Векторы и операции с векторами. Элементы векторной алгебры.

Кафедра общей и
экспериментальной физики НовГУ

С. А. Сабельников

1. Понятие о векторах

Вектор – упорядоченная пара точек. Одну из точек называю началом вектора, другую – концом. Графический образ вектора – направленный отрезок: Начало $\longrightarrow$ Конец. Для обозначения конца вектора используют стрелку. Следует иметь в виду, что все точки между началом и концом вектора не принадлежат этому объекту.

Обозначения: $\vec{A}, \vec{a}, \overrightarrow{AB}$ и т. п. Отметим, что в печатных типографских изданиях векторы обозначают жирными буквами: **A, B** и т. д.

Для упрощения при рукописной записи векторов вместо стрелки часто ставят сверху просто чёрточку: $\bar{A}, \bar{a}, \overline{AB}$

Вектор имеет две характеристики: **длину** и **направление**.

Длина вектора – это **расстояние** между началом вектора и его концом. Общее обозначение длины вектора – знак модуля $|\bar{A}|$, $|\bar{a}|$, $|\overline{AB}|$. Если вектор обозначен одной буквой, то для упрощения используют эту же букву, но без стрелки (или чёрточки) сверху: $|\bar{A}| \equiv A$, $|\bar{a}| \equiv a$. Длина вектора – неотрицательное число. Длина вектора измеряется в единицах рассматриваемой (изображаемой при помощи вектора) физической величины. Например, длина радиус-вектора измеряется в СИ в метрах, длина вектора скорости – в м/с. **Направление** определяется тем, на какой прямой и в каком порядке расположены начало и конец рассматриваемого вектора.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называют **ноль-вектором** и обозначают $\bar{0}$. Длина ноль вектора равна нулю. Ноль-вектор не имеет направления и играет очень важную роль при рассмотрении операций векторами.

Говорят, что вектор лежит некоторой прямой, если на этой прямой расположены начало и конец рассматриваемого вектора. Векторы называют **коллинеарными** и записывают $\bar{a} \| \bar{b}$, если они лежат на одной прямой, или на параллельных прямых. Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ **сонаправлены**, или имеют одинаковое направление (пишут $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$), если при совмещении их начальных точек, конечные точки этих векторов будут с одной стороны от совмещённых начальных точек. Если при совмещении начальных точек коллинеарных векторов их конечные точки этих векторов будут с разных сторон от совмещённых начальных точек, их называют **противоположно направленными** (пишут $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$) Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют **равными** и обозначают $\bar{a} = \bar{b}$, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и направления. Из этого определения следует, что вектор при параллельном перемещении не изменяется. Такие векторы называют **свободными**. Однако, имеются векторы, положение которых каким-либо образом зафиксировано. Например, это относится к **радиус-вектору** $\bar{r}$, начало которого всегда совпадает с началом выбранной системы координат. Такие векторы называют закреплёнными.

Для описания расположения вектора в пространстве используют понятие проекции вектора на ось. Осью будем называть любую прямую, на которой введён порядок точек на ней. Например, при помощи соотношения «больше»/«меньше» (на числовой оси) или «правее»/«левее», «выше»/«ниже» на прямых, точкам которых не поставлены в соответствие числа. Оси изображают в виде прямых (вернее участков прямых), при этом на одном из концов участка прямой рисуют стрелку, чтобы обозначить соотношение порядка на данной прямой:

Рис. 1. Ось.

Говорят, что ось лежит в некоторой плоскости, если две любые несовпадающие точки этой оси принадлежат этой плоскости.

