование Φ сохраняет скалярное произведение векторов. Поэтому в силу условий задачи а) и б)

$$0 = \vec{x} \cdot \vec{r} = \Phi(\vec{x}) \cdot \Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{x}) \cdot \vec{\lambda} = \pm \Phi(\vec{e}_3) \cdot \vec{r}.$$

2.48. Доказать, что для ортогонального преобразования Φ трехмерного евклидова векторного пространства V_3 существует такой ортонормированный базис, в котором матрица преобразования Φ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

У к а з а н и е. Поскольку в трехмерном векторном пространстве V_3 всякое линейное преобразование имеет по крайней мере один собственный вектор, то необходимо выбрать собственный вектор преобразования Φ , включить его в ортонормированный базис пространства V_3 , а затем воспользоваться задачами 2.4 и 2.5.

2.49. Выяснить, какие из следующих формул задают движение евклидова пространства E_3 :

$$\text{а) } \begin{cases} x'_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{2}, \\ x'_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + 3, \\ x'_3 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 - 2, \\ x'_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 + 6, \\ x'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 - 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x'_1 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x_3 - 1, \\ x'_2 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3 + 2, \\ x'_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 3; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x'_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}x_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}x_3 - 1, \\ x'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 3, \\ x'_3 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 4. \end{cases}$$

У к а з а н и е. В силу теоремы 2 § 13.1 [3] необходимо проверить, что матрица, составленная из коэффициентов при x_i , является ортогональной. Например, в задаче а):

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = E.$$

2.50. Выяснить, какие из следующих формул задают движение евклидова пространства E_4 :

$$\text{а) } \begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 5, \\ x'_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 4, \\ x'_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 3, \\ x'_4 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x'_1 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + 6, \\ x'_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 1, \\ x'_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - 4, \\ x'_4 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 + 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 4, \\ x'_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 3, \\ x'_3 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 2, \\ x'_4 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

2.51. Написать формулы движения пространства E_3 , если известны формулы ассоциированного ортогонального преобразования векторного пространства V_3 :

$$\begin{cases} u'_1 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 + \frac{\sqrt{6}}{4}u_3, \\ u'_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2 - \frac{\sqrt{6}}{4}u_3, \\ u'_3 = \frac{\sqrt{6}}{4}u_1 - \frac{\sqrt{6}}{4}u_2 + \frac{1}{2}u_3 \end{cases}$$

и если: а) начало репера отображается на точку $O'(-1; 3; 4)$; б) точка $M(3; -2; 1)$ отображается на точку $M'(4; 3; -2)$.
У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой (1) § 13.1 главы II книги [3].

2.52. Написать формулы движения пространства E_n , если: а) известны формулы ассоциированного преобразования:

$$\begin{cases} u'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}u_2, \\ u'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}u_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}u_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}u_3, \\ u'_3 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}u_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}u_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}u_3 + \sqrt{\frac{2}{3}}u_4, \\ u'_4 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4 \end{cases}$$

(начало репера остается неподвижным); б) ассоциированное ортогональное преобразование отображает векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ на векторы $\vec{e}'_1 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\vec{e}'_2 = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{e}'_3 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\vec{e}'_4 = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. А начало координат переходит в точку $O'(1; 0; -1; 2)$.

2.53. Показать, что существует единственное движение, отображающее точки $A_0, A_1, \dots, A_n$ евклидова пространства E_n на точки $B_0, B_1, \dots, B_n$ соответственно, если векторы $\vec{A}_0A_1, \vec{A}_0A_2, \dots, \vec{A}_0A_n$ и векторы $\vec{B}_0B_1, \vec{B}_0B_2, \dots, \vec{B}_0B_n$ попарно ортогональны, а $|\vec{A}_0A_i| = |\vec{B}_0B_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$.

У к а з а н и е. Векторы

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{|\vec{A}_0A_1|} \cdot \vec{A}_0A_1, \dots, \vec{e}_n = \frac{1}{|\vec{A}_0A_n|} \cdot \vec{A}_0A_n \\ \text{и векторы} \quad \vec{e}'_1 &= \frac{1}{|\vec{B}_0B_1|} \cdot \vec{B}_0B_1, \dots, \vec{e}'_n = \frac{1}{|\vec{B}_0B_n|} \cdot \vec{B}_0B_n \end{aligned}$$

образуют два ортонормированных базиса векторного пространства V_n , связанного с E_n . Необходимо, воспользовавшись ортогональным преобразованием Φ , переводящим векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ в векторы $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$ соответственно, написать формулы искомого движения.

2.54. Проверить, что существует движение евклидова пространства, отображающее точки $A_0(4; 2; 1; 3)$, $A_1(5; 2; 1; 3)$, $A_2(4; 3; 1; 3)$, $A_3(4; 2; 2; 3)$, $A_4(4; 2; 1; 4)$ на точки $B_0(-1; -3;$

1; 5), $B_1(-1; -3; 2; 5)$, $B_2(-1; -3; 1; 6)$, $B_3(0; -3; 1; 5)$, $B_4(-1; 2; 1; 5)$, и написать формулы этого движения.

У к а з а н и е. Проверьте, что данные системы точек удовлетворяют условию предыдущей задачи, и воспользуйтесь указанием к ней.

2.55. Симметрией евклидова пространства E_n относительно гиперплоскости Π называется такое отображение Φ , при котором каждая точка M из E_n отображается на симметричную ей относительно Π точку $\Phi(M)$. Доказать, что: а) симметрия является движением; б) написать формулы преобразования симметрии относительно координатных гиперплоскостей. Гиперплоскость называется координатной, если она проходит через начало координат O с направляющим подпространством, натянутым на $n-1$ базисных векторов.

У к а з а н и е. Следует принять плоскость Π за одну из координатных плоскостей, найти координаты точки $\Phi(M)$, симметричной точке M , показать, что отображение Φ является преобразованием, сохраняющим расстояние между точками, а затем воспользоваться § 13.2 [3].

2.56. Написать формулы движения пространства E_n , отображающего каждую точку M этого пространства на симметричную ей точку M' относительно гиперплоскости:

$$\begin{aligned} \text{а) } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1 &= 0; \\ \text{б) } x_2 + 2x_3 - x_4 + 2 &= 0. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. а) При искомом движении точки данной гиперплоскости $A_1(-1; 0; 0; 0)$, $A_2(0; 1; 0; 0)$, $A_3(0; 0; -1; 0)$, $A_4(0; 0; 0; 1)$ остаются неподвижными. Необходимо написать формулы движения, ассоциированное ортогональное преобразование которого отображает векторы $\vec{OA}_1, \vec{OA}_2, \vec{OA}_3, \vec{OA}_4$ на векторы $\vec{O'A}_1, \vec{O'A}_2, \vec{O'A}_3, \vec{O'A}_4$, где O' — точка, симметричная точке $O(0; 0; 0; 0)$ относительно гиперплоскости

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0.$$

2.57. Доказать, что существует движение евклидова пространства E_n , отображающее гиперсферу радиуса r с центром в точке O_1 на гиперсферу радиуса r_2 с центром в точке O_2 тогда и только тогда, когда $r_1 = r_2$. Сколько таких движений существует?

2.58. Написать формулы какого-либо движения, отображающего гиперсферу $(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 3)^2 + (x_4 - 1)^2 = 9$ на гиперсферу $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 9$.

2.59. Движение g евклидова пространства E_n оставляет неподвижными точки A и B . Доказать, что при этом движении каждая точка прямой AB остается неподвижной.

(Движение g называется вращением, прямая AB — осью вращения g .)

¹ В школе используется термин «поворот».

Решение. Точка M лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда выполнено одно из равенств:

$$|AM| + |MB| = |AB|, \quad |MA| + |AB| = |MB|,$$

$$|AB| + |BM| = |AM|.$$

Так как преобразование g оставляет A и B на месте и сохраняет расстояние между точками, то для образа M' точки M справедливы соответствующие равенства:

$$|AM'| + |M'B| = |AB|, \quad |M'A| + |AB| = |M'B|,$$

$$|AB| + |BM'| = |AM'|.$$

Эти равенства показывают, что точки M и M' совпадают.

2.60. Доказать, что все вращения с общей осью AB образуют подгруппу группы движений евклидова пространства E_n .

2.61. Доказать, что всякое вращение первого рода трехмерного евклидова пространства является вращением вокруг оси.

Указание. Всякое вращение имеет по крайней мере одну неподвижную точку O . Используя результаты задачи 2.58 и учитывая, что по определению определитель матрицы движения первого рода равен 1, вторую неподвижную точку можно найти, отложив собственный вектор от точки O .

2.62. Движение g евклидова пространства E_n оставляет неподвижными три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой. Доказать, что каждая точка плоскости, проходящей через эти точки, остается неподвижной при этом движении.

2.63. Доказать, что все движения евклидова пространства E_n , оставляющие неподвижными k точек, составляют подгруппу группы движений.

2.64. Найти максимальное число линейно независимых точек, которые могут оставаться неподвижными при нетождественном движении евклидова пространства E_n .

2.65. Найти все движения евклидова пространства E_n , оставляющие на месте некоторую гиперплоскость Π . Показать, что эти движения составляют подгруппу группы движений евклидова пространства E_n .

2.66. Выяснить, какие из следующих формул задают преобразования подобия евклидова пространства E_3 , и найти коэффициент подобия:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 - x_3 + 3, \\ x'_2 = x_1 - x_2 + x_3 - 1, \\ x'_3 = -x_1 + x_2 + x_3 + 2; \end{cases} & \text{б)} \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 - x_3 + 1, \\ x'_2 = x_1 + x_2 + x_3 - 2, \\ x'_3 = x_1 + x_2 - x_3 - 5; \end{cases} \\ \text{в)} \quad \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5, \\ x'_2 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4, \\ x'_3 = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1; \end{cases} & \text{г)} \quad \begin{cases} x'_1 = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1, \\ x'_2 = x_1 + 3x_2 + \sqrt{6}x_3 - 1, \\ x'_3 = -x_1 + \sqrt{6}x_2 - 3x_3 + 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Указание. Из формул преобразования подобия (2) из § 14.3 [3] следует, что сумма квадратов коэффициентов при неизвестных каждой строки матрицы преобразования равна k^2 , где k — коэффициент подобия. Если это условие выполнено, то после вынесения коэффициента k из каждого элемента матрицы преобразования в случае подобия должна остаться ортогональная матрица.

2.67. Выяснить, какие из следующих формул задают преобразование подобия евклидова пространства E_4 . Найти коэффициент подобия:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \begin{cases} x'_1 = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 5, \\ x'_2 = -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2, \\ x'_3 = -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 1, \\ x'_4 = 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2; \end{cases} & \text{б)} \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 - 2x_2 - 7, \\ x'_2 = 2x_1 + x_2 + 3, \\ x'_3 = \sqrt{2}x_3 + \sqrt{3}x_4 - 1, \\ x'_4 = \sqrt{3}x_3 - \sqrt{2}x_4 + 2. \end{cases} \end{aligned}$$

2.68. Даны формулы преобразования подобия:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x_3 + 3, \\ x'_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{\sqrt{6}}{2}x_3 + 1, \quad \text{и} \quad \begin{cases} x'_1 = 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5, \\ x'_2 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 1, \\ x'_3 = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3 \end{cases} \\ x'_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{6}}{2}x_2 + x_3 - 2 \end{cases}$$

евклидова пространства E_3 . Написать: а) формулы преобразования подобия, являющегося композицией заданных преобразований; б) формулы преобразований, обратных к данным.

2.69. Написать формулы преобразования подобия евклидова пространства E_n , являющегося композицией гомотетии с коэффициентом $k = \frac{1}{2}$ и параллельного переноса на вектор $\vec{p} = (1; 1; \dots; 1)$. Найти образ точки $M(1; 2; 4; \dots; 2^{n-1})$ при этом преобразовании.

2.70. Найти формулы преобразования обратного к произведению преобразований подобия задачи 2.67.

2.71. Доказать, что для любых двух гиперсфер евклидова пространства E_n существует преобразование подобия, отображающее одну гиперсферу на другую. Показать, что все такие преобразования имеют общий коэффициент подобия, и найти этот коэффициент.

2.72. Как меняются площади плоских фигур при преобразовании подобия? (Плоской фигурой евклидова пространства E_n называется произвольное множество точек, принадлежащее некоторой двумерной плоскости этого пространства. Поэтому определение площади плоской фигуры применимо для пространства любой размерности $n \geq 2$.)

§ 8. Квадратичные формы в аффинном векторном пространстве

Литература: [1], § 70, 71; [2], раздел 2, § 29.1, 34; [3], § 16, 17.

3.1. Записать матрицу квадратичной формы $x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3$ в пространстве V_3 .

Решение. Квадратичная форма от трех переменных в пространстве V_3 имеет следующий вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^3 c_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^3 (c_{1i}x_i x_1 + c_{2i}x_i x_2 + c_{3i}x_i x_3) =$$

$$= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{21}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 + c_{23}x_2x_3 + c_{31}x_1x_3 + c_{32}x_2x_3 + c_{33}x_3^2;$$

так как $c_{ij} = c_{ji}$, то.

$$f(x_1, x_2, x_3) = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3.$$

Для данной квадратичной формы $c_{11} = 1$, $c_{22} = 0$, $c_{33} = -3$, $c_{12} = 2$, $c_{13} = -\frac{1}{2}$, $c_{23} = 0$; следовательно, ее матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.2. Записать матрицы следующих квадратичных форм:

- $5x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_2^2$ в V_2 ;
- $2x_1x_2 - x_1x_3 + 4x_2x_3$ в V_3 ;
- $2x_1^2 - x_1x_3 + 2x_2x_4 - 3x_3x_4$ в V_4 ;
- $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + x_1x_5 - 4x_1x_6 + 2x_2x_4 - 8x_3x_6$ в V_6 .

3.3. Записать квадратичную форму, если дана ее матрица:

- $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

- $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

является матрицей квадратичной формы

$$f(x_1, x_2) = c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2,$$

следовательно, искомая квадратичная форма имеет вид:

$$-x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2.$$

3.4. Произвести преобразование переменных в квадратичной форме $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$ по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Решение. 1-й способ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 = (y_1 - y_2 - y_3)(y_1 + y_2) + (y_1 + y_2)y_3 = y_1^2 - y_2^2.$$

Квадратичная форма оказалась приведенной к нормальному виду. 2-й способ. Если квадратичная форма с матрицей C подвергается линейному преобразованию переменных с матрицей A , то получается квадратичная форма с матрицей $D = A^T C A$, где A^T — матрица, получающаяся при транспонировании матрицы A .

Запишем квадратичную форму от трех переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3.$$

Так как $c_{ij} = c_{ji}$, то матрица данной квадратичной формы имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейное преобразование переменных x_1, x_2, x_3 можно записать в виде:

$$x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

или

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{cases}$$

где $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Матрица данного преобразования

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Мы получили матрицу искомой квадратичной формы $y_1^2 - y_2^2$.

3.5. Произвести преобразование переменных в квадратичной форме

$$7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

3.6. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_3x_4. \quad (1)$$

используя выделение полных квадратов, и записать формулы преобразования переменных.

Решение. Группируя члены, приведем квадратичную форму к виду:

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2 = \\ &= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2(x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2) = (x_1 + x_2)^2 - \\ &\quad - 2(x_3 + x_4)^2. \end{aligned}$$

Если положить

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3 + x_4, \\ y_4 = x_4, \end{cases} \quad (2)$$

то квадратичная форма (1) принимает канонический вид:

$$f = y_1^2 - 2y_3^2. \quad (3)$$

Так как определитель, составленный из коэффициентов при x_1, x_2, x_3, x_4 в уравнении (2), отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то их можно разрешить относительно этих переменных:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3 - y_4, \\ x_4 = y_4. \end{cases} \quad (4)$$

Это преобразование приводит квадратичную форму (1) к каноническому виду (3).

