

А.В.Колногоров

ПРОЦЕДУРА ОПТИМИЗАЦИИ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ С БЛИЗКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ

Two alternative methods of solving problems with close characteristics of effectiveness are considered. Especially useful for parallel calculations, sequential procedure is offered that determines the most productive method of solving and applies it mostly.

Рассматривается следующая задача адаптивного выбора вариантов [1,2]. Пусть некоторая вычислительная система может использовать два альтернативных метода решения задач, например, два метода поиска экстремума функции. Методы имеют различную производительность, причем для одних классов задач более производительным может оказаться первый метод, а для других — второй. В [3] предложена последовательная r -этапная процедура, которая в процессе решения задач из некоторого класса определяет более производительный для данного класса метод и обеспечивает его преимущественное применение, в [4] даны точные асимптотически оптимальные оценки ее параметров. Процедура особенно эффективна при использовании параллельных вычислений. Отметим также, что эта процедура была ориентирована на работу с методами решения задач, существенно различающимися по производительности. Ниже предлагается ее аналог, применимый для методов с близкими характеристиками производительности, который для двухэтапного случая рассмотрен в [5].

Дадим формальное изложение результата. Пусть дана партия из N задач, каждая из которых допускает решение любым из двух альтернативных методов. Общее число задач N предполагается достаточно большим, так как все оценки носят асимптотический характер. Время, затраченное на решение задачи с номером n , обозначим через ξ_n . Если задачи принадлежат к одному классу и выбираются случайным образом, то можно считать, что ξ_n — это случайная величина, функция распределения которой равна $F_l(x)$ при выборе l -го метода решения ($l = 1, 2$). Ниже предполагается, что $F_l(x)$ является функцией нормального распределения с дисперсией D и математическим ожиданием w_l , поэтому класс задач описывается векторным параметром $\theta = (w_1, w_2)$, характеризующим средние времена решения задач обоими методами и, следовательно, их производительности. Для параметра θ известно допустимое множество значений $\{\theta : |w_1 - w_2| \leq k_0(2D/N)^{1/2}\}$, которое геометрически соответствует бесконечной полосе, направленной по диагонали в системе координат w_1, w_2 и сужающейся с ростом N ; последнее свойство характеризует близость распределений.

В случае известного параметра θ можно обеспечить минимальную величину математического ожидания полного времени решения задач, равную $N \min_{l=1,2} w_l$, за счет выбора ме-

тода, которому соответствует меньшая величина w_l . При неизвестном параметре целью является минимизация ожидаемых потерь полного времени в сравнении с этой величиной. Для этого используется следующая r -этапная процедура ($r \geq 3$). На этапах с номерами $i \leq r-1$ решаются партии задач объемом $m_i = \lfloor \rho_i N \rfloor$ обоими методами; полные времена работы методов обозначим $X_l^{(i)}$, $l = 1, 2$. Обозначим также $n_1 = 2m_1$, $n_{i+1} = n_i + 2m_{i+1}$, $Z_l^{(1)} = X_l^{(1)}$, $Z_l^{(i+1)} = Z_l^{(i)} + X_l^{(i+1)}$, $1 \leq i \leq r-1$, $l = 1, 2$. В случае выполнения условия $|Z_1^{(i)} - Z_2^{(i)}| \geq \delta_i (Dn_i)^{1/2}$ сразу происходит переход к заключительному этапу, на котором

для решения задач применяется только метод с меньшим суммарным временем работы $Z_1^{(i)}$. В конце $(r-1)$ -го этапа в силу условия $\delta_{r-1} = 0$ этот переход выполняется в обязательном порядке, причем при равенстве $Z_1^{(r-1)} = Z_2^{(r-1)}$ заключительный выбор метода может быть произвольным. Если же $|Z_1^{(i)} - Z_2^{(i)}| < \delta_i (Dn_i)^{1/2}$, $i \leq r-2$, то выполняется этап с номером $i+1$. Поэтому общее число этапов не превосходит r . Отметим, что процедура допускает эффективное использование параллельных вычислений, так как на всех этапах задачи решаются партиями, объемы которых растут с ростом N .

Процедуру удобно описывать набором неотрицательных чисел $\pi = (\rho_1, \dots, \rho_{r-1}; \delta_1, \dots, \delta_{r-1})$, где $\rho_1 + \dots + \rho_{r-1} < 0,5$. Обозначим через $E_{\pi, \theta}$ математическое ожидание по мере, порожденной стратегией π и параметром θ , а через $L_N(\pi, \theta) = \sum_{n=1}^N E_{\pi, \theta} \xi_n - N \min_{l=1,2} w_l$ — математическое ожидание потерь времени относительно минимально возможной величины $N \min_{l=1,2} w_l$ при выборе стратегии π и параметра θ . Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $\theta_N = (w, w + k(2D/N)^{1/2})$, $0 \leq k \leq k_0$. Тогда выполняется предельное равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L_N(\pi, \theta_N) (2DN)^{-1/2} = L(\pi, k),$$

где

$$L(\pi, k) = k \left(\rho_1 + (1 - 2\rho_1) \Pr(C_1^-) + \sum_{i=2}^{r-1} \left(\rho_i \Pr(C_1^0, \dots, C_{i-1}^0) + (1 - 2 \sum_{j=1}^i \rho_j) \Pr(C_1^0, \dots, C_{i-1}^0, C_i^-) \right) \right). \quad (1)$$

Здесь $\Pr(\cdot)$ обозначает вероятность, а C_i^0, C_i^- — случайные события вида

$$C_i^0 = \{ |\sum_{j=1}^i (Y_j \rho_j^{1/2} + k \rho_j)| < \delta_i (\sum_{j=1}^i \rho_j)^{1/2} \}, \quad C_i^- = \{ \sum_{j=1}^i (Y_j \rho_j^{1/2} + k \rho_j) \leq -\delta_i (\sum_{j=1}^i \rho_j)^{1/2} \},$$

причем $Y_1, \dots, Y_{r-1}$ — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением.

