

Л.Е.Бритвина

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАНКЕЛЯ

The paper deals with the original differential operators generating the before known, and new functional spaces that broaden calculating possibilities of using Hankel transformations to solve the applied problems.

Введение

Многие задачи физики, прикладной математики и математического моделирования сводятся к решению дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Одним из эффективных методов нахождения аналитического решения является метод интегральных преобразований. При этом наиболее изученным и часто применяемым из всех преобразований Бесселя является интегральное преобразование Ханкеля. Оно определяется посредством интеграла [1]

$$F_v(x) = \int_0^\infty f(t) t J_v(xt) dt = H_v[f(t)], \quad (1)$$

где $J_v(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка v ; $\operatorname{Re} v > -1/2$.

Данная статья посвящена изучению дифференциальных свойств преобразования (1) и построению соответствующих функциональных пространств с целью расширения возможностей решения указанных задач.

Результаты

Введем дифференциальные операторы

$$N_{m,v} = t^v \left(\frac{d}{dt} \right)^m t^{m-v}, \quad S_{m,v}^k = [N_{m,-v} N_{m,v+m}]^k, \quad (2)$$

которые обладают следующими свойствами [2]:

$$a) \quad S_{m,v}^k = S_{m,-v}^k = S_{km,v}, \quad \text{где } S_{n,v} = S_{n,-v}^1 = S_{1,v}^n = \left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt} - \frac{v^2}{t^2} \right]^n;$$

$$b) \quad N_{m,\pm v+km} N_{m,\pm v+(k-1)m} \dots N_{m,\pm v+m} N_{m,\pm v} = N_{m(k+1),\pm v+km}.$$

Следует отметить, что частные случаи данных операторов встречаются в основных уравнениях математической физики, например в теории упругости [1,3,4]. В виде (2) они впервые встречаются у автора в [5].

Используя свойства а) и б), нетрудно показать, что все известные дифференциальные операторы (см., напр., [6]), связанные с преобразованиями Ханкеля, можно выразить через $N_{m,\pm v}$ и $S_{m,v}$. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением операторов (2).

Пусть $C_\lambda(0, \infty)_p$ — множество функций $f(t)$, имеющих непрерывную на интервале $(0, \infty)$ производную, для которых справедливы следующие асимптотические оценки [2]:

$$f(t) = O(t^\lambda), \quad t \rightarrow +0; \quad f(t) = O(t^{-\rho}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Теорема 1. Если $\sqrt{t} N_{1,\pm v} f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$ и $f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\mu$, $\lambda > -1/2$, $\mu > 3/2$, то

$$H_v[N_{1,\pm v} f(t)](u) = \mp u H_{v \mp 1}[f(t)](u), \quad \operatorname{Re} v > -1/2 + \max\{0, \pm 1\}. \quad (3)$$

Доказательство. Так как $\sqrt{t} N_{1,\pm v} f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$, то существует непрерывная, ограниченная на всей полуоси $(0, \infty)$ функция

$$\tilde{F}_v(u) = H_v[N_{1,\pm v}f(t)](u) = \int_0^\infty t^{\pm v} \left[\frac{d}{dt} t^{\mp v+1} f(t) \right] J_v(ut) dt,$$

стремящаяся к нулю на бесконечности. Интегрируя по частям, получим:

$$\tilde{F}_v(u) = tf(t)J_v(ut)|_0^\infty \mp u \int_0^\infty f(t)tJ_{v\mp 1}(ut)dt = tf(t)J_v(ut)|_0^\infty \mp uH_{v\mp 1}[f(t)](u). \quad (4)$$

Найдем пределы функции $\varphi(t) = tf(t)J_v(ut)$ при $t \rightarrow +0$ и $t \rightarrow +\infty$.

Опираясь на асимптотические разложения функций Бесселя первого рода [7]

$$J_v(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(t^{-3/2}), & t \rightarrow +\infty, \\ O(t^v), & t \rightarrow +0, \end{cases} \quad (5)$$

нетрудно показать, что существует такое положительное c , независимое от $t \in (0, \infty)$, что

$$|\sqrt{t}J_v(t)| \leq c \quad \forall t \in (0, \infty). \quad (6)$$

Тогда

$$|\varphi(t)| \leq c \sqrt{\frac{t}{u}} f(t) \quad \forall t \in (0, \infty), u > 0.$$

Очевидно, если $f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\mu$, $\lambda > -1/2$, $\mu > 1/2$, то $\lim_{t \rightarrow +0} \varphi(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$.

Теперь рассмотрим функцию

$$\tilde{F}_v(u) = \mp u H_{v\mp 1}[f(t)](u),$$

стоящую справа в (4).