Векторы, имеющие длину равную единице, называют единичными, или **ортами** и обозначают в общем случае $\bar{e}$. По определению $|\bar{e}|=1$. Если орт $\bar{e}$ расположен на некоторой оси l и одинаково с ней направлен, то этот орт называют ортом этой оси и добавляют индекс так, чтобы было понятно, ортом какой оси он является: $\bar{e}_l$. В некоторых случаях для обозначения ортов используют другие символы. Например, являются общепринятыми обозначения ортов координатных осей декартовой прямоугольной системы координат символами $\bar{i} \equiv \bar{e}_x$, $\bar{j} \equiv \bar{e}_y$ и $\bar{k} \equiv \bar{e}_z$. По аналогии с ортами осей вводят понятие орта любого вектора $\bar{a}$, как вектора единичной длины $\bar{e}_a$, сонаправленного с данным вектором, то есть $\bar{e}_a \uparrow\uparrow \bar{a}$, $|\bar{e}_a|=1$.

Расположение вектора в пространстве определяют, задавая углы между прямой, на которой расположены начало и конец рассматриваемого вектора и осями, как это показано на рисунке 2а. При этом достаточно указать три угла между вектором и тремя осями не лежащими в одной плоскости.

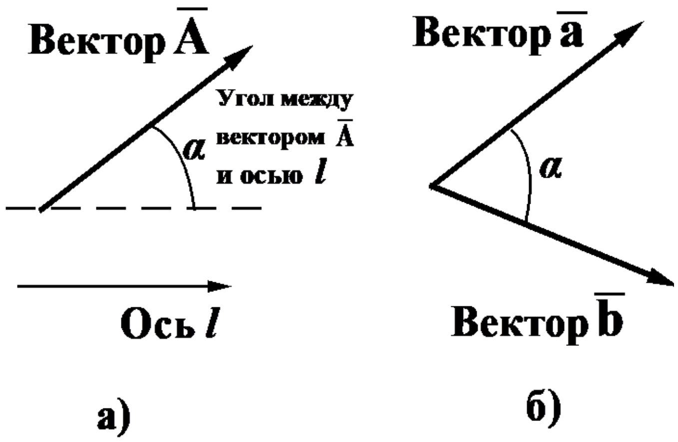

Рис. 2. Векторы и оси.

Вводят понятие **проекции** вектора $\bar{a}$ на некоторую ось l ($Пр_l\bar{a} \equiv a_l$), как скалярной величины, определяемой равенством:

$$a_l = a \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, l}) = a \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

где $(\widehat{\bar{a}, l}) = \alpha$ – угол между вектором $\bar{a}$ и рассматриваемой осью l (рисунок 2а).

По аналогии можно говорить о проекции вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$:

$$a_b = a \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = a \cdot \cos\alpha \qquad (2)$$

где $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \alpha$ – угол между прямыми, на которых лежат векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если совместить начала этих векторов. Отметим, что проекция вектора на ось (или другой вектор) – скаляр, который может быть и положительным и отрицательным. Знак проекции вектора определяется знаком величины $\cos\alpha$, или, величиной угла α. Из (2) следует, что при $\alpha = \pm\pi/2$ проекция вектора на ось (или вектор) равна 0. В таком случае говорят, что этот вектор перпендикулярен оси (другому вектору).

В дальнейшем понадобится понятие компланарности векторов. Векторы называют **компланарными**, если они лежат в одной или параллельных плоскостях. Два вектора всегда компланарны. Это следует из того, что при совмещении начал двух произвольных векторов имеем три точки в пространстве (общее начало и две, в общем случае разные, конечные точки), через которую можно провести плоскость. Три вектора уже могут быть некомпланарными.

2. Сумма и разность векторов

2.1. Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют новый вектор $\bar{a} + \bar{b}$, начало которого совпадает с началом одного из складываемых векторов, а конец с концом второго при условии, что конец первого вектора и начало второго совмещены (рисунок 3а).

