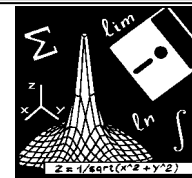


ИНФОРМАТИКА И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА



УДК 519.216.3

ОБОСНОВАНИЕ ОБЪЕМОВ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОДУКЦИИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЯДОВ ДИНАМИКИ

С.И.Арендателева

Политехнический институт НовГУ, aig9@yandex.ru

Исследованы различные математические модели краткосрочного прогнозирования функции реализации продукции с учетом сезонных факторов. Рассматриваются результаты применения разработанных алгоритмов прогнозирования на конкретном промышленном предприятии.

Ключевые слова: прогнозирование, временной ряд, сезонная компонента

In this paper we investigate various mathematical models of short-term forecasting of the sales function, taking into account seasonal factors. There are also considered the results of the application of the developed forecasting algorithms on a specific industrial enterprise.

Keywords: forecasting, time series, seasonal component

В сохраняющихся в настоящее время условиях экономической нестабильности одно из наиболее эффективных и быстрореализуемых направлений развития производства — повышение степени его гибкости по отношению к потребностям рынка за счет освоения прогнозных оценок реализуемой продукции. На основе прогнозных оценок объемов реализации продукции строится все внутрифирменное планирование предприятия. Именно с прогноза объемов реализации продукции начинаются формирование программы выпуска, разработка производственных планов, а, следовательно, и планов закупки сырья и материалов, определение загрузки производственных мощностей предприятия.

Инструментов прогнозирования отечественная и зарубежная практика выработала достаточно много [1-3]. Однако неразработанными в этой области являются вопросы применения методов прогнозирования при планировании на практике. В настоящее время на большинстве промышленных предприятий, относящихся к сфере малого и среднего бизнеса, применяются методы экспертных оценок, предполагающие систематизацию и обработку мнений специалистов, или методы усреднения ретроспективных данных, но в основном процесс прогнозирования осуществляется просто на интуитивном уровне. Понятно, что для эффективного функционирования предприятия требуется не любой прогноз, а прогноз, обладающий достаточной степенью точности. Таким образом, значимость разработки методов и алгоритмов прогнозирования, а также их применения в области оптимального планирования производственных систем в настоящее время возрастает.

В работе исследовались различные математические модели краткосрочного прогнозирования функции реализации выпускаемой предприятием продукции с учетом сезонных факторов. Практика показывает, что сезонность имеет место практически в любой отрасли промышленности. Игнорировать

данный аргумент нельзя, поскольку именно при определении прогнозируемого объема реализации продукции для планируемого периода сезон может оказать значительное влияние. Рассмотрим аддитивную модель сезонных явлений. Временной ряд объемов реализации i -й продукции P_{it} (при $t = 1, \dots, n$), генерируемый некоторой моделью, можно представить в виде трех компонент:

$$P_{it} = tr_{it} + g_{it} + \varepsilon_{it},$$

где tr_{it} — тренд; g_{it} — сезонная составляющая для аддитивной модели; ε_{it} — случайная компонента. При этом сезонная составляющая предполагается периодической, а случайная компонента — подчиняющейся некоторому вероятностному закону. Фактически функция g_{it} определяется своими значениями на периоде длины T : $g_1, \dots, g_T$. Для однозначности параметризации модели предполагаем, что $g_1 + \dots + g_T = 0$. Значения $g_1, \dots, g_T$ назовем индексами сезонности. Поясним их смысл на примере. Пусть P_{it} ряд помесечных данных объемов реализации продукции, а период сезонности — год, так что $T = 12$. Допустим, $k = 1$ соответствует январю. Тогда коэффициент g_1 выражает среднестатистическое отличие января от среднего по всем месяцам года. В свою очередь g_2 — аналогичная характеристика февраля, g_3 — марта и т.д.

Для рядов, содержащих явно выраженный тренд, расчет по мультипликативной форме модели позволяет представить значение сезонной компоненты через определенную долю трендового значения:

$$P_{it} = tr_{it} \cdot f_{it} \cdot \varepsilon_{it},$$

где f_{it} — сезонная составляющая для мультипликативной модели. В этом случае в качестве условия нормировки используется условие $f_1 \cdot \dots \cdot f_T = 1$. Ин-

дексы сезонности рассматриваются в системе прогнозирования объемов реализации продукции как периодические функции с бесконечной областью определения и в таком качестве могут участвовать в любых арифметических операциях над временными рядами.

Рассмотрим реализацию алгоритмов краткосрочного прогнозирования на реальном примере функционирования малого промышленного предприятия, выпускающего газовыхлопные системы для автомобилей. Для исследования были выбраны полиномиальные регрессионные модели (первой и второй степени) и адаптивные модели экспоненциального сглаживания с учетом сезонности. В качестве исходной информации использовались статистические данные, взятые с учетной системы предприятия, в нашем случае с программы «1С: Предприятие».

