

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

И. А. Лебедев, Т. Г. Сукачева

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

АННОТАЦИЯ

Работа состоит из трёх глав.

Первая глава посвящена определённому интегралу, методам его вычисления и некоторым свойствам определённого интеграла.

Во второй главе рассматривается несобственный интеграл и его свойства.

Третья глава содержит сведения о геометрических приложениях определённого интеграла.

В каждой из глав приведены примеры, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля.

В приложении к работе представлен вариант контрольной работы.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
1. Определённый интеграл и его свойства.....	7
1.1. Определённый интеграл.....	7
1.2. Вычисление определённого интеграла.....	7
1.2.1. Формула Ньютона-Лейбница.....	7
1.2.2. Интегрирование по частям.....	9
1.2.3. Замена переменной.....	10
1.3. Основные свойства определённого интеграла.....	11
1.4. Контрольные вопросы.....	16
2. Несобственный интеграл.....	17
2.1. Определение несобственного интеграла.....	17
2.2. Признаки сравнения для несобственных интегралов первого рода.....	19
2.3. Признаки сравнения для несобственных интегралов второго рода.....	20
2.4. Контрольные вопросы.....	21
3. Геометрические приложения определённого интеграла.....	22
3.1. Вычисление площадей плоских фигур.....	22
3.1.1. Вычисление площадей в прямоугольных координатах.....	22
3.1.2. Вычисление площадей фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрическими уравнениями.....	26
3.1.3. Вычисление площадей в полярных координатах.....	27
3.2. Длина дуги кривой.....	28
3.2.1. Длина дуги явно заданной кривой.....	28
3.2.2. Длина дуги кривой, заданной параметрически.....	29
3.2.3. Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах.....	30

3.3. Вычисление объёмов тел.....	31
3.4. Вычисление площадей поверхностей.....	34
3.5. Контрольные вопросы.....	36
Заключение.....	37

ВВЕДЕНИЕ

Курс математического анализа содержит разнообразный материал. Его немаловажными разделами являются: определенный интеграл, несобственный интеграл и приложения определённого интеграла. Интегрирование многих видов функций представляет собой не самую простейшую проблему математического анализа. А решение задач с помощью определённого интеграла подчас являет собой ещё более сложную задачу.

Вычисление определенного интеграла имеет не только теоретический интерес. К его вычислению сводятся иногда задачи, связанные с практической деятельностью человека. Также понятие определенного интеграла широко используется в физике. Поэтому в курсе математического анализа изучается тема "Определенный интеграл и его приложения".

Существует множество учебных пособий, в которых рассматриваются вопросы, связанные с определённым и несобственным интегралом и приложениями определённого интеграла, но зачастую материал в них либо избыточен, либо недостаточен. И при изучении данной темы возникает необходимость всегда иметь под рукой несколько таких книг. Объём материала по затронутой теме достаточно большой, а времени на его изучение отведено мало.

Эта работа может быть использована студентами для изучения данной темы под руководством и контролем преподавателя, как справочное пособие при повторении материала, при подготовке к зачётам и экзаменам; преподавателями, как источник теоретического и практического материала по данной теме. Но она не заменит ни один из учебников по высшей математике, материал в которых изложен более детально и глубоко. Все выше сказанное подчеркивает актуальность выбранной темы данной работы.

Целью исследования является систематизация и обобщение материала по теме «Определённый интеграл и его приложения», и создание на основе этого материала методического пособия.

Объектами исследования явились: определённый интеграл, его свойства и методы вычисления, несобственный интеграл, его методы вычисления, свойства и признаки сходимости, а так же приложения определённого интеграла: вычисление площадей плоских фигур, объёмов тел вращения, длин дуг кривых, площадей поверхностей.

Объект исследования и проблема исследования обусловили выбор следующих задач:

- собрать теоретический материал по теме;
- собрать практический материал по теме;
- подвергнуть материал обобщению и систематизации.

Теоретический материал, изложенный в работе, тщательно отобран из источников: [1], [2], [6], [7], [9], [11]. Задачный материал составлен на основе упражнений, примеров и задач из: [2], [3], [4], [5], [8], [10].

Структура дипломной работы следующая. Первая глава содержит сведения об определённом интеграле, методах его вычисления, свойствах. Во второй главе приведён материал о несобственном интеграле, методах его вычисления и признаках сходимости. В третьей главе работы рассматриваются геометрические приложения определённого интеграла.

1. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

1.1. Определённый интеграл

Пусть на отрезке a, b задана непрерывная функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок a, b на n частей произвольным образом точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ обозначим λ .

В каждом из отрезков x_{i-1}, x_i , $i = \overline{1, n}$ возьмём по точке ξ_i и вычислим значение функции $f(\xi_i)$. Сумма $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sigma$ называется интегральной суммой для функции $y = f(x)$ на отрезке a, b . В зависимости от деления отрезка a, b на n частичных отрезков и выбора точек ξ_i можно составить бесконечное множество интегральных сумм.

Определение 1. Конечный предел I суммы σ , не зависящий от способа деления отрезка a, b на части и выбора точек ξ_i , при $\lambda \rightarrow 0$ называется определённым интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке от a до b и обозначается символом

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

В случае существования такого предела функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке a, b .

Числа a и b называются, соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования, отрезок a, b — промежутком интегрирования.

1.2. Вычисление определённого интеграла

1.2.1. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке a, b и $F(x)$ — одна из первообразных этой функции, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Оно называется формулой Ньютона-Лейбница.

Пример 1. Вычислить интегралы:

$$1) \int_1^2 \frac{dx}{x}; 2) \int_a^b x^2 dx; 3) \int_a^b \sin x dx; 4) \int_0^1 e^{-x} dx; 5) \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Решение.

$$1) \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

$$2) \int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

$$3) \int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

$$4) \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

$$5) \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} \Big|_1^3 = \sqrt{10} - \sqrt{2}.$$

Задание 1. Вычислить интегралы:

$$1) \int_0^{\pi} \sin x dx; 2) \int_1^2 e^x dx; 3) \int_0^2 x^3 dx; 4) \int_2^4 \frac{dx}{x}; 5) \int_0^2 2^x dx; 6) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx; 7) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$8) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}; 9) \int_3^6 \frac{dx}{x^2-4}; 10) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}; 11) \int_9^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}}; 12) \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

1.2.2. Интегрирование по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке a, b , то справедливо соотношение

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (3)$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям.

