

Л.Е.Бритвина

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАНКЕЛЯ, ПРИНАДЛЕЖАЩЕЕ КЛАССУ $L(\mathbf{R}_+)$, И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

In this paper the Hankel integral transform is considered. New function spaces are defined. In this spaces the general convolution is constructed.

Введение

Многие из задач физики, прикладной математики и математического моделирования сводятся к решению дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Одним из эффективных методов нахождения аналитического решения является метод интегральных преобразований. Чаще всего применяют преобразования Фурье (спектральный анализ) и преобразование Лапласа (операционное исчисление). В данной работе рассматривается интегральное преобразование Ханкеля, которое выгодно использовать в задачах с осевой симметрией. Оно определяется посредством интеграла [1]

$$F_v(x) = \int_0^{\infty} f(t) t J_v(xt) dt = H_v[f(t)], \quad (1)$$

где $J_v(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка v , $\operatorname{Re} v > -1/2$, $x > 0$.

Преобразование (1) порождает множество сверточных конструкций и, следовательно, позволяет находить решения достаточно широкого класса сверточных уравнений и уравнений в частных производных. При этом возникает вопрос: каким условиям должна удовлетворять функция $f(t)$, чтобы ее преобразование Ханкеля $F_v(x)$ и функция $\sqrt{x}F_v(x)$ принадлежали классу $L(\mathbf{R}_+)$? Данная статья посвящена построению соответствующих функциональных пространств и рассмотрению одного из возможных применений полученных результатов.

Результаты

Пусть $C_\lambda(0, \infty)_\rho$ — множество функций $f(t)$, имеющих непрерывную на интервале $(0, \infty)$ производную, для которых справедливы следующие асимптотические оценки [2,3]:

$$f(t) = O(t^\lambda), t \rightarrow +0, \quad f(t) = O(t^{-\rho}), t \rightarrow +\infty.$$

Известно [4], что если $f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\rho$, $\lambda > -\operatorname{Re} v - 2$, $\rho > 3/2$, то ее преобразование Ханкеля $F_v(x)$ существует и для него справедливы асимптотические оценки

$$\begin{aligned} F_v(x) &= O(x^{\lambda'}) \text{ при } x \rightarrow +0, \\ F_v(x) &= O(x^{\rho'}) \text{ при } x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2)$$

при этом $\lambda' \geq \min\{\operatorname{Re} v, \rho - 2\}$, $\rho' \leq \max\{-1/2, -\lambda - 2\}$. Учитывая условия, которым удовлетворяют v, λ и ρ , получаем, что в общем случае $\lambda' > -1/2$, $\rho' < \operatorname{Re} v$.

Следовательно, условия $f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\rho$ недостаточно, чтобы $F_v(x)$, $\sqrt{x}F_v(x) \in L(\mathbf{R}_+)$, какие бы ограничения на v, λ и ρ мы не вводили.

Рассмотрим дифференциальные операторы:

$$N_{m,v} = t^v \left(\frac{d}{dt} \right)^m t^{m-v}, \quad S_{m,v}^k = [N_{m,-v} N_{m,v+m}]^k, \quad (3)$$

которые обладают следующими свойствами [2,3]:

$$\begin{aligned} \text{а) } S_{m,v}^k &= S_{m,-v}^k = S_{km,v}, \text{ где } S_{n,v} = S_{n,-v}^1 = S_{1,v}^n = \left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt} - \frac{v^2}{t^2} \right]^n; \\ \text{б) } N_{m,\pm v+km} N_{m,\pm v+(k-1)m} \cdots N_{m,\pm v+m} N_{m,\pm v} &= N_{m(k+1),\pm v+km}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что частные случаи данных операторов встречаются в основных уравнениях математической физики, например в теории упругости [1,5,6].

Используя свойства а) и б), нетрудно показать, что все известные дифференциальные операторы (см., напр., [7]), связанные с преобразованиями Ханкеля, можно выразить через $N_{m,\pm v}$ и $S_{m,v}$. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением операторов (3).

