УДК 531/534:530:512.942

С.В.Терехов

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА В ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

The approach to physical equations obtaining on the frame of complex hyperspace with Clifford basis is formulated. Clifford algebra permits in particular take into account the rotational movement by means of unified approach.

1. Введение

Геометрические идеи Эйнштейна [1] осуществили переход от абсолютного пространства и абсолютного времени Ньютона к комплексному четырехмерному многообразию Минковского. Но, как и любое теоретическое построение, данная модель обладает рядом недостатков, а именно:

— любая геометрическая модель зависит от дефиниций, определяющих конгруэнтность геометрических образов физическим объектам;

— известно [2], что собственными движениями трехмерного пространства являются сдвиги и вращения, однако вращательное движение явным образом не учитывается в теории относительности;

— комплексность многообразия Минковского не использовалась при построении общей теории относительности (хотя при записи уравнений электромагнетизма Джеймс Максвелл [3] использовал теорию гиперкомплексного исчисления (кватернионы), которая была открыта Гамильтоном в 50-х годах XIX в. (см., напр., [4,5]));

— практически не использовались алгебраические идеи.

В связи с этим в данной работе предлагается альтернативный подход к выводу уравнений, описывающих различные физические процессы и явления, на основе изучения свойств четырехмерного пространства (в общем случае комплексного пространства (гиперпространства)) с использованием алгебры Клиффорда (см., напр., [6]) и установления соответствия этих свойств реальному пространственно-временному континууму. В работе [7] использование гиперкомплексного исчисления (кватернионов) позволило объединить описание механических и электромагнитных процессов и явлений как условий регулярности и гармоничности некоторой кватернионной функции. Однако такое описание опосредованно учитывает вращательное движение, равноправное с поступательным перемещением. Отсюда следует необходимость общего подхода, с помощью которого можно объединить поступательное и вращательное движения при описании физических явлений и процессов.

2. Метрика пространства и алгебра Клиффорда

Выберем в четырехмерном пространстве (в общем случае в комплексном пространстве (гиперпространстве)) систему координат с базисными элементами e_i ($i = 0,1,2,3$; в дальнейшем пространственные координаты будем обозначать буквами греческого алфавита, а временную координату — индексом 0), которые удовлетворяют алгебре Клиффорда:

$$e_i e_j = e_i \cdot e_j + e_i \wedge e_j, \tag{1}$$

где $e_i \cdot e_j = 1/2\,(e_i e_j + e_j e_i) = 1/2\,\{e_i, e_j\} = g_{ij}$ — внутреннее (скалярное) произведение, симметричное относительно перестановки индексов i и j, т.е. величина g_{ij} является симметричным тензором второго ранга; величина $e_i \wedge e_j = 1/2\left(e_i e_j - e_j e_i\right) = 1/2\left[e_i, e_j\right] = \in_{ij}^{k}\, e_k$ — внешнее произведение, антисимметричное относительно перестановки индексов i и j, т.е.

величина $\underset{ij}{\in}^{k}$ является антисимметричным псевдотензором (экстенсивом) третьего ранга.

Если гиперпространство однородно и изотропно, то в любой его точке можно выбрать ортогональную (в широком смысле этого слова) систему координат, которая характеризуется следующими равенствами:

$x_i = x^i$ — ковариантные и контравариантные координаты точки равны между собой;

$g_{ij} = \pm\,\delta_{ij}$, , где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ — символ Кронекера («+» соответствует векторам, а «–» соответствует кватернионам);

$$\underset{ij}{\in}^{k} = \Omega_{ij}^{k} = \begin{cases} -1, & \text{если все индексы различны и образуют нечетную подстановку,} \\ 0, & \text{если хотя бы два индекса совпадают,} \\ 1, & \text{если все индексы различны и образуют четную подстановку.} \end{cases}$$

Если гиперпространство неоднородно и неизотропно, то реперные элементы e_i изменяются при переходе от точки к точке гиперпространства, следовательно,