Пример 2. Вычислить интегралы:

$$1) \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx; \quad 2) \int_0^1 (x+2) e^{5x} dx.$$

Решение.

1) Полагаем $u = x$, $\sin x dx = dv$, тогда $du = dx$, $v = -\cos x$. Пользуясь формулой (3), получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = -\pi \cos \pi + \pi \cos \pi + \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.$$

2) Полагаем $u = x+2$, $e^{5x} dx = dv$, тогда $du = dx$, $v = \frac{1}{5} e^{5x}$. По формуле (3) получаем

$$\int_0^1 (x+2) e^{5x} dx = \frac{1}{5} (x+2) e^{5x} \Big|_0^1 - \frac{1}{5} \int_0^1 e^{5x} dx = \frac{1}{5} (3e^5 - 2) - \frac{1}{25} e^{5x} \Big|_0^1 = \frac{1}{25} (14e^5 - 9).$$

Задание 2. Вычислить интегралы:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx; \quad 2) \int_1^2 x \ln x dx; \quad 3) \int_1^2 e^x x dx; \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx; \quad 5) \int_1^e x \ln^2 x dx.$$

1.2.3. Замена переменной

Теорема 2. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $a; b$, $x = g(t)$ – монотонная и непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $\alpha; \beta$, причём $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt. \quad (4)$$

Пример 3. Вычислить определённые интегралы:

$$1) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}; 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}; 3) \int_0^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}}.$$

Решение.

1) Положим $e^x = t$, тогда $dx = \frac{dt}{t}$. Находим новые пределы интегрирования:

при $x = \ln 2$, $t = 2$ и при $x = \ln 3$, $t = 3$. Отсюда

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int_2^3 \frac{dt}{t - t^{-1}} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2}{4} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

2) Сделаем замену $t = \tan \frac{x}{2}$, тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Перейдём к новым

пределам интегрирования: при $x = 0$, $t = 0$ и при $x = \frac{\pi}{2}$, $t = 1$. Интеграл примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2 \cos x} &= 2 \int_0^1 \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3 + 2 \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{3 + 3t^2 + 2 - 2t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 5} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

3) Сделаем замену $x = 4\sin t$, тогда $dx = 4\cos t dt$. Перейдём к новым пределам интегрирования: при $x = 0$, $t = 0$ и при $x = 4$, $t = \frac{\pi}{2}$. В результате интеграл примет вид

$$\int_0^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}} = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cdot 4\cos t dt}{4\cos t} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2t dt = 8 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.$$

Задание 3. Вычислить интегралы:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \sin x dx; 2) \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}; 3) \int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \ln x}; 4) \int_1^e \frac{e^x dx}{e^x + 5}.$$

1.3. Основные свойства определённого интеграла

1°. Определённый интеграл зависит только от вида функции $f(x)$ и пределов интегрирования, но не зависит от обозначения переменной интегрирования, то есть

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

2°. Определённый интеграл меняет знак при перестановке пределов интегрирования

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

3°. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

4°. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx.$$

5°. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций

$$\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx.$$

6°. Отрезок интегрирования можно разбить на части

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

7°. Нахождение интегралов от чётных и нечётных функций с симметричными пределами интегрирования можно упростить, применяя формулы

$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, если $f(x)$ – чётная функция, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, если $f(x)$ – нечётная функция.

8°. Если $f(x)$ непрерывная функция, периодическая с периодом T , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x) dx; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пример 4. Вычислить интегралы:

$$1) \int_1^3 3x^2 + 1 dx; \quad 2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx; \quad 3) \int_{-3}^3 \frac{x^7 dx}{x^6 + 4x^2 + 7}; \quad 4) \int_{\frac{9\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \sin 2x}{\cos^4 x} dx.$$

Решение.

1) Представим определённый интеграл в виде суммы двух интегралов и для каждого из них воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница

$$\int_1^3 3x^2 + 1 dx = 3 \int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 1 dx = x^3 \Big|_1^3 + x \Big|_1^3 = 3^3 - 1^3 + 3 - 1 = 28.$$

2) Подынтегральная функция есть произведение двух нечётных функций, то есть является чётной функцией, поэтому

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2x dx = \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

3) В силу нечётности подынтегральной функции и симметричности пределов интегрирования данный определённый интеграл равен нулю

$$\int_{-3}^3 \frac{x^7 dx}{x^6 + 4x^2 + 7} = 0.$$

4) Подынтегральная функция имеет период 2π , поэтому из верхнего и нижнего пределов интегрирования можно вычесть 2π .

$$\begin{aligned} \int_{\frac{9\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \sin 2x}{\cos^4 x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \sin 2x}{\cos^4 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x \, d \operatorname{tg} x = \\ &= \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} 3\sqrt{3} + 3 - \frac{1}{3} - 1 = \sqrt{3} + \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Задание 4. Вычислить интегралы:

$$1) \int_{-1}^3 1 - 2x + 3x^2 \, dx; \quad 2) \int_1^4 \left(2x^2 - 3x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx; \quad 3) \int_{\frac{41\pi}{2}}^{21\pi} \cos x \, dx; \quad 4) \int_{-1}^1 \frac{x^5 dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

9°. Если функция $f(x) \geq 0$ непрерывна в промежутке $a; b$ и интегрируема в этом промежутке, то

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0.$$

10°. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы в промежутке $a; b$ и $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Теорема 3. (Об оценке определённого интеграла). Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $a;b$, m и M – наименьшее и наибольшее значения $f(x)$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (5)$$

Теорема 4. (О среднем значении). Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a;b$, то существует такая точка $c \in a;b$, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c). \quad (6)$$

Число $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ называется средним значением функции $f(x)$ в промежутке $a;b$.