Теорема 1. Пусть $\sqrt{t} N_{m,\pm v+m} f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$ и $N_{k,\pm v+k} f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\rho$, $\lambda > -1/2$, $\rho > 3/2$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, тогда преобразование Ханкеля порядка v , $\operatorname{Re} v > -1/2 + \max\{0, \mp m\}$, функции $f(t)$ принадлежит классу $L(\mathbf{R}_+)$, если $m \geq 2$.

Доказательство. В условиях данной теоремы справедливо равенство [3]

$$H_{v \pm m} [N_{m,\pm v+m} f(t)](x) = (\mp x)^m H_v[f(t)](x), \quad \operatorname{Re} v > -\frac{1}{2} + \max\{0, \mp m\}.$$

Так как $\varphi_k(t) = N_{k,\pm v+k} f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\rho$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ и $\lambda > -1/2$, $\rho > 3/2$, то $\sqrt{t} \varphi_k(t) \in L(\mathbf{R}_+)$ $\forall k = 0, 1, \dots, m$. Следовательно, преобразования Ханкеля функций $\varphi_k(t)$ являются непрерывными и ограниченными на всей числовой полуоси $(0, \infty)$ функциями [8]

$$|H_{v \pm m} [N_{m,\pm v+m} f(t)](x)| = x^m |H_v[f(t)](x)| \leq c$$

или

$$|H_v[f(t)](x)| \leq \frac{c}{x^m}.$$

Последнее неравенство показывает, что функция $H_v[f(t)](x)$ убывает на бесконечности быстрее, чем x^{-m} .

Исследуем поведение функции $H_v[f(t)](x)$ при $x \rightarrow +0$. Так как $f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\rho$, $\lambda > -1/2$ и $\rho > 3/2$, то $F_v(x) = O(x^{\lambda'})$ при $x \rightarrow +0$, $\lambda' \geq \min\{\operatorname{Re} v, \rho - 2\}$. В нашем случае $\rho > 3/2$, поэтому $\lambda' > -1/2$.

Подведем итоги. Во-первых, $H_v[f(t)](x) = H_v[\varphi_0(t)](x)$ является непрерывной и ограниченной на всей числовой полуоси $(0, \infty)$ функцией. Во-вторых,

$$\begin{aligned} H_v[f(t)](x) &= O(x^{\lambda'}), \quad \lambda' > -1/2 \text{ при } x \rightarrow +0, \\ H_v[f(t)](x) &= O(x^{-m}) \text{ при } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Вывод: $H_v[f(t)](x) \in L(\mathbf{R}_+)$ при $m \geq 2$. Теорема доказана.

Следствие. При выполнении условий теоремы 1 функция $\sqrt{x} H_v[f(t)](x) \in L(\mathbf{R}_+)$ при $m \geq 2$.

Аналогично доказывается

Теорема 2. Пусть $N_{m-k,\mp v-k} N_{m,\pm v+m} f(t)$, $N_{m-k,\pm v+m-k} f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\rho$, $\lambda > -1/2$, $\rho > 3/2$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ и $\sqrt{t} S_{m,v} f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$, тогда преобразование Ханкеля порядка v , $\operatorname{Re} v > -1/2 + \max\{0, \mp m\}$, функции $f(t)$ принадлежит классу $L(\mathbf{R}_+)$, $m \geq 1$.

Следствие. При выполнении условий теоремы 2 функция $\sqrt{x}H_v[f(t)](x) \in L(\mathbf{R}_+)$.

Условия теорем 1 и 2 могут быть уточнены, если воспользоваться следующей теоремой [3].