Заметим, что нельзя было бы положить, например,

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_3 + x_4, \\ y_3 = x_3, \\ y_4 = x_4, \end{cases}$$

так как определитель этой системы уравнений равен нулю и эта система не определяет линейного преобразования.

Заметим также, что в квадратичной форме (3) можно изменить нумерацию переменных, приведя форму (3) с помощью преобразования

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \\ y_4 = z_1 \end{cases}$$

к виду

$$z_1^2 - 2z_2^2. \quad (5)$$

В этом случае квадратичная форма (1) приводится к виду (5) преобразованием:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2, \\ x_2 = z_2, \\ x_3 = z_3 - z_4, \\ x_4 = z_4. \end{cases}$$

3.7. Привести к нормальному виду квадратичную форму

$$2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

используя выделение полных квадратов, и записать формулы преобразования.

Решение.

$$\begin{aligned} 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_1^2 - x_2^2 - \\ &- x_3^2 + 2x_1x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_1^2 - (x_1 - x_3)^2. \end{aligned}$$

С помощью формул

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_3, \\ y_3 = x_1 - x_3, \end{cases}$$

где $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2,$

данная квадратичная форма приводится к нормальному виду:

$$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Из указанной системы находим:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3), \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = \frac{1}{2}(y_1 - y_3 - y_3). \end{cases}$$

Это и есть формулы преобразования, приводящего данную квадратичную форму к нормальному виду.

3.8. Привести к каноническому виду квадратичную форму, используя выделение полных квадратов, и указать преобразование, приводящее данную форму к этому виду:

- $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_3^2;$
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4;$
- $2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3;$
- $x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

3.9. Привести квадратичную форму

$$f = 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4 \quad (1)$$

к нормальному виду и записать формулы преобразования переменных.

Решение. Квадратичная форма (1) не содержит квадратов переменных. Введем новые переменные по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3 + y_4, \\ x_4 = y_3 - y_4. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда член $4x_1x_2$ преобразуется в разность квадратов $4y_1^2 - 4y_2^2$, член $4x_3x_4$ — в $4y_3^2 - 4y_4^2$, а данная квадратичная форма примет вид:

$$f = 4y_1^2 - 4y_2^2 + 8y_2y_4 + 4y_3^2 - 4y_4^2$$

(см., например, 17.2 в [3]).

Группируя члены, будем иметь:

$$f = 4y_1^2 + 4y_3^2 - 4(y_2 - y_4)^2.$$

Положив

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_3, \\ z_3 = y_2 - y_4, \\ z_4 = y_4, \end{cases} \quad (3)$$

получим канонический вид квадратичной формы:

$$f = 4z_1^2 + 4z_2^2 - 4z_3^2. \quad (4)$$

Чтобы получить линейное преобразование, непосредственно приводящее данную квадратичную форму (1) к каноническому виду (4), найдем сначала преобразование, обратное преобразованию (3):

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_3 + z_4, \\ y_3 = z_2, \\ y_4 = z_4, \end{cases} \quad (5)$$

а затем произведение преобразований (2) и (5):

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_3 + z_4, \\ x_2 = z_1 - z_3 - z_4, \\ x_3 = z_2 + z_4, \\ x_4 = z_2 - z_4. \end{cases} \quad (6)$$

Если подставить полученные значения x_1, x_2, x_3, x_4 в форму (1), то сразу придем к форме (4).
Наконец, от канонического вида (4) с помощью преобразования

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}u_1, \\ z_2 = \frac{1}{2}u_2, \\ z_3 = \frac{1}{2}u_3, \\ z_4 = u_4 \end{cases} \quad (7)$$

перейдем к нормальному виду:

$$f = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2. \quad (8)$$

Преобразование, переводящее квадратичную форму (1) непосредственно к виду (8), является произведением преобразований (6) и (7). Оно имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3 + u_4, \\ x_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_3 - u_4, \\ x_3 = \frac{1}{2}u_3 + u_4, \\ x_4 = \frac{1}{2}u_3 - u_4. \end{cases}$$

3.10. Найти (как в задачах 3.6, 3.7, 3.9) нормальный вид квадратичной формы и указать преобразование, приводящее данную форму к этому виду:

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_4 + 2x_1x_3 + 2x_3x_4;$
- $x_1x_3 + x_1x_4 - x_1x_2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4;$
- $2x_3x_4 - x_3x_2.$

3.11. Привести к нормальному виду квадратичную форму $f = 2x_1^2 + 11x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 20x_1x_3 + 16x_2x_3,$ (1) используя способ Лагранжа.

Решение. Так как в форме (1) имеется член $2x_1^2$ и еще члены, содержащие переменную x_1 , то выделим их сумму:

$$f = (2x_1^2 + 4x_1x_2 - 20x_1x_3) + 11x_2^2 + 5x_3^2 + 16x_2x_3;$$

$$i = 1, c_{11} = 2, c_{12} = 2, c_{13} = -10,$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = 2x_1 + 2x_2 - 10x_3,$$

$$y_1^2 = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 100x_3^2 + 8x_1x_2 - 40x_1x_3 - 40x_2x_3;$$

$$\frac{1}{c_{11}} = \frac{1}{2}, f - \frac{1}{2}y_1^2 = 11x_2^2 + 5x_3^2 + 16x_2x_3 - 2x_2^2 + 20x_2x_3 - 50x_3^2 = 9x_2^2 - 45x_3^2 + 36x_2x_3.$$

Полагая

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 2x_2 - 10x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \quad (2)$$

получим:

$$f = y_1^2 + (9y_2^2 - 45y_3^2 + 36y_2y_3).$$

Снова применим способ Лагранжа, на этот раз к квадратичной форме

$$9y_2^2 - 45y_3^2 + 36y_2y_3,$$

60

а еще лучше к форме

$$g = y_2^2 - 5y_3^2 + 4y_2y_3.$$

Выделим члены, содержащие переменную y_2 :

$$\begin{aligned} g &= (y_2^2 + 4y_2y_3) - 5y_3^2, \\ i &= 2, d_{12} = 0, d_{22} = 1, d_{32} = 2, \\ z_2 &= d_{12}y_1 + d_{22}y_2 + d_{32}y_3 = y_2 + 2y_3, \\ z_3 &= y_2^2 + 4y_2y_3 + 4y_3^2, \\ \frac{1}{d_{22}} &= 1, g - z_2^2 = 9y_3^2. \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2 + 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases} \quad (3)$$

получим:

$$g = z_2^2 - 9z_3^2.$$

Так как $f = y_1^2 + 9g$, то

$$f = z_1^2 + 9(z_2^2 - 9z_3^2)$$

или

$$f = z_1^2 + 9z_2^2 - 81z_3^2. \quad (4)$$

Таким образом, квадратичная форма (1) приведена к каноническому виду.

Чтобы получить линейное преобразование, непосредственно приводящее данную квадратичную форму (1) к каноническому виду (4), найдем сначала преобразования, обратные преобразованиям (2) и (3):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 - y_3 - 5y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2 - 2z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$$

а затем произведение полученных преобразований:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}z_1 - z_2 - 3z_3, \\ x_2 = z_2 - 2z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases} \quad (5)$$

Если подставить полученные значения x_1, x_2, x_3 в форму (1), то сразу приходим к форме (4).

От канонического вида (4) с помощью линейного преобразования

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}u_1, \\ z_2 = \frac{1}{3}u_2, \\ z_3 = \frac{1}{9}u_3 \end{cases}$$

перейдем к нормальному виду:

$$f = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (6)$$

данной квадратичной формы.

Линейным преобразованием, непосредственно приводящим форму (1) к виду (6), является:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 - \frac{1}{3} u_2 - \frac{1}{3} u_3, \\ x_2 = \frac{1}{3} u_2 - \frac{2}{9} u_3, \\ x_3 = \frac{1}{9} u_3. \end{cases}$$

Проверьте справедливость такого утверждения подстановкой этих выражений в (1).

3.12. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = 4x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4. \quad (1)$$

Решение. Так как форма (1) не содержит квадратов переменных, то введем новые переменные так, чтобы член $4x_1x_2$ преобразовался в $y_1^2 - y_2^2$. Для этого полагаем:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2, \\ x_2 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2} y_2, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} f &= 4 \left(\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 \right) \left(\frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2} y_2 \right) - 2 \left(\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 \right) y_4 - \\ &\quad - 2 \left(\frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2} y_2 \right) y_4 + 4y_3y_4 = y_1^2 - y_2^2 - 2y_1y_4 + 4y_3y_4. \end{aligned} \quad (3)$$

Применим к форме (3) способ Лагранжа. Выделим сумму членов, содержащих переменную y_1 :

$$\begin{aligned} f &= (y_1^2 - 2y_1y_4) - y_2^2 + 4y_3y_4, \\ i &= 1, \quad c_{11} = 1, \quad c_{12} = 0, \quad c_{13} = 0, \quad c_{14} = -1; \\ z_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 + c_{14}y_4 = y_1 - y_4, \\ z_1^2 &= y_1^2 - 2y_1y_4 + y_4^2, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c_{11}} = 1, \quad f - z_1^2 = -y_2^2 - y_4^2 + 4y_3y_4.$$

Полагая

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_4, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \\ z_4 = y_4. \end{cases} \quad (4)$$

получим:

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_4^2 + 4z_3z_4.$$

Снова применяем способ Лагранжа, на этот раз к квадратичной форме:

$$\begin{aligned} g &= -z_2^2 + 4z_3z_4, \\ i &= 4, \quad d_{14} = 0, \quad d_{34} = 0, \quad d_{34} = 2, \quad d_{44} = -1; \\ u_4 &= d_{14}z_1 + d_{24}z_2 + d_{34}z_3 + d_{44}z_4 = 2z_3 - z_4, \\ u_4^2 &= 4z_3^2 - 4z_3z_4 + z_4^2, \\ \frac{1}{d_{44}} &= -1, \quad g + u_4^2 = 4z_3^2. \end{aligned}$$

При

$$\begin{cases} u_1 = z_1, \\ u_2 = z_2, \\ u_3 = z_3, \\ u_4 = 2z_3 - z_4 \end{cases} \quad (5)$$

получим:

$$g = 4u_3^2 - u_4^2.$$

Так как $f = z_1^2 - z_2^2 + g$, то

$$f = u_1^2 - u_2^2 + 4u_3^2 - u_4^2. \quad (6)$$

Таким образом, квадратичная форма (1) приведена к каноническому виду.

Чтобы получить линейное преобразование, непосредственно приводящее форму (1) к виду (6), найдем сначала преобразования, обратные преобразованиям (4) и (5):

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_4, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \\ y_4 = z_4, \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = u_1, \\ z_2 = u_2, \\ z_3 = u_3, \\ z_4 = 2u_3 - u_4, \end{cases}$$

а затем произведение преобразования (2) и полученных преобразований:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2 + 2u_3 - u_4), \\ x_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2 + 2u_3 - u_4), \\ x_3 = u_3, \\ x_4 = 2u_3 - u_4. \end{cases} \quad (7)$$

Если подставить полученные значения x_1, x_2, x_3, x_4 в форму (1), то сразу придем к форме (6).

От вида (6) с помощью линейного преобразования

$$\begin{cases} v_1 = u_1, \\ v_2 = u_2, \\ v_3 = 2u_3, \\ v_4 = u_4 \end{cases}$$

можно перейти к нормальному виду:

$$f = v_1^2 - v_2^2 + v_3^2 - v_4^2. \quad (8)$$

Линейным преобразованием, непосредственно приводящим квадратичную форму (1) к виду (8), является:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 + v_3 - v_4), \\ x_2 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4), \\ x_3 = \frac{1}{2}v_3, \\ x_4 = v_3 - v_4. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. Приводя квадратичную форму к каноническому виду различными способами, можно получить разные ответы; это следует иметь в виду при решении задач.

3.13. Привести квадратичную форму к каноническому виду и найти формулы соответствующего линейного преобразования переменных:

- $x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3;$
- $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$
- $x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3;$
- $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4;$
- $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2;$
- $x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4;$
- $2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4.$

3.14. Привести квадратичную форму к нормальному виду и найти формулы соответствующего линейного преобразования переменных:

- $x_1x_2 + x_2x_3;$
- $4x_1^2 + 12x_2^2 - 13x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_2x_3;$
- $x_1^2 + 18x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 30x_2x_3;$
- $x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_1x_4;$
- $4x_1^2 + 5x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_1x_2 - 20x_1x_3 - 18x_2x_3;$
- $x_1^2 + 5x_2^2 + 24x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3;$
- $x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 6x_3x_4;$
- $x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4;$
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_4;$
- $-4x_2x_4 + 6x_3x_4 + 2x_4x_5;$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4;$
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$

Л и т е р а т у р а: [1], § 71.4; [2], раздел 2, § 36; [3], § 18.

Чтобы установить, является ли квадратичная форма положительно определенной, можно привести ее к каноническому виду и воспользоваться теоремой из § 18.3 в [3].

Квадратичная форма из задачи 3.11 является положительно определенной в пространстве V_3 ; квадратичные формы из задач 3.4 и 3.7 не являются положительно определенными в пространстве V_3 , а квадратичные формы из задач 3.6, 3.9 и 3.12 не являются положительно определенными в пространстве V_4 .

3.15. Выяснить, является ли квадратичная форма положительно определенной в пространстве V_3 :

- $4x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2;$
- $4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2;$
- $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2;$

в пространстве V_3 :

- $x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3;$
- $4x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3;$
- $2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3;$
- $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2;$
- $4x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3;$

в пространстве V_4 :

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4;$
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4;$
- $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4;$
- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4.$

§ 9. Квадрики в аффинном пространстве

Л и т е р а т у р а: [1], § 72; [2], раздел 2, § 38; [3], § 19, 20.

3.16. В пространстве A_4 найти пересечение квадрики

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_3x_4 + 4x_2 + 6x_4 - 10 = 0$$

и прямой

$$x_1 - 2 = \frac{x_2 + 1}{2} = x_3 + 2 = \frac{x_4 - 1}{-2}.$$

Р е ш е н и е. Перейдем к параметрическим уравнениям прямой ([3], § 5.1):

$$\begin{cases} x_1 = t + 2, \\ x_2 = 2t - 1, \\ x_3 = t - 2, \\ x_4 = -2t + 1. \end{cases} \quad (1)$$

Подставив эти значения в уравнение квадрики, после упрощения получим:

$$t^2 - 1 = 0, \\ t_1 = 1, t_2 = -1.$$

После подстановки каждого из этих значений t в уравнение (1) найдем две точки $(3; 1; -1; -1)$ и $(1; -3; -3; 3)$; совокупность этих точек и является искомым пересечением.