Пример 5. Оценить определённые интегралы:

$$1) \int_0^1 \sqrt{9+x^2} dx; \quad 2) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{3+2\cos x}}.$$

Решение.

1) Так как $0 \leq x \leq 1$, то $9 \leq 9+x^2 \leq 10$, и поэтому $3 \leq \sqrt{9+x^2} \leq \sqrt{10}$.

С помощью неравенства (5) получаем:

$$3(1-0) \leq \int_0^1 \sqrt{9+x^2} \leq \sqrt{10}(1-0),$$

или окончательно,

$$3 \leq \int_0^1 \sqrt{9+x^2} \leq \sqrt{10}.$$

2) При $0 \leq x \leq 2\pi$ имеем $1 \leq 3+2\cos x \leq 5$, или $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{3+2\cos x}} \leq 1$.

С помощью неравенства (5) получаем:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{5}} \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{3+2\cos x}} \leq 2\pi.$$

Пример 6. Сравнить значения определённых интегралов:

$$1) \int_0^1 x^2 dx \text{ и } \int_0^1 x dx; 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx \text{ и } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx.$$

Решение.

1) Так как на отрезке $[0;1]$ выполняется неравенство $x^2 \leq x$, то

$$\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 x dx.$$

2) Поскольку на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется строгое неравенство

$\sin^7 x < \sin^3 x$, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx.$$

Задание 5. Оценить определённые интегралы:

$$1) \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}; 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx; 3) \int_1^2 \sqrt{3+x^4} dx; 4) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}; 5) \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

Задание 6. Определить знаки интегралов, не вычисляя их:

$$1) \int_{-2}^1 x^3 dx; 2) \int_0^1 x e^x dx; 3) \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx.$$

Задание 7. Сравнить значения определённых интегралов:

- 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$; 2) $\int_1^2 x dx$ и $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; 3) $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^3} dx$ и $\int_0^1 x dx$;
4) $\int_0^1 x^2 \cos^2 x dx$ и $\int_0^1 x \sin^2 x dx$; 5) $\int_1^2 x dx$ и $\int_1^2 e^x dx$.

1.4. Контрольные вопросы

- 1) Что называется определённым интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке a, b ?
- 2) Запишите формулу Ньютона-Лейбница. Поясните её смысл.
- 3) Как вычисляется определённый интеграл от выражения вида $af(x) + bg(x)$?
- 4) Чему равен интеграл от чётной функции по отрезку $-a, a$?
- 5) Чему равен интеграл от нечётной функции по отрезку $-a, a$?
- 6) В чём заключается смысл интегрирования по частям?
- 7) Запишите формулу замены переменной. В чём заключается её смысл?
- 8) Сформулируйте теорему об оценке определённого интеграла.
- 9) Сформулируйте теорему о среднем.

2. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Определение несобственного интеграла

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $a; +\infty$ и интегрируема на любом отрезке $a; b$, содержащемся в этом промежутке.

Выражение

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (7)$$

называется несобственным интегралом Римана или несобственным интегралом первого рода от функции f по промежутку $a; +\infty$.

Если предел в правой части существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае интеграл называется расходящимся.

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

Определение 4. Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, принадлежащей отрезку $a; b$ и непрерывна во всех других точках этого отрезка, то выражение

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

где ε — произвольная бесконечно малая величина, называется несобственным интегралом второго рода.

Пример 7. Вычислить интегралы:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}; 2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}; 3) \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx; 4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Решение.

1) По определению несобственного интеграла находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

$$2) \text{ Так как } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^b, & \alpha \neq 1, \\ \ln x \Big|_1^b, & \alpha = 1, \end{cases} \text{ то предел } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \text{ существу-}$$

ет только при $\alpha > 1$.

В итоге $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$, если $\alpha > 1$, а при других значениях параметра α интеграл расходится.

3) По определению несобственного интеграла:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} -\cos x \Big|_a^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos a \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \cos a. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{a \rightarrow -\infty} \cos a$ не существует, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ расходится.

4) По определению несобственного интеграла находим

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_a^1 = 2.$$

Задание 8. Вычислить:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$; 3) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$; 4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; 6) $\int_{-8}^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$.

2.2. Признаки сравнения для несобственных интегралов первого рода

1. Признак сравнения.

Если функции f и g на промежутке $a; +\infty$ неотрицательны и удовлетворяют неравенству $f \leq g$, то:

а) из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx;$$

б) их расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует расходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

2. Признак сравнения в предельной форме.

Если на промежутке $a; b$ $f \geq 0$, $g \geq 0$ и существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$,

$0 < k < +\infty$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. В

этом случае интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется абсолютно сходящимся.

2.3. Признаки сравнения для несобственных интегралов второго рода

1. Признак сравнения.

Если функции f и g неотрицательны и интегрируемы по любому отрезку $a + \varepsilon, b$

($0 < \varepsilon < b - a$) и при $x > a$ удовлетворяют неравенству $f \leq g$, то:

а) если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$;

б) если расходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то расходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$.

2. Признак сравнения в предельной форме.

Функции f и g неотрицательны и интегрируемы по любому отрезку

$a + \varepsilon, b$ ($0 < \varepsilon < b - a$). Если существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $0 < k < +\infty$, то интегралы

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Если интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится, то сходится и несобственный интеграл от неограниченной функции $\int_a^b f(x) dx$. В этом случае интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется абсолютно сходящимся.

Пример 8. Исследовать, сходится ли интеграл:

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2x^3}}; 2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} e^x.$$

Решение.

1) Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $x = 0$. Очевидно, что при $x \geq 0$ $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2x^3} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Так как несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{\varepsilon}^1 = \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 - e^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{2},$$

то есть сходится, то и исходный интеграл сходится.

2) Так как $\frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{e^x}$ при $x \geq 1$ и интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

сходится, то исходный интеграл также сходится (на основании признака 1).

Задание 9. Определить, сходится ли интеграл:

- 1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + x^3} dx$; 2) $\int_0^1 \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$; 3) $\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^3}$; 4) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$; 5) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$;
6) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + 3x^2 + x^6}$.