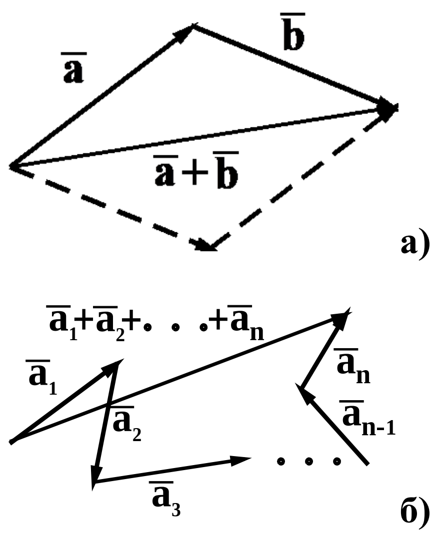

Рисунок 3. Сумма векторов

Сформулированное определение называют правилом треугольника. Есть другой вариант определения суммы двух векторов, называемый правилом параллелограмма. Как видно из рисунка, можно построить сумму двух векторов, как диагональ параллелограмма, построенного на складываемых векторах, при условии совмещения их начал. Однако правило параллелограмма годится только для сложения двух векторов, тогда как правило треугольника более универсально и может использоваться для нахождения суммы любого конечного количества векторов, как это пояснено на рисунке 3б.

Для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ сумма векторов обладает следующими свойствами:

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ – свойство коммутативности (переместительности);

$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ – свойство ассоциативности (сочетательности);

$\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$ – свойство поглощения ноль-вектора.

2.2. Произведением вектора $\bar{a}$ на скаляр λ называют новый вектор $\lambda\bar{a}$, который:

– имеет длину $|\lambda\bar{a}|=|\lambda|a$;

– направление вектора определяется знаком скаляра λ:

$\lambda\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{a},$ если $\lambda>0;$ $\lambda\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{a},$ если $\lambda<0;$ $\lambda\bar{a}=\bar{0},$ если $\lambda=0$.,

В частности, при умножении вектора $\bar{a}$ на скаляр $\lambda=-1$ новый вектор $(-1)\bar{a}\equiv-\bar{a}$ называют вектором, противоположным вектору $\bar{a}$. Сумма вектора $\bar{a}$ и противоположного даёт ноль-вектор: $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$.

Произведение вектора на скаляр обладает следующими свойствами:

– $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$ – распределительность (дистрибутивность) относительно умножения на число;

– $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$ – распределительность (дистрибутивность) относительно умножения на вектор;

– $\lambda(\mu\bar{a})=(\lambda\mu)\bar{a}$ – сочетательность (ассоциативность) относительно числового множителя.

2.3. Сумму вектора $\bar{a}$ и вектора $-\bar{b}$ называют **разностью векторов** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и обозначают $\bar{a}-\bar{b}$.

Из рисунка 4 видим, что геометрическим образом разности векторов ($\bar{a}-\bar{b}$) является вектор, конец которого совпадает с концом вектора, из которого вычитают (вектор $\bar{a}$), а начало с концом вектора, который вычитают (вектор $\bar{b}$).

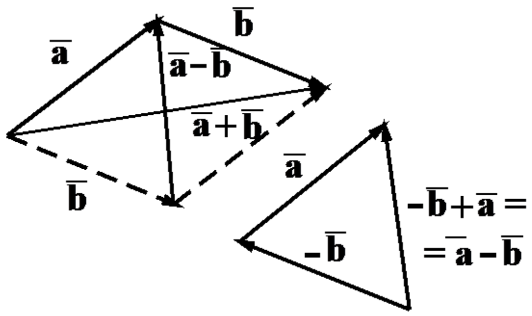

Рисунок 4. Разность векторов

Таким образом, на параллелограмме, построенном на двух векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ при совмещении их начал, одна диагональ является суммой этих векторов, а вторая диагональ – их разностью. При этом в разности векторов нужно учитывать, какой вектор вычитают и из какого вычитают.