3.17. В A_3 дана квадрика

$$x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_3 + 2 = 0.$$

Найти пересечение этой квадрики и:

а) прямой $\frac{x_1 - 1}{2} = x_2 = \frac{x_3 - 3}{3};$

б) прямой $\frac{x_1}{3} = x_2 + 1 = \frac{x_3 - 1}{4};$

в) прямой $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 7 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 6 = 0; \end{cases}$

г) плоскости $x_3 = 1;$

д) квадрики $x_2^2 + 3x_1x_2 + 2x_3 - 2 = 0.$

3.18. В A_4 дана квадрика

$$3x_1^2 + x_2x_4 - 2x_3x_4 - x_2 - x_4 = 0.$$

Найти пересечение этой квадрики и:

а) прямой $x_1 - 1 = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = x_4 - 1;$

б) прямой, проходящей через точки $(0; 1; -1; 0)$ и $(1; 3; 2; 4);$

в) плоскости $x_2 = x_3 = 0;$

г) гиперплоскости $x_4 = 0;$

д) плоскости P_3 , проходящей через начало координат и прямую $x_1 = x_2 = x_4 = 1.$

3.19. В пространстве A_3 найти те прямые, образующие квадрики

$$x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_2x_3 + 6x_3 - 4 = 0,$$

которые параллельны прямой

$$\frac{x_1 + 2}{3} = \frac{x_2}{2} = x_3 - 3.$$

Решение. Учитывая условие параллельности двух прямых, замечаем, что искомая прямая имеет уравнение вида:

$$\frac{x_1 - a}{3} = \frac{x_2 - b}{2} = x_3 - c. \quad (1)$$

Так как эта прямая не параллельна плоскости $x_3 = 0$, то за точку $(a; b; c)$ можно принять их пересечение; тогда $c = 0$. Из уравнений (1) получим:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 + a, \\ x_2 = 2x_3 + b. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение квадрики, будем иметь:

$$(6a - 6b + 12)x_3 + (a^2 - 2b^2 + 6b - 4) = 0.$$

Так как все точки прямой образующей принадлежат квадрике, то последнее равенство является тождеством относительно x_3 ; поэтому

$$\begin{cases} 6a - 6b + 12 = 0, \\ a^2 - 2b^2 + 6b - 4 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $\begin{cases} a_1 = -2, \\ b_1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} a_2 = 0, \\ b_2 = 2. \end{cases}$

Искомые прямые являются

$$\frac{x_1 + 2}{3} = \frac{x_2}{2} = x_3 \quad \text{и} \quad \frac{x_1}{3} = \frac{x_2 - 2}{2} = x_3.$$

3.20. Найти прямые, образующие квадрики

$$x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + 6x_2x_3 + x_1 + 2x_3 = 0$$

пространства A_3 , проходящие через начало координат.

Укажем. Любую прямую, проходящую через начало координат, можно представить уравнениями $x_1 = tm$, $x_2 = tn$, $x_3 = tp$. Если прямая целиком лежит на квадрике, то, исключая из этих уравнений и из уравнения квадрики координаты x_1 , x_2 , x_3 , получим квадратное уравнение относительно t , коэффициенты которого равны нулю.

3.21. Доказать, что плоскость $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 1 = 0$ пересекает квадрику $x_1^2 - 3x_2^2 + 6x_2x_3 - 6x_3 + 2 = 0$ по двум прямым. Найти уравнения этих прямых.

3.22. В пространстве A_3 найти те прямые, образующие квадрики $2x_1^2 + x_1x_2 - x_3^2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 - 3x_1 - x_2 + 4 = 0$, которые параллельны координатной оси Ox_3 .

3.23. Доказать, что гиперплоскость $3x_1 - 2x_2 + x_4 - 1 = 0$ пересекает в пространстве A_4 квадрику

$$9x_1^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 + 3x_1x_4 + 2x_2x_4 - 2x_3 + x_4 - 1 = 0$$

по паре двумерных плоских образующих. Найти уравнения этих образующих.

3.24. В пространстве A_4 найти прямые, образующие квадрики $x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + 5 = 0$, проходящие через точку $(0; -2; 1; -3)$ и лежащие на плоскости $x_3 - 1 = 0$.

3.25. Доказать, что уравнение

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 - 12 = 0 \quad (1)$$

квадрики пространства A_3 можно привести к нормальному виду двумя способами: по формулам

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 6, \\ x_2 = 4 - \frac{1}{2}y_2 \end{cases} \quad (2)$$

и по формулам

$$\begin{cases} x_1 = z_2 - \frac{13}{2}, \\ x_2 = \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{15}{4} \end{cases} \quad (3)$$

Указать вид квадрики, а также ее расположение относительно исходной системы координат.

Решение. Сначала преобразуем уравнение (1) по формулам (2):

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2 - 6)^2 + 4(y_1 + y_2 - 6)\left(4 - \frac{1}{2}y_2\right) + 4\left(4 - \frac{1}{2}y_2\right)^2 - \\ - 4(y_1 + y_2 - 6) - 4\left(4 - \frac{1}{2}y_2\right) - 12 = 0. \end{aligned}$$

После упрощения получим:

$$y_1^2 = 2y_2 - \quad (4)$$

нормальный вид уравнения параболы.

По теореме, доказанной в [3] § 3.2, следует, что формулы вида:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_1, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_2, \end{cases}$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

могут рассматриваться как формулы перехода от аффинной системы координат Ox_1x_2 к аффинной системе координат $O'y_1y_2$, т. е. от репера $R(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ к реперу $R'(O'; \vec{e}'_1; \vec{e}'_2)$, где

$$O' (a_1; a_2)_R, \vec{e}'_1 = (a_{11}; a_{21})_R, \vec{e}'_2 = (a_{12}; a_{22})_R.$$

Поэтому и формулы (2) являются формулами перехода от репера $R(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ к реперу $R'(O'; \vec{e}'_1; \vec{e}'_2)$, где

$$O' (-6; 4)_R, \vec{e}'_1 = (1; 0)_R, \vec{e}'_2 = \left(1; -\frac{1}{2}\right)_R.$$

Теперь преобразуем уравнение (1) по формулам (3):

$$\begin{aligned} \left(z_2 - \frac{13}{2}\right)^2 + 4\left(z_2 - \frac{13}{2}\right)\left(\frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{15}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{15}{4}\right)^2 - \\ - 4\left(z_2 - \frac{13}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_2 + \frac{15}{4}\right) - 12 = 0. \end{aligned}$$

После упрощений получим также нормальный вид уравнения параболы

$$z_1^2 = 2z_2. \quad (5)$$

Формулы (3) являются формулами перехода от аффинной системы координат Ox_1x_2 к новой аффинной системе координат $O''z_1z_2$ — реперу $R''(O''; \vec{e}''_1; \vec{e}''_2)$, где

$$O'' \left(-6\frac{1}{2}; 3\frac{3}{4}\right)_R, \vec{e}''_1 = \left(0; \frac{1}{2}\right)_R, \vec{e}''_2 = \left(1; -\frac{1}{2}\right)_R.$$

Расположение систем координат $O'y_1y_2$ и $O''z_1z_2$, а также параболы относительно исходной аффинной системы координат Ox_1x_2 указано на рисунке 1.

3.26. Доказать, что уравнение

$$4x_1x_2 - x_2^2 - 8x_1 + 8x_2 - 8 = 0$$

квадрики пространства A_2 можно привести к нормальному виду двумя способами: по формулам

$$\begin{cases} x_1 = y_2 - 1, \\ x_2 = 2y_2 - 2y_1 + 2 \end{cases}$$

и по формулам

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}z_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}z_2 - 1, \\ x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}z_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}z_1 + 2. \end{cases}$$

Указать вид квадрики, а также ее расположение относительно исходной аффинной системы координат.

3.27. Доказать, что уравнение

$$x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 3 = 0 \quad (1)$$

квадрики пространства A_3 можно привести к нормальному виду

двумя способами: по формулам

$$\begin{cases} x_1 = y_3 - y_2 - \frac{1}{2}y_1 - 1, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 + y_2, \\ x_3 = 1 - \frac{1}{2}y_1 \end{cases} \quad (2)$$

и по формулам

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}z_1 + z_2 + z_3 - 1, \\ x_2 = -\frac{1}{2}z_1 - z_2, \\ x_3 = \frac{1}{2}z_1 + 1. \end{cases} \quad (3)$$

Указать вид квадратики и расположение новых аффинных систем координат относительно исходной аффинной системы координат.

Решение. Преобразуем уравнение (1) по формулам (2):

$$\begin{aligned} & \left(y_3 - y_2 - \frac{1}{2}y_1 - 1 \right)^2 - 5 \left(1 - \frac{1}{2}y_1 \right)^2 + 2 \left(y_3 - y_2 - \frac{1}{2}y_1 - 1 \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{2}y_1 + y_2 \right) - 2 \left(\frac{1}{2}y_1 + y_2 \right) \left(1 - \frac{1}{2}y_1 \right) + 2 \left(y_3 - y_2 - \frac{1}{2}y_1 - 1 \right) + \\ & + 4 \left(\frac{1}{2}y_1 + y_2 \right) + 10 \left(1 - \frac{1}{2}y_1 \right) - 3 = 0. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим:

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1.$$

Это нормальный вид уравнения однополостного гиперболоида.

Формулы (2) можно рассматривать как формулы перехода от данной аффинной системы координат $Ox_1x_2x_3$ — репера $R(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ к аффинной системе координат $O'y_1y_2y_3$ — реперу $R'(O'; \vec{e}'_1; \vec{e}'_2; \vec{e}'_3)$, где

$$\begin{aligned} O'(-1; 0; 1)_R, \quad \vec{e}'_1 &= \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)_R, \\ \vec{e}'_2 &= (-1; 1; 0)_R, \quad \vec{e}'_3 = (1; 0; 0)_R. \end{aligned}$$

По формулам (3) получим:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}z_1 + z_2 + z_3 - 1 \right)^2 - 5 \left(\frac{1}{2}z_1 + 1 \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{2}z_1 + z_2 + z_3 - 1 \right) \times \\ & \times \left(-\frac{1}{2}z_1 - z_2 \right) - 2 \left(-\frac{1}{2}z_1 - z_2 \right) \left(\frac{1}{2}z_1 + 1 \right) + 2 \left(\frac{1}{2}z_1 + z_2 + z_3 - \right. \\ & \left. - 1 \right) + 4 \left(-\frac{1}{2}z_1 - z_2 \right) + 10 \left(\frac{1}{2}z_1 + 1 \right) - 3 = 0 \end{aligned}$$

или

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 1.$$

Это тоже нормальный вид уравнения однополостного гиперболоида.

Формулы (3) можно рассматривать как формулы перехода от данной системы координат к новой аффинной системе координат $Oz_1z_2z_3$ — реперу $R''(O''; \vec{e}''_1; \vec{e}''_2; \vec{e}''_3)$, где

$$\begin{aligned} O''(-1; 0; 1)_R, \quad \vec{e}''_1 &= \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)_R, \\ \vec{e}''_2 &= (1; -1; 0)_R, \quad \vec{e}''_3 = (1; 0; 0)_R. \end{aligned}$$

3.28. Доказать, что уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 2x_1 - 6x_2 + + 4x_3 + 5 = 0$$

квадратики пространства A_3 можно привести к нормальному виду двумя способами:

по формулам

$$\begin{cases} x_1 = 6y_1 + 4y_2 - 4y_3 - 3, \\ x_2 = 2y_1 - 2, \\ x_3 = 2y_3 - 2y_1 + 1 \end{cases}$$

и по формулам

$$\begin{cases} x_1 = 2z_1 - 3, \\ x_2 = 6z_1 + 4z_2 - 4z_3 - 2, \\ x_3 = 2z_3 - 2z_1 + 1. \end{cases}$$

Указать вид квадратики и расположение новых аффинных систем координат относительно исходной аффинной системы координат.

3.29. Привести к нормальному виду уравнение

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 - 3 = 0 \quad (1)$$

квадратики пространства A_2 .

Решение. 1-й способ. Приведем к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$, содержащуюся в левой части уравнения (1). Для этого воспользуемся способом Лагранжа: $t = 1$, $c_{11} = 5$, $c_{12} = 2$;

$$\begin{aligned} u_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = 5x_1 + 2x_2, \\ u_1^2 &= 25x_1^2 + 20x_1x_2 + 4x_2^2, \\ \frac{1}{c_{11}} &= \frac{1}{5}, \quad f - \frac{1}{5}u_1^2 = x_2^2 - \frac{4}{5}x_2 = \frac{1}{5}x_2^2, \\ c_{11} & \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_1 = 5x_1 + 2x_2 \\ u_2 = x_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f = \frac{1}{5}u_1^2 + \frac{1}{5}u_2^2.$$

Из системы уравнений (2) находим:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}u_1 - \frac{2}{5}u_2, \\ x_2 = u_2. \end{cases} \quad (3)$$

Если эти равенства рассматривать как формулы перехода от исходной аффинной системы координат Ox_1x_2 к аффинной системе координат $O'u_1u_2$, то в новой системе координат уравнение данной кватрики будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}u_1^2 + \frac{1}{5}u_2^2 - 2\left(\frac{1}{5}u_1 - \frac{2}{5}u_2\right)u_2 - 2u_2 - 3 &= 0, \\ \frac{1}{5}u_1^2 + \frac{1}{5}u_2^2 - \frac{2}{5}u_1 - \frac{6}{5}u_2 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Выделим теперь в левой части полученного уравнения полные квадраты:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}(u_1^2 - 2u_1 + 1) - \frac{1}{5} + \frac{1}{5}(u_2^2 - 6u_2 + 9) - \frac{9}{5} - 3 &= 0, \\ (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 3)^2 &= 25. \end{aligned}$$

С помощью преобразования координат по формулам

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{5}(u_1 - 1), \\ y_2 = \frac{1}{5}(u_2 - 3) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u_1 = 5y_1 + 1, \\ u_2 = 5y_2 + 3 \end{cases} \quad (4)$$

уравнение кватрики приводится к нормальному виду:

$$y_1^2 + y_2^2 = 1. \quad (5)$$

Кватрика (1) является эллипсом.

Сопоставляя формулы (3) и (4), найдем формулы:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 1, \\ x_2 = 5y_2 + 3 \end{cases}$$

перехода от первоначальной аффинной системы координат Ox_1x_2 к системе координат $O'y_1y_2$, относительно которой уравнение кватрики имеет нормальный вид. Начало и координатные векторы новой аффинной системы координат имеют в исходной системе координаты (см. § 3.2 в [3]): $O'(-1; 3)$, $\vec{e}_1' = (1; 0)$, $\vec{e}_2' = (-2; 5)$. 2-й способ. Приведем к каноническому виду ту же кватричную форму

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

тоже способом Лагранжа, но другим путем: $i = 2$, $d_{12} = 2$, $d_{22} = 1$;

$$\begin{aligned} u_2 &= d_{12}x_1 + d_{22}x_2 = 2x_1 + x_2, \\ v_2^2 &= 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{u_2} = 1, \quad f - v_2^2 = 5x_1^2 - 4x_1^2 = x_1^2;$$

$$\begin{cases} v_1 = x_1, \\ v_2 = 2x_1 + x_2, \\ f = v_1^2 + v_2^2. \end{cases} \quad (6)$$

Из системы (6)

$$\begin{cases} x_1 = v_1, \\ x_2 = v_2 - 2v_1. \end{cases} \quad (7)$$

Рассматривая равенства (7) как формулы перехода от исходной аффинной системы координат Ox_1x_2 к аффинной системе координат $O'v_1v_2$, получим относительно новой системы уравнение данной кватрики (1) в виде:

$$\begin{aligned} v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 - 2(v_2 - 2v_1) - 3 &= 0, \\ v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 - 2v_2 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Записав это уравнение иначе:

$$(v_1 + 1)^2 + (v_2 - 1)^2 = 5$$

и воспользовавшись преобразованием координат по формулам:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(v_1 + 1), \\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(v_2 - 1) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} v_1 = \sqrt{5}z_1 - 1, \\ v_2 = \sqrt{5}z_2 + 1, \end{cases} \quad (8)$$

получим относительно аффинной системы координат $O'z_1z_2$ нормальное уравнение эллипса:

$$z_1^2 + z_2^2 = 1. \quad (9)$$

Из формул (7) и (8) находим:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{5}z_1 - 1, \\ x_2 = -2\sqrt{5}z_1 + \sqrt{5}z_2 + 3. \end{cases}$$

Следовательно, начало и координатные векторы системы $O'z_1z_2$ относительно исходной системы имеют координаты:

$$O'(-1; 3) = O', \quad \vec{e}_1' = (\sqrt{5}; -2\sqrt{5}), \quad \vec{e}_2' = (0; \sqrt{5}).$$

Изображение эллипса и систем координат $O'y_1y_2$ и $O'z_1z_2$ относительно Ox_1x_2 дано на рисунке 2.