2.4. Контрольные вопросы

- 1) Дайте определение несобственного интеграла первого рода.
- 2) Дайте определение несобственного интеграла второго рода.
- 3) Какой интеграл называется абсолютно сходящимся?
- 4) Сформулируйте признак Абеля для несобственного интеграла первого рода.
- 5) Дайте формулировку признака сравнения в предельной форме для несобственного интеграла второго рода.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

3.1. Вычисление площадей

3.1.1 Вычисление площадей в прямоугольных координатах

Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $a; b$.

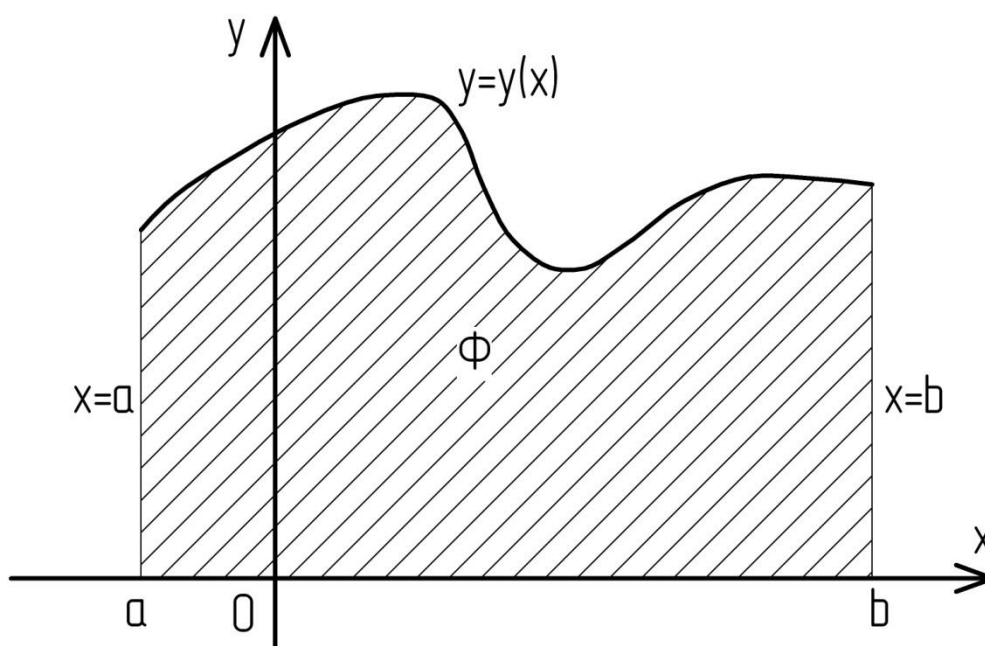


Рисунок 1.

Площадь фигуры Φ (рис. 1), ограниченной графиком функции $y = y(x)$, отрезком $a; b$ оси Ox и соответствующими отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ равна

$$S = \int_a^b y(x) dx. \quad (8)$$

Пусть функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ непрерывны на $a; b$.

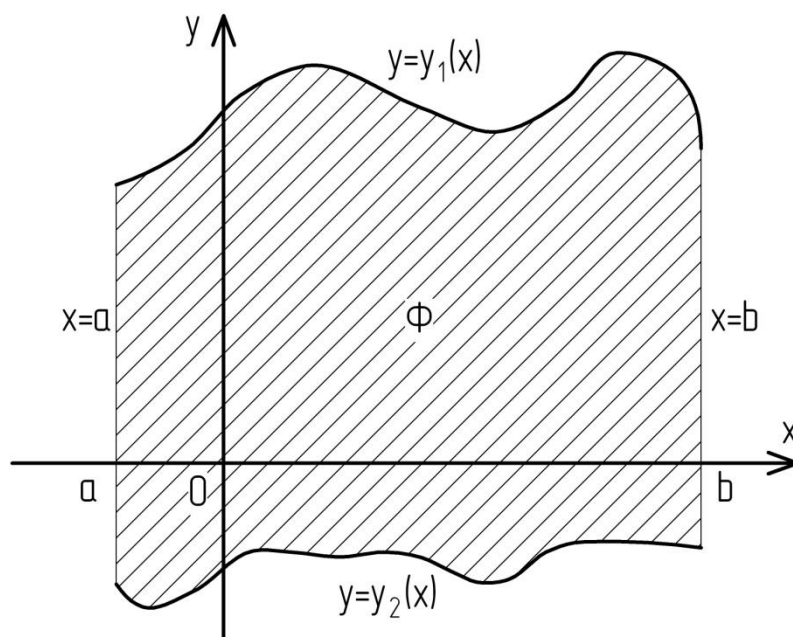


Рисунок 2.

Площадь фигуры Φ (рис. 2), ограниченной графиками функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ и соответствующими отрезками $x = a$ и $x = b$, равна

$$S = \int_a^b |y_2(x) - y_1(x)| dx. \quad (9)$$

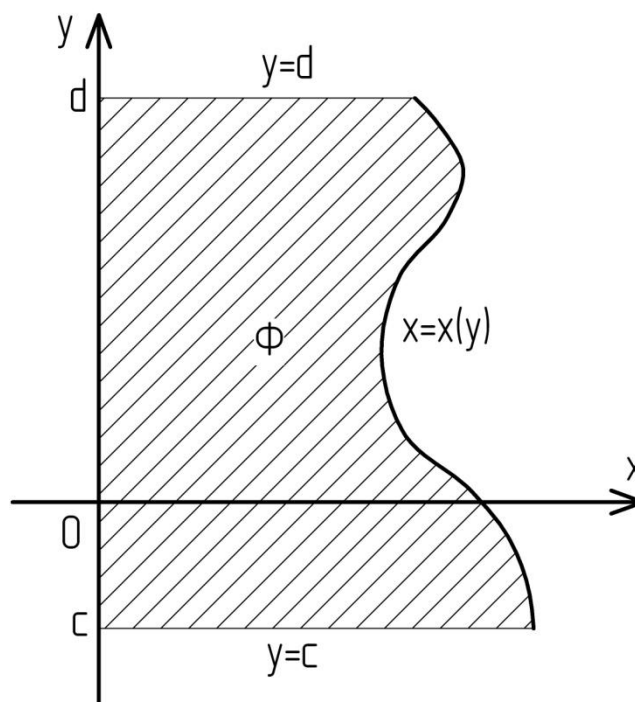


Рисунок 3.

