ИНФОРМАТИКА И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.911

О.Н.Барсов

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

The sufficient conditions of nonlocal solvability of the Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation are found.

Моделирование многих нестационарных процессов в физике, механике приводит к краевым задачам для параболических уравнений с сильными нелинейностями, но достаточно малыми начальными данными. В статье исследуется вопрос о нелокальной классической разрешимости таких задач с произвольными нелинейностями при выполнении условия малости данных задачи.

Итак, исследуется гладкая разрешимость задачи Коши для нелинейного параболического уравнения

$$u_t = a(t, x, u, u_x, u_{xx}) \tag{1}$$

в слое $\Pi_T = (0, T] \times R^1$ с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x). \tag{2}$$

Предполагается, что $u_0(x)$ непрерывна и ограничена на R^1 вместе со своими производными до третьего порядка включительно; функция $a(t, x, u, p, r)$ из уравнения (1) и ее частные производные первого порядка непрерывны и ограничены на множествах $\Omega_{N_1,N_2,N_3} = \{(t, x, u, p, r) : (t, x) \in \overline{\Pi_T},\ |u| \le N_1,\ |p| \le N_2,\ |r| \le N_3\}$, где $N_1, N_2, N_3 > 0$. Для априорной оценки максимума модуля решения рассматриваемой задачи будем предполагать, что для $(t,x) \in \overline{\Pi_T}$ и любых $u, p, r \in R^1$

$$|a(t, x, 0,0,0)| \le a_1,\ a_u(t, x, u, 0,0) \le a_2,\ a_r(t, x, u, p, r) \ge 0.$$

Тогда из принципа максимума следует априорная оценка решения $u(t,x)$ задачи (1),(2)

$$|u(t, x)| \le (M_0 + a_1 \cdot T) \cdot \exp\{C \cdot T\} = M, \tag{3}$$

где $M_0 = \sup\limits_{R^1} |u_0(x)|$, $C = \max\{0; a_2\}$.

Для априорной оценки производной u_x решения задачи (1),(2) предполагаем, что для $(t,x) \in \overline{\Pi_T}$, $|u| \le M$ (с M из (3)) и любых $p, r \in R^1$

$$a_r(t, x, u, p, r) \ge a_0 = \text{const} > 0.$$

При фиксированных t,x,u,p имеем $a(t, x, u, p, r) - a(t, x, u, p, 0) = a_r(t, x, u, p, sr) \cdot r$, где $s \in [0,1]$. Следовательно, для $r \ge 0$ будет $a(t, x, u, p, r) \ge C + a_0 r \to +\infty$ при $r \to +\infty$, а при $r \le 0$ будет $a(t, x, u, p, r) \le C + a_0 r \to -\infty$ при $r \to -\infty$. Таким образом, уравнение $a(t, x, u, p, r) = 0$ однозначно разрешимо относительно $r = r(t, x, u, p)$:

$$a(t, x, u, p, r(t, x, u, p)) \equiv 0,$$

и функция $r(t,x,u,p)$ непрерывно дифференцируема в силу теоремы о неявной функции и предположения о гладкости функции $a(t,x,u,p,r)$.

Предположим, что для $(t,x)\in\overline{\Pi_T}$, $|u|\le M$ существует конечный $\sup|r(t,x,u,p)|=\Phi(p)$ и обозначим

$$\overline{\Psi}(\rho)=1+\max_{p\in[0,\rho]}\max\{\Phi(p);\Phi(-p)\}.$$

Выберем теперь гладкую неубывающую при $\rho\ge 0$ функцию $\psi(\rho)$ так, чтобы $\psi(\rho)\ge\overline{\Psi}(\rho)$. Тогда функция $\psi(\rho)$ для $(t,x)\in\overline{\Pi_T}$, $|u|\le M$ удовлетворяет условию

$$\pm a(t,x,u,p,\pm\psi(|p|))\ge 0. \tag{4}$$

Возможны два случая:

$$\int_0^\infty\frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}=+\infty, \tag{5}$$

$$\int_0^\infty\frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}<+\infty. \tag{6}$$

Известно, что основным наиболее трудным в теории задачи (1),(2) является получение априорной оценки $|u_x|$. Для получения этой оценки используется метод, разработанный С.Н.Кружковым [1,2]. В частности справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $\psi(\rho)$ удовлетворяет условию (6). Если $M<\frac{1}{2}\int_K^\infty\frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}$, тогда в $\overline{\Pi_T}$ справедлива оценка

$$|u_x(t,x)|\le p_0, \tag{7}$$

где $K=\sup\limits_{R^1}|u_0'(x)|$, а константа p_0 зависит от M,T,K,a_0 и функции $\psi(\rho)$.

Доказательство этой теоремы основано на применении принципа максимума к разности $W(t,x,y)=u(t,x)-u(t,y)$, удовлетворяющей некоторому параболическому неравенству.