3.30. Привести к нормальному виду уравнение $4x_1x_2 - 3x_2^2 + 8x_1 = 0$ кватрики пространства A_3 .

Установить вид кватрики, записать формулы перехода к новой аффинной системе координат, найти координаты нового начала и новых координатных векторов относительно старой системы координат.

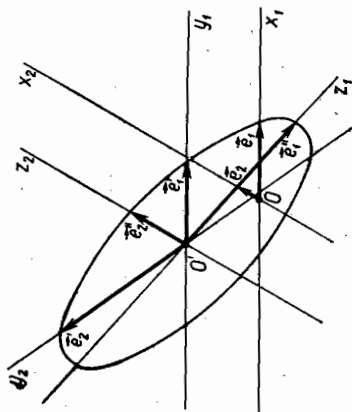


Рис. 2

Решение. Найдем канонический вид квадратичной формы:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 4x_1x_2 - 3x_2^2 \\ \text{способом Лагранжа: } i=2, c_{12} &= 2, c_{22} = -3; \\ u_2 &= c_{12}x_1 + c_{22}x_2 = 2x_1 - 3x_2, \\ u_2^2 &= 4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2, \\ \frac{1}{c_{22}} &= -\frac{1}{3}, f + \frac{1}{3}u_2^2 = \frac{4}{3}x_1^2. \end{aligned}$$

Используя формулы

$$\begin{cases} u_1 = x_1, \\ u_2 = 2x_1 - 3x_2, \end{cases}$$

получим:

$$f = \frac{4}{3}u_1^2 - \frac{1}{3}u_2^2.$$

Рассматривая формулы

$$\begin{cases} x_1 = u_1, \\ x_2 = \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2 \end{cases}$$

как формулы преобразования координат, получим относительно новой системы ou_1u_2 уравнение данной квадратички в виде:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}u_1^2 - \frac{1}{3}u_2^2 + 8u_1 &= 0, \quad \frac{4}{3}(u_1^2 + 6u_1 + 9) - 12 - \frac{1}{3}u_2^2 = 0, \\ \frac{(u_1 + 3)^2}{9} - \frac{u_2^2}{36} &= 1. \end{aligned}$$

Перейдем от системы координат ou_1u_2 к системе $O'y_1y_2$ по формулам:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{3}(u_1 + 3), \\ y_2 = \frac{1}{6}u_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u_1 = 3y_1 - 3, \\ u_2 = 6y_2 \end{cases}$$

и найдем искомое уравнение квадратички в системе $O'y_1y_2$:

$$y_1^2 - y_2^2 = 1,$$

которое, как известно, определяет гиперболу. Так как

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 - 3, \\ x_2 = 2y_1 - 2y_2 - 2, \end{cases}$$

то относительно системы координат Ox_1x_2 :

$$O'(-3, -2), e_1 = (3, 2), e_2 = (0, -2).$$

Изображения аффинных систем координат Ox_1x_2 и $O'y_1y_2$, а также гиперболы указаны на рисунке 3.

3.31. Привести к нормальному виду уравнение

$$x_2^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 7x_2 + 10 = 0$$

квадрати пространства A_2 .

Установить вид квадратички, записать формулы перехода к новой аффинной системе координат, найти координаты нового начала и новых координатных векторов относительно старой системы координат.

Решение. Квадратичную форму $f = x_2^2 - x_1x_2$ приведем к каноническому виду способом Лагранжа: $i=2, c_{12} = -\frac{1}{2}, c_{22} = 1$;

$$\begin{aligned} z_2 &= -\frac{1}{2}x_1 + x_2, \quad z_2^2 = \frac{1}{4}x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2, \\ \frac{1}{c_{22}} &= 1, \quad f - z_2^2 = -\frac{1}{4}x_1^2, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = -\frac{1}{2}x_1 + x_2, \\ f = -\frac{1}{4}z_1^2 + z_2^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = z_1, \\ x_2 = \frac{1}{2}z_1 + z_2 \end{cases}$$

С помощью формул

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4}z_1^2 + z_2^2 - 5z_1 + 7\left(\frac{1}{2}z_1 + z_2\right) + 10 = 0, \\ &-\frac{1}{4}(z_1^2 + 6z_1 + 9) + \frac{9}{4} + \left(z_2^2 + 7z_2 + \frac{49}{4}\right) - \frac{49}{4} + 10 = 0, \\ &-\frac{(z_1 + 3)^2}{4} + \left(z_2 + \frac{7}{2}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Если} \begin{cases} z_1 = 2y_2 - \frac{3}{2}, \\ z_2 = y_1 - \frac{7}{2}, \end{cases}$$

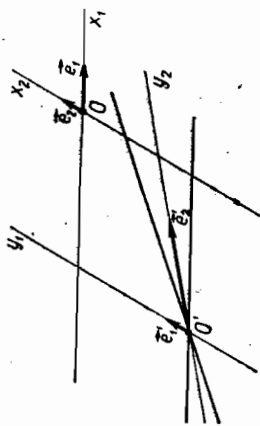


Рис. 4

то уравнение данной квадратички запишется в нормальном виде:

$$y_1^2 - y_2^2 = 0.$$

Квадрика является парой пересекающихся прямых. Так как

$$\begin{cases} x_1 = 2y_2 - 3, \\ x_2 = y_1 + y_2 - 5, \end{cases}$$

то начало O' и координатные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ новой аффинной системы координат $O'y_1y_2$ определяются так:

$$\begin{aligned} O'(-3; -5), \vec{e}_1' = (0; 1), \vec{e}_2' = (2; 1); \\ y_1 - y_2 = 0 \text{ и } y_1 + y_2 = 0 \end{aligned}$$

уравнения пересекающихся прямых относительно этой системы координат $O'y_1y_2$ (см. рис. 4).

3.32. Привести к нормальному виду уравнение квадратички пространства A_3 . Установить вид квадратички, записать формулы перехода к новой аффинной системе координат, найти координаты нового начала и новых координатных векторов относительно старой системы координат.

- $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 - 12 = 0;$
- $4x_1x_2 - x_2^2 - 8x_1 + 8x_2 - 8 = 0;$
- $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 5 = 0;$
- $4x_1x_2 - 3x_2^2 + 12x_2 - 12 = 0;$
- $x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 - 2 = 0;$
- $-x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2 + 12x_1 + 28x_2 + 28 = 0;$
- $x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1 + 12x_2 + 8 = 0;$
- $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 - 10x_2 + 25 = 0;$
- $x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 - 7 = 0;$
- $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 - 16 = 0;$
- $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 8x_1 - 8 = 0;$
- $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 + 36 = 0;$
- $4x_1x_2 - 12x_1 - 4x_2 + 11 = 0;$
- $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 8x_1 + 24x_2 + 8 = 0;$
- $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 + 14x_2 - 53 = 0;$
- $8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_2 = 0;$
- $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1 - 2x_2 + 6 = 0;$
- $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 - 14x_2 + 25 = 0;$
- $5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9 = 0.$

3.33. Привести к нормальному виду уравнение

$$4x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 8x_1 + 20x_2 + 4x_3 + 24 = 0 \quad (1)$$

квадрики пространства A_3 .

Установить вид квадратички, записать формулы перехода к новой аффинной системе координат, найти координаты нового начала и новых координатных векторов относительно исходной аффинной системы координат.

Решение. Найдем по способу Лагранжа канонический вид квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

содержащейся в левой части уравнения (1): $i = 1, c_{11} = 4, c_{13} = 2, c_{33} = 2;$

$$\begin{aligned} z_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ z_1^2 &= 16x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 16x_1x_2 + 16x_1x_3 + 8x_2x_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{11}} = \frac{1}{4}, \quad f - \frac{1}{4}z_1^2 &= 5x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_2x_3 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 = \\ &= 4x_2^2 - 4x_3^2. \end{aligned}$$

Используя формулы

$$\begin{cases} z_1 = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ z_2 = x_2, \\ z_3 = x_3, \end{cases}$$

получим:

$$f = \frac{1}{4}z_1^2 + 4z_2^2 - 4z_3^2.$$

Будем рассматривать формулы

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}z_1 - \frac{1}{2}z_2 - \frac{1}{2}z_3, \\ x_2 = z_2, \\ x_3 = z_3 \end{cases} \quad (2)$$

как формулы преобразования координат x_i , уравнение данной квадратички в новых координатах примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}z_1^2 + 4z_2^2 - 4z_3^2 + 8\left(\frac{1}{4}z_1 - \frac{1}{2}z_2 - \frac{1}{2}z_3\right) + 20z_2 + 4z_3 + 24 = 0, \\ \frac{1}{4}z_1^2 + 4z_2^2 - 4z_3^2 - 2z_1 + 16z_2 + 24 = 0. \end{aligned}$$

Выделим в левой части полученного уравнения полные квадраты:

$$\frac{1}{4}(z_1^2 + 8z_1 + 16) - 4 + 4(z_2^2 + 4z_2 + 4) - 16 - 4z_3^2 + 24 = 0,$$

$$z_3^2 - (z_2 + 2)^2 - \frac{(z_1 + 4)^2}{16} = 1.$$

С помощью преобразования координат по формулам

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2 + 2, \text{ или } \begin{cases} z_1 = 4y_3 - 4, \\ z_2 = y_2 - 2, \\ z_3 = y_1 \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

уравнение квадрики приводится к нормальному виду:

$$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1.$$

Таким образом, данная квадрика является двуполостным гиперболоидом.

Из систем уравнений (2) и (3) находим:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3, \\ x_2 = y_2 - 2, \\ x_3 = y_1. \end{cases}$$

Следовательно, начало и координатные векторы новой аффинной системы координат $O'y_1y_2y_3$ имеют относительно данной системы $Ox_1x_2x_3$ координаты:

$$O'(0; -2; 0), \vec{e}'_1 = \left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right), \vec{e}'_2 = \left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right), \vec{e}'_3 = (1; 0; 0) \quad (\text{см. рис. 5}).$$

3.34. Привести к нормальному виду уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_3 - 4x_1 = 0 \quad (1)$$

квадрики пространства A_3 .

Установить вид квадрики, записать формулы перехода к новой аффинной системе координат, найти координаты нового начала и новых координатных

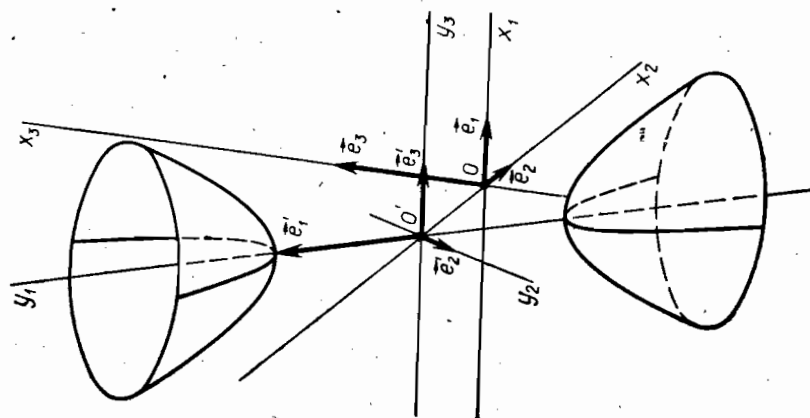


Рис. 5

векторов относительно исходной аффинной системы координат. Решите. Для приведения квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_3$$

к каноническому виду используем способ Лагранжа: $i = 1, c_{11} = 1,$

$$c_{12} = 0, c_{13} = -\frac{1}{2};$$

$$z_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_3, \quad z_1^2 = x_1^2 - x_1x_3 + \frac{1}{4}x_3^2, \\ \frac{1}{c_{11}} = 1, \quad f - z_1^2 = x_2^2 - \frac{1}{4}x_3^2.$$

Если

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_3, \\ z_2 = x_2, \\ z_3 = x_3, \end{cases}$$

то

$$f = z_1^2 + z_2^2 - \frac{1}{4}z_3^2. \quad (2)$$

С помощью формулы (2) и

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + \frac{1}{2}z_3, \\ x_2 = z_2, \\ x_3 = z_3 \end{cases} \quad (3)$$

перейдем в уравнении (1) к координатам z_i :

$$z_1^2 + z_2^2 - \frac{1}{4}z_3^2 - 4\left(z_1 + \frac{1}{2}z_3\right) = 0.$$

Полученное уравнение запишем в виде:

$$(z_1^2 - 4z_1 + 4) - 4 + z_2^2 - \frac{1}{4}(z_3^2 + 8z_3 + 16) + 4 = 0$$

или

$$(z_1 - 2)^2 + z_2^2 - \frac{1}{4}(z_3 + 4)^2 = 0.$$

Перейдем, наконец, к координатам y_i по формулам:

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - 2, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = \frac{1}{2}(z_3 + 4) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z_1 = y_1 + 2, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = 2y_3 - 4, \end{cases} \quad (4)$$

получим нормальный вид уравнения квадрики:

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0.$$

Квадрика является конусом.

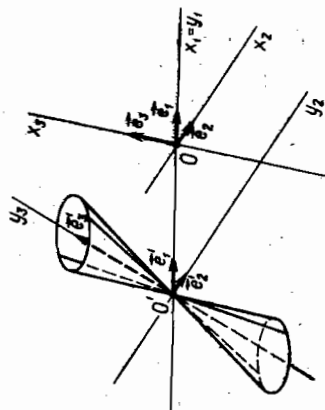


Рис. 6

Из (3) и (4) следует, что

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = 2y_3 - 4, \end{cases}$$

и потому начало O' и координатные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ новой аффинной системы координат $O'y_1y_2y_3$ имеют относительно данной системы $Ox_1x_2x_3$ координаты $O'(0; 0; -4)$, $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{e}_3 = (1; 0; 2)$

(см. рис. 6).

3.35. Привести к нормальному виду уравнение

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 3 = 0$$

квадрики пространства A_3 .

Решение. Находим канонический вид квадратичной формы:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

используя метод Лагранжа: $i = 1, c_{11} = 2, c_{12} = -1, c_{13} = -2$,

$$z_1 = 2x_1 - x_2 - 2x_3,$$

$$z_1^2 = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

$$\frac{1}{c_{11}} = \frac{1}{2}, f - \frac{1}{2}z_1^2 = 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 -$$

$$- 2x_2x_3 = \frac{9}{2}x_2^2.$$

Считая

$$\begin{cases} z_1 = 2x_1 - x_2 - 2x_3, \\ z_2 = x_2, \\ z_3 = x_3, \end{cases}$$

получим:

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{9}{2}z_2^2.$$

Уравнение квадрики примет вид:

$$\frac{1}{2}z_1^2 + \frac{9}{2}z_2^2 - 2\left(\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 + z_3\right) + 10z_2 + 2z_3 + 3 = 0,$$

$$\frac{1}{2}(z_1^2 - 2z_1 + 1) - \frac{1}{2} + \frac{9}{2}(z_2^2 + 2z_2 + 1) - \frac{9}{2} + 3 = 0$$

или

$$\frac{(z_1 - 1)^2}{4} + \frac{9(z_2 + 1)^2}{4} = 1.$$

Из систем

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(z_1 - 1), \\ y_2 = \frac{2}{3}(z_2 + 1), \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{3}z_2 + z_3, \\ x_2 = z_2, \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

найдем формулы:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3, \\ x_2 = \frac{2}{3}y_2 - 1, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Рис. 7

являющиеся формулами перехода от исходной аффинной системы координат к новой аффинной системе координат $O'y_1y_2y_3$ с началом $O'(0; -1; 0)$ и координатными векторами $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{e}_2 = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0)$, $\vec{e}_3 = (1; 0; 1)$.

В координатах y_i уравнение квадрики имеет нормальный вид:

$$y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

Квадрика является эллиптическим цилиндром (см. рис. 7).

3.36. Привести к нормальному виду уравнение

$$x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 3 = 0$$

квадрики пространства A_3 .