Теорема 3. Если $\sqrt{t}N_{m,\pm v}f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$ и $N_{m-k,\pm v-k}f(t) \in C_{\lambda_k}(0, \infty)_\mu$, $\lambda_k > \max\{-3/2, -1 - \operatorname{Re} v \pm (k-1)\}$, $\mu > 3/2$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, $\operatorname{Re} v > -1/2 + \max\{0, \pm m\}$, то справедлива формула

$$H_v[N_{m,\pm v}f(t)](u) = (\mp u)^m H_{v \mp m}[f(t)](u).$$

Рассмотрим теперь приложение теорем 1 и 2 к построению одной из полисверток преобразования Ханкеля:

$$h(t) = (f_0 * g_m)_m(t) = \frac{(-1)^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos ms \, ds \int_0^\infty g(\tau) f\left(\sqrt{t^2 + \tau^2 + 2t\tau \cos s}\right) \tau \, d\tau, \quad (4)$$

обладающей факторизационным свойством:

$$H_m\left[\left(f_0 * g_m\right)_m\right](x) = (H_0 f)(x)(H_m g)(x). \quad (5)$$

Теорема 4. Пусть $\sqrt{t}g(t) \in L(\mathbf{R}_+)$, а функция $f(t)$ такова, что $\sqrt{t}N_{2,2}f(t) \in L(\mathbf{R}_+)$ и $f(t), N_{1,1}f(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\rho$, $\lambda > -1/2$, $\rho > 3/2$, тогда полисвертка (4) существует и для нее справедливо факторизационное равенство (5).

Доказательство. Вначале покажем, что конструкция (4) существует, при этом воспользуемся определением полисвертки, которое ввел В.А.Какичев [9], и определением преобразования Ханкеля (1):

$$h(t) = H_m^{-1}[(H_0 f)(x)(H_m g)(x)](t) = \int_0^\infty x dx \int_0^\infty g(\tau)(H_0 f)(x) J_m(xt) J_m(x\tau) \tau \, d\tau. \quad (6)$$

Отсюда

$$|h(t)| \leq \frac{c^2}{\sqrt{t}} \|(H_0 f)(x)\| \|g(t)\| < \infty, \quad (7)$$

так как в силу теоремы 1 $H_0[f](x) \in L(\mathbf{R}_+)$. Существование полисвертки (4) доказано.

Теперь поменяем порядок интегрирования в формуле (6), — данная операция законна в силу (7), — и воспользуемся формулой (2.12.27.5) из [10]:

$$J_m(a)J_m(b) = \frac{(-1)^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0\left(\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos s}\right) \cos ms \, ds.$$

В результате полисвертка примет вид

$$h(t) = \frac{(-1)^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos ms \, ds \int_0^\infty g(\tau) \tau \, d\tau \int_0^\infty (H_0 f)(x) J_0\left(x\sqrt{t^2 + \tau^2 + 2t\tau \cos s}\right) x \, dx.$$

Обратное преобразование Ханкеля от $H_0[f](x)$ существует в силу следствия из теоремы 1. Мы получили явный вид (4) для искомой полисвертки.

Теорема доказана.

Знание сверточной конструкции (4), обладающей факторизационным свойством (5), позволяет решать сверточные уравнения и системы уравнений, где она присутствует, с помощью интегрального преобразования Ханкеля. Кроме этого, возможно ее применение для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, содержащих оператор Бесселя или другую комбинацию дифференциальных операторов (3) с целочисленными значениями v .

В заключение отмечу, что возможно получение полисвертки, обладающей факторизационным свойством (5) и при других условиях.

Вывод

Представленные в данной работе результаты позволяют описать классы функций, в которых возможно построение новых обобщенных сверток преобразования Ханкеля, решение различных сверточных, дифференциальных, а также интегро-дифференциальных уравнений.

1. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955. 668 с.
2. Бритвина Л.Е. // ДРАН. 2002. Т.382. № 3, С.1-3.
3. Бритвина Л.Е. // Вестник НовГУ. Сер.: Техн. науки. 2004. № 26. С. 98-100.
4. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
6. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Изд-во АН СССР, 1967. 420 с.
7. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
9. Какичев В.А. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1967. №2. С.48-57.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.