Априорная оценка $|u_{xx}(t,x)|$ доказывается тем же способом после дифференцирования уравнения (1) по x. Аналогично доказывается существование функции $\psi_1(\rho)$ такой, что для $(t,x)\in\overline{\Pi_T}$, $|u|\le M$, $|p|\le p_0$ и любых $r\in R^1$

$$|r\,a_p(t,x,u,p,r)|+|pa_u(t,x,u,p,r)|+|a_x(t,x,u,p,r)|\le\psi_1(|r|)\,a_r(t,x,u,p,r).$$

Теорема 2. Пусть функции $\psi(\rho)$ и $\psi_1(\rho)$ удовлетворяют условию (6) и

$$K<\alpha_0=\frac{1}{2}\int_{K_1}^\infty\frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)},\ M<\frac{1}{2}\int_K^{\alpha_0}\frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}, \tag{8}$$

где $K_1=\sup\limits_{R^1}|u_0''(x)|$. Тогда для любых $(t,x)\in\overline{\Pi_T}$ справедлива оценка

$$|u_{xx}(t,x)|\le r_0, \tag{9}$$

где константа r_0 зависит от M,T,a_0,p_0,K,K_1, функций $\psi(\rho),\psi_1(\rho)$.

После получения априорных оценок (7), (9) априорная оценка $|u|_{2,\gamma}\le C$, где константа C зависит от M,a_0,T,K,K_1, $\psi(\rho),\psi_1(\rho)$, $\sup\limits_{R^1}|u_0'''(x)|$ и от верхних граней функции

$a(t,x,u,p,r)$ и ее производных на множествах $\overline{\Pi_T}\times[-M,M]\times[-p_0,p_0]\times[-r_0,r_0]$ выводится известным способом.

Справедливы следующие теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи Коши.

Теорема 3. Если функции $\psi(\rho),\psi_1(\rho)$ удовлетворяют условию (6) и выполнено условие (8), тогда существует единственное решение $u(t,x)\in C^{2,\alpha}(\overline{\Pi_T})$ задачи (1),(2).

Теорема 4. Если функции $\psi(\rho),\psi_1(\rho)$ удовлетворяют условию (5), тогда существует единственное решение $u(t,x)\in C^{2,\alpha}(\overline{\Pi_T})$ задачи (1),(2).

Сформулированные теоремы выделяют классы параболических уравнений (1), имеющих гладкие ограниченные решения задачи Коши в полосе $(0,T)\times R^1$. Нарушение условий этих теорем может привести к появлению неограниченных решений. Качественная теория таких решений параболических уравнений находится в стадии формирования, и наиболее полное изложение такой теории можно найти в [3].

Рассмотрим, например, задачу Коши для квазилинейного параболического уравнения

$$u_t=k(u)u_{xx}+k'(u)u_x+Q(u),\quad u(0,x)=u_0(x),\tag{10}$$

где $k(u)\ge k_0>0$ — коэффициент теплопроводности; $Q(u)>0$ при $u>0$, $Q(0)=0$ — источник тепла. Это уравнение описывает распространение тепла в нелинейной открытой системе с источником тепла $Q(u)$. Пусть функции $k(u)$, $Q(u)$, $u_0(x)$ удовлетворяют всем требуемым условиям гладкости. В рассматриваемом случае

$$a(t,x,u,u_x,u_{xx})\equiv k(u)u_{xx}+k'(u)u_x+Q(u).$$

Очевидно, $a_r(t,x,u,p,r)=k(u)\ge k_0>0$, $|a(t,x,0,0,0)|=Q(0)=0$, $a_u(t,x,u,0,0)=Q'(u)$ и выполнены условия (4),(5) с функцией $\psi(\rho)=C_0\rho+C_1$, где $C_0=1/k_0\sup\limits_{u\in[-M,M]}|k'(u)|$, $C_1=1/k_0\sup\limits_{u\in[-M,M]}Q(u)$. Следовательно, все условия теоремы 4 будут выполнены в том случае, если источник $Q(u)$ будет удовлетворять условию ограниченности $Q'(u)\le a_2$. Пусть источник $Q(u)$ не удовлетворяет условию ограниченности, например $Q(u)=u^2$, а начальная функция $u_0(x)=u_0=\mathrm{const}>0$. Тогда задача Коши (10) имеет пространственно однородное решение $u(t,x)=u(t)$. Действительно, подставив $u(t)$ в уравнение (10), получим обыкновенное уравнение $du/dt=u^2$. Проинтегрировав это уравнение, находим решение рассматриваемой задачи Коши $u(t,x)=u_0/(1-u_0t)$. Очевидно, что $u(t,x)\to+\infty$ при $t\to 1/u_0$, и решение не ограничено в слое $(0,1/u_0)\times R^1$. Это означает, что температура неограниченно возрастает во всех точках $x\in(-\infty,+\infty)$ за конечный промежуток времени (тепловой взрыв).

В случае, когда уравнение (10) кроме источника $Q(u)$ содержит сток $Q_1(u)<0$ при $u>0$, возможен эффект локализации (см. [3]), когда $u(t,x)\to+\infty$ при $t\to T_0$ — всюду в области локализации $|x|\le L=\mathrm{const}$. При этом возмущения не выходят за пределы этой области в течение некоторого конечного промежутка времени.

1. Кружков С.Н. // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 1979. Вып.5. С.217-272.
2. Барсов О.Н. // Вестник МГУ. 1994. №6. С.10-13.
1. Самарский А.А, Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострениями в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 477 с.