3. Координаты вектора

Линейной комбинацией ненулевых векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ называют сумму вида: $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ ... + \lambda_n\bar{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – любые вещественные числа. Из определения произведения вектора на скаляр следует, что линейная комбинация векторов так же является вектором. Линейная комбинация векторов называется **тривиальной**, если $\lambda_i = 0,\ \forall i = 1,2,...,n$. Понятно, что тривиальная линейная комбинация векторов даёт ноль-вектор. Совокупность векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ называется **линейно зависимой** (или просто **зависимой**), если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная ноль-вектору $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ ... + \lambda_n\bar{a}_n = \bar{0}$ и среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ есть отличные от нуля числа, то есть не все эти числа одновременно равны нулю. В противном случае линейная комбинация векторов $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ ... + \lambda_n\bar{a}_n = \bar{0}$ называется **линейно независимой** и в этом случае эта линейная комбинация векторов равна ноль-вектору только тогда, когда она тривиальна (если $\lambda_i = 0,\ \forall i = 1,2,...,n$).

Два вектора линейно зависимы, если они коллинеарны. Два неколлинеарных вектора всегда линейно независимы.

Три вектора линейно зависимы, если они компланарны. Три некомпланарных вектора всегда линейно независимы.

Четыре и более вектора в трёхмерном пространстве всегда линейно зависимы. Последнее означает, что в трёхмерном пространстве для линейной комбинации вида $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_3 + \lambda_4\bar{a}_4$ существует набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ не равных одновременно нулю, а $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_3 + \lambda_4\bar{a}_4 = \bar{0}$.

Упорядоченная совокупность векторов на плоскости или в пространстве называется **базисом**, если эти векторы линейно независимы и через них можно выразить любой вектор на плоскости или в пространстве.

В трёхмерном пространстве это означает, что если $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ – базис, то любой вектор $\bar{a}$ можно представить в виде:

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_3 \qquad (3)$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называют **координатами** вектора в этом базисе.

Аналогично, на плоскости базис образуют два любых неколлинеарных вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2$.

Если векторы образующие базис в пространстве (на плоскости) взаимно перпендикулярны и имеют единичные длины, то такой базис называют **ортонормированным**. При этом используют общепринятые обозначения $\bar{a}_1 \equiv \bar{i}$, $\bar{a}_2 \equiv \bar{j}$, $\bar{a}_3 \equiv \bar{k}$ для ортов такого базиса и $\lambda_1 \equiv a_x, \lambda_2 \equiv a_y, \lambda_3 \equiv a_z$ для координат векторов. Для координатного представления некоторого вектора $\bar{a}$ в данных обозначениях имеем:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \qquad (4)$$

Координаты вектора в (4) принято кратко записывать в виде $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, понимая под этим тот факт, что вектор $\bar{a}$ представлен в данном ортонормированном базисе в виде (4). Графическое изображение ортонормированного базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и радиус-вектора $\bar{r}$ в трёхмерном пространстве представлено на рисунке 5.

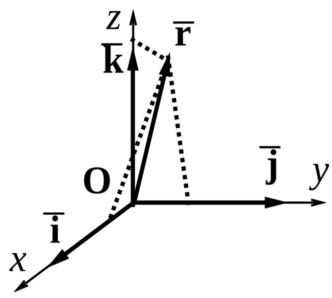

Рисунок 5. Ортонормированный базис

Начала всех ортов перенесены в одну точку O, называемую началом координат. Оси, одинаково направленные с базисными ортами, обозначают буквами, соответствующими индексам координатам векторов в выражении (4).

Для произвольного вектора в трёхмерном пространстве $\bar{a} \equiv \overline{A_1A_2}$, где $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ координаты начальной и конечной точек этого вектора, проекции данного вектора на координатные оси на координатные оси определяются через координаты начальной и конечной точек выражением:

$$\bar{a} \equiv \overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k} \qquad (5)$$

Из выражения (5) несложно убедиться, что **проекции радиус-вектора** $\bar{r}$ на координатные оси координаты x, y, z есть не что иное, как координаты его конечной точки, то есть:

$$r_x = x,\ r_y = y,\ r_z = z \qquad (6)$$

Это означает, что радиус-вектор в ортонормированном базисе является линейной комбинацией вида:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad (7)$$

Это выражение пояснено рисунком 5. Пунктирными линиями изображены перпендикуляры, опущенные из точки, где заканчивается радиус-вектор, на координатные оси. Числа, соответствующие точкам пересечения этих перпендикуляров и координатных осей, являются координатами радиус-вектора и его (радиус-вектора) конца.

4. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют число $\bar{a} \cdot \bar{b}$ (точка между векторами обязательна!), равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, то есть определяемое выражением:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos(\bar{a} \,\hat{,}\, \bar{b}) = ab\cos\alpha \qquad (8)$$

Следует отметить, что скалярное произведение иногда обозначают при помощи круглых скобок: $(\bar{a}, \bar{b})$. Как уже отмечено, в используемом здесь обозначении скалярного произведения векторов $\bar{a} \cdot \bar{b}$ наличие точки между ними обязательно, поскольку выражением $\overline{a}\overline{b}$ обозначается совсем другой объект, а именно **диада** (специальный **тензор** второго ранга).

Непосредственно из определения скалярного произведения следуют свойства этого произведения:

- $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ – коммутативность (перестановочность);
- $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$ – дистрибутивность;
- $\overline{a}\cdot(\lambda\overline{b})=(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})$ – ассоциативность;
- $\overline{a}\cdot\overline{a}=a^2>0$, если $\overline{a}\neq\overline{0}$; $\overline{a}\cdot\overline{a}=0$, если $\overline{a}=\overline{0}$;

Последнее свойство позволяет использовать понятие «скалярный квадрат» вектора $\overline{a}\cdot\overline{a}\equiv\overline{a}^2=a^2$.

Из определения скалярного произведения векторов и отмеченных свойств следуют полезные на практике выражения:

$$(\overline{a}\pm\overline{b})^2=\overline{a}^2\pm 2\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}^2$$
$$(\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}-\overline{b})=\overline{a}^2-\overline{b}^2 \qquad (8)$$

Из определения и свойств скалярного произведения следует важное понятие ортогональности векторов: ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, то есть: $\overline{a}\cdot\overline{b}=0,\ \overline{a}\neq\overline{0},\ \overline{b}\neq\overline{0}$.

Для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в координатном представлении в некотором ортонормированном базисе $\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$, $\overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}$ используют перечисленные выше свойства:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k})\cdot(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \qquad (9)$$

Скалярное произведение векторов широко используется в физике. В частности, работа силы определяется именно при помощи этой операции.

5. Векторное и смешанное произведения векторов

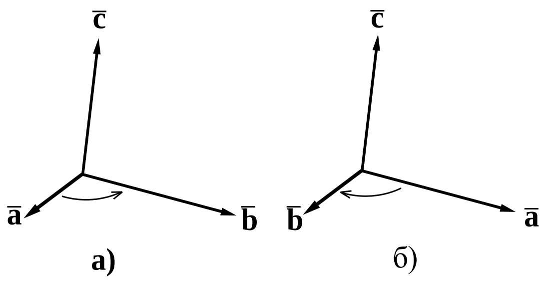

Рисунок 6. Правая и левая тройки векторов

Для упрощения следующих далее формулировок различных произведений векторов введём понятия правой и левой тройки векторов.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется **правой тройкой**, если при совмещении начал этих векторов с конца третьего вектора $\overline{c}$ поворот от первого вектора $\overline{a}$ ко второму на угол меньший π наблюдается против часовой стрелки (рисунок 6а). В противном случае тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется **левой тройкой** (рисунок 6б).

Векторным произведением упорядоченной пары векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{a}\times\overline{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\overline{a}\times\overline{b}| = ab\sin(\overline{a}\hat{,}\overline{b}),\ \angle(\overline{a}\hat{,}\overline{b}) < \pi$;

2) $\overline{a}\times\overline{b}\perp\overline{a},\ \overline{a}\times\overline{b}\perp\overline{b}$;

3) $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{a}\times\overline{b}$ образуют правую тройку векторов.