При аналогичных предположениях относительно данных функций для площади фигуры Φ (рис. 3) имеет место формула

$$S = \int_c^d |x_2(y) - x_1(y)| dy, \quad (10)$$

а для площади фигуры Φ (рис. 4)

$$S = \int_c^d |x_2(y) - x_1(y)| dy. \quad (11)$$

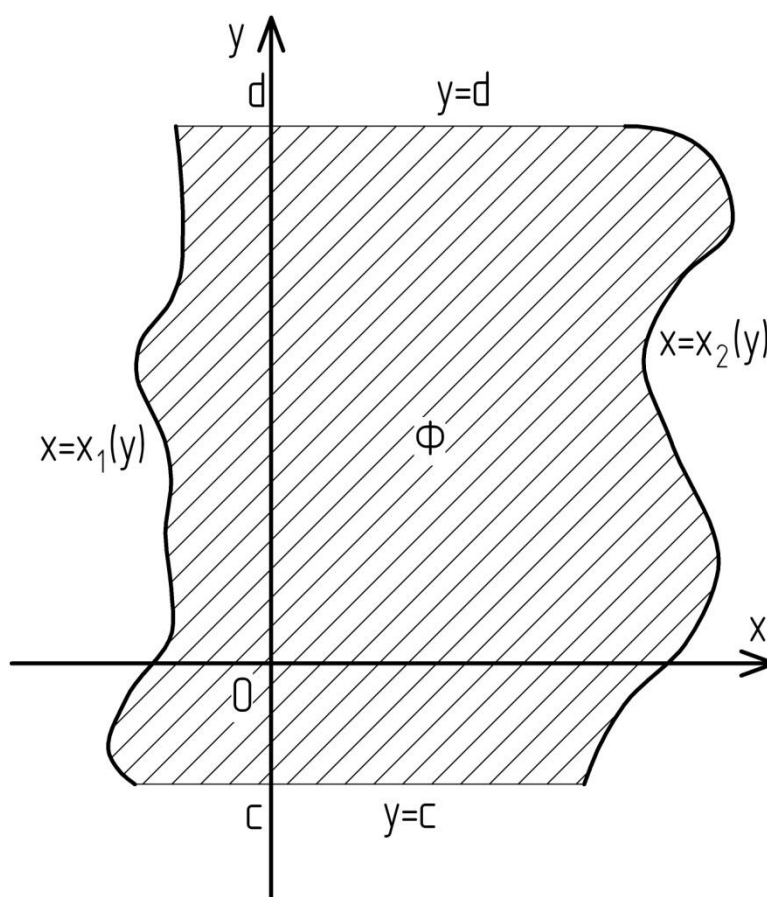


Рисунок 4.

Пример 9.

1) Вычислить площадь S фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и осью Ox , при $0 \leq x \leq 2\pi$.

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2$ и $x + y + 2 = 0$.

Решение.

1) Так как $\sin x \geq 0$ при $0 \leq x \leq \pi$ и $\sin x \leq 0$ при $\pi < x \leq 2\pi$, то

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx,$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - \cos 0 = -(-1) - 1 = 2.$$

$$S = 2 \times 2 = 4 \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ: 4 кв.ед.

2) Найдём точки пересечения графиков:

$$\begin{cases} y = -x^2, \\ y + x + 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x^2, \\ x^2 - x - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x^2, \\ \begin{cases} x = 2, \\ x = -1 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases}$$

В результате получили точки: $2; -4$ и $-1; -1$.

$$S = \int_{-1}^2 -x^2 + x + 2 dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = 4,5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

Задание 10.

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

2) Найти площадь ограниченной области, лежащей между графиками $y = x^3$ и $y = x^5$.

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 6x - x^2 - 7$ и прямой $y = x - 3$.

4) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $x = y - 1^2$ и гиперболой $y^2 - \frac{x^2}{2} = 1$.

5) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $x = 4x - x^2$ и осью Oy .

3.1.2. Вычисление площадей фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрическими уравнениями

Если функция задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, где функция $x(t)$ имеет непрерывную неотрицательную производную на $[\alpha; \beta]$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, а функция $y(t)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha; \beta]$, то площадь фигуры Φ равна

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) |x'(t)| dt. \quad (12)$$

Для площади фигуры Φ (рис. 3), заданной параметрически, имеет место формула

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) |y'(t)| dt, \quad (13)$$

Пример 10. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Решение.

Вычислим площадь верхней половины эллипса и удвоим. Здесь x изменяется от $-a$ до a , следовательно, t изменяется от π до 0 .

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{\pi}^0 b \sin t \cdot |-a \sin t| dt = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \\ &= 2ab \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \pi ab \text{ (кв.ед.)}. \end{aligned}$$

Ответ: πab кв.ед.

Задание 11.

- 1) Вычислить площадь области, ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды $x = a t - \sin t$, $y = a 1 - \cos t$.
- 2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.
- 3) Найти площадь фигуры, ограниченной петлей листа Декарта $x^3 + y^3 = 3axy$.

3.1.3. Вычисление площадей в полярных координатах

Пусть функция $r = r(\varphi)$, $\varphi \in \alpha; \beta$, где $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, непрерывна и неотрицательна на $\alpha; \beta$.

