

И.Н.Матченко

К ПОСТРОЕНИЮ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ КВАЗИНЕСЖИМАЕМЫХ ОРТОТРОПНЫХ СРЕД

The affine spaces are introduced by means of affine coordinate transformations, displacement velocity vector components, stress tensor components and strain rate. The theorem of multitudeness of such spaces is proved. Hypothesis on plastic flow quasi-noncompressibility and condition of normalization of transfiguring tensor components allow among the innumerable sets of affine spaces single out the ones in which the plastic flow will be uncompressed. Correlations for plane strain are obtained.

1. Квадратичное условие пластичности

Жесткопластический ортотропный материал отнесем к декартовой системе координат x, y, z , совпадающей с осями ортотропии.

Для ортотропного материала условие пластичности запишем в виде квадратичной функции компонент тензора напряжения:

$$A_{11}\sigma_x^2 + A_{22}\sigma_y^2 + A_{33}\sigma_z^2 - 2(A_{12}\sigma_x\sigma_y + A_{13}\sigma_x\sigma_z + A_{23}\sigma_y\sigma_z - A_{44}\sigma_{xz}^2 - A_{55}\sigma_{yz}^2 - A_{66}\sigma_{xy}^2) = 1, \quad (1.1)$$

где $\sigma_x, \dots, \sigma_{xy}$ — компоненты тензора напряжений, $A_{11}, \dots, A_{66}$ — экспериментально определяемые константы, характеризующие пластические свойства.

Параметры анизотропии $A_{11}, \dots, A_{66}$ связаны с величинами сопротивления материала пластическому деформированию следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{\sigma_{sx}^2}, \quad A_{22} = \frac{1}{\sigma_{sy}^2}, \quad A_{33} = \frac{1}{\sigma_{sz}^2}, \quad A_{44} = \frac{1}{\tau_{syz}^2}, \\ A_{55} &= \frac{1}{\tau_{syz}^2}, \quad A_{66} = \frac{1}{\tau_{sxy}^2}, \quad 2A_{12} = \frac{1}{\sigma_{sy}^2} + \frac{1}{\sigma_{sx}^2} - \frac{1}{\sigma_{2s(xy)}^2}, \\ 2A_{13} &= \frac{1}{\sigma_{sx}^2} + \frac{1}{\sigma_{sz}^2} - \frac{1}{\sigma_{2s(zx)}^2}, \quad 2A_{23} = \frac{1}{\sigma_{sy}^2} + \frac{1}{\sigma_{sz}^2} - \frac{1}{\sigma_{2s(yz)}^2}, \end{aligned}$$

где $\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \sigma_{sz}$ — величины сопротивления материала пластическому деформированию при растяжении в главных осях ортотропии; $\tau_{sxy}, \tau_{syz}, \tau_{syz}$ — величины сопротивления материала пластическому деформированию при сдвиге по отношению к главным осям ортотропии; $\sigma_{2s(xy)}, \sigma_{2s(yz)}, \sigma_{2s(zx)}$ — величины сопротивления материала пластическому деформированию при двухосном растяжении в соответствующих плоскостях ортотропии.

В отличие от известного условия пластичности Мизеса [1] соотношение (1.1) учитывает чувствительность ортотропного материала к гидростатическому давлению.

Принимая функцию (1.1) в качестве пластического потенциала, получим закон пластического течения

$$\begin{aligned} e_x &= \lambda(A_{11}\sigma_x - A_{12}\sigma_y - A_{13}\sigma_z), \quad e_{xz} = \lambda A_{44}\sigma_{xz}, \\ e_y &= \lambda(A_{22}\sigma_y - A_{12}\sigma_x - A_{23}\sigma_z), \quad e_{yz} = \lambda A_{55}\sigma_{yz}, \\ e_z &= \lambda(A_{33}\sigma_z - A_{13}\sigma_x - A_{23}\sigma_y), \quad e_{xy} = \lambda A_{66}\sigma_{xy}, \end{aligned}$$

где $e_x, \dots, e_{xy}$ — компоненты тензора пластической деформации. Присоединяя сюда уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

и соотношения между компонентами тензора скоростей деформаций и вектора скорости перемещений

$$\begin{aligned}e_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2e_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad 2e_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad 2e_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z},\end{aligned}$$

где u_x, u_y, u_z — компоненты вектора скорости пластической деформации, получим замкнутую систему уравнений теории пластичности ортотропной среды.

