УДК 681.3

Б.Ф.Кирьянов, В.А.Медик, М.С.Токмачёв

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

The condition of rational numerical representation of integral indicators is found. Provision of the necessary power of these indicators for functioning multi-parametric systems is taken as a basis.

Качество функционирования или состояния многих систем различной природы и различного назначения можно характеризовать с помощью интегральных показателей (ИП), зависящих от нескольких детерминированных или случайных параметров. При выборе ИП часто строят и исследуют на ЭВМ их математические модели.

Поскольку параметров (показателей), характеризующих соответствующую систему, может быть очень много, то возникает вопрос: нужно ли в модели ИП учитывать все эти параметры? Может быть, следует учитывать только наиболее существенные показатели? Кроме того, встает задача рационального числового представления ИП в зависимости от погрешностей учитываемых показателей.

Указанные вопросы связаны с чувствительностью ИП. Их анализ и разработка соответствующих рекомендаций являются целью настоящей статьи. В качестве примера будут использованы две математические модели ИП системы оценки здоровья населения.

Итак, пусть значение ИП функционирования некоторой системы определяется выражением $\text{ИП} = f(\text{СП}_1, \text{СП}_2, \ldots, \text{СП}_n)$, использующим n в общем случае статистических показателей (СП_i), т. е. значений случайных параметров, фиксируемых на каждом шаге работы системы.

Как известно [1, 2], приращение некоторой величины (в данном случае $\Delta\text{ИП}$), зависящей от n входных параметров (в данном случае СП), задается выражением

$$\Delta\text{ИП} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \text{ИП}}{\partial \text{СП}_i} \Delta\text{СП}_i, \qquad (1)$$

в котором $\Delta\text{СП}_i$ — приращение значения СП_i, а частные производные характеризуют чувствительность ИП по i-му параметру. Если модули $\Delta\text{СП}_i$ являются абсолютными погрешностями в определении значений СП_i, а в качестве частных производных в выражении (1) берутся их модули, то это выражение будет определять оценку погрешности в расчете значения ИП.

В случае, когда изменяется значение только одного СП, из выражения (1) следует:

$$\Delta\text{ИП}_i = \text{Ч}_i \Delta\text{СП}_i, \qquad (2)$$

где Ч_i — чувствительность ИП по i-му СП, а $\Delta\text{СП}_i$ задает изменение ИП при изменении этого СП. Однако для точной реализации выражения (2) необходимо, чтобы множество значений величины $\text{Ч}_i\Delta\text{СП}$ было представимо в множестве значений величины $\Delta\text{ИП}_i$, являясь его подмножеством или совпадая с ним. В противном случае соответствующее изменение СП_i не будет вызывать изменения ИП (реально оба эти множества являются конечными).

Указанную выше представимость можно всегда обеспечить путем увеличения мощности множества значений ИП. В моделях с большим числом n учитываемых параметров и с нормированным интервалом изменения значений ИП (например, от 0 до 1) чувствительность ИП по различным СП может быть очень малой, а требуемое увеличение мощности множества значений ИП может быть очень значительным, т. е. для числового представления ИП потребуются коды с весьма большим числом разрядов. Причем в случае неограниченного увеличении *n* число необходимых разрядов кода ИП будет стремиться к бесконечности. Следовательно, в общем случае при построении моделей ИП необходимо исходить из разумного компромисса между сложностью модели и чувствительностью ИП.

Поясним все указанное на примере двух моделей ИП оценки здоровья населения, предложенных в [3]. В общем случае их можно представить в виде

$$1)\ \text{ИП} = 1 + \sum_{i=1}^{m} k_i \text{СП}_i - \sum_{i=m+1}^{n} k_i \text{СП}_i;\quad 2)\ \text{ИП} = \frac{\sum_{i=1}^{m} k_i \text{СП}_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i \text{СП}_i},\quad n > m. \tag{3}$$

В качестве СП_i в этих моделях используются соответствующие показатели здоровья, таблицы которых ежегодно публикуются Госкомстатом России, а k_i — весовые коэффициенты, учитывающие значимость различных СП и устанавливаемые экспертами. Сумма этих коэффициентов может быть принята равной 1. Первая модель является линейной, а вторая — нелинейной.