Площадь сектора Φ (рис. 5), ограниченного графиком функции $r(\varphi)$ в полярных координатах и соответствующими отрезками лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (14)$$

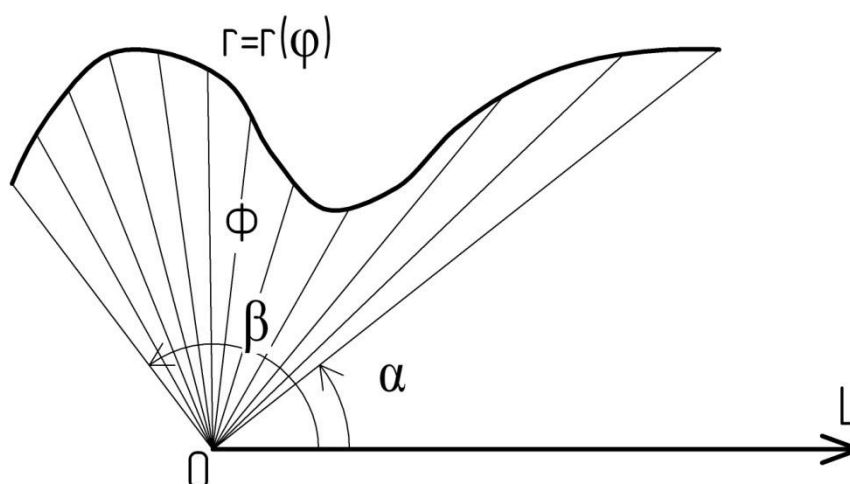


Рисунок 5.

Пример 11. Найти площадь области, ограниченной частью спирали $r = a + b\varphi$ ($a > 0$) при $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Решение.

$$S = \int_0^{2\pi} (a + b\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} (a^2 + 2ab\varphi + b^2\varphi^2) d\varphi = \left(a^2\varphi + ab\varphi^2 + \frac{b^2\varphi^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^2 + 4\pi^2 ab + \frac{8\pi^3 b^2}{3} \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ: $2\pi a^2 + 4\pi^2 ab + \frac{8\pi^3 b^2}{3}$ кв.ед.

Задание 12.

- 1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.
- 2) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
- 3) Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью: $r = a$.

3.2. Длина дуги кривой

3.2.1. Длина дуги явно заданной кривой

Если плоская кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, где $y(x)$ — непрерывно дифференцируемая на $[a; b]$ функция, то ее длина равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (15)$$

Пример 12. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$, $1 \leq x \leq e$.

Решение.

$$l = \int_1^e \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{x} \right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \left(\frac{1}{x} + x \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^e =$$

$$= \frac{1}{4} 1 + e^2 \quad (\text{ед.}).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4} 1 + e^2 \quad (\text{ед.}).$$

Задание 13.

1) Определить длину окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

2) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y^2 = 2px$, $0 \leq x \leq x_0$, $p > 0$.

3.2.2. Длина дуги кривой, заданной параметрически

Длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a; b]$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции, равна

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt. \quad (16)$$

Длина дуги плоской кривой, заданной параметрически, равна

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} dt, \quad (17)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции.

Пример 13. Вычислить длину дуги винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = amt$ при изменении t от 0 до 2π .

Решение.

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 m^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + m^2} dt = 2\pi a \sqrt{1 + m^2} \quad (\text{ед.}).$$

$$\text{Ответ: } 2\pi a \sqrt{1 + m^2} \quad (\text{ед.}).$$

Задание 14.

- 1) Вычислить длину астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.
- 2) Вычислить длину дуги кривой $x = a \operatorname{sh} t - t$, $y = a \operatorname{ch} t - 1$, $0 \leq t \leq T$.
- 3) Найти длину дуги параболы $y = ax^2$, $0 \leq x \leq b$.
- 4) Найти длину дуги кривой (циклоиды), заданной на плоскости xOy параметрическими уравнениями $x = a t - \sin t$, $y = a (1 - \cos t)$, $a > 0$.

3.2.3. Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах

Длина плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in \alpha; \beta$, где $r(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемая на $\alpha; \beta$ функция, равна

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi. \quad (18)$$

Пример 14. Вычислить длину кривой $r = \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{1}{\varphi} \right)$, $1 \leq \varphi \leq 3$.

Решение.

$$l = \int_1^3 \sqrt{1 + \varphi r'^2} d\varphi = \int_1^3 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2\varphi} \right) d\varphi = \left(\frac{\varphi^2}{4} + \frac{1}{2} \ln \varphi \right) \Big|_1^3 = 2 + \frac{1}{2} \ln 3 \text{ (ед.)}.$$

Ответ: $2 + \frac{1}{2} \ln 3$ ед.

Задание 15.

- 1) Пусть линия на плоскости с полярными координатами $r; \varphi$ задана уравнением $r = a \left| \sin^3 \frac{\varphi}{3} \right|$, $a > 0$. Найти ее длину.
- 2) Найти длину кардиоиды $\rho = a (1 + \cos \theta)$.

3) Вычислить длину кривой $\rho = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$.

3.3. Вычисление объемов тел

Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $a; b$. Объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры Φ (рис. 6), ограниченной графиком функции $y = y(x)$, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси Ox , равен

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx. \quad (19)$$

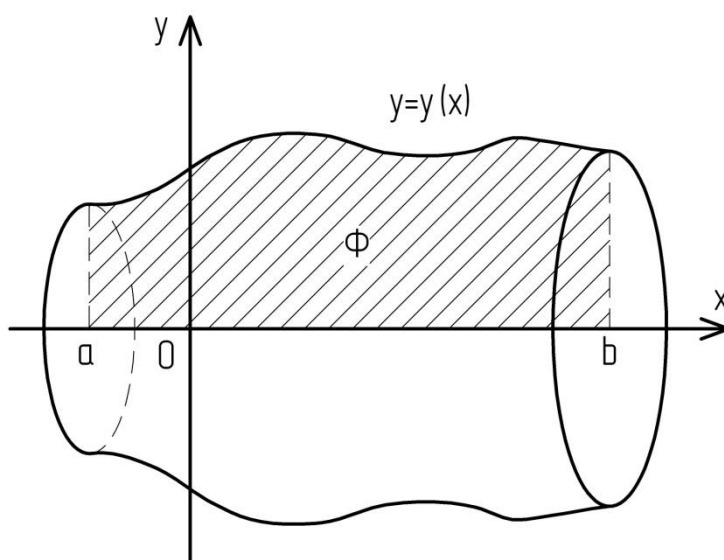


Рисунок 6.