Приведённое определение пояснено на рисунке 7. Из определения следует, что изменение порядка векторов в этом произведении приводит к изменению направления векторного произведения двух векторов. В литературе используются и другие обозначения векторного произведения двух векторов: $[\overline{a},\overline{b}]$, $[\overline{a}\overline{b}]$ и другие.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

- $\overline{a}\times\overline{b} = -\overline{b}\times\overline{a}$ – антикоммутативность;
- $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c},\ (\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$ – дистрибутивность.
- $(\lambda\overline{a})\times\overline{b} = \overline{a}\times(\lambda\overline{b}) = \lambda(\overline{a}\times\overline{b})$ – ассоциативность;
- $\overline{a}\times\overline{a} = \overline{0}$
- $|\overline{a}\times\overline{b}| = S_{\text{параллелограмма}}$ (рисунок 7)

Из определения следует, что если перемножаемые векторы коллинеарны, то векторное произведение равно ноль-вектору. Ноль-вектор также получается, если один из сомножителей является ноль-вектором.

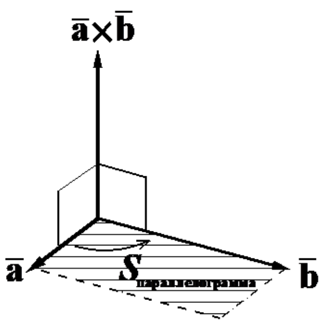

Рисунок 7. Векторное произведение векторов

В физике векторное произведение широко используется. В частности с его помощью определяются момент импульса, момент силы, магнитная сила, действующая на движущуюся в магнитном поле заряженную частицу и др.

Отметим, что используя введённое понятие можно легко доказать следующие равенства для векторных произведений ортов ортонормированного базиса:

$$\begin{gathered}\overline{i}\times\overline{j} = \overline{k},\quad \overline{j}\times\overline{k} = \overline{i},\quad \overline{k}\times\overline{i} = \overline{j}\\ \overline{j}\times\overline{i} = -\overline{k},\ \overline{k}\times\overline{j} = -\overline{i},\ \overline{i}\times\overline{k} = -\overline{j}\end{gathered}\tag{10}$$

Равенства (10) лежат в основе координатной формы записи векторного произведения с помощью символического определителя.

Для этого перемножаемые векторы записывают в выбранном базисе в координатном представлении и перемножают как многочлены, используя свойство дистрибутивности:

$$\bar{a}\times\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\times\bar{b} = a_x\bar{i}\times\bar{b} + a_y\bar{j}\times\bar{b} + a_z\bar{k}\times\bar{b} =$$

$$= a_x\bar{i}\times(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) + a_y\bar{j}\times(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) + a_z\bar{k}\times(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = \quad (11а)$$

$$= a_xb_x\bar{0} + a_xb_y\bar{k} - a_xb_z\bar{j} - a_yb_x\bar{k} + a_yb_y\bar{0} + a_yb_z\bar{i} + a_zb_x\bar{j} - a_zb_y\bar{i} + a_zb_z\bar{0}$$

Группируя члены с одинаковыми ортами, получим:

$$\bar{a}\times\bar{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\bar{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\bar{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (11б)$$

В (11б) равенство:

$$(a_yb_z - a_zb_y)\bar{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\bar{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (11в)$$

следует понимать условно, то есть как вспомогательное правило, облегчающее получение результата. Причина условности в том, что в линейной алгебре определи́тель (или детермина́нт) – это скалярная величина, которая может быть вычислена и поставлена в однозначное соответствие любой квадратной матрице и вычисление определителя может осуществляться по элементам любой строки или любого столбца. В приведённых выражениях и (11б) и (11в) определитель называют «символическим», поскольку верный результат получается только в том случае, если при вычислении использовать только произведения элементов первой строки на соответствующие алгебраические дополнения.