Решение. Квадратичная форма x_2^2 , входящая в левую часть уравнения квадрики, уже имеет нормальный вид. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$(x_2^2 - 6x_2 + 9) - 9 - 2x_1 + 2x_3 - 3 = 0, \\ (x_2 - 3)^2 = 2(x_1 - x_3 + 6).$$

Полагая

$$\begin{cases} y_1 = x_2 - 3, \\ y_2 = x_1 - x_3 + 6, \text{ или } \begin{cases} x_1 = y_2 + y_3 - 6, \\ x_2 = y_1 + 3, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

получим:

$$y_1^2 = 2y_2. \quad (2)$$

Формулы (1) можно рассматривать как формулы перехода от

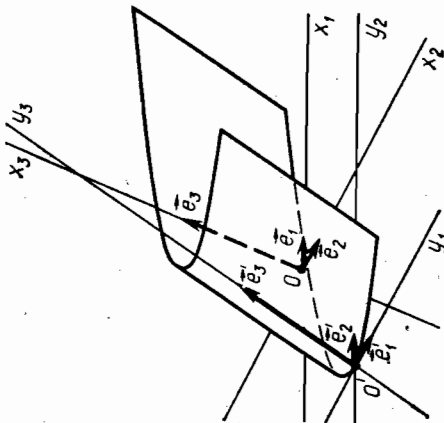


Рис. 8

системы координат $Ox_1x_2x_3$ к системе координат $O'y_1y_2y_3$, в которой уравнение квадрики имеет нормальный вид (2). Данная квадрика — параболический цилиндр.

Начало и координатные векторы системы координат $O'y_1y_2y_3$ имеют относительно системы $Ox_1x_2x_3$ координаты:

$$\begin{aligned} O' &(-6; 3; 0), & \vec{e}_1' &= (0; 1; 0), \\ \vec{e}_2' &= (1; 0; 0), & \vec{e}_3' &= (1; 0; 1) \end{aligned}$$

(см. рис. 8).

3.37. Привести к нормальному виду уравнение

$$x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3 - 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 - 5 = 0$$

квадрики пространства A_3 .

Решение. Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3,$$

используя способ Лагранжа: $i = 1, c_{11} = 1, c_{12} = -2, c_{13} = -3$,

$$z_1^2 = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3,$$

$$\frac{1}{c_{11}} = 1, f - z_1^2 = 4x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_2x_3 - 4x_2^2 - 9x_3^2 - 12x_2x_3 = 0.$$

Если положить

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 2x_2 - 3x_3, \\ z_2 = x_2, \\ z_3 = x_3, \end{cases}$$

то получим $f = z_1^2$.

С помощью формул

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + 2z_2 + 3z_3, \\ x_2 = z_2, \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

уравнение квадрики примет вид:

$$z_1^2 - 4(z_1 + 2z_2 + 3z_3) + 8z_2 + 12z_3 - 5 = 0$$

или

$$(z_1 - 2)^2 = 9.$$

Если воспользоваться формулами

$$\begin{cases} z_1 = 3y_1 + 2, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

то уравнение квадрики в координатах y_i примет нормальный вид: $y_1^2 = 1$.

Данная квадрика является парой параллельных плоскостей с уравнениями $y_1 = 1$ и $y_1 = -1$ относительно системы координат $O'y_1y_2y_3$.

Так как

$$\begin{cases} x_1 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

то координаты начала O' и координатных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ этой системы относительно исходной системы $Ox_1x_2x_3$ таковы: $O' (2; 0; 0)$, $\vec{e}_1' = (3; 0; 0)$, $\vec{e}_2' = (2; 1; 0)$, $\vec{e}_3' = (3; 0; 1)$ (см. рис. 9).

3.38. Привести к нормальному виду уравнение квадрики пространства A_3 . Установить вид квадрики, записать формулы перехода к новой аффинной системе координат, найти координаты нового начала и новых координатных векторов относительно исходной аффинной системы координат:

а) $x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 3 = 0$;

б) $x_1^2 + x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5 = 0$;

в) $x_1^2 + 4x_2x_3 - 2x_1 + 8x_2 + 5 = 0$;

г) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1 + 8x_3 - 6 = 0$;

д) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 = 0$;

е) $x_1^2 + x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 14 = 0$;

ж) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 - 2x_2 = 0$;

з) $4x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 8x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 8 = 0$;

и) $x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 - 5 = 0$;

к) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_3 - 4x_2 = 0$;

л) $-x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3 = 0$;

м) $4x_1^2 - x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_2x_3 + 8x_1 - 8x_2 - 10x_3 - 17 = 0$;

н) $x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 12x_2x_3 - 4x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13 = 0$;

о) $x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_3 - 8x_1x_2 - 4x_2x_3 - 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 1 = 0$.

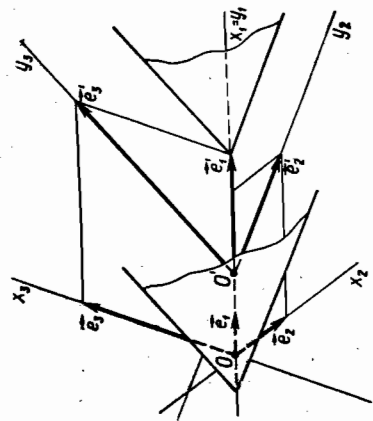


Рис. 9

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И КВАДРИКИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 10. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования

Л и т е р а т у р а: [1], § 75; [2], раздел 2, § 39; [3], § 11, 21, 22.

4.1. С помощью ортогонального преобразования евклидова векторного пространства R_3 привести к каноническому виду квадратичную форму

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 \quad (1)$$

и найти формулы этого преобразования.

Р е ш е н и е. Найдем канонический вид квадратичной формы (1). Для этого запишем ее матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, получим:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = 0$$

или

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 7\lambda^2 - 7\lambda + 10\lambda + 10 = 0, \\ (\lambda^2 - 7\lambda + 10)(\lambda + 1) = 0.$$

Отсюда: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

Искомый каноническим видом данной квадратичной формы является

$$5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2. \quad (2)$$

Найдем ортонормированный базис $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, в котором данная квадратичная форма имеет канонический вид.

Чтобы найти вектор $\vec{e}'_1$ этого базиса, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 5$, в системе уравнений

$$\begin{cases} (2 - \lambda)u_1 - 2u_2 + 2u_3 = 0, \\ -2u_1 + (3 - \lambda)u_2 = 0, \\ 2u_1 + (1 - \lambda)u_3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

положим $\lambda = 5$:

$$\begin{cases} -3u_1 - 2u_2 + 2u_3 = 0, \\ -2u_1 - 2u_2 = 0, \\ 2u_1 - 4u_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем какое-нибудь из решений полученной системы. Полагая, например, $u_3 = 1$, получим, что $u_1 = -u_2 = 2$. Вектор $\vec{p} = (2; -2; 1)$ — один из собственных векторов, соответствующих значению $\lambda_1 = 5$. Чтобы получить искомый вектор $\vec{e}'_1$, достаточно нормировать этот вектор $\vec{p}$:

$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right).$$

Считая в (3) $\lambda = 2$, получим систему:

$$\begin{cases} -2u_2 + 2u_3 = 0, \\ -2u_1 + u_2 = 0, \\ 2u_1 - u_3 = 0, \end{cases}$$

как и выше, найдем:

$$\vec{e}'_2 = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

Наконец, при $\lambda = -1$ получим:

$$\vec{e}'_3 = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right).$$

Таким образом, векторы нового базиса выражаются через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ старого базиса с помощью формул:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2 &= \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 - \frac{2}{3}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Матрица перехода является ортогональной (см. теорему в § 11.2 из [3]).

Матрица, полученная транспонированием этой матрицы, также ортогональна; она и является матрицей искомого ортогонального преобразования:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3. \end{cases}$$

Если подставить эти значения x_1, x_2, x_3 в данную квадратичную форму (1), то получится ее канонический вид (2). Этим можно воспользоваться для проверки решения.

4.2. С помощью ортогонального преобразования евклидова векторного пространства R_3 привести к каноническому виду квадратичную форму

$$4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 \quad (1)$$

и найти формулы этого преобразования.

Решение. Как и в задаче 4.1, составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(5-\lambda)(\lambda^2-5\lambda)=0;$$

его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 0$.

Искомым каноническим видом данной квадратичной формы является форма

$$5y_1^2 + 5y_2^2 \quad (2)$$

Найдем базис, в котором данная квадратичная форма имеет канонический вид.

Отличие этой задачи от предыдущей заключается в том, что теперь характеристическое уравнение имеет кратный корень 5. Этому корню соответствуют два вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ нового базиса.

Запишем для квадратичной формы (1) систему:

$$\begin{cases} (4-\lambda)u_1 + 2u_2 = 0, \\ 2u_1 + (1-\lambda)u_2 = 0, \\ (5-\lambda)u_3 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

При $\lambda = 5$ получим систему, эквивалентную одному уравнению:

$$u_1 - 2u_2 = 0. \quad (4)$$

Одно из решений уравнения (4) выберем произвольно. Приняв, например, $u_2 = 0$ и $u_3 = 1$, получим, что $u_1 = 2$. Нормируя найденный вектор $\vec{p} = (2; 1; 0)$, определим один из искоемых векторов:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0 \right).$$

Затем найдем вектор $\vec{q}$, ортогональный вектору $\vec{p}$ и удовлетворяющий уравнению (4). Используя условие ортогональности векторов $\vec{p}$

и $\vec{q}$, получим для нахождения координат вектора следующую систему:

$$\begin{cases} u_1 - 2u_2 = 0, \\ 2 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что $u_1 = u_2 = 0$; u_3 можно взять равным любому числу, отличному от нуля, но, поскольку мы ищем единичный вектор, лучше считать $u_3 = 1$. Тогда

$$\vec{e}_2 = \vec{q} = (0; 0; 1).$$

Чтобы найти вектор $\vec{e}_3$, положим в (3) $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} 4u_1 + 2u_2 = 0, \\ 2u_1 + u_2 = 0, \\ 5u_3 = 0. \end{cases}$$

Одним из решений этой системы является: $u_1 = 1, u_2 = -2, u_3 = 0$. Нормируя полученный вектор $\vec{r} = (1; -2; 0)$, найдем вектор

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}; 0 \right).$$

Зная векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, запишем, как и в задаче 4.1, ортогональное преобразование

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_3), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 - 2y_3), \\ x_3 = y_2, \end{cases}$$

приводящее данную квадратичную форму (1) к каноническому виду (2).

Так как при нахождении вектора $\vec{e}_1$ решение уравнения (4) выбиралось произвольно, то существует бесконечное множество преобразований, приводящих данную квадратичную форму (1) к каноническому виду (2); нами получено только одно из них.

4.3. С помощью ортогонального преобразования евклидова векторного пространства R_3 привести к каноническому виду квадратичную форму и записать формулы этого преобразования:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 5x_1^2 - 8x_1x_2 - x_2^2; & \text{в) } 3x_1x_2; \\ \text{б) } x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2; & \text{г) } 7x_1^2 - 24x_1x_2. \end{array}$$

4.4. С помощью ортогонального преобразования евклидова векторного пространства привести к каноническому виду квадратичную форму и записать формулы этого преобразования в пространстве R_3 :

4.7. Написать уравнение сферы пространства E_4 , если она: а) имеет центр $(-1; 0; 2; 0)$ и радиус 1; б) имеет центр $(1; 1; 0; -3)$ и проходит через точку $(2; 1; 2; -1)$; в) имеет диаметр с концами $(4; -6; 0; -8)$ и $(6; -2; 4; 0)$; г) проходит через начало координат и концы отложенных от него координатных векторов; д) имеет центр $(0; 0; -1; 0)$ и пересекает гиперплоскость $x_8 = 0$ по сфере

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

У к а з а н и е. Радиус искомой сферы равен расстоянию от ее центра до какой-нибудь точки данного сечения.

4.8. Найти центр и радиус сферы, заданной уравнением:

- а) в E_1 : $x_1^2 + 2x_1 - 8 = 0$;
 б) в E_2 : $x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 10x_2 - 20 = 0$;
 в) в E_3 : $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1 - 12x_2 - 3 = 0$;
 г) в E_4 : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 6x_2 + 8x_3 = 0$;
 д) в E_5 : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 4x_5 - 12 = 0$.

4.9. Привести к каноническому виду уравнение

$$5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9 = 0 \quad (1)$$

квадрики евклидова пространства E_2 с помощью перехода к новой прямоугольной декартовой системе координат. Установить вид квадрики, а также расположение квадрики и новой системы координат относительно исходной прямоугольной декартовой системы координат.

Р е ш е н и е. С помощью ортогонального преобразования приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Для этого запишем ее матрицу:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

и найдем корни этого уравнения: $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$.

Каноническим видом указанной квадратичной формы является

$$9y_1^2 + y_2^2.$$

Найдем координатные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ новой прямоугольной декартовой системы координат. Они являются собственными векторами линейного оператора, имеющего ту же матрицу, что и данная квадратичная форма; следовательно, их координаты удовлетворяют системе уравнений:

- а) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
 б) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
 в) $2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
 г) $x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;
 д) $x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
 е) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
 ж) $x_1^2 + x_2^2 + 16x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$;
 з) $x_3^2 + 4x_1x_2$;
 и) $6x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2$;

в пространстве R_4 :

- к) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;
 л) $x_1x_2 + x_2x_3$;

в пространстве R_5 :

- м) $x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_2x_3$;
 н) $5x_1^2 - 4x_2x_3 + 6x_4x_5$;

в пространстве R_6 :

- о) $x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4$.

4.5. В евклидовом векторном пространстве R_n задан симметрический линейный оператор матрицей

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

относительно ортонормированного базиса. Каким условиям должны удовлетворять b_{ij} , чтобы: а) любой вектор был собственным; б) базисный вектор $\vec{e}_1$ был собственным; в) любой вектор подпространства, определенного базисными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$, был собственным?

У к а з а н и е. Уравнения, связывающие координаты собственного вектора ([3], § 21.1), обращаются в тождества при подстановке в них координат данных векторов.

§ 11. Квадрики в евклидовом пространстве

Л и т е р а т у р а: [1], § 76; [2], раздел 2, § 41; [3], § 13, 19, 20, 23.

4.6. Пусть точка C пространства E_n имеет координаты $c_1, c_2, \dots, c_n$. Записать формулу, связывающую координаты точек: а) сферы радиуса R с центром C ; б) шара радиуса R с центром C .

$$\begin{cases} (5-\lambda)u_1 + 4u_2 = 0, \\ 4u_1 + (5-\lambda)u_2 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda = 9$ получим систему, эквивалентную уравнению $u_1 - u_2 = 0$. Одно из решений этого уравнения $u_1 = u_2 = 1$. Вектор $\vec{p} = (1; 1)$ — собственный вектор, соответствующий значению $\lambda_1 = 9$.

Нормируя этот вектор, получим:

$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Аналогично найдем $\vec{q} = (-1; 1)$ — собственный вектор, соответствующий значению $\lambda_2 = 1$, и

$$\vec{e}'_2 = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Зная векторы $\vec{e}'_1$ и $\vec{e}'_2$, можем записать ортогональное преобразование

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \end{cases} \quad (2)$$

приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду.

Будем рассматривать формулы (2) как формулы преобразования координат при переходе к прямоугольной декартовой системе координат, полученной из старой системы с помощью вращения вокруг начала координат. Относительно этой новой системы квадратика будет иметь уравнение:

$$9y_1^2 + y_2^2 - 18\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right) - 18\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right) + 9 = 0$$

или

$$9y_1^2 + y_2^2 - 18\sqrt{2}y_1 + 9 = 0.$$

Запишем это уравнение в виде:

$$9(y_1^2 - 2\sqrt{2}y_1 + 2) - 18 + y_2^2 + 9 = 0,$$

$$9(y_1 - \sqrt{2})^2 + y_2^2 = 9,$$

$$(y_1 - \sqrt{2})^2 + \frac{y_2^2}{9} = 1.$$

Если полученную выше систему координат подвергнуть параллельному переносу, положив

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + \sqrt{2}, \\ y_2 = z_2, \end{cases} \quad (3)$$

то уравнение квадратки примет канонический вид:

$$z_1^2 + \frac{z_2^2}{9} = 1.$$

Квадрика (1) является эллипсоидом.