Использование приведенной системы уравнений для решения конкретных задач наталкивается на значительные трудности, поэтому предложены различные упрощения исходного условия пластичности, заключающиеся в формулировке условий совместности характеристик пластической анизотропии. Например, условия пластичности Мизеса — Хилла [2] и Толоконникова — Матченко содержат по три условия совместности характеристик пластичности.

Рассмотрим вариант построения уравнений теории идеальной пластичности ортотропных сред, содержащий только одно условие совместности.

2. Теорема о множественности представлений ортотропного материала в аффинных пространствах

Теорема 1. Аффинные преобразования координат, скоростей перемещений, скоростей деформаций и напряжений позволяют для жесткопластического ортотропного материала, подчиняющегося квадратичному условию пластичности, получить бесчисленное множество изоморфных модифицированных пространств, в которых ортотропные материалы отличаются друг от друга только коэффициентами пластической анизотропии.

Доказательство. Введем аффинные преобразования координат:

$$\xi = Ax, \eta = By, \zeta = Cz; \quad (2.1)$$

скоростей перемещений:

$$u_\xi = u_x / A, \quad u_\eta = u_y / B, \quad u_\zeta = u_z / C; \quad (2.2)$$

напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= A^2 \sigma_x, \quad \sigma_\eta = B^2 \sigma_y, \quad \sigma_\zeta = C^2 \sigma_z, \\ \sigma_{\xi\eta} &= AB \sigma_{xy}, \quad \sigma_{\eta\zeta} = BC \sigma_{yz}, \quad \sigma_{\zeta\xi} = AC \sigma_{zx};\end{aligned} \quad (2.3)$$

скоростей деформаций:

$$\begin{aligned}e_\xi &= e_x / A^2, \quad e_\eta = e_y / B^2, \quad e_\zeta = e_z / C^2; \\ e_{\xi\eta} &= e_{xy} / AB, \quad e_{\eta\zeta} = e_{yz} / BC, \quad e_{\zeta\xi} = e_{zx} / AC,\end{aligned} \quad (2.4)$$

где A, B, C — пока неизвестные компоненты преобразующего тензора.

Несложно видеть, что преобразования (2.1)–(2.4) переводят ортотропный материал из физического пространства в аффинное, сохраняя класс симметрии. Основные уравнения при этом принимают следующий вид:

условие пластичности:

$$B_{11}\sigma_\xi^2 + B_{22}\sigma_\eta^2 + B_{33}\sigma_\zeta^2 - 2(B_{12}\sigma_\xi\sigma_\eta + B_{13}\sigma_\xi\sigma_\zeta +$$

$$+ B_{23}\sigma_\eta\sigma_\zeta - B_{44}\sigma_{\zeta\zeta}^2 - B_{55}\sigma_{\eta\zeta}^2 - B_{66}\sigma_{\xi\eta}^2 = 1, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} B_{11} &= A_{11} / A^4, B_{22} = A_{22} / B^4, B_{33} = A_{33} / C^4, \\ B_{12} &= A_{12} / A^2 B^2, B_{23} = A_{23} / B^2 C^2, B_{31} = A_{31} / C^2 A^2, \\ B_{44} &= A_{44} / A^2 C^2, B_{55} = A_{55} / B^2 C^2, B_{66} = A_{66} / A^2 B^2; \end{aligned}$$

уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\xi\zeta}}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{\eta\zeta}}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\xi\zeta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta\zeta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_\zeta}{\partial \zeta} &= 0; \end{aligned}$$

соотношения Коши:

$$\begin{aligned} e_\xi &= \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi}, 2e_{\xi\eta} = \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}, \\ e_\eta &= \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}, 2e_{\eta\zeta} = \frac{\partial u_\zeta}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \zeta}, \\ e_\zeta &= \frac{\partial u_\zeta}{\partial \zeta}, 2e_{\xi\zeta} = \frac{\partial u_\zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\xi}{\partial \zeta}; \end{aligned}$$

ассоциированный закон пластического течения:

$$\begin{aligned} e_\xi &= \lambda(B_{11}\sigma_\xi - B_{12}\sigma_\eta - B_{13}\sigma_\zeta), e_{\xi\zeta} = \lambda B_{44}\sigma_{\xi\zeta}, \\ e_\eta &= \lambda(B_{22}\sigma_\eta - B_{12}\sigma_\xi - B_{23}\sigma_\zeta), e_{\eta\zeta} = \lambda B_{55}\sigma_{\eta\zeta}, \\ e_\zeta &= \lambda(B_{33}\sigma_\zeta - B_{13}\sigma_\xi - B_{23}\sigma_\eta), e_{\xi\eta} = \lambda B_{66}\sigma_{\xi\eta}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнения теории идеальной пластичности ортотропного материала в аффинных пространствах по написанию совпадают с аналогичными уравнениями физического пространства.