Исходные данные для моделирования представляют собой предысторию отгрузок готовой продукции предприятия различным контрагентам с 2006 по 2009 гг. Необходимость анализа данных последних лет заключается в том, что тенденции текущего года могут в корне отличаться от тенденций прошлых лет. Особенно это характерно для малых промышленных предприятий, поскольку влияние внутренних и внешних факторов вызывают изменения в функционировании предприятия тем сильнее, чем меньше предприятие.

Продолжительность периода, на который составляется прогноз реализации продукции, определяется спецификой бизнеса и базируется как на сезонных потребностях в продукции, так и на длительности производственного цикла предприятия. Полный

где $\hat{y}_{i+m}$ — величина $(i + m)$ -й скользящей средней; y_i — i -й уровень временного ряда ($i = 1, 2, \dots, n - 2m$); k — переменный индекс для интервала сглаживания ($k = 0, 1, 2, \dots, 2m$); m — заданное целое положительное число, с помощью которого определяется величина интервала сглаживания.

2) Оценка сезонной составляющей для аддитивной модели в виде абсолютной величины, а для мультипликативной — в виде коэффициента сезонности:

$$\hat{s}_{i+m} = y_{i+m} - \hat{y}_{i+m};$$

$$\hat{s}_{i+m} = \frac{y_{i+m}}{\hat{y}_{i+m}}.$$

3) Корректировка полученных оценок сезонной компоненты для аддитивной и мультипликативной моделей соответственно:

$$s_j^* = \frac{1}{q+1} \sum_{l=0}^q \hat{s}_{j+lp} - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{q+1} \sum_{l=0}^q \hat{s}_{j+lp} \right);$$

$$s_j^* = \frac{\frac{1}{q+1} \sum_{l=0}^q \hat{s}_{j+lp} \cdot p}{\sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{q+1} \sum_{l=0}^q \hat{s}_{j+lp} \right)},$$

где j — номер сезона; n — число интервалов в рассматриваемом временном ряду, $n = (q + 1)p$; p — количества сезонов в укрупненном интервале.

В табл. 1 приведен пример скорректированных значений индексов сезонности для номенклатурной позиции 210612.

Таблица 1

Значения индексов сезонности

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
g_{it}	–1074,04	–222,79	216,46	459,44	179,80	431,86
f_{it}	0,50	0,92	1,13	1,21	1,08	1,20
Месяц	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
g_{it}	631,99	451,21	124,05	342,11	–455,97	–1084,12
f_{it}	1,33	1,23	1,05	1,16	0,76	0,43

цикл изготовления продукции на рассматриваемом предприятии длится примерно месяц (четыре недели), начиная от заказа материалов и заканчивая доставкой продукции потребителю. Следовательно, краткосрочные прогнозы для готовой продукции должны составляться исходя из месячного планирования поставок материалов и полуфабрикатов с понедельным графиком изготовления готовой продукции.

Динамика объемов реализации продукции предприятия имеет явно выраженные сезонные колебания. Алгоритм определения сезонной компоненты следующий.

1) Сглаживание временного ряда методом центрирования скользящей средней:

$$\hat{y}_{i+m} = \frac{\frac{1}{2} y_i + \sum_{k=0}^{2m-1} y_{i+k} + \frac{1}{2} y_{i+2m}}{2m},$$

В зимние периоды наблюдаемые уровни ниже общего среднесезонного, минимум соответствует декабрю (57%). В летний период наблюдаемые уровни превосходят общий среднесезонный, максимум характерен для июля (33%). Сезонные индексы используются в работе сначала для сезонного выравнивания или сезонной декомпозиции исходного временного ряда, затем для включения сезонности в прогноз.

Оценки параметров уравнений находятся с использованием метода наименьших квадратов в результате минимизации выражения

$$\sum_{t=1}^n [P_i(t) - \varphi(t, a, b, c, \dots)]^2 = \min.$$

Полученные уравнения регрессии с учетом индексов сезонности для рассматриваемой номенклатурной позиции выглядят следующим образом:

Таблица 2

Алгоритм	Линейный	Параболический
Аддитивная форма	$\hat{D}_{it} = (39,10t + 1301,00) + g_{it}$	$\hat{D}_{it} = (-1,46t^2 + 94,69t + 939,63) + g_{it}$
Мультипликативная форма	$\hat{P}_{it} = (43,66t + 1205,28) \cdot f_{it}$	$\hat{P}_{it} = (-1,72t^2 + 108,94t + 780,99) \cdot f_{it}$

Помимо уравнений регрессии рассчитываются рекуррентные соотношения для экспоненциального сглаживания уровней ряда P_{it} , тренда и фактора сезонности. Параметры сглаживания α , β , γ оптимизируются методом перебора всех возможных комбинаций по сетке значений с интервалом в 0,1 таким образом, чтобы они обеспечивали наилучшую точность, т.е. наименьшие ошибки. Для тренд-сезонных адаптивных моделей экспоненциального сглаживания получены следующие параметры сглаживания: $\alpha = 0,8$; $\beta = 0,1$; $\gamma = 0,1$.