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^{n} e_n, \tag{2}$$

где Γ_{ik}^{n} — символы Кристоффеля второго рода (коэффициенты связности), симметричные относительно перестановки нижних индексов (при переходе к евклидовой геометрии коэффициенты Кристоффеля равны нулю). Так как базисные элементы e_i являются непрерывными функциями координат, тензор кривизны Римана второго рода [8] равен нулю:

$$R_{mjk}^{n} = \frac{\partial \Gamma_{mj}^{n}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{mk}^{n}}{\partial x^j} + \Gamma_{mj}^{p}\Gamma_{pk}^{n} - \Gamma_{mk}^{p}\Gamma_{pj}^{n} = 0. \tag{3}$$

Поскольку метрический тензор g_{ij} и экстенсив $\underset{ij}{\in}^{k}$ также зависят от координат, найдем первую производную от этих величин:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^{m} g_{mj} + \Gamma_{jk}^{n} g_{in}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \underset{ij}{\in}^{s}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^{m} \in_{mj}^{s} + \Gamma_{jk}^{n} \in_{in}^{s} - \Gamma_{pk}^{s} \in_{ij}^{p}, \tag{5}$$

в силу непрерывности функций g_{ij} и $\underset{ij}{\in}^{k}$ должны выполняться равенства

$$R_{ikp}^{m} g_{mj} + R_{jkp}^{n} g_{in} = 0, \tag{6}$$

$$R_{ikp}^{m} \in_{mj}^{s} + R_{jkp}^{n} \in_{in}^{s} - R_{ukp}^{s} \in_{ij}^{u} = 0, \tag{7}$$

которые автоматически реализуются в силу равенства (3). Таким образом, метрика искривленного гиперпространства, для которого базисные элементы удовлетворяют алгебре Клиффорда, описывается уравнениями (2)-(7).

В локальной системе координат изменение радиус-вектора выражается формулой

$$dR = e_0 dx^0 + e_\alpha dx^\alpha + de_0 x^0 + de_\alpha x^\alpha = E_0 dx^0 + E_\alpha dx^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Физическим смыслом обладает клиффордовское произведение изменения радиус-вектора на его комплексно-сопряженную по времени (индекс «+0») величину:

$$dRdR^{+0} = dR \cdot dR^{+0} + dR \wedge dR^{+0} = G_{kj} dx^k dx^j + N_{kj}^{p} dx^k dx^j e_p,$$

где $E_k\left(E_k^{+0}\right)=\Delta_k^n\, e_n\left(e_n^{+0}\right)$, $\Delta_k^n=\delta_k^n+\Gamma_{mk}^n x^m$, $e_k^{+0}=e_k \operatorname{sgn}(k)$, $G_{kj}=\Delta_k^n\Delta_j^m\, g_{nm}\operatorname{sgn}(m)$,

$N_{kj}^p=\Delta_k^n\Delta_j^m \in_{nm}^p \operatorname{sgn}(m)$, $\operatorname{sgn}(m)=\begin{cases}-1, & \text{если } m=0,\\ 1, & \text{если } m\neq 0.\end{cases}$.

Так как изменение радиус-вектора определяет поле смещений

$$dR=U=E_i\, u^i,$$

где $u^i(x^j)=dx^i$ определяют смещения вдоль соответствующих осей координат, то сдвиговые движения пространства определяет дифференциальный интервал между событиями, который можно определить как квадрат модуля 4-вектора смещения:

$$ds_{\text{сдвиг}}^2=dR\cdot dR^{+0}=G_{kj}\, dx^k dx^j,$$

а интервал при вращении определяется модулем вектора кручения:

$$dQ^p=N_{kj}^p\, dx^k dx^j.$$

При переходе к евклидовой геометрии становится очевидным, что индекс p не должен равняться ни одному из нижних индексов, т.е. $p=\beta\neq\alpha$ и $p\neq 0$. Отсюда следует, что интервал между событиями при вращении вокруг пространственных осей локальной системы координат имеет вид

$$ds_{\text{вращение}}^2=2\sqrt{g_{\beta\gamma}N_{0\mu}^{\gamma}N_{0\alpha}^{\beta}\, dx^{\mu}dx^{\alpha}}\; dx^0 \quad (\alpha\neq\beta;\ \gamma\neq\mu). \tag{8}$$