Из выражений (3) следует:

$$1)\ |\text{Ч}_i| = k_i;\quad 2)\ |\text{Ч}_i| = \frac{\left|\left(\sum_{j=1}^{n} k_j \text{СП}_j\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \text{СП}_i}\left(\sum_{j=1}^{m} k_j \text{СП}_j\right) - k_i \sum_{j=1}^{m} k_j \text{СП}_j\right|}{\left(\sum_{j=1}^{n} k_j \text{СП}_j\right)^2}.$$

Как видим, для линейных моделей значение чувствительности по каждому параметру не зависит от величины этого параметра, а определяется только коэффициентами при них. Это является достоинством линейных моделей. В нелинейных моделях значение указанной чувствительности зависит от значений СП. Но зато, в соответствии со вторым из выражений (3), значения ИП, вычисляемых согласно этим моделям, обладают свойством нормированности, изменяясь в [0, 1].

Выражения для чувствительности и выражение (2) позволяют рационально выбирать число разрядов для записи ИП. Рассмотрим этот вопрос для линейной модели. Стандарт Госкомстата предусматривает запись всех СП_i с четырьмя разрядами после запятой, т. е. с абсолютной погрешностью не более 0,00005, хотя практически у всех табличных данных два младших разряда — нулевые. Если в модели частично используются «нестандартные» показатели, то желательно сохранить одинаковую точность представления всех СП. Это упрощает оценивание точности ИП и необходимого числа разрядов после запятой в их представлении.

Если ИП представляется с *N* разрядами после запятой, то значение $|\Delta\text{ИП}|_{\min} = 10^{-N}$ является минимальной величиной, на которую может измениться ИП. Следовательно, для нормальной работы модели необходимо выполнение условия $10^{-N} \le k_{i\min}|\Delta\text{СП}_i|_{\min}$. Отсюда следует:

$$N \ge -\lg(k_{i\min}|\Delta\text{СП}_i|_{\min}). \tag{4}$$

Для нелинейной модели в выражении (4) вместо $k_{i\min}$ следует брать $|\text{Ч}_{i\min}|$.

Выражение (4) позволяет оптимальным образом выбрать число разрядов для представления значений ИП. Если, например, минимальное значение некоторого весового коэффициента в линейной модели не превышает 0,01, то минимальное, отличное от нуля, изменение соответствующего ИП будет не более 0,000001, а модуль погрешности $\Delta\text{ИП}_i$ — не более 0,0000005. Следовательно, значения ИП следует представлять с шестью разрядами после запятой. В случае использования большего числа разрядов после запятой на значения дополнительных разрядов будут влиять, например, результаты округления чисел, выполняемого машиной. Поэтому эти разряды нельзя считать достоверными. Если для представления значений ИП использовать менее шести разрядов после запятой, то, как указывалось выше, ИП не будет «реагировать» на отдельные изменения СП, т. е. не будет изменяться при их изменении.

Пусть, наконец, в выражении (4) используются весовые коэффициенты, сумма которых равна 1. Тогда при неограниченном увеличении числа этих коэффициентов минимальное значение k_i и левая часть выражения (4) будут стремиться к нулю. При этом значение оптимального числа разрядов кода ИП, которое равно величине, обратной удвоенному значению левой части выражения (4), стремится к бесконечности. К аналогичному выводу можно прийти и для нелинейных моделей. Поэтому при построении моделей ИП и необходим соответствующий компромисс между сложностью модели и чувствительностью ИП.

Полученные в работе выводы позволяют рационально строить модели интегральных показателей функционирования или состояния многопараметрических систем, а также рационально вычислять и использовать эти показатели.

---

1. Крайников А.В. и др. Вероятностные методы в вычислительной технике. М.: Высшая школа, 1986. 312 с.
2. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М.: Энергия, 1972. 456 с.
3. Медик В.А., Кирьянов Б.Ф., Токмачев М.С., Бачманов А.А. // Материалы XI Междунар. конф. и дискуссионного науч. клуба «Новые информационные технологии в медицине, биологии, фармакологии и экологии». Ялта — Гурзуф, 2003. С.181-183.