Сравнивая (2) и (3), получим формулы:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 + 1, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 + 1 \end{cases}$$

Рис. 10

перехода от первоначальной системы координат к той, в которой квадратика имеет каноническое уравнение.

Относительно данной системы координат новое начало и новые координатные векторы имеют координаты:

$$\vec{e}'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \vec{e}'_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Расположение квадратки и новой системы $O'z_1z_2$ относительно данной прямоугольной декартовой системы координат Ox_1x_2 показано на рисунке 10.

Приведенное здесь решение полезно сравнить с решением задачи 3.32 (y), а рисунок 10 — с рисунком 12.

$$4.10. \text{ Привести к каноническому виду уравнение } 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 12x_1 - 6x_3 + 4 = 0$$

Квадрика пространства E_3 с помощью перехода к новой прямоугольной декартовой системе координат и найти формулы соответствующего преобразования координат.

Решение. Квадратичная форма

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_3$$

уже была приведена к каноническому виду:

$$5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$$

при решении задачи 4.1 с помощью ортогонального преобразования:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2y_1 + y_2 + 2y_3), \\ x_2 = \frac{1}{3}(-2y_1 + 2y_2 + y_3), \\ x_3 = \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2 - 2y_3). \end{cases} \quad (1)$$

Будем рассматривать равенства (1) как формулы перехода к новой прямоугольной декартовой системе координат, полученной вращением вокруг начала координат исходной прямоугольной декартовой системы координат. В этой новой системе данная квадратика имеет уравнение:

$$5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 - 4(2y_1 + y_2 + 2y_3) - 2(y_1 + 2y_2 - 2y_3) + 4 = 0,$$

или

$$5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 - 10y_1 - 8y_2 - 4y_3 + 4 = 0.$$

Упростим полученное уравнение с помощью параллельного переноса системы координат. Сначала выделим в левой части этого уравнения полные квадраты:

$$\begin{aligned} 5(y_1^2 - 2y_1 + 1) - 5 + 2(y_2^2 - 4y_2 + 4) - 8 - \\ - (y_3^2 + 4y_3 + 4) + 4 + 4 = 0, \\ 5(y_1 - 1)^2 + 2(y_2 - 2)^2 - (y_3 + 2)^2 = 5, \end{aligned}$$

а затем, при

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - 1, \\ z_2 = y_2 - 2, \\ z_3 = y_3 + 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_1 = z_1 + 1, \\ y_2 = z_2 + 2, \\ y_3 = z_3 - 2, \end{cases} \quad (2)$$

получим:

$$5z_1^2 + 2z_2^2 - z_3^2 = 5,$$

$$z_1^2 + \frac{z_2^2}{2.5} - \frac{z_3^2}{5} = 1.$$

или

Уравнение квадратки приведено к каноническому виду; квадратика является однополостным гиперболоидом.

Из формул (1) и (2) легко получаются формулы:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2z_1 + z_2 + 2z_3), \\ x_2 = \frac{1}{3}(-2z_1 + 2z_2 + z_3), \\ x_3 = \frac{1}{3}(z_1 + 2z_2 - 2z_3) + 3 \end{cases}$$

перехода от первоначальной системы координат к той, в которой уравнение квадратки имеет канонический вид. Новая прямоугольная декартова система координат имеет начало $O'(0; 0; 3)$, ее координатные векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ уже были найдены при решении задачи 4.1.

4.11. Привести к каноническому виду уравнение квадратки с помощью вращения прямоугольной декартовой системы координат и найти формулы преобразования координат:

- а) в E_2 : $x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 12 = 0$;
б) в E_3 : $3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6 = 0$;
в) в E_4 : $5x_1^2 - x_2^2 - 8x_1x_3 - 2x_3x_4 - 21 = 0$.

4.12. Привести к каноническому виду уравнение квадратки с помощью параллельного переноса прямоугольной декартовой системы координат и написать формулы преобразования координат:

- а) в E_3 : $3x_1^2 - 4x_2^2 + 12x_1 - 8x_2 - 4 = 0$;
б) в E_3 : $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3 = 0$;
в) в E_4 : $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

4.13. Привести к каноническому виду уравнение квадратки с помощью перехода к новой прямоугольной декартовой системе координат и найти формулы соответствующего преобразования координат

в пространстве E_3 :

- а) $5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 20x_1 + 16x_2 + 11 = 0$;
б) $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2 - 9 = 0$;

в пространстве E_3 :

- в) $x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 - 8x_2 + 16x_3 = 0$;
г) $8x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 44x_1 - 2x_2 + 29 = 0$;
д) $2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1 + 8x_2 - 10 = 0$.

4.14. Привести к каноническому виду уравнение

$$4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 50x_2 - 10x_3 - 70 = 0.$$

квадрики пространства E_3 с помощью перехода к новой прямоугольной декартовой системе координат и найти формулы соответствующего преобразования координат.

Решение. Квадратичная форма

$$4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2$$

уже была приведена к каноническому виду:

$$5y_1^2 + 5y_2^2$$

при решении задачи 4.2 с помощью ортогонального преобразования:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 - 2y_2), \\ x_3 = y_2. \end{cases} \quad (1)$$

Если равенства (1) рассматривать как формулы перехода к новой прямоугольной декартовой системе координат, то относительно новой системы координат уравнение данной квадратки примет вид:

$$\begin{aligned} 5y_1^2 + 5y_2^2 + \frac{50}{\sqrt{5}}(y_1 - 2y_2) - 10y_2 - 70 = 0, \\ 5y_1^2 + 5y_2^2 + 10\sqrt{5}y_1 - 10y_2 - 20\sqrt{5}y_2 - 70 = 0 \end{aligned}$$

или

$$y_1^2 + y_2^2 + 2\sqrt{5}y_1 - 2y_2 - 4\sqrt{5}y_3 - 14 = 0.$$

В левой части полученного уравнения выделим полные квадраты:

$$(y_1 + \sqrt{5})^2 - 5 + (y_2 - 2y_3 + 1) - 1 - 4\sqrt{5}y_3 - 14 = 0,$$

$$(y_1 + \sqrt{5})^2 + (y_2 - 1)^2 = 4\sqrt{5}y_3 + 20.$$

Тогда

$$(y_1 + \sqrt{5})^2 + (y_2 - 1)^2 = 4\sqrt{5}(y_3 + \sqrt{5}).$$

После преобразования координат по формулам:

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - \sqrt{5}, \\ y_2 = z_2 + 1, \\ y_3 = z_3 - \sqrt{5} \end{cases} \quad (2)$$

уравнение квадрики приведется к каноническому виду:

$$z_1^2 + z_2^2 = 4\sqrt{5}z_3.$$

Квадрика является параболоидом вращения.

Из формул (1) и (2) получаются формулы:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2z_1 + z_3) - 3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(z_1 - 2z_3) + 1, \\ x_3 = z_3 + 1 \end{cases}$$

перехода от первоначальной прямоугольной декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ к прямоугольной декартовой системе координат $O'z_1z_2z_3$, относительно которой уравнение квадрики имеет канонический вид. Новая система координат имеет начало $O'(-3; 1; 1)$; ее координатные векторы были найдены при решении задачи 4.2.

4.15. Привести к каноническому виду уравнение

$$x_3^2 - 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3 = 0$$

квадрики пространства E_3 с помощью перехода к новой прямоугольной декартовой системе координат и найти формулы соответствующего преобразования координат.

Решение. Квадратичная форма x_3^2 , находящаяся в левой части уравнения, уже имеет канонический вид; поэтому можно начать с параллельного переноса системы координат:

$$(x_3^2 + 2x_3 + 1) - 4x_1 + 3x_2 + 2 = 0,$$

$$(x_3 + 1)^2 - 4\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) + 3x_2 = 0,$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{1}{2}, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3 + 1, \end{cases} \quad (1)$$

$$y_3^2 - 4y_1 + 3y_2 = 0. \quad (2)$$

Затем произведем вращение вокруг начала полученной прямоугольной декартовой системы координат по формулам, аналогичным имеющимся в § 23.2 из [3]:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{4}{5}z_2 - \frac{3}{5}z_3, \\ y_2 = -\frac{3}{5}z_2 - \frac{4}{5}z_3, \\ y_3 = z_1, \end{cases} \quad (3)$$

подставляя эти выражения в уравнение (2), получим:

$$z_1^2 = 5z_2.$$

Квадрика является параболическим цилиндром.

Из (1) и (3) находим искомые формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5}z_2 - \frac{3}{5}z_3 + \frac{1}{2}, \\ x_2 = -\frac{3}{5}z_2 - \frac{4}{5}z_3, \\ x_3 = z_1 - 1. \end{cases}$$

4.16. Привести к каноническому виду уравнение квадрики с помощью перехода к новой прямоугольной декартовой системе координат и найти уравнения преобразования координат в пространстве E_3 :

а) $x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 10x_1 + 70x_2 = 0$;

б) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 20x_1 - 10x_2 + 5 = 0$;

в пространстве E_3 :

в) $x_3^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1 - 12x_2 + 18 = 0$;

г) $x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$;

д) $3x_2^2 + 12x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2 = 0$;

е) $4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_1 + 12x_3 = 0$;

ж) $9x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 24x_2 - 8x_3 - 24 = 0$;

з) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 - 12x_1 - 24x_2 = 0$;

и) $4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3 + 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$;

к) $2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_2x_3 + 12x_2 - 4 = 0$;

л) $x_3^2 - x_1x_2 - 1 = 0$;

м) $x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3 + 2x_2 - 4x_3 + 1 = 0$.

Глава I

- 1.12. а) $(-9; -3; -2)$; б) $(-8; -6; 11; 8; 20)$.
 1.13. а) Да; б) да; в) нет; г) нет.
 1.16. а) $\left(\frac{5}{3}; 8; -\frac{1}{3}\right)$; б) $(2; -2; 5; 0)$; в) $(1; 2; -1; 1)$.
 1.18. а) $\dim V = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$; б) $\dim V = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$;
 в) $\dim V = 1$; г) $\dim V = \text{rang}(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \dots; \vec{u}_k)$.
 1.20. а) Нет; б) нет; в) нет; г) да.
 1.21. а) 2; б) 4; в) 2.
 1.26. $P_3(3; 0; -\frac{15}{4}; -6; -\frac{3}{4})$; $P_4(8; -8; \frac{5}{2}; -46; -\frac{39}{2})$.
 1.27. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0; 0\right)$; $\left(0; 0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.
 1.28. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0; 1; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2}; 1; 0; -\frac{1}{2}; -1\right)$.
 1.29. $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 3\right)$.
 1.31. Нет.
 1.36. $x_1 = x_1 + x_3 - 3x_4 + 2$; $x_2 = 2x_5 + x_3 + 5x_4 + 1$;
 $x_3 = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5$; $x_4 = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4$.
 1.37. $x_1 = x_1' + 2x_2' + x_3' - x_4' + 2x_5'$; $x_2 = 3x_1' + x_2' + x_3' - 3x_4' + 3x_5' + 3$;
 $x_3 = x_3' - x_4' - x_5' - 1$; $x_4 = 2x_1' + x_4' - 3x_5' + 2$; $x_5 = -x_1' + x_5' + 5$.
 1.38. а) $\begin{cases} x_1 = x_1 + 4, \\ x_2 = x_2 + 3, \\ x_3 = x_3 - 1, \\ x_4 = x_4 + 1, \\ x_5 = x_5 + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = x_1 + x_2, \\ x_2 = x_1 + x_2, \\ x_3 = 3x_2 + 3x_3, \\ x_4 = 4x_3 + 2x_4, \\ x_5 = 5x_3 + 7x_4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 = 3x_1 + x_5 - 1, \\ x_2 = 5x_2 + x_5 - 2, \\ x_3 = 4x_3 + x_5 - 3, \\ x_4 = -2x_5 + x_5, \\ x_5 = x_5 + 4. \end{cases}$
 1.44. M_1, M_3, M_4 .
 1.45. M_1, M_3 .
 1.49. а) Да; б) нет; в) нет.
 1.51. $x_{i_1} = t_1, \dots, x_{i_k} = t_k, x_j = 0$, при $j \neq i_1, i_2, \dots, i_k$; $2^n - 2$.
 1.57. а) $\begin{cases} x_1 = -6 + 3t_1 - 5t_2 + 4t_3 + 15t_4, \\ x_2 = t_1, \\ x_3 = t_2, \\ x_4 = t_3, \\ x_5 = t_4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = -3 + t_1 - 6t_2, \\ x_2 = t_1, \\ x_3 = t_2, \\ x_4 = -8 + \frac{1}{2}t_2 + 2t_3, \\ x_5 = t_3; \end{cases}$

- в) $\begin{cases} x_1 = 3 + 3t_1 - 12t_2, \\ x_2 = t_1, \\ x_3 = 2 + t_1 - 2t_2, \\ x_4 = 12 - 2t_1 + 4t_2, \\ x_5 = t_2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 = -16t, \\ x_2 = 48 + 62t, \\ x_3 = t, \\ x_4 = 12 + 17t, \\ x_5 = 12 + 17t. \end{cases}$
 1.58. а) $\begin{cases} x_1 = -t_1 + t_2, \\ x_2 = -t_2 + t_3, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2, \\ x_5 = t_3, \\ x_6 = t_4, \\ x_7 = -t_5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - 3t_1, \\ x_2 = t_1, \\ x_3 = t_2 - t_3, \\ x_4 = t_3, \\ x_5 = t_4, \\ x_6 = t_5, \\ x_7 = t_6 - 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 = 5 - 4t_1 - 3t_2, \\ x_2 = -5 + 3t_1 + 3t_2, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = 6 - 3t_2, \\ x_5 = -2t_3, \\ x_6 = t_3, \\ x_7 = t_4. \end{cases}$
 1.62. u_1, u_2, u_3, u_4 .
 1.66. б).
 1.67. а) $\begin{cases} x_1 = 4 + t_1, \\ x_2 = 9 + t_1, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2; \end{cases}$ б) не пересекаются;
 в) $\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = -4 + 2t, \\ x_3 = \frac{7}{3} - 3t, \\ x_4 = \frac{2}{3}; \end{cases}$ г) одна общая точка.
 1.68. $\begin{cases} x_1 = 1 + t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = t, \\ x_5 = -2 - 2t. \end{cases}$
 1.73. а) Пересекаются по одномерной плоскости; б) пересекаются в точке $(1; -1; 0; 0)$; в) скрещиваются; г) пересекаются в одной точке $(2; -3; -1; \frac{1}{2})$;
 д) параллельны и не пересекаются; е) пересекаются по одномерной плоскости; ж) плоскости параллельны и не пересекаются; з) первая плоскость параллельна второй и не пересекает ее.
 1.74. а) Плоскости пересекаются по двумерной плоскости;
 б) плоскости пересекаются в одной точке.
 1.75. а) Плоскости скрещиваются; б) плоскости пересекаются в одной точке;
 в) плоскости параллельны; г) плоскости скрещиваются.
 1.76. Плоскости имеют одну общую точку.
 1.77. Плоскости скрещиваются.
 1.78. Плоскости не параллельны.

1.79. Единственная точка пересечения.

1.84. а) Да; б) нет; в) нет; г) да.

1.91.

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4, \\ x'_2 = -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 1, \\ x'_3 = 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 5. \end{cases}$$

Глава II

2.3. а) 10, 10, 11, 8; б) 21, 2; в) -5, 105.