Для существования функции $F_{v\mp 1}(u) = H_{v\mp 1}[f(t)](u)$ достаточно потребовать, чтобы $\sqrt{t}f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$ и $\operatorname{Re} v > -1/2 + \max\{0, \pm 1\}$. Если $f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\mu$, $\lambda > -3/2$, $\mu > 3/2$, то $\sqrt{t}f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы справедливо равенство (3). При этом функция $F_{v\mp 1}(u)$ непрерывна, ограничена на всей полуоси $(0, \infty)$ и стремится к нулю на бесконечности. Теорема доказана.

Следствие. Используя свойство б) дифференциального оператора $N_{m,\pm v}$, нетрудно показать следующее. Пусть $\sqrt{t}N_{m,\pm v}f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$ и $N_{m-k,\pm v-k}f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\mu$, $\lambda > -1/2$, $\mu > 3/2$, $k = 1, 2, \dots, m$, $\operatorname{Re} v > -1/2 + \max\{0, \pm m\}$, тогда

$$H_v[N_{m,\pm v}f(t)](u) = (\mp u)^m H_{v\mp m}[f(t)](u). \quad (7)$$

Действительно, из теоремы 1 получаем: если $\sqrt{t}N_{m,\pm v}f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$, $N_{m-k,\pm v-k}f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\mu$, $\lambda > -1/2$, $\mu > 3/2$, то

$$H_v[N_{m,\pm v}f(t)](u) = \mp u H_{v\mp 1}[N_{m-1,\pm v-1}f(t)](u),$$

при этом $\sqrt{t}N_{m-1,\pm v-1}f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$. Дальнейшее доказательство следствия очевидно.

Функция $\sqrt{t}N_{m-k,\pm v-k}f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, следовательно, ее преобразование Ханкеля ограничено и равенство (7) позволяет ввести оценку

$$|(\mp u)^m|H_v[f](u)| = |H_v[N_{m,\pm v}f](u)| \leq c \quad \text{или} \quad |H_{v\mp m}[f](u)| \leq \frac{c}{u^m}.$$

Условия, при которых справедливо равенство (3), можно уточнить.

Теорема 2. Если $\sqrt{t}N_{1,\pm v}f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$ и $f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\mu$, $\lambda > \max\{-3/2, -1 - \operatorname{Re} v\}$, $\mu > 3/2$, $\operatorname{Re} v > -1/2 + \max\{0, \pm 1\}$, то

$$H_v[N_{1,\pm v}f(t)](u) = \mp u H_{v \mp 1}[f(t)](u).$$

Доказывается аналогично теореме 1. Различие состоит лишь в том, что следует воспользоваться не оценкой (6), следующей из (5), а непосредственно разложением (5).

Следствие. Если $\sqrt{t}N_{m,\pm v}f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$ и $N_{m-k,\pm v-k}f(t) \in C_{\lambda_k}(0, \infty)_\mu$, $\lambda_k > \max\{-3/2, -1 - \operatorname{Re} v \pm (k-1)\}$, $\mu > 3/2$, $k = 1, 2, \dots, m$, $\operatorname{Re} v > -1/2 + \max\{0, \pm m\}$, то справедлива формула (7).

Так как $S_{m,v} = N_{m,-v}N_{m,v+m} = N_{m,v}N_{m,-v+m}$, то справедлива

Теорема 3. Пусть $\sqrt{t}S_{m,v}f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$ и $N_{m-k,\mp v-k}N_{m,\pm v+m}f(t)$, $N_{m-k,\mp v+m-k}f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\mu$, $\lambda > -1/2$, $\mu > 3/2$, $k = 1, 2, \dots, m$, $\operatorname{Re} v > -1/2 + \max\{0, \pm m\}$, то

$$H_v[S_{m,v}f(t)](u) = (-1)^m u^{2m} H_v[f(t)](u).$$

Доказательство данного свойства следует непосредственно из следствия теоремы 1. Условия теоремы 3 могут быть уточнены, если воспользоваться следствием теоремы 2.

Теорема 4. Пусть $f(t)$ такова, что функция $t^{k+1/2}f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, тогда

$$N_{m,\pm v}H_{v \mp m}[f(t)](u) = H_v[(\mp t)^m f(t)](u), \quad \operatorname{Re} v > -1/2 + \max\{0, \pm m\}.$$

Если $m = 2n$, справедливо равенство

$$S_{n,v}H_v[f(t)](u) = H_v[(-1)^n t^{2n} f(t)](u), \quad \operatorname{Re} v > -1/2.$$

В силу симметричности преобразования (1) все вышеперечисленные дифференциальные свойства имеют место и для обратного преобразования Ханкеля.

Вывод

Представленные в данной работе дифференциальные операторы и свойства преобразования Ханкеля расширяют вычислительные возможности алгоритмов решения указанных выше технических задач.

1. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955. 668 с.
2. Бритвина Л.Е. // ДРАН. 2002. Т.382. № 3. С.1-3.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 420 с.
5. Какичев В.А., Бритвина Л.Е. // Материалы Междунар. науч.-метод. конф. «Избранные вопросы математики и методики ее преподавания». Смоленск, 1998. С. 14-15.
6. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
7. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. Т.1. 798 с.