Из всего выше изложенного следует, что

$$ds^2=\sqrt{ds_{\text{сдвиг}}^4-4g_{\beta\gamma}N_{0\mu}^{\gamma}N_{0\alpha}^{\beta}\, dx^{\mu}dx^{\alpha}\left(dx^0\right)^2} \quad (\alpha\neq\beta;\ \gamma\neq\mu).$$

Метрический тензор G_{kj} и экстенсив N_{kj}^p обладают следующими свойствами:

$$G_{0\alpha}=-G_{\alpha 0},\ G_{\alpha\beta}=G_{\beta\alpha};\quad N_{kk}^p=0,\ N_{0\alpha}^p=N_{\alpha 0}^p,\ N_{\alpha\beta}^p=-N_{\beta\alpha}^p.$$

Отметим, что в теории Эйнштейна (векторная алгебра) эти величины удовлетворяют соотношениям

$$G_{kj}=G_{jk};\ N_{kk}^p=0,\ N_{kj}^p=-N_{jk}^p.$$

В силу последнего равенства величина, определяемая формулой (8), тождественно равна нулю, т.е. теория Эйнштейна не учитывает вращательные движения пространственно-временного континуума.

Так как параметр s является единственным натуральным параметром в гиперпространстве, то скорость (в единицах скорости света) материальной точки определим формулой

$$V=\frac{dR}{ds}=E_k\, v^k,$$

где $v^k=\dfrac{dx^k}{ds}$ — k-ая компонента 4-скорости. Ускорение частицы на мировой линии определим формулой

$$A=\frac{dV}{ds}=\frac{\partial E_k}{\partial x^j}v^k v^j+E_k a^k=\left(D_{kj}^m\, v^k v^j+\Delta_k^m\, a^k\right)e_m=A^m e_m,$$

здесь $D_{kj}^m=\dfrac{\partial\Delta_k^m}{\partial x^j}+\Delta_k^n\Gamma_{nj}^m$. Если ускорение точки на геодезической линии $A=0$, то выполняются уравнения (базисные элементы e_n линейно-независимы)

$$\Delta_k^m\,\frac{d^2x^k}{ds^2}+D_{kj}^m\, v^k v^j=0,$$

которые могут быть интерпретированы как уравнения движения материальной точки. Если величина $D_{kj}^m = \dfrac{\partial \Delta_k^m}{\partial x^j} + \Delta_k^n \varGamma_{nj}^m = 0,$ то все физически значимые функции описываются функциями одинаковой структуры $F = E_j A^j$. Легко показать, что $D_{kj}^m = D_{jk}^m$, т.е. этот коэффициент симметричен по паре нижних индексов.

3. Гиперфункция и физические законы

Рассмотрим гиперфункцию $F = E_j A^j$ (при условии $D_{kj}^m = 0$), устанавливающую закон соответствия между пространственно-временным многообразием и материей. Если указанная гиперфункция будет регулярна в некоторой области D, то она удовлетворяет уравнению $\Diamond F = 0$ * ($\Diamond \cdot F + \Diamond \wedge F = 0$) или в развернутом виде:

$$\begin{cases} P_{ij} \dfrac{\partial A^j}{\partial x^i} = 0, \\ T_{ij}^s \dfrac{\partial A^j}{\partial x^i} = 0, \end{cases}$$

здесь $P_{ij} = \Delta_i^n \Delta_j^m g_{nm}$, $T_{ij}^s = \Delta_i^n \Delta_j^m \in_{nm}^s$.

Для выяснения условий гармоничности нерегулярной в области D гиперфункции воспользуемся уравнением

$$\Diamond^{+0} \Diamond F = 0 \text{ ** или } E_u^{+0} \frac{\partial}{\partial x^u}\left(E_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(E_j A^j \right)\right) = 0.$$

Предполагая, что $P_{ij} C^{ji} \neq 0$ и $T_{ij}^s C^{ji} \neq 0$, перепишем условия гармоничности в виде:

$$\begin{cases} Q_{ij} C^{ji} + M_{iju} \dfrac{\partial C^{ji}}{\partial x^u} = 0, \\ B_{ij}^m C^{ji} + E_{iju}^m \dfrac{\partial C^{ji}}{\partial x^u} = 0, \end{cases}$$