Обратим внимание, что преобразования (2.1)-(2.4) переводят анизотропный материал в аффинные пространства таким образом, что диссипация механической энергии в физическом и аффинных пространствах тождественна:

$$\begin{aligned} D &= \sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + 2(\sigma_{xy} e_{xy} + \sigma_{yz} e_{yz} + \sigma_{zx} e_{zx}) = \\ &= \sigma_\xi e_\xi + \sigma_\eta e_\eta + \sigma_\zeta e_\zeta + 2(\sigma_{\xi\eta} e_{\xi\eta} + \sigma_{\eta\zeta} e_{\eta\zeta} + \sigma_{\xi\zeta} e_{\xi\zeta}). \end{aligned}$$

Таким образом, ортотропному материалу (1.1) в физическом пространстве сопоставлен в аффинных пространствах жесткопластический анизотропный материал (2.5).

Поскольку компоненты преобразующего тензора A, B и C выбираются произвольно, то исходному материалу (1.1) можно сопоставить бесчисленное множество материалов (2.5).

3. Гипотеза о квазинесжимаемости пластического течения ортотропного материала

Введем понятие квазинесжимаемости. Ортотропный материал, пластическое течение которого обладает свойством несжимаемости в одном из аффинных пространств, будем называть квазинесжимаемым.

Теорема 2. Если пластические характеристики ортотропного материала удовлетворяют ограничению

$$A_{11}A_{22}A_{33} - 2A_{12}A_{23}A_{13} - A_{13}^2A_{22} - A_{23}^2A_{11} - A_{12}^2A_{33} = 0, \quad (3.1)$$

то это условие выделяет аффинные пространства, в которых этот материал будет квазине-

сжимаемым:

$$e_{\xi} + e_{\eta} + e_{\zeta} = 0. \quad (3.2)$$

Доказательство. Из (2.6) и (3.2) следует:

$$B_{11} = B_{12} + B_{13}, B_{22} = B_{12} + B_{23}, B_{33} = B_{13} + B_{23}. \quad (3.3)$$

Уравнения (3.3) запишем в физическом пространстве:

$$\begin{aligned} A_{11} / A^2 - A_{12} / B^2 - A_{13} / C^2 &= 0, \\ -A_{12} / A^2 + A_{22} / B^2 - A_{23} / C^2 &= 0, \\ -A_{13} / A^2 - A_{23} / B^2 + A_{33} / C^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Система уравнений (3.4) является однородной относительно неизвестных $1/A^2$, $1/B^2$ и $1/C^2$, поэтому ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует (3.1).

Условие (3.1), выраженное через величины сопротивления ортотропного материала пластическому деформированию, можно записать в такой форме:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sigma_{sx}^2 \sigma_{sy}^2 \sigma_{sz}^2} - \left(\frac{1}{\sigma_{sx}^2} + \frac{1}{\sigma_{sy}^2} - \frac{1}{\sigma_{2s(xy)}^2} \right) \times \left(\frac{1}{\sigma_{sx}^2} + \frac{1}{\sigma_{sz}^2} - \frac{1}{\sigma_{2s(xz)}^2} \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{\sigma_{sy}^2} + \frac{1}{\sigma_{sz}^2} - \frac{1}{\sigma_{2s(yz)}^2} \right) - \left(\frac{1}{\sigma_{sx}^2} + \frac{1}{\sigma_{sy}^2} - \frac{1}{\sigma_{2s(xy)}^2} \right)^2 \frac{1}{\sigma_{sz}^2} - \\ - \left(\frac{1}{\sigma_{sx}^2} + \frac{1}{\sigma_{sz}^2} - \frac{1}{\sigma_{2s(xz)}^2} \right)^2 \frac{1}{\sigma_{sy}^2} - \left(\frac{1}{\sigma_{sy}^2} + \frac{1}{\sigma_{sz}^2} - \frac{1}{\sigma_{2s(yz)}^2} \right)^2 \frac{1}{\sigma_{sx}^2} = 0. \end{aligned}$$

Для перехода в пространства, в которых материал будет квазинесжимаемым, возникает необходимость нахождения значений A, B и C .