2.4. 7, 11, 5, $\sqrt{34}$.

2.5. Ортогональны пары $\vec{r}$ и $\vec{s}$, $\vec{r}$ и $\vec{u}$, $\vec{r}$ и $\vec{w}$.

2.6. а) $\arccos\left(-\frac{13}{42}\right)$; б) $\arccos\left(\frac{9-4\sqrt{6}}{30}\right)$; в) $\frac{\pi}{2}$.

2.7. а) Прямой; б) тупой; в) острый; г) тупой.

2.8. Например, в качестве $\vec{r}$ можно взять вектор

$$\vec{r} = (-21; -79; -244; 40).$$

2.10. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

2.13. а) 5; б) 9; в) 8; г) 8.

2.14. б) 5; в) 6; г) 9.

2.15. Направляющие косинусы радиус-вектора точки M равны

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \text{ точки } N \text{ равны } \frac{2}{\sqrt{57}}, -\frac{4}{\sqrt{57}}, \frac{6}{\sqrt{57}}, \\ & -\frac{1}{\sqrt{57}}, \text{ точки } P \text{ равны } \frac{5\sqrt{2}}{3}, \frac{5\sqrt{2}}{3}, -\frac{5\sqrt{2}}{3}, -\frac{5\sqrt{2}}{3}, \text{ точки } Q \\ & \text{равны } \frac{4}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{1}{\sqrt{26}}, 0. \end{aligned}$$

2.17. $|AB| = 8$, $|AC| = 6$, $|BC| = \sqrt{34}$, $\cos \hat{A} = \frac{11}{10}$, $\cos \hat{B} = \frac{31}{8\sqrt{34}}$.

$$|AM_3| = \frac{\sqrt{70}}{2}, |BM_3| = 4\sqrt{2}, |CM_1| = \sqrt{19}.$$

$$2.20. \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

2.21. Длина медианы $3\sqrt{3}$, длина биссектрисы $\frac{2}{3}\sqrt{46}$.

2.28. $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

2.29. $P(-3; 3; 2; -1; 8; 3)$.

2.30. а) $-x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 3x_4 + x_5 - \frac{3}{2} = 0$;

$$б) x_1 + 10x_2 + 13x_3 + 8 = 0;$$

$$в) 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0.$$

2.31. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 2.5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 0.5 = 0; \end{cases}$

$$б) \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 8x_4 + 4.5 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 - 8x_4 + 26 = 0; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - 4.5 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3 = 0. \end{cases}$$

2.32. Длина высоты из вершины B равна $\sqrt{6}$, длины высот из вершин A и C равны

$$2\sqrt{230}, 2\sqrt{230}.$$

2.33. а) $\sqrt{29}$.

2.36. а) $\frac{15}{4}$; б) $\frac{8}{\sqrt{39}}$; в) 1.

2.37. а) 5; б) 2.

$$2.39. а) \begin{cases} x_1 = 1 + 2t_1, \\ x_2 = 1 + t_1 + t_2, \\ x_3 = 1 + t_2, \\ x_4 = 1 + t_1, \\ x_5 = 1 + 4t_1 - 2t_2; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x_1 = 1 + 2t_1, \\ x_2 = 1 + t_1 + t_2, \\ x_3 = 1 + 4t_2, \\ x_4 = 1 - 3t_1 + 3t_2 + 5t_3, \\ x_5 = 1 - 2t_1 + 4t_2 - 6t_3. \end{cases}$$

$$2.41. (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 5)^2 + (x_4 - 5)^2 + (x_5 - 2)^2 = 36,$$

$4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - 7 = 0$.

2.43. а) Ортогональна; б) ортогональна; в) ортогональна;

г) не ортогональна; д) ортогональна; е) ортогональна.

2.44. а) Ортогонально; б) ортогонально; в) не ортогонально.

2.50. а) Движение; б) не является движением; в) движение.

$$2.51. а) \begin{cases} u'_1 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 + \frac{\sqrt{6}}{4}u_3 - 1, \\ u'_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2 - \frac{\sqrt{6}}{4}u_3 + 3, \\ u'_3 = \frac{\sqrt{6}}{4}u_1 - \frac{\sqrt{6}}{4}u_2 + \frac{1}{2}u_3 + 4; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} u'_1 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2 + \frac{\sqrt{6}}{4}u_3 + \frac{17 - \sqrt{6}}{4}, \\ u'_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2 - \frac{\sqrt{6}}{4}u_3 + \frac{5 + \sqrt{6}}{4}, \\ u'_3 = \frac{\sqrt{6}}{4}u_1 - \frac{\sqrt{6}}{4}u_2 + \frac{1}{2}u_3 - \frac{10 + 5\sqrt{6}}{4}. \end{cases}$$

$$2.52. б) \begin{cases} u'_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_4 + 1, \\ u'_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_4, \\ u'_3 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4 - 1, \\ u'_4 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4 + 2. \end{cases}$$

$$2.56. а) \begin{cases} u'_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4 - \frac{1}{2}, \\ u'_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{2}, \\ u'_3 = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4 - \frac{1}{2}, \\ u'_4 = -\frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} u'_1 = u_1, \\ u'_2 = \frac{2}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4 - \frac{2}{3}, \\ u'_3 = -\frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3 + \frac{2}{3}u_4 - \frac{4}{3}, \\ u'_4 = \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3 - \frac{2}{3}u_4 + \frac{2}{3}. \end{cases}$$

2.64. н.

2.65. Тождественное преобразование и симметрия относительно Π_{n-1} .

2.67. а) Не является преобразованием подобия; б) $k = \sqrt{5}$.

$$2.69. \begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2}x_1 + 1, \\ x'_2 = \frac{1}{2}x_2 + 1, \\ \dots\dots\dots \\ x'_n = \frac{1}{2}x_n + 1. \end{cases}$$

$$M' \left(\frac{3}{2}; 2; 3; \dots; 2n-2+1 \right).$$

2.72 Умножаются на k^k , где k — коэффициент подобия.

Глава III

$$3.2. а) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}; б) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$в) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}; г) \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3.3. 6) x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2;$$

$$в) 4x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 4x_2x_4;$$

$$г) 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4;$$

$$д) -x_3^2 + 2x_4^2 + x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4;$$

$$е) x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_3^2 + 5x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4 + 2x_3x_5 + 6x_4x_5.$$

3.5. $2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$ — канонический вид квадратичной формы.

$$3.8. а) y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2, \text{ если } \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3, \\ x_2 = y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

$$6) y_1^2 + y_3^2, \text{ если } x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_2, x_3 = y_3 - y_4, x_4 = y_4;$$

$$в) 2y_1^2 - 3y_2^2 + y_3^2, \text{ если } x_1 = y_1 + y_2 - y_3, x_2 = y_3 - y_4, x_3 = y_4;$$

$$г) y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \text{ если } x_1 = y_1 + 2y_2 - y_3, x_2 = y_3 - y_4, x_3 = y_4 - y_2.$$

$$3.10. а) z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2, \text{ если } x_1 = z_1 + z_2 - z_3 - z_4, x_2 = z_3 - z_4, x_3 = z_4 - 2z_1, x_4 = z_1 + z_2 - 2z_3;$$

$$б) z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + 3z_4^2, \text{ если } x_1 = z_1 - z_2 + 2z_3, x_2 = z_1 + z_2 - 2z_4, x_3 = z_1 + z_2 - 2z_4,$$

$$x_4 = z_3 + z_4, x_5 = z_3 - z_4;$$

$$в) u_1^2 - u_2^2, \text{ если } x_1 = u_2, x_2 = u_4, x_3 = -u_1 - u_2 + 2u_4, x_4 = u_1 - u_2,$$

$$3.13. а) z_1^2 - z_2^2 + 12z_3^2, \text{ если } x_1 = z_1 - 2z_2 - 6z_3, x_2 = -z_2 - 4z_3, x_3 = z_3;$$

$$б) z_1^2 - \frac{1}{3}z_2^2 + \frac{7}{3}z_3^2, \text{ если } x_1 = \frac{1}{3}(3z_1 - 2z_2 - z_3), x_2 = -\frac{1}{3}(z_2 + z_3), x_3 = z_3;$$

$$в) u_1^2 - u_2^2 + 3u_3^2, \text{ если } x_1 = u_1 - u_2 - u_3, x_2 = u_1 + u_2 + 3u_3, x_3 = u_3;$$

$$г) u_1^2 - \frac{1}{2}u_2^2 + 2u_3^2, \text{ если } x_1 = u_1 + u_2 + 2u_3 - u_4, x_2 = -\frac{1}{2}u_2 - 3u_3 + u_4, x_3 = 2u_3 - u_4, x_4 = u_4;$$

$$д) u_1^2 + 3u_3^2 - \frac{1}{3}u_4^2, \text{ если } x_1 = u_1 - 2u_2 + 2u_3 - \frac{1}{3}u_4, x_2 = u_2, x_3 = u_3 = 3(u_2 - u_3), x_4 = u_3 - 2u_2 - \frac{1}{3}u_4;$$

$$е) v_1^2 - v_2^2 - \frac{9}{4}v_3^2 + \frac{1}{4}v_4^2, \text{ если } x_1 = v_1 - v_2 - \frac{3}{2}v_3 + \frac{1}{2}v_4, x_2 = v_1 + v_2 + \frac{11}{2}v_3 - \frac{1}{2}v_4, x_3 = v_3, x_4 = \frac{1}{4}v_4 - \frac{3}{4}v_3;$$

$$ж) \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{4}v_3^2 + v_4^2, \text{ если } x_1 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 - \frac{1}{2}v_3 + v_4); x_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3), x_3 = \frac{1}{4}(-v_3 + 2v_4), x_4 = v_4.$$

$$3.14. а) u_1^2 - u_2^2, \text{ если } x_1 = u_1 - u_2 - u_3, x_2 = u_1 + u_2, x_3 = u_3 = u_3;$$

$$б) u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \text{ если } x_1 = \frac{1}{2}u_1 - u_2 + \frac{2}{3}u_3, x_2 = -\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3,$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}u_3;$$

$$в) u_1^2 + u_2^2 - u_3^2, \text{ если } x_1 = u_1 + u_2 + \frac{1}{2}u_3, x_2 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3, x_3 = \frac{1}{2}u_3;$$

$$г) u_1^2 - u_2^2, \text{ если } x_1 = u_1 - u_2, x_2 = u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4, x_3 = u_3, x_4 = u_4;$$

$$д) u_1^2 + u_2^2 - u_3^2, \text{ если } x_1 = \frac{1}{4}(2u_1 - u_2 + 2u_3), x_2 = \frac{1}{4}(2u_2 + u_3), x_3 = \frac{1}{4}u_3;$$

$$101$$

- е) $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, если $x_1 = u_1 + 2u_2 - 5u_3$, $x_2 = u_2 - 2u_3$, $x_3 = \frac{1}{2}u_3$;
 ж) $u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 - u_4^2$, если $x_1 = u_1 - 2u_3 + 2u_4 - 7u_5$, $x_2 = -u_2 + u_3 - 3u_4$, $x_3 = u_3 - 3u_4$, $x_4 = u_4$;
 з) $v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 + v_4^2 + v_5^2$, если $x_1 = v_1 - v_3 - v_5$, $x_2 = v_4 - v_5$, $x_3 = v_4 - v_5$, $x_4 = -v_3 - v_5$, $x_5 = \frac{1}{2}v_5$;
 и) $v_1^2 - v_2^2 + v_3^2 + v_4^2$, если $x_1 = v_1 - v_3 + \frac{1}{2}v_4$, $x_2 = v_4 - v_5$, $x_3 = v_3 + v_5 - \frac{1}{2}v_4$, $x_4 = \frac{1}{2}v_4$;
 к) $-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, если $x_1 = v_4$, $x_2 = v_5$, $x_3 = \frac{1}{2}(v_3 - v_1 + \sqrt{3}v_5)$, $x_4 = \frac{1}{2}(3\sqrt{3}v_3 - v_3 - v_1)$, $x_5 = \sqrt{3}v_5$;
 л) $u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2$, если $x_1 = u_1 + u_2 - 2\sqrt{3}u_3$, $x_2 = u_1 - u_3 - 2\sqrt{3}u_3$, $x_3 = \sqrt{3}u_3 + u_4$, $x_4 = \sqrt{3}u_3 - u_4$;
 м) $v_1^2 - v_2^2 + v_3^2 + v_4^2$, если $x_1 = \frac{1}{2}(2v_1 + 2v_2 - v_4)$, $x_2 = \frac{1}{2}(-v_2 + v_3 + v_4)$, $x_3 = \frac{1}{2}(-v_3 - v_4 + v_4)$, $x_4 = \frac{1}{2}v_4$.

3.15. а) Нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да; е) нет; ж) да; з) нет; и) нет; к) да; л) нет; м) нет.

3.17. а) $(-1; -1; 0)$ и $(-2; -1; \frac{1}{2})$; б) $(0; -1; 1)$;

в) данная прямая — прямоугольная образующая квадрати;

г) две прямые $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_3 = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0, \\ x_3 = 1; \end{cases}$

д) $(0; 0; 1)$.

3.18. а) $(2; 2; 3; 2)$ и $(-1; -4; -6; -1)$; б) пустое множество; в) парабола

$$\begin{cases} 3x_1^2 - x_4 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0; \end{cases}$$

г) параболический цилиндр $\begin{cases} 3x_1^2 - x_2 = 0, \\ x_4 = 0; \end{cases}$

д) пара прямых $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ и $x_1 = x_2 = \frac{x_3 + 1}{2} = x_4$.

3.20. $x_1 = x_3 = 0$ и $\frac{x_1}{-16} = x_2 = \frac{x_3}{8}$.

3.21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 1 = 0, \\ x_2 - 3x_3 + 3 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 1 = 0, \\ x_2 - 3x_3 + 1 = 0. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} x_1 = 3, \\ x_3 = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 = -5, \\ x_3 = -3. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 1 = 0, \\ x_3 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_4 - 1 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + 2 = 0. \end{cases}$

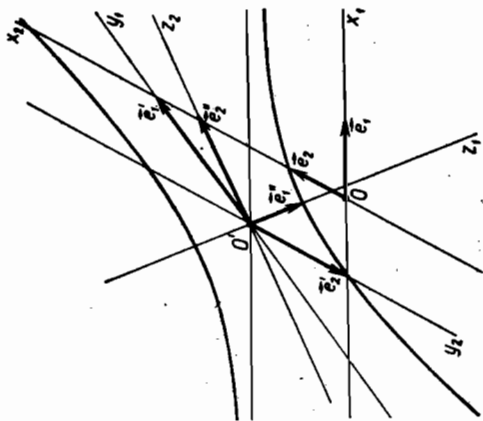


Рис. 11

3.28. Двуполостный гиперболоид;

$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1$, $O'(-3; -2; 1)$;

$e_1 = (6; 2; 0)$, $e_2 = (4; 0; 0)$, $e_3 = (-4; 0; 2)$, $e_1' = (2; 6; 0)$, $e_2' = (0; 4; 0)$, $e_3' = (0; 4; 2)$.