---

* Например, комплексная функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ ($z = x + iy$; $u(x;y), v(x;y)$ — вещественные функции действительных аргументов x и y, $i^2 = -1$) будет аналитической [9,10] (регулярной, голоморфной [11]) в некоторой области D, если она удовлетворяет условиям Коши — Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Введем в рассмотрение комплексный оператор «тетра» $\Diamond = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}$ и подействуем им на комплексную функцию $f(z)$, получим $\Diamond f(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} + i\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)$. В силу условий Коши — Римана аналитическая функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению $\Diamond f(z) = 0$.

** Функция $f(z)$ называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta f = 0$, где оператор Лапласа $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Так как оператор Лапласа Δ можно представить в виде $\Delta = \Diamond^+ \Diamond$ ($\Diamond^+ = \dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}$ — комплексно-сопряженный оператор к оператору $\Diamond$), то гармоническая функция удовлетворяет уравнению $\Diamond^+ \Diamond f = 0$.

где $Q_{ij} = \Delta_u^p \operatorname{sgn}(u)\left(\dfrac{\partial T_{ij}^s}{\partial x^u} g_{ps} + T_{ij}^s \Gamma_{us}^q g_{pq}\right)$, $M_{iju} = T_{ij}^s \Delta_u^p g_{ps} \operatorname{sgn}(u)$,

$$B_{ij}^m = \operatorname{sgn}(u)\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial x^u}\Delta_u^m + \left(\frac{\partial T_{ij}^s}{\partial x^u} \in_{ps}^m + T_{ij}^s \Gamma_{us}^q \in_{pq}^m\right)\Delta_u^p\right),\quad E_{iju}^m = \operatorname{sgn}(u)\left(T_{ij}^s \Delta_u^p \in_{ps}^m + P_{ij}\Delta_u^m\right).$$

При переходе к евклидовой геометрии условия регулярности гиперфункции принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A^j}{\partial x^j} = 0, \\ \Omega_{ij}^s \dfrac{\partial A^j}{\partial x^i} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Первое уравнение системы путем преобразований можно привести к виду

$$\frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \operatorname{div}\left(\vec{J}_{A^0}\right) = \operatorname{div}\left(\vec{J}_{A^0} - \vec{A}\right) = \sigma_{A^0}, \tag{10}$$

где $\vec{J}_{A^0}$ — поток величины A^0, а σ_{A^0} — ее производство в выделенном объеме гиперпространства. С механической точки зрения уравнение (10) интерпретируется как дифференциальный закон сохранения временной компоненты 4-потенциала. С точки зрения теории электромагнетизма первое уравнение системы (9) определяет условие калибровки Лоренца, второе уравнение той же системы при $s = 0$ дает $\Omega_{\alpha\beta}^0 \dfrac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} = 0$ и определяет потенциальность механических полей или отсутствие «вихрей» (отсутствие магнитного поля), а при $s = \alpha$ дает $\Omega_{\beta 0}^\alpha\left(\dfrac{\partial A^\beta}{\partial x^0} - \dfrac{\partial A^0}{\partial x^\beta}\right) + \Omega_{\gamma\beta}^\alpha \dfrac{\partial A^\beta}{\partial x^\gamma} = 0$ и определяет закон изменения пространственных компонент 4-потенциала или закон движения величины, описываемой векторной частью этого потенциала (отсутствие электрического поля в теории электромагнетизма, так как из предыдущего равенства следует, что $\dfrac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} = 0$).