Зададимся значением одной из компонент, например $1/C^2 = K$, тогда из первых двух уравнений (3.4) найдем

$$A = \pm K \left(\frac{A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \right)^{1/2}, \quad B = \pm K \left(\frac{A_{13}A_{12} - A_{11}A_{23}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \right)^{1/2}.$$

Поскольку в силу положительной определенности пластического потенциала (2.1) должны соблюдаться неравенства $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$, $A_{22}A_{33} - A_{23}^2 > 0$, $A_{11}A_{33} - A_{13}^2 > 0$, то следует, что компоненты A и B преобразующего тензора являются действительными числами.

Подставляя (3.3) в условие пластичности (2.5) получим:

$$B_{12}(\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta})^2 + B_{13}(\sigma_{\xi} - \sigma_{\zeta})^2 + B_{23}(\sigma_{\eta} - \sigma_{\zeta})^2 + 2(B_{44}\sigma_{\xi\xi}^2 + B_{55}\sigma_{\eta\eta}^2 + B_{66}\sigma_{\zeta\zeta}^2) = 1. \quad (3.5)$$

Ассоциированный закон пластического течения теперь записывается в виде

$$\begin{aligned} e_{\xi} &= \lambda[B_{12}(\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) + B_{13}(\sigma_{\xi} - \sigma_{\zeta})], \quad e_{\xi\xi} = \lambda B_{44}\sigma_{\xi\xi}, \\ e_{\eta} &= \lambda[B_{23}(\sigma_{\eta} - \sigma_{\zeta}) + B_{12}(\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi})], \quad e_{\eta\eta} = \lambda B_{55}\sigma_{\eta\eta}, \\ e_{\zeta} &= \lambda[B_{13}(\sigma_{\zeta} - \sigma_{\xi}) + B_{23}(\sigma_{\zeta} - \sigma_{\eta})], \quad e_{\zeta\zeta} = \lambda B_{66}\sigma_{\zeta\zeta}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.5) как частные случаи при равенствах $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 1$ получим условие пла-

стичности Толоконникова — Матченко, при этом $a = (A_{33} / A_{11})^{1/4}$, $b = (A_{33} / A_{22})^{1/4}$, $c = 1$, а при равенствах $A = B = C = 1$ — условие пластичности Мизеса — Хилла.

Подчеркнем, что введение гипотезы о квазинесжимаемости накладывает только одно ограничение на пластические характеристики ортотропного материала, тогда как модификации Мизеса — Хилла и Толоконникова — Матченко накладывают по три ограничения. Следовательно, гипотеза о квазинесжимаемости является менее жесткой, чем гипотеза о несжимаемости в физическом пространстве. Отсюда также вытекает, что гипотеза о несжимаемости пластического течения в физическом пространстве является частным случаем гипотезы о квазинесжимаемости.

В физическом пространстве условие пластичности (3.5) записывается в виде

$$B_{12}(A^2\sigma_x - B^2\sigma_y)^2 + B_{23}(B^2\sigma_y - C^2\sigma_z)^2 + B_{13}(A^2\sigma_x - C^2\sigma_z)^2 + 2(B_{44}A^2C^2\sigma_{xz}^2 + B_{55}B^2C^2\sigma_{yz}^2 + B_{66}A^2B^2\sigma_{xy}^2) = 1$$

или

$$B_{12}(A^2\sigma_x - B^2\sigma_y)^2 + B_{23}(B^2\sigma_y - C^2\sigma_z)^2 + B_{13}(B^2\sigma_y - C^2\sigma_z)^2 + B_{13}(A^2\sigma_x - C^2\sigma_z)^2 + 2(A_{44}\sigma_{xz}^2 + A_{55}\sigma_{yz}^2 + A_{66}\sigma_{xy}^2) = 1,$$

а ассоциированный закон пластического течения — в виде

$$\begin{aligned} e_x &= \lambda A^2 [B_{12}(A^2\sigma_x - B^2\sigma_y) + B_{13}(A^2\sigma_x - C^2\sigma_z)], \\ e_y &= \lambda B^2 [B_{23}(B^2\sigma_y - C^2\sigma_z) + B_{12}(B^2\sigma_y - A^2\sigma_x)], \\ e_z &= \lambda C^2 [B_{13}(B^2\sigma_y - A^2\sigma_x) + B_{23}(C^2\sigma_z - B^2\sigma_y)], \\ e_{zx} &= \lambda A_{44}\sigma_{zx}, \quad e_{xz} = \lambda A_{55}\sigma_{yz}, \quad e_{xy} = \lambda A_{66}\sigma_{xy}. \end{aligned}$$

