

А.В.Ласунский

ОБ АНАЛОГИИ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ЛИНЕЙНОМ ВОЗМУЩЕНИИ

Postulations of the theory of linear differential systems with almost constant matrix of coefficients on the preservation of stability and asymptotic stability under linear perturbation of coefficients of system are extended on the case of linear systems of difference equations.

В последнее время повысился интерес разработчиков технических систем к качественной теории уравнений в конечных разностях. Эти уравнения оказались весьма удобной моделью для описания дискретных динамических систем, а также для моделирования импульсных систем. Очевидно также, что задачи сходимости итерационных процессов — это фактически задачи устойчивости дискретных систем.

Сравнение дискретного и непрерывного, исследование аналогий между ними имеет давнюю историю. В настоящей статье автор устанавливает аналогию в теории возмущения линейных систем дифференциальных и разностных уравнений при линейном возмущении.

Рассмотрим линейную систему разностных уравнений

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad x \in R^n, \quad \det A(t) \neq 0, \quad t \in Z_+ \quad (1)$$

и возмущенную систему

$$y(t+1) = (A(t) + B(t))y(t), \quad \det(A(t) + B(t)) \neq 0. \quad (2)$$

Наряду с системами (1) и (2) рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in C[t_0, +\infty), \quad (3)$$

$$\dot{y} = (A(t) + B(t))y, \quad B(t) \in C[t_0, +\infty). \quad (4)$$

Известно [1], что если матрица $A(t)$ системы (3) постоянна ($A(t) = A$), система (3)

устойчива при $t \rightarrow +\infty$ и $\int_{t_0}^{+\infty} \|B(t)\| dt < \infty$, то система (4) также устойчива при $t \rightarrow +\infty$. Ана-

логичный результат справедлив и для линейных систем разностных уравнений [2]. Если

система (1) с постоянной матрицей $A(t) = A$ устойчива, ряд $\sum_{t=0}^{+\infty} \|B(t)\|$ сходится, то система

(2) также устойчива.

В случае переменной матрицы $A(t)$ Перрон показал [3], что выше сформулированное утверждение, касающееся систем дифференциальных уравнений, не имеет места. Видоизменив пример Перрона, нетрудно убедиться, что аналогичное заключение справедливо и для систем разностных уравнений с переменной матрицей $A(t)$.

$$\text{Пример 1.} \quad \begin{cases} x_1(t+1) = \exp((t+1)\cos(\pi \log_2(t+1)) - t \cos(\pi \log_2 t) - 2a)x_1(t), \\ x_2(t+1) = \exp(-a)x_2(t), \end{cases}$$

где $t \in N$.

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \exp(t \cos(\pi \log_2 t) - 2at), \\ x_2(t) &= C_2 \exp(-at). \end{aligned}$$

Если $a > 1/2$, то система асимптотически устойчива, так как все ее решения стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{cases} y_1(t+1) = \exp((t+1)\cos(\pi \log_2(t+1)) - t \cos(\pi \log_2 t) - 2a)y_1 + \exp(-at)y_2, \\ y_2(t+1) = \exp(-a)y_2. \end{cases}$$

Ясно, что условие сходимости ряда $\sum_{t=1}^{+\infty} \|B(t)\| = \sum_{t=1}^{+\infty} \exp(-at)$ выполняется. Общее решение возмущенной системы имеет вид

$$y_1(t) = \exp(t \cos(\pi \log_2 t) - 2at) \left(C_1 + C_2 \sum_{k=1}^{t-1} \exp(-(k+1)\cos(\pi \log_2(k+1))) \right),$$

$$y_2(t) = C_2 \exp(-at).$$

Покажем, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_1(t)| = +\infty$, если $C_2 \neq 0$ и $a < 5/8$. Отсюда будет следовать неустойчивость возмущенной системы. Рассмотрим последовательность $t_n = 2^{2^n}$. Имеем

$$|y_1(t_n)| \geq |C_2| \exp((1-2a)t_n) \cdot \sum_{k=1}^{2^{2^n}-1} \exp(-(k+1)\cos(\pi \log_2(k+1))).$$

Оценим сумму снизу. Если $k \in [2^{-1}t_n - 1; 2^{-2/3} \cdot t_n - 1]$, то $-\cos(\pi \log_2(k+1)) \in [1/2; 1]$.

Далее имеем

$$|y_1(t_n)| > |C_2| \exp((1-2a)t_n) \cdot \sum_{k=0, 5t_n-1}^{[2^{-2/3}t_n]-1} \exp(-(k+1)\cos(\pi \log_2(k+1))) >$$

$$> |C_2| \exp((5/4 - 2a)t_n) [(2^{-2/3} - 1/2)t_n],$$

откуда при $a < 5/8$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} |y_1(t_n)| = +\infty$.

В [4] показано, что если матрица $A(t)$ системы (3) постоянна, система (3) асимптотически устойчива при $t \rightarrow +\infty$ и $\|B(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то возмущенная система (4) также асимптотически устойчива. Приведен пример, показывающий, что для линейной системы (3) с переменной матрицей последнее утверждение, вообще говоря, неверно.

Нетрудно показать, что аналогичное утверждение справедливо и для линейных систем разностных уравнений.