Запишем алгоритмы прогнозирования по адаптивным моделям экспоненциального сглаживания с учетом факторов сезонности (аддитивной Тейла — Вейджа и мультипликативной Хольта — Винтерса):

$$\hat{P}_{t+\tau} = (2125,24 - \tau \cdot 21,07) + g_{t+\tau-T};$$

$$\hat{P}_{t+\tau} = (2172,11 - \tau \cdot 19,55) \cdot f_{t+\tau-T}.$$

Для нахождения оптимальной модели рассматриваем ретроспективный прогноз. В качестве критериев оптимальности используем минимумы среднеквадратических ошибок $\bar{S}$ и относительных средних ошибок $|\bar{\delta}|$:

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \Delta_t^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{P}_t - P_t)^2};$$

$$|\bar{\delta}| = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{\hat{P}_t - P_t}{P_t} \right|.$$

Сравнение методов по ошибкам ретроспективных прогнозов, сделанных на четыре шага вперед, приведены в табл.3. Цифрами 1-3 обозначены аддитивные модели: линейная, параболическая, экспонен-

циального сглаживания соответственно (модель Тейла — Вейджа), цифрами 4-6 — мультипликативные модели: линейная, параболическая, экспоненциально-сглаживания (модель Хольта — Винтерса).

Отметим, что в соответствии с принятой шкалой точности [4] выделенная характеристика $|\bar{\delta}_t^4| = 4,63\%$ свидетельствует о высокой точности прогноза по аддитивной параболической модели. Аддитивная модель оказывается более предпочтительной в случае, когда сезонная вариация с ростом уровня остается приблизительно неизменной.

Сравним модели между собой при краткосрочном прогнозировании (на один шаг вперед) по относительным ошибкам ретроспективных прогнозов. Соответствующие численные значения приведены в табл. 4.

Сравнивая соответствующие оценки точности, видим, что кроме параболической модели при краткосрочном прогнозе высокую точность имеет также адаптивные модели экспоненциального сглаживания (относительные показатели точности не превосходят 10%). Линейная модель не показывает стабильных результатов, так же, как и в предыдущем случае.

Программная реализация рассмотренных прогнозных моделей обеспечивает выполнение следующих функций:

- формирование временных рядов по данным статистической отчетности;
- выделение сезонной компоненты при заданной форме сезонности;
- адаптивное оценивание параметров уравнений и построение моделей;
- оценка адекватности и точности моделей;

Таблица 3

Сравнение ретроспективных прогнозов ($\tau = 4$)

№ модели	1	2	3	4	5	6
$ \bar{\delta}_t^4 $	0,1564	0,0463	0,1414	0,2213	0,0574	0,1108
$\bar{S}_t^4$	398,85	141,16	400,96	568,92	148,99	350,59

Таблица 4

Сравнение ретроспективных прогнозов ($\tau = 1$)

№ модели	1	2	3	4	5	6
$ \delta_{38}^1 $	0,2279	0,0549	0,0978	0,2652	0,0778	0,0395
$ \delta_{39}^1 $	0,1407	0,0079	0,0482	0,2210	0,0207	0,0419
$ \delta_{40}^1 $	0,0533	0,0782	0,0706	0,1111	0,0827	0,0955
$ \delta_{41}^1 $	0,0971	0,0499	0,0182	0,1343	0,0637	0,0024

- прогнозирование поведения модели на заданный период упреждения;
- оценка точности прогноза на ретроспективном участке;
- вывод результатов и формирование отчетов;
- графическое представление результатов прогнозирования.

Программа имеет гибкую систему настройки, с помощью которой пользователь может указать параметры прогнозирования, такие, как начальная и конечная даты, временной интервал для формирования рядов динамики, период для ретроспективного прогноза, количество интервалов упреждения, уровни значимости и др. Среди дополнительных параметров существует возможность усреднения данных и выборки контрагентов для анализа и прогнозирования.

Разработанное программное обеспечение является частью программного комплекса для производственного планирования на малом промышленном предприятии и позволяет строить тренд-сезонные модели для прогнозирования поведения функции реализации продукции с учетом особенностей стати-

стических данных и требований к формированию временных рядов. Его можно использовать для построения прогнозов на многих других рядах, в частности для прогнозирования цен на продукцию (сырье, материалы), потребности в материалах, динамики производственных параметров. Внедрение на малом промышленном предприятии разработанных алгоритмов прогнозирования позволило сократить необоснованные запасы готовой продукции, незавершенного производства, материалов и комплектующих, сократить производственный цикл и повысить уровень обслуживания клиентов.

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974. Вып.1. 288 с.; Вып.2. 197 с.
2. Лукашин Ю.П. Регрессионные и адаптивные методы прогнозирования. М.: МЭСИ, 1997. 43 с.
3. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере / Под ред. Ф.Э.Фигурнова. 3-е изд., перераб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2003. 544 с., ил.
4. Токмачёв М.С. Временные ряды и прогнозирование. В.Новгород: НовГУ, 2005. 192 с.