4. Плоская деформация

Пусть при плоской деформации главные оси ортотропии z в физическом пространстве и ζ в аффинном нормальны к плоскостям течения. В этом случае деформации вдоль осей z и ζ отсутствуют, т.е.

$$e_z = 0, \quad e_\zeta = 0. \quad (4.1)$$

Из ассоциированного закона пластического течения (3.6) найдем:

$$\sigma_\zeta = (B_{13}\sigma_\xi + B_{23}\sigma_\eta) / (B_{13} + B_{23}).$$

Подставляя значение σ_ζ из (4.1) в условие текучести (3.5) и принимая во внимание, что для рассматриваемого случая $\sigma_{\zeta\xi} = \sigma_{\eta\zeta} = 0$, получим:

$$f(\sigma_\xi - \sigma_\eta)^2 + 2B_{66}\sigma_{\xi\eta}^2 = 1, \quad (4.2)$$

где $f = (B_{13}B_{23} + B_{13}B_{12} + B_{23}B_{12}) / (B_{13} + B_{23})$.

Условие пластичности (4.2) представим в форме

$$\frac{(\sigma_\xi - \sigma_\eta)^2}{4(1-m)} + \sigma_{\xi\eta}^2 = T^2, \quad (4.3)$$

где $m = 1 - B_{66} / f$; $T = 1 / \sqrt{2B_{66}}$.

Условие (4.3), записанное в аффинном пространстве, совпадает по форме с аналогичным двухпараметрическим условием Хилла. В физическом пространстве условие (4.3) содержит четыре параметра анизотропии.

Условию текучести (4.3) тождественно удовлетворим подстановкой

$$\sigma_\xi = \sigma + \tau \cos 2\varphi, \quad \sigma_\eta = \sigma - \tau \cos 2\varphi, \quad \sigma_{\xi\eta} = \tau \sin 2\varphi, \quad (4.4)$$

где $\tau = T\sqrt{(1-m)/(1-m\sin^2 2\varphi)}$; $\sigma = 0,5(\sigma_\xi + \sigma_\eta)$.

Уравнения равновесия в аффинном пространстве в случае плоской задачи записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\xi\eta}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \eta} = 0,$$

Подставляя (4.4) в уравнения равновесия, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} - 2\tau \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + 2\tau \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \left(\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{d\tau}{d\varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + 2\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + 2\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \left(\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{d\tau}{d\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений является гиперболической, а характеристики и соотношения между искомыми функциями σ и φ вдоль характеристик α и β имеют вид

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_{\alpha, \beta} = (1-m) \operatorname{tg} 2\varphi \pm \sqrt{1 + (1-m)^2 \operatorname{tg}^2 2\varphi}, \quad (4.5)$$

$$\sigma / 2T \pm g(\varphi) = \text{const}, \quad 2g(\varphi) = \frac{m \sin 2\varphi \cos 2\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 2\varphi}} + E(\theta, \sqrt{m}),$$

где $\sin 2\varphi = \operatorname{sn}(\theta, \sqrt{m})$, причем $\operatorname{sn}(\theta, \sqrt{m})$ — якобиан эллиптической функции с модулем $\sqrt{m}$, а $E(\theta, \sqrt{m})$ — стандартный эллиптический интеграл второго рода:

$$E(\theta, \sqrt{m}) = \int_0^{2\varphi} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 2\theta} d\theta.$$

Для определения u_ξ и u_η имеем уравнение связи напряжений и скоростей деформации. Из (4.3) получим

$$(1-m) \left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} - \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} \right) / \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \right) = (\sigma_\xi - \sigma_\eta) / 2\sigma_{\xi\eta} \quad (4.6)$$

и уравнение квазинесжимаемости

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} = 0. \quad (4.7)$$

Легко убедиться, что система уравнений (4.6), (4.7) является гиперболической и имеет характеристики, определяемые соотношениями (4.5), а вдоль характеристик имеют место следующие соотношения:

$$dU - V d\varphi' = 0 \quad \text{вдоль характеристики } \alpha,$$

$$dV - U d\varphi' = 0 \quad \text{вдоль характеристики } \beta,$$

где U, V — компоненты скорости, отнесенные к характеристикам; φ' — угол между первой характеристикой и осью ξ .

1. Mises R. // Z. angew. Math. Und Mech. 1928. Bd. 8. №5. S.161-185.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 407 с.