Условия гармоничности гиперфункции в евклидовой геометрии запишутся в виде

$$\begin{cases} \Omega_{ij}^u \operatorname{sgn}(u) \dfrac{\partial^2 A^j}{\partial x^u \partial x^i} = 0, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x^m} \operatorname{sgn}(m) + \Omega_{us}^m \Omega_{ij}^s \dfrac{\partial^2 A^j}{\partial x^u \partial x^i} \operatorname{sgn}(u) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $\theta = \dfrac{\partial A^j}{\partial x^j}$. Первое уравнение системы перепишем в виде

$$\Omega_{ij}^u \operatorname{sgn}(u) \frac{\partial F^{ji}}{\partial x^u} = 0, \quad i < j, \tag{12}$$

где $F^{ji} = \dfrac{\partial A^j}{\partial x^i} - \dfrac{\partial A^i}{\partial x^j}$. Согласно определению экстенсива в сумме (12) отличными от нуля будут только те слагаемые, для которых индексы экстенсива образуют циклическую перестановку, т.е. выполняется равенство

$$\frac{\partial F^{ji}}{\partial x^{u}}+\frac{\partial F^{uj}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial F^{iu}}{\partial x^{j}}=0, \quad j\neq i\neq u,$$

которое определяет первую пару уравнений Максвелла. Второе уравнение системы (11) определяет вторую пару уравнений Максвелла соответственно (см. [8]).

С другой стороны, условия гармоничности можно записать также в виде равенства

$$\left(G_{ui}+N_{ui}^{s}e_{s}\right)\frac{\partial^{2}F}{\partial x^{u}\partial x^{i}}=0,$$

которое распадается на систему уравнений

$$\begin{cases} G_{ui}\,\dfrac{\partial^{2}F}{\partial x^{u}\partial x^{i}}=0,\\[2ex] N_{ui}^{s}\,\dfrac{\partial^{2}F}{\partial x^{u}\partial x^{i}}=0.\end{cases}$$

При переходе к евклидовой геометрии первое уравнение системы переходит в волновое уравнение $\Box F=0$, где $\Box=\dfrac{\partial^{2}}{\left(\partial x^{\alpha}\right)^{2}}-\dfrac{\partial^{2}}{\left(\partial x^{0}\right)^{2}}$ — оператор Даламбера, а второе уравнение принимает вид $\Omega_{0\alpha}^{\beta}\,\dfrac{\partial^{2}F}{\partial x^{0}\partial x^{\alpha}}=0$ и определяет другую форму записи волнового уравнения.

4. Выводы

1. Рассмотренный подход к получению физических уравнений на основе изучения свойств комплексного гиперпространства, репер которого удовлетворяет алгебре Клиффорда, можно считать альтернативным по отношению к формализму, основанному на вариационных принципах. Использование алгебры Клиффорда позволяет естественным образом учесть вращательное движение при построении единого подхода к физическим проблемам.

2. Уравнения, описывающие метрику гиперпространства, частично согласуются с уравнениями, полученными в теории Эйнштейна.

3. Показано, что обращение в нуль тензора кривизны Римана второго рода свидетельствует о том, что репер описывается непрерывными функциями.

4. Получено уравнение движения материальной частицы, отличающееся от его аналога в теории Эйнштейна.

5. Условия регулярности гиперфункции (для случая $D_{kj}^{m}=0$) могут быть интерпретированы различным образом с механической и электромагнитной точек зрения. Эти условия определяют дифференциальный закон сохранения временной составляющей гиперфункции, потенциальность механических полей и закон движения материальной частицы (механика) или условие калибровки Лоренца и отсутствие электрического и магнитного полей (электромагнетизм). Отметим, что калибровка Лоренца необязательна в теории электромагнетизма. Условия гармоничности гиперфункции приводят к уравнениям теории Максвелла.

6. Иная форма записи условия гармоничности гиперфункции приводит к волновому уравнению в виде уравнения Даламбера.

---

1. Эйнштейн А. Собр. науч. тр. М.: Наука, 1965. Т.1. 700 с. Т.2. 878с.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.
3. Максвелл Дж. К. Избр. соч. по теории электромагнитного поля. М.: Гостехиздат, 1952. 687 с.
4. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
5. Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии. М.: Физматгиз, 1963. 192 с.
6. Казанова Г. Векторная алгебра. М.: Мир, 1979. 119 с.

7. Терехов С.В. // Вісник Донецького ун-та. Сер. А: Природничі науки. 2002. № 2. С.287-290.
8. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. М.: МГУ, 1974. 206 с. См. с.173.
9. Там же.
10. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1968. 415 с.
11. Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.