3.32. а) См. решение задачи 3.25; б) См. задачу 3.26;

в) $y_1^2 = 2y_2$ — парабола, $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2, \\ x_2 = 3 - y_2; \end{cases}$

г) $y_1^2 - y_2^2 = 1$ — гипербола, $\begin{cases} x_1 = 3y_1 - 3, \\ x_2 = 2y_1 - 2y_2; \end{cases}$

д) $y_1^2 + y_2^2 = 1$ — эллипс, $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 4y_2 + 3, \\ x_2 = 2y_2 - 1; \end{cases}$

е) $y_1^2 - y_2^2 = 0$ — пара пересекающихся прямых,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{4}y_1 - y_2, \\ x_2 = \frac{1}{4}y_1 - 2; \end{cases}$$

ж) $y_1^2 + y_2^2 = 0$ — точка, $\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 1, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 - 1; \end{cases}$

з) $y_1^2 = 2y_2$ — парабола, $\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 1, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 + 4; \end{cases}$

и) $y_1^2 - y_2^2 = 0$ — пара пересекающихся прямых, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(2y_1 - 3y_2) + 3, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 - 2; \end{cases}$

к) $y_1^2 + y_2^2 = 1$ — эллипс, $\begin{cases} x_1 = 3y_1 - y_2 + 1, \\ x_2 = 2y_2; \end{cases}$

л) $y_1^2 = 2y_2$ — парабола, $\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{4}y_2 - 1, \\ x_2 = \frac{1}{4}y_2 - 3; \end{cases}$

м) $y_1^2 - y_2^2 = 1$ — гипербола, $\begin{cases} x_1 = 4y_2 - 4y_1 - 2, \\ x_2 = 6y_1 + 3; \end{cases}$

н) $y_1^2 - y_2^2 = 1$ — гипербола, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + 2), \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_2 - 2); \end{cases}$

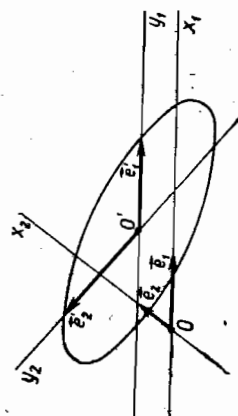
о) $y_1^2 = 2y_2$ — парабола, $\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - 6, \\ x_2 = 1 - \frac{1}{4}y_2; \end{cases}$

п) $y_1^2 - y_2^2 = 1$ — гипербола, $\begin{cases} x_1 = 4y_1 - 5y_2 - 2, \\ x_2 = 3y_2 + 1; \end{cases}$

р) $y_1^2 + y_2^2 = 1$ — эллипс, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6}(3y_1 + y_2 - 1), \\ x_2 = \frac{2}{3}(y_2 - 1); \end{cases}$

с) $y_1^2 + y_2^2 = -1$ — мнимый эллипс, $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 3, \\ x_2 = y_2 - 1; \end{cases}$

т) $y_1^2 = 2y_2$ — парабола, $\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{4}y_2 - 1, \\ x_2 = \frac{1}{4}y_2 + 2; \end{cases}$



у) $y_1^2 + y_2^2 = 1$ — эллипс (см. рис. 12), $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{4}{\sqrt{5}}y_2 + 1, \\ x_2 = \sqrt{5}y_2 + 1, \end{cases}$

Рис. 12

3.38. а) См. решение задачи 3.27;

б) См. задачу 3.28;

в) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1$ — двуполостный гиперболоид, $\begin{cases} x_1 = 2y_3 + 1, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_2 - y_1 - 2; \end{cases}$

г) $y_1^2 + y_2^2 = 2y_3$ — эллиптический параболоид, $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3 + 6, \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_3 + 3, \\ x_3 = 2 - \frac{1}{2}y_3; \end{cases}$

д) $y_1^2 = 0$ — пара совпавших плоскостей, $\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + y_3 - 1, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3; \end{cases}$

е) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1$ — двуполостный гиперболоид, $\begin{cases} x_1 = y_3 - 2y_2 - 3y_1 + 8, \\ x_2 = y_2 + 3, \\ x_3 = -y_1 - y_2 + 2; \end{cases}$

ж) $y_1^2 - y_2^2 = 0$ — пара пересекающихся плоскостей, $\begin{cases} x_1 = -y_1 + y_2 - 1, \\ x_2 = y_1 + y_2 - 2y_3 + 2, \\ x_3 = y_3; \end{cases}$

з) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ — эллипсоид, $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3 - 2, \\ x_2 = 2y_2 - 4y_3 - 6, \\ x_3 = 2y_3 + 2; \end{cases}$

и) $y_1^2 - y_2^2 = 2y_3$ — гиперболыческий параболоид, $\begin{cases} x_1 = y_1 + 3y_2 - 4, \\ x_2 = -y_2 - 2y_3 + 4, \\ x_3 = 1 - y_3; \end{cases}$

к) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$ — однополостный гиперболоид, $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 2y_2, \\ x_2 = 2y_2 + 2, \\ x_3 = y_3; \end{cases}$

л) $y_1^2 - y_2^2 = 0$ — пара пересекающихся плоскостей, $\begin{cases} x_1 = -y_1 + y_2 - 2y_3 - 1, \\ x_2 = y_2 - 2y_3 + 1, \\ x_3 = y_3; \end{cases}$

м) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$ — однополостный гиперболоид, $\begin{cases} x_1 = y_3 - 1, \\ x_2 = -4y_1 - 2y_2 - 10, \\ x_3 = 2y_1 + 3; \end{cases}$

н) $y_1^2 + y_2^2 = 0$ — пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой $y_1 = y_2 = 0$, $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3 + 5, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 - y_3 + \frac{3}{2}, \\ x_3 = y_3; \end{cases}$

о) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ — конус, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - 1, \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 - 1. \end{cases}$

$$4.3. \text{ а) } 7y_1^2 - 3y_2^2 \text{ при } x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_2 - 2y_1), \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 + 2y_2);$$

$$\text{б) } 10y_1^2 \text{ при } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(y_1 + 3y_2), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(y_2 - 3y_1); \end{cases}$$

$$\text{в) } \frac{3}{2}y_1^2 - \frac{3}{2}y_2^2 \text{ при } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2); \end{cases}$$

$$\text{г) } 16y_1^2 - 9y_2^2 \text{ при } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(3y_2 - 4y_1), \\ x_2 = \frac{1}{5}(3y_1 + 4y_2). \end{cases}$$

$$4.4. \text{ а) } 4y_1^2 - 2y_2^2 \text{ при } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3; \end{cases}$$

$$\text{б) } 8y_1^2 + 5y_2^2, \text{ если } \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3, \\ x_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2; \end{cases}$$

$$\text{в) } 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2, \text{ если } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3; \end{cases}$$

$$\text{г) } 11y_1^2, \text{ если } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{3}{\sqrt{22}}y_3, \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{11}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{22}}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{3}{\sqrt{22}}y_3; \end{cases}$$

$$\text{д) } 3y_1^2 - 3y_2^2, \text{ если } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2y_1 - y_2 + 2y_3), \\ x_2 = \frac{1}{3}(2y_1 + 2y_2 - y_3), \\ x_3 = \frac{1}{3}(-y_1 + 2y_2 + 2y_3); \end{cases}$$

$$\text{е) } 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2, \text{ если } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_3; \end{cases}$$

$$\text{ж) } 18y_1^2, \text{ если } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = -\frac{4}{3\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{3}y_3; \end{cases}$$

$$\text{з) } y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2 \text{ при } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 + y_3), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 - y_3), \\ x_3 = y_1; \end{cases}$$

$$\text{и) } 3y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2 \text{ при } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_2 + 2y_3), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_3 - 2y_2), \\ x_3 = y_1; \end{cases}$$

$$\text{к) } 2y_1^2 + 4y_2^2 - y_3^2, \text{ если } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_4 - y_1), \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_2 + y_3), \\ x_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}(y_4 - 2y_3); \end{cases}$$

$$\text{л) } \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2 - \frac{1}{2}y_4^2, \text{ если } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4), \\ x_3 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4), \\ x_4 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4); \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{м) } y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 - 3y_4^2 - 4y_5^2, & \text{ если } \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 + y_4), \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 - y_4), \\ x_4 = y_5, \\ x_5 = y_6, \end{cases} \\
 \text{н) } 2y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2 - 3y_4^2 + 5y_5^2, & \text{ если } \begin{cases} x_1 = y_6, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2), \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 - y_1), \\ x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 + y_4), \\ x_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 - y_4), \end{cases} \\
 \text{о) } y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 2y_4^2 - 2y_5^2 + 3y_6^2, & \text{ если } \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 + y_4), \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 - y_4), \\ x_4 = y_5, \\ x_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_4 + y_6), \\ x_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_4 - y_6), \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 + y_4), \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 - y_4), \\ x_4 = y_5, \\ x_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_4 + y_6), \\ x_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_4 - y_6). \end{cases}$$

4.5. а) $b_{11} = b_{22} = \dots = b_{nn} = 0$; б) $b_{11} = b_{22} = \dots = b_{nn} = 0$, где $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

4.6. а) $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \dots + (x_n - c_n)^2 = R^2$;

б) $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \dots + (x_n - c_n)^2 \leq R^2$;

4.7. а) $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - 2)^2 + x_4^2 = 1$;

б) $(x_1 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + x_2^2 + (x_4 + 3)^2 = 9$;

в) $(x_1 - 5)^2 + (x_3 + 4)^2 + (x_4 - 2)^2 + (x_5 + 4)^2 = 25$;

г) $\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_5 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_4 - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$;

д) $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2 + x_4^2 = 4$.

4.8. а) $C(-1)$, $R = 3$; б) $C(6)$, $R = 9$;

в) $C(1; 0; 1\frac{1}{2})$, $R = 2$; г) $C(0; 3; -4; 0)$, $R = 5$; д) $C(0; 0; -2; 0; 0)$, $R = 4$.

4.11. а) $\frac{y_1^2}{6} - \frac{y_2^2}{4} = 1$, $\begin{cases} x_1 = \frac{2y_1 + y_3}{\sqrt{5}}, \\ x_2 = \frac{y_1 - 2y_3}{\sqrt{5}}, \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } y_1^2 + \frac{y_2^2}{3} = 1, & \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_6, \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_6, \end{cases} \\
 \text{в) } \frac{y_1^2}{3} - \frac{y_2^2}{7} + \frac{y_3^2}{21} - \frac{y_4^2}{21} = 1, & \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2y_1 + y_6), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_3), \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_3 + y_4), \\ x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y_6 + y_4). \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{4.12. а) } \frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{3} = 1, \begin{cases} x_1 = y_1 - 2, \\ x_2 = y_3 - 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \frac{y_1^2}{6} + \frac{y_2^2}{3} + \frac{y_3^2}{2} = 1, \begin{cases} x_1 = y_1 + 2, \\ x_2 = y_3 - 1, \\ x_3 = y_3 + 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0, \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}, \\ x_2 = y_3 + \frac{1}{2}, \\ x_3 = y_3 - \frac{1}{2}, \\ x_4 = y_4 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{4.13. а) } \frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{9} = 1, \begin{cases} x_1 = \frac{z_1 + z_2}{\sqrt{2}} + 2, \\ x_2 = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

$$\text{б) } \frac{z_1^2}{4} - \frac{z_2^2}{4} = 1, \begin{cases} x_1 = \frac{2z_1 + z_2}{\sqrt{5}} + 1, \\ x_2 = \frac{z_1 - 2z_2}{\sqrt{5}} - 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \frac{z_1^2}{10} - \frac{z_2^2}{10} - \frac{z_3^2}{40} = -1, \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_3 - 5, \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}z_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_3 - 4, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}z_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}z_3 + 3; \end{cases}$$

$$r) \frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{9} + \frac{z_3^2}{4} = 1, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{z_1 + 2z_3}{\sqrt{5}} + 3, \\ x_2 = z_2, \\ x_3 = \frac{-2z_1 + z_3}{\sqrt{5}} - 1; \end{cases}$$

$$n) \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_3^2}{3} = 0, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2z_1 + z_3}{\sqrt{5}} - 1, \\ x_2 = \frac{z_1 - 2z_3}{\sqrt{5}} + 2, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

$$4.16. a) z_1^2 = \sqrt{10}z_1, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-3z_1 + z_2}{\sqrt{10}} + 4, \\ x_2 = \frac{-z_1 - 3z_2}{\sqrt{10}} - 2; \end{cases}$$

$$o) z_1^2 - 4 = 0, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2z_1 + z_2}{\sqrt{5}} + 2, \\ x_2 = \frac{z_1 - 2z_2}{\sqrt{5}} + 1; \end{cases}$$

$$b) z_1^2 - z_2^2 = 2z_3, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2z_1 - 2z_2 - z_3) + 1, \\ x_2 = \frac{1}{3}(2z_1 + z_2 + 2z_3) + 2, \\ x_3 = \frac{1}{3}(z_1 + 2z_2 - 2z_3); \end{cases}$$

$$r) z_1^2 - \frac{z_2^2}{5} = 0, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(z_1 + 2z_3) - \frac{1}{5}, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2z_1 + z_3) + \frac{2}{5}, \\ x_3 = z_3; \end{cases}$$

$$A) z_1^2 = \frac{13}{3}z_3, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{13}(-12z_2 + 5z_3), \\ x_2 = z_1 + \frac{1}{2}, \\ x_3 = -\frac{1}{13}(5z_2 + 12z_3) - \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$e) \frac{z_1^2}{2} + z_2^2 = z_3, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2z_1 - 2z_2 + z_3) - 2, \\ x_2 = \frac{1}{3}(z_1 + 2z_2 + 2z_3) - 2, \\ x_3 = \frac{1}{3}(2z_1 + z_2 - 2z_3); \end{cases}$$

$$ж) \frac{z_1^2}{4} + \frac{z_2^2}{9} - \frac{z_3^2}{36} = -1, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{z_1}{\sqrt{5}} + \frac{z_3}{\sqrt{5}} - 2, \\ x_2 = \frac{-2z_2 + 2z_3}{\sqrt{5}} - 9; \end{cases}$$

$$a) \frac{z_1^2}{5} + \frac{z_2^2}{5} = 1, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}z_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}z_3 + 1, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}z_3 + 2, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}z_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_3; \end{cases}$$

$$n) z_1^2 - \frac{1}{14} = 0, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{14}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}z_2 - \frac{6}{\sqrt{70}}z_3 - \frac{1}{7}, \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{14}}z_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}z_2 + \frac{1}{\sqrt{70}}z_3 + \frac{1}{14}, \\ x_3 = \frac{3}{\sqrt{14}}z_1 + \frac{5}{\sqrt{70}}z_2 - \frac{1}{14}; \end{cases}$$

$$к) \frac{z_1^2}{4} - \frac{z_2^2}{2} = 1, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}z_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_3 - 3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}z_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}z_2, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_3 - 3; \end{cases}$$

$$я) y_1^2 + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{2} = 1, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_2 + y_3), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y_2 + y_3), \\ x_3 = y_1; \end{cases}$$

$$м) z_1^2 = 0, \quad \begin{cases} x_1 = z_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(z_1 + 2z_2) - \frac{1}{5}, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2z_1 + z_2) + \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Оглавление

Глава I. Аффинные n-мерные пространства	3
1. Действительные n -мерные векторные пространства	9
2. Координаты точек в аффинном пространстве	13
3. Плоскости в аффинном пространстве	28
4. Аффинные преобразования аффинных пространств	36
Глава II. Евклидовы n-мерные пространства	36
5. Евклидовы векторные пространства	38
6. Евклидовы пространства	46
7. Движения и преобразования подобия евклидовых пространств	54
Глава III. Квадратичные формы и квадрики в аффинном пространстве	54
8. Квадратичные формы в аффинном векторном пространстве	65
9. Квадрики в аффинном пространстве	84
Глава IV. Квадратичные формы и квадрики в евклидовом пространстве	84
10. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования	88
11. Квадрики в евклидовом пространстве	96
Ответы	

ЗАДАЧНИК — ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ

Редактор Т. П. Руженская
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технический редактор Т. В. Самсонова
Корректор Н. В. Бурдина

ИБ № 4313

Сдано в набор 11. 10. 78. Подписано к печати 05. 02. 79. 60×90 $\frac{1}{16}$. Бумаж. типограф. № 3. Гер. литер. Печать высокая. Условн. печ. л. 7. Уч.-изд. л. 5,76. Тираж 27 000 экз. Заказ 830. Цена 20 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский филиал Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат. Рославлинградпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.