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \alpha; \beta$, где функция $x(t)$ имеет непрерывную неотрицательную производную на $\alpha; \beta$ и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, а функция $y = y(t)$ непрерывна и неотрицательна на $\alpha; \beta$, то объем V тела, образованного вращением фигуры Φ (рис. 6) вокруг оси Ox , равен

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt. \quad (20)$$

Если функция $x = x(t)$ убывает и $x(\alpha) = b$, $x(\beta) = a$, то при тех же прочих условиях

$$V = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt. \quad (21)$$

Пусть функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ непрерывны на отрезке $a; b$ и $y_2(x) \geq y_1(x) \geq 0$, $x \in a; b$. Объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры Φ (рис. 7), ограниченной графиками функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, равен

$$V = \pi \int_a^b y_2^2(x) - y_1^2(x) dx. \quad (22)$$

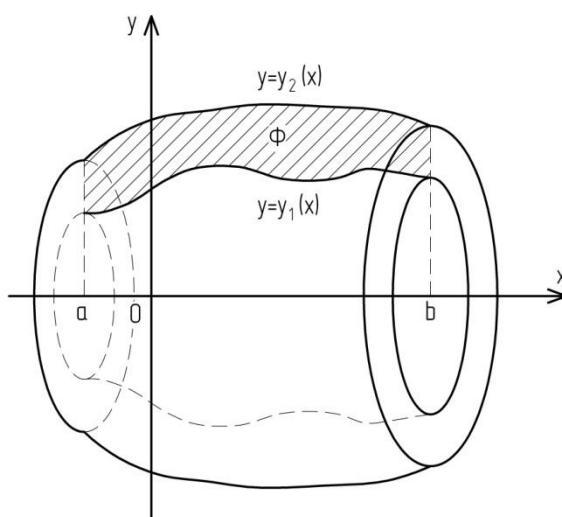


Рисунок 7.

Для тел, образованных вращением фигуры Φ (рис. 8 и рис. 9) вокруг оси Oy , при аналогичных предположениях относительно данных функций верны соответственно следующие формулы для объемов:

$$V = \pi \int_c^d x^2(y) dy,$$

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t) y'(t) dt,$$

$$V = \pi \int_c^d x_2^2(y) - x_1^2(y) dy, \quad 0 \leq x_1(y) \leq x_2(y) \text{ на } c; d.$$

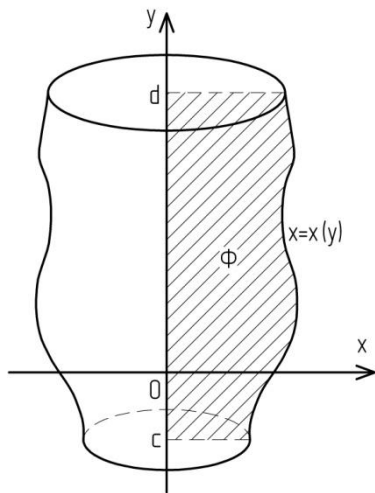


Рисунок 8.

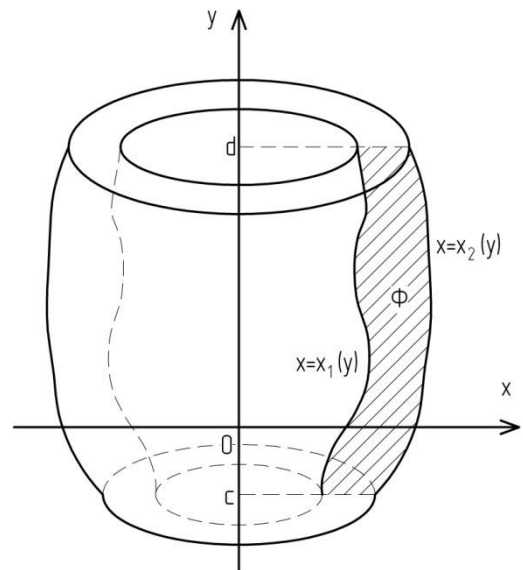


Рисунок 9.

Пусть тело расположено в пространстве $Oxyz$ между плоскостями $z = z_0$ и $z = z_0 + H$, $H > 0$. Пусть каждое сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Oz , имеет площадь $S(z)$, где $S(z)$ – интегрируемая на $[z_0; z_0 + H]$ функция. Если это тело имеет объем, то он равен

$$V = \int_{z_0}^{z_0+H} S(z) dz. \quad (23)$$

Аналогичные формулы имеют место, если вместо оси Oz взять ось Ox или Oy .

Пример 15. Найти объем тела, образуемого вращением цепной линии $y = \frac{a}{2} e^{x/a} + e^{-x/a}$ вокруг оси Ox на участке от $x = 0$ до $x = b$.

Решение.

$$V = \pi \int_0^b \left(\frac{a^2}{4} e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a} \right) dx =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \left(\frac{a}{2} e^{2x/a} + 2x - \frac{a}{2} e^{-2x/a} \right) \Big|_0^b = \frac{\pi a^3}{8} e^{2b/a} - e^{-2b/a} + \frac{\pi a^2 b}{2} \text{ (куб.ед.)}.$$

Ответ: $\frac{\pi a^3}{8} e^{2b/a} - e^{-2b/a} + \frac{\pi a^2 b}{2}$ куб.ед.

Задание 16.

1) Вычислить объем тела, ограниченный поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$.

2) Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x \in -b, b$.

3) Найти объём тела, ограниченного поверхностью, полученной в результате вращения графика функции $x^2 + y - b^2 = a^2$, $|x| \leq a$, $0 < a < b$, вокруг оси Ox .

4) Найти объём эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

5) Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной петлей кривой $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$, $t \in R$ вокруг оси Ox .

6) Вычислить объём шара.

7) Вычислить объём конуса, у которого высота равна h , а радиус основания — r .