Теорема. Если система (1) с постоянной матрицей $A(t) = A$ асимптотически устойчива, то для любого возмущения $B(t)$ такого, что $\|B(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, система (2) также асимптотически устойчива.

Доказательство. Матрица A^t является фундаментальной матрицей системы (1). Пусть $\lambda = \max_i |\lambda_i|$, где λ_i — собственные числа матрицы A . Так как матрица A невырождена, а система асимптотически устойчива, то $\lambda \in (0; 1)$. Имеем

$$\|A^t\| \leq C_\varepsilon (\lambda + \varepsilon)^t, \quad (5)$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое и добавлено, чтобы оценить возможный степенной рост элементов матрицы A^t при наличии кратных собственных чисел матрицы A . Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $\lambda + \varepsilon < 1$. По методу вариации произвольных постоянных для системы (2) имеем $y(t) = y(0) \cdot A^t + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} \cdot B(k)y(k)$, откуда

$$\|y(t)\| \leq C_\varepsilon \|y(0)\| (\lambda + \varepsilon)^t + \sum_{k=0}^{t-1} C_\varepsilon (\lambda + \varepsilon)^{t-k-1} \cdot \|B(k)\| \cdot \|y(k)\|.$$

Разделив последнее неравенство на $(\lambda + \varepsilon)^t$, получим

$$\frac{\|y(t)\|}{(\lambda + \varepsilon)^t} \leq C_\varepsilon \|y(0)\| + \frac{C_\varepsilon}{\lambda + \varepsilon} \cdot \sum_{k=0}^{t-1} \|B(k)\| \cdot \frac{\|y(k)\|}{(\lambda + \varepsilon)^k}.$$

Применим аналог леммы Гронуолла — Беллмана:

$$\frac{\|y(t)\|}{(\lambda + \varepsilon)^t} \leq C_\varepsilon \|y(0)\| \prod_{k=0}^{t-1} \left(1 + \frac{C_\varepsilon \|B(k)\|}{\lambda + \varepsilon} \right)$$

или

$$\|y(t)\| \leq C_\varepsilon \|y(0)\| \cdot \prod_{k=0}^{t-1} (\lambda + \varepsilon + C_\varepsilon \|B(k)\|). \quad (6)$$

Так как $\|B(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то $\exists T \forall t > T \lambda + \varepsilon + C_\varepsilon \|B(t)\| \leq l < 1$. Из неравенства (6) имеем

$$\|y(t)\| \leq C_\varepsilon \|y(0)\| \prod_{k=0}^T (\lambda + \varepsilon + C_\varepsilon \|B(k)\|) \cdot l^{t-T-1},$$

откуда $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t)\| = 0$. Следовательно, система (2) асимптотически устойчива.

Замечание 1. Из неравенства (6) видно, что утверждение теоремы можно усилить. Вместо условия $\|B(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ можно потребовать, чтобы

$$\|B(t)\| \leq \frac{l - \lambda - \varepsilon}{C_\varepsilon} \text{ для } t \geq T \quad (7)$$

с некоторой постоянной $l < 1$. Здесь $\varepsilon > 0$ такое, что $\lambda + \varepsilon < 1$, а постоянная C_ε взята из оценки (5).

Если жорданова форма матрицы A диагональна, в частности собственные числа матрицы A простые, то условие (7) можно заменить на следующее:

$$\|B(t)\| \leq \frac{l - \lambda}{K}, \quad t \geq T, \quad l < 1,$$

где постоянная K — из оценки $\|A^t\| \leq K \cdot \lambda^t$.

Замечание 2. Устойчивость линейной системы разностных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов не инвариантна относительно возмущений, стремящихся к нулю на бесконечности.

В этом можно убедиться на следующем примере.

Пример 2. Система $\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t), \\ x_2(t+1) = x_2(t) \end{cases}$ устойчива, так как ее решения $x_1(t) = C_1, x_2(t) = C_2$ ограничены. Тем не менее, возмущенная система $\begin{cases} y_1(t+1) = y_1(t), \\ y_2(t+1) = \frac{1}{t+1} y_1(t) + y_2(t) \end{cases}$ неустойчива. Общее решение возмущенной системы $y_1(t) = C_1, y_2(t) = C_1 \cdot \sum_{k=0}^{t-1} \frac{1}{k+1} + C_2$. Откуда $y_2(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$, если $C_1 \neq 0$.

Замечание 3. Асимптотическая устойчивость линейной системы (1) с переменной матрицей $A(t)$ не инвариантна относительно возмущений, стремящихся к нулю на бесконечности.

Действительно, скалярное уравнение $x(t+1) = \frac{t}{t+1}x(t)$, имеющее общее решение $x(t) = \frac{C}{t}$, асимптотически устойчиво. Тем не менее, уравнение $y(t+1) = \frac{t+1}{t}y(t)$ неустойчиво, так как его общее решение $y(t) = C \cdot t$ не ограничено.

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. С. 112-113.
2. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев: Наукова думка, 1972. 251 с.
3. Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: Изд. СПбГУ, 1992. С. 118-119.
4. Демидович Б.П. Указ. соч. С. 114-116.