

В.Е.Гантмахер, В.А.Едемский, А.С.Евдаков

К ВОПРОСУ СИНТЕЗА ТРОИЧНЫХ КВАЗИОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ОДНИМ НУЛЕВЫМ СИМВОЛОМ НА ПЕРИОДЕ

The analysis of properties of the earlier obtained ternary sequences with one zero symbol on the period is adduced. The necessary and sufficient conditions for ternary quazi-ortogonal sequences with one zero symbol on the period are proved.

В [1] найдены необходимые условия существования (НУС) троичных последовательностей (ТП) $Y = \{0, \pm 1\}$ с одним нулевым символом на периоде и ненормированной периодической автокорреляционной функцией (ПАКФ) $r_y(\tau) = \{\pm 1\}$, $\tau = \overline{1, N-1}$. В [2,3] методом направленного перебора найдены такие последовательности с периодом $N = 5, 7, 9, 11, 15, 19, 23$. Дальнейшие поиски ТП были прекращены из-за несовершенства алгоритма перебора.

Целью настоящей работы является более глубокое исследование свойств указанных выше ТП.

Анализ свойств найденных ТП показал, что правила их кодирования (ПК) описываются с помощью классов вычетов по простому и составному модулю, а ПАКФ — с помощью математического аппарата спектров разности классов вычетов (СРКВ) [4,5]. Эти наблюдения вселяют оптимизм по поводу возможности синтеза ТП с большими периодами.

Пусть ТП Y состоит из m_+ «плюсов», m_- «минусов» и одного нуля $m_0 = 1$. Эти параметры связаны очевидными соотношениями:

$$\begin{aligned} m_+ + m_- + m_0 &= N; \\ N - m_0 &= R = m_+ + m_-. \end{aligned}$$

Пусть распределение «плюсов», «минусов» и «нулей» определяется соответствующими им двоичными последовательностями (ДП) $X1, X2, X0$.

В [2] доказана формула, связывающая ПАКФ ТП и ДП:

$$r_y(\tau) = 2(\lambda_{X1}(\tau) + \lambda_{X2}(\tau)) - \lambda_{\overline{X0}}(\tau), \quad (1)$$

где $\overline{X0}$ — ДП, инверсная ДП $X0$; $\lambda_X(\tau)$ — ПАКФ ДП X .

Там же доказаны необходимые условия существования квазиортогональных ТП с $m_0 = 1$:

$$N = 2t + 1; \quad R = 2t; \quad \Delta m = 2s; \quad m_+ = t - s; \quad m_- = t + s; \quad l_+ = 2s^2; \quad l_- = 2(t - s^2),$$

где l_+ и l_- — число «плюсов» и число «минусов» в ПАКФ ТП Y $r_y(\tau) = \{\pm 1\}$; $s = 1, 2, 3, \dots, \lceil \sqrt{t} \rceil$ ($\lceil \sqrt{t} \rceil$ — целая часть числа $\sqrt{t}$).

Заметим, что при $m_0 = 1$ $\lambda_{\overline{X0}}(\tau) = N - 2$ для всех значений $\tau = \overline{1, N-1}$. Поэтому, как следует из (1), рельеф ПАКФ ТП Y определяется рельефом суммы $\lambda_{X1}(\tau) + \lambda_{X2}(\tau)$. Кроме того, ДП $X2$ отличается от ДП $\overline{X1}$ только одним символом.

Теорема. ПАКФ ТП с одним нулевым символом на периоде полностью определяются ПАКФ ДП X , соответствующей «плюсам» («минусам») ТП:

$$\begin{aligned} r_y(\tau) &= N - 4(m - \lambda_X(\tau)) \pm 2(\Delta_X(\tau) - 1). \\ (2) \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы нам понадобится доказать несколько утверждений, определяющих отдельные фрагменты теоремы.

Утверждение 1. Формула (2) для расчета ПАКФ ТП инвариантна к выбору ДП

$X1$ или $X2$.

Это утверждение следует из равенства ПАКФ инверсных ДП. Одинаковы также ПАКФ бинарных последовательностей (БП $Z = \{\pm 1\}$), полученных преобразованием $z = 2x - 1$:

$$r_z(\tau) = N - 4(m_+ - \lambda_X(\tau)) = N - 4(m_- + m_0 - \lambda_{\bar{X}}(\tau)).$$

Утверждение 2. Стирание активного символа x_0 в ДП X изменяет ПАКФ последовательности $r_x(\tau)$ на $\Delta X(\tau)$:

$$\Delta X = x_i + x_{\langle -i \rangle_N}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad \text{или} \quad \Delta X = X + X^*,$$

где запись $\langle A \rangle_N$ означает: $A \bmod N$; X^* — ДП, сопряженная последовательности X .

Это утверждение вытекает из способа вычисления ПАКФ. Стираемый символ участвует в формировании значений ПАКФ при сдвигах, симметричных относительно него. Далее $\Delta X(\tau)$ будем называть корректирующей функцией.