3.4. Вычисление площадей поверхностей

Пусть $y = y(x)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $a; b$ функция. Площадь S поверхности, образованной при вращении графика этой функции вокруг оси Ox , равна

$$S = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (24)$$

Пусть в полуплоскости $y \geq 0$ параметрически задана кривая уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha; \beta]$ функции. Площадь S поверхности, образованной при вращении данной кривой вокруг оси Ox , равна

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (25)$$

Если кривая расположена в полуплоскости $y \leq 0$, то

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (26)$$

При аналогичных условиях площадь S поверхности, образованной при вращении кривой вокруг оси Oy , соответственно равна

$$S = 2\pi \int_c^d |x(y)| \sqrt{1 + x'(y)^2} dy,$$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad x(t) \geq 0,$$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad x(t) \leq 0.$$

Пример 16. Определить площадь поверхности параболоида, образованного вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2 = 2px$, $p > 0$, соответствующей изменению x от $x = 0$ до $x = a$.

Решение.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^a \sqrt{2px} \sqrt{\frac{2x+p}{2x}} dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^a \sqrt{2x+p} dx = \\ &= 2\pi \sqrt{p} \left[\frac{2}{3} (2x+p)^{3/2} \right]_0^a = \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} (2a+p)^{3/2} - p^{3/2} \quad (\text{кв.ед.}). \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2\pi \sqrt{p}}{3} (2a+p)^{3/2} - p^{3/2}$ кв.ед.

Задание 17.

- 1) Найти площадь поверхности, образованной при вращении дуги параболы $2ay = x^2 - a^2$, $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}a$ вокруг оси Oy .
- 2) Найти площадь поверхности, образованной при вращении петли кривой $9x^2 = y^3 - y^2$ вокруг оси Ox .
- 3) Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $x \in [-b, b]$.
- 4) Найти площадь поверхности шара радиуса R .

3.5. Контрольные вопросы

- 1) Как вычислить площадь фигуры ограниченной графиком функции $y = y(x)$, отрезком $a; b$ оси Ox и соответствующими отрезками прямых $x = a$ и $x = b$?
- 2) Как вычислить площадь фигуры ограниченной графиками функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ и соответствующими отрезками $x = a$ и $x = b$?
- 3) Назовите формулы вычисления площадей фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически.
- 4) Как вычислить длину дуги кривой, заданной в полярных координатах?
- 5) Назовите формулу объёма тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком функции $y = y(x)$, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси Ox .
- 6) Назовите формулу для вычисления площади поверхности, образованной при вращении графика функции вокруг оси Ox .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной данной работе были рассмотрены основные положения, связанные с изучением определённого, несобственного интеграла и приложений определённого интеграла. Решение задач с использованием приложений определённого интеграла представляет собой один из сложных разделов математического анализа. Количество часов, отведённое на изучение данной темы, достаточно невелико. Поэтому данная работа спланирована таким образом, чтобы изложенные в ней аспекты представляли собой интересный и освобождающий от излишних трудностей для учащихся материал.

Работа может быть использована, как пособие для организации самостоятельной работы студентов, а также она может быть полезна не только студентам среднетехнических и высших учебных заведений, но и преподавателям высшей математики и просто интересующимся читателем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богданов Ю. С.* Математический анализ: учебное пособие. [Текст] / Ю. С. Богданов. М.: ЮНИТИ, 2003. 351с.
2. *Виленкин Н. Я.*, Математический анализ. Интегральное исчисление: учебное пособие. [Текст] / Н. Я. Виленкин, Е. С. Куницкая, А.Г. Мордкович. М.: Просвещение, 1979. 177 с.
3. *Гусак А.А.* Математический анализ и дифференциальные уравнения: Справ.пособие к решению задач. [Текст] / А. А. Гусак. 3-е изд., стер. Минск: ТетраСистемс, 2003. 415с.
4. *Давыдов Н. А.* Сборник задач по математическому анализу. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. [Текст] / Н. А. Давыдов, П. Н. Коровкин, В. Н. Никольский. Изд. 4-е, доп. М., «Просвещение», 1973. 256 с.
5. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. 1. [Текст] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. 4-е изд., испр. и доп. М., Высш. шк., 1986. 304 с.
6. *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть 1. [Текст] / В. А. Зорич. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997. 554 с.
7. *Ильин В. А.* Математический анализ : Учеб.:В 2 ч. Ч.2 [Текст] / В. А. Ильин. МГУ им.М.В.Ломоносова. 2-е изд.,перераб. и доп. М. : Проспект: Издательство Моск.ун-та, 2004. 353
8. *Кудрявцев Л. Д.* Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие [Текст] / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. 2-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 504 с.
9. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 1: Учебное пособие для втузов. [Текст] / Н. С. Пискунов. 13-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 432 с.

10. *Черненко В.Д.* Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. В 3 т.: Т.1. [Текст] / В. Д. Черненко. СПб.: Политехника, 2003. 703 с.

11. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Ч.2. [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. 7-е изд., стер. СПб.: Лань, 2005. 463с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Вычислить интегралы:

$$1) \int_{-1}^2 x^2 - 3x + 7 \, dx; \quad 2) \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{2 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 3) \int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^2}}; \quad 4) \int_0^1 x e^{2x} \, dx.$$

Задание 2. Оценить интеграл: $\int_1^2 \frac{e^x}{x} \, dx$.

Задание 3. Сравнить значения определённых интегралов:

$$1) \int_0^1 \sqrt[3]{8+x^3} \, dx \text{ и } \int_0^1 x \, dx; \quad 2) \int_1^2 x \, dx \text{ и } \int_1^2 e^{7x} \, dx.$$

Задание 4. Вычислить несобственные интегралы:

$$1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^2 \, dx; \quad 2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Задание 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, dx$.

Задание 6. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x2^x$, осью Ox и прямыми $x=1$, $x=0$.

Задание 7. Вычислить длину дуги цепной линии $y = \frac{1}{2} e^x + e^{-x}$, взятой от точки $x=0$ до точки $x=1$.

Задание 8. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

Задание 9. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кубической параболы $y = x^3$, ограниченной точками $0;0$ и $\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{27}\right)$.