В качестве примера рассмотрим случай $r=3$. Тогда выражение (1) принимает вид

$$L(\pi, k) = k(\rho_1 + (1 - 2\rho_1) \Pr(C_1^-) + \rho_2 \Pr(C_1^0) + (1 - 2\rho_1 - 2\rho_2) \Pr(C_1^0, C_2^-)),$$

где

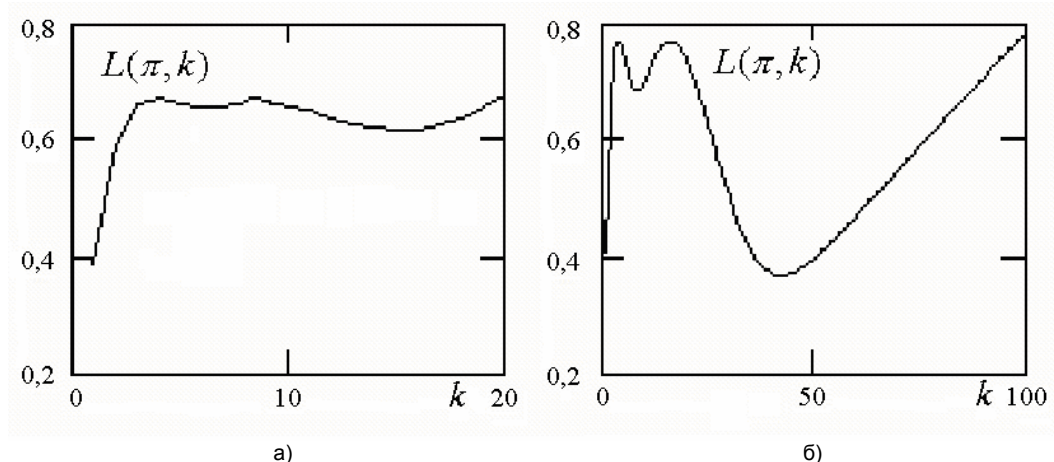
$$\Pr(C_1^-) = F(-\delta_1 - k\rho_1^{1/2}), \quad \Pr(C_1^0) = F(\delta_1 - k\rho_1^{1/2}) - F(-\delta_1 - k\rho_1^{1/2}),$$

$$\Pr(C_1^0, C_2^-) = \int_{-k\rho_1^{1/2} - \delta_1}^{-k\rho_1^{1/2} + \delta_1} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} F\left(-\frac{k(\rho_1 + \rho_2) + x\rho_1^{1/2}}{\rho_2^{1/2}}\right) dx, \quad F(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

т.е. через $F(x)$ обозначена функция стандартного нормального распределения. Минимаксная стратегия $\pi = (\rho_1, \dots, \rho_{r-1}; \delta_1, \dots, \delta_{r-1})$ определяется требованием

$$\max_{0 \leq k \leq k_0} L(\pi, k) \rightarrow \min_{\pi}$$

и ищется численными методами. Так, например, $\pi = (0,03; 0,10; 1,3; 0)$ при $k_0 = 20$, $\pi = (0,008; 0,07; 1,5; 0)$ при $k_0 = 100$ (см.рис.).



Графики функции $L(\pi, k)$: а) $\pi = (0,03; 0,10; 1,3; 0)$ при $k_0 = 20$; б) $\pi = (0,008; 0,07; 1,5; 0)$ при $k_0 = 100$

Как видим, каждая из функций имеет три максимума, причем максимумы тем более выражены, чем больше величина k_0 . Чтобы пояснить эти графики, отметим, что потери во времени решения задач могут иметь место как на одном из двух начальных этапов за счет обязательного на этих этапах применения менее производительного метода, так и на заключительном этапе вследствие возможной ошибки в определении лучшего из методов. Так как процедура имеет стохастический характер, то любые два метода могут быть правильно или с ошибкой различены на любом из начальных этапов. Тем не менее, максимумы при $k = k_0$ определяются методами, имеющими наибольшие различия в производительности, различаемыми на первом этапе и приводящими на нем к наибольшим потерям. Аналогично средние максимумы соответствуют методам, которые различаются на втором этапе и дают потери времени на первых двух этапах. А вот максимумы, соответствующие наименьшим значениям k , соответствуют методам, наименее различающимся по производительности, и вызваны в первую очередь ошибочным продолжительным применением худшего из них на третьем этапе.

Выводы

Для систем с альтернативными методами решения задач предложена процедура определения более производительного метода. Получено уравнение, описывающее математическое ожидание потерь времени в процессе функционирования процедуры, позволяющее минимизировать эти потери, и приведен пример его численного решения. Процедура носит прикладной характер и может эффективно применяться при использовании параллельных вычислений.

1. Срагович В.Г. Теория адаптивных систем. М.: Наука, 1976. 319 с.
2. Назин А.В., Позняк А.С. Адаптивный выбор вариантов. М.: Наука, 1986. 288 с.
3. Колногоров А.В. // Вестник НовГУ. Сер.: Математика и информатика. 2002. № 22. С. 36-37.
4. Колногоров А.В. // Обзорение промышленной и прикладной математики. 2003. Т.10. В.2. С. 483.
5. Колногоров А.В. // Проблемы передачи информации. 2000. №4. С. 117-127.