Утверждение 3. Корректирующая функция бинарной последовательности $Z = \{z_i\}$, полученной из ДП $X = \{x_i\}$ преобразованием $z_i = 2x_i - 1$, определяется равенством

$$\Delta Z(\tau) = Z + Z^* = 2(\Delta X(\tau) - 1).$$

Формула получается путем сопоставления таблиц истинности логических функций и арифметических функций комбинирования [2].

Утверждение 4. ПАКФ трюичной последовательности Y можно представить как скорректированную ПАКФ бинарной последовательности Z :

$$r_y(\tau) = r_z(\tau) + \Delta z(\tau) = r_z(\tau) \pm 2(\Delta X(\tau) - 1).$$

Знак «+» или «-» определяется знаком стираемого символа. Сопоставление полученной формулы с (2) с учетом утверждений 1-4 доказывают теорему.

В дальнейших рассуждениях с учетом утверждения 1 и НУС ($m_+ < m_-$) без ограничения общности примем $X = X1$, $m = m_+$.

Из теоремы есть ряд следствий.

$$\text{Следствие 1. } r_y(\tau) = \begin{cases} y_\tau \cdot y_{\langle -\tau \rangle_N}, & N \equiv -1 \bmod 4, \\ -y_\tau \cdot y_{\langle -\tau \rangle_N}, & N \equiv 1 \bmod 4. \end{cases}$$

Этот вывод следует непосредственно из утверждения 4.

При $N \equiv -1 \bmod 4$

$$r_y(\tau) = r_z(\tau) + \Delta Z(\tau) = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} + (z_\tau + z_{\langle -\tau \rangle_N}) = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline z_\tau & z_{\langle -\tau \rangle} & \Delta z(\tau) & r_y(\tau) & z_\tau z_{\langle -\tau \rangle} \\ \hline - & - & -2 & 1 & + \\ + & - & 0 & -1 & - \\ - & + & 0 & -1 & - \\ + & + & 2 & 1 & + \\ \hline \end{array}$$

При $N \equiv 1 \bmod 4$

$$r_y(\tau) = r_z(\tau) + \Delta Z(\tau) = \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \end{Bmatrix} + (z_\tau + z_{<-\tau>_N}) = \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{array}{c|c|c|c|c} z_\tau & z_{<-\tau>} & \Delta z(\tau) & r_y(\tau) & z_\tau z_{<-\tau>} \\ \hline - & - & -2 & 1 & + \\ + & - & 0 & -1 & - \\ - & + & 0 & -1 & - \\ + & + & 2 & 1 & + \end{array}$$

Следствие 2. $r_y(\tau) = \begin{cases} -1, & \text{если } \Delta X = 1, \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad N \equiv -1 \pmod{4};$

$r_y(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta X = 1, \\ -1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad N \equiv 1 \pmod{4}.$

Отсюда же вытекает

Следствие 3. $l_- =$ кол-ву «единиц» в ΔX при $N \equiv -1 \pmod{4};$

$l_+ =$ кол-ву «единиц» в ΔX при $N \equiv 1 \pmod{4}.$

Оба следствия получаются из (2) подстановкой $r_z = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \end{Bmatrix}$ при $N \equiv -1 \pmod{4}$ и

$r_z = \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \end{Bmatrix}$ при $N \equiv 1 \pmod{4}.$

Следствие 4. Необходимым условием существования квазиортогональной ТП с $m_0 = 1$ и $r(\tau) = \{\pm 1\}$ при синтезе на основе классов вычетов является условие

$$R_k | n, \quad n = (R, m_+, m_-, l_+, l_-),$$

где n — наибольший общий делитель чисел, указанных в скобках; R_k — число элементов в классе вычетов; $R_k | n$ — R_k делит n .

Этот вывод следует из свойств спектров разности классов вычетов по простому модулю ($N = p$ — простое число).

Доказанные теорема, утверждения и следствия уточняют область возможного существования троичных квазиортогональных последовательностей с минимальным пик-фактором, позволяют свести анализ корреляционных свойств ТП с $m_0 = 1$ и синтез ТП $r(\tau) = \{\pm 1\}$ к анализу и синтезу соответствующей двоичной последовательности. Это существенно сокращает объем вычислений и поле направленного перебора.

1. Гантмахер В.Е. // Изв. вузов СССР. Сер.: Математика. 1985. №7. С.70-74.
2. Винокуров В.И., Гантмахер В.Е. Дискретно-кодированные последовательности. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1990. 288 с.
3. Гантмахер В.Е., Филиппов С.В. // Деп. в ВИНТИ №589-В86 от 27.01.86. 13 с.
4. Гантмахер В.Е. // Тр. 2-й Междунар. науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы фундаментальных наук» М., 1994. С.В40-В43.
5. Гантмахер В.Е., Едемский В.А., Евдаков А.С. // Вестник НовГУ. Сер.: Математика и информатика. 2002. №22. С.25-31.