Имеется ещё одно правило для облегчения получения результата, основанное на циклической перестановке каких-либо величин, например ортов ($\bar{i},\bar{j},\bar{k}$) или индексов (x,y,z). Индексы и орты записывают в вершинах треугольника и указывают переход к следующему элементу циклической перестановки стрелкой:

$$\begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & \swarrow & & \nwarrow & \\ j & & \rightarrow & & k \end{array}; \quad \begin{array}{ccccc} & & x & & \\ & \swarrow & & \nwarrow & \\ y & & \rightarrow & & z \end{array}.$$

К вычислению векторного произведения это правило применяется следующим образом. Записывается первый элемент линейной комбинации $(a_yb_z - a_zb_y)\bar{i}$. Второй элемент получают путём замены индексов и ортов на следующие элементы циклических перестановок в соответствии со стрелками: $(a_zb_x - a_xb_z)\bar{j}$. Аналогичным образом получают третий элемент линейной комбинации из второго путём циклической перестановки индексов и ортов.

Смешанным произведением трёх векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ называется скалярное произведение вектора $\overline{a}$ на векторное произведение векторов $\overline{b}\times\overline{c}$, которое обозначается $\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$.

Смешанное произведение трёх векторов обладает следующими свойствами:

а) при циклической перестановке векторов $\overline{a},\ \overline{b},\overline{c}$ в смешанном произведении его величина не изменяется, а в других перестановках при неизменной абсолютной величине происходит смена знака, то есть:

$$\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})=\overline{b}\cdot(\overline{c}\times\overline{a})=\overline{c}\cdot(\overline{a}\times\overline{b})=$$

$$=-\overline{b}\cdot(\overline{a}\times\overline{c})=-\overline{c}\cdot(\overline{b}\times\overline{a})=-\overline{a}\cdot(\overline{c}\times\overline{b})$$

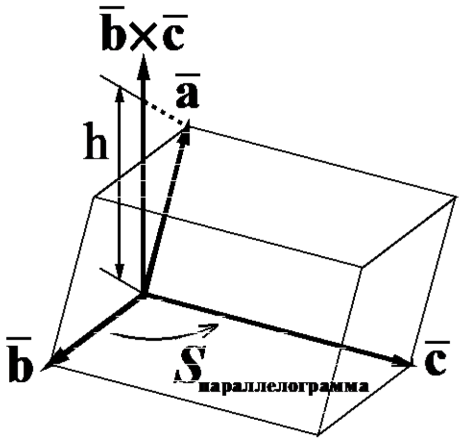

Рисунок 8. Смешанное произведение векторов

б) $\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})=0$ тогда и только тогда, когда векторы $\overline{a},\ \overline{b},\overline{c}$ компланарны;

в) $\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})>0$, если векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют правую тройку и $\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})<0$, если векторы $\overline{a},\ \overline{b},\overline{c}$ образуют левую тройку;

г) смешанное произведение линейно по каждому из трёх множителей, то есть, для любых вещественных чисел λ_1,λ_2 векторов $\overline{a}_i,\ \overline{b}_j,\overline{c}_k;\ i,j,k=1,2$:

$$(\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2)\cdot(\overline{b}\times\overline{c})=\lambda_1\overline{a}_1\cdot(\overline{b}\times\overline{c})+\lambda_2\overline{a}_2\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$$

$$\overline{a}\cdot((\lambda_1\overline{b}_1+\lambda_2\overline{b}_2)\times\overline{c})=\lambda_1\overline{a}\cdot(\overline{b}_1\times\overline{c})+\lambda_2\overline{a}\cdot(\overline{b}_2\times\overline{c})$$

$$\overline{a}\cdot(\overline{b}\times(\lambda_1\overline{c}_1+\lambda_2\overline{c}_2))=\lambda_1\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c}_1)+\lambda_2\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c}_2)$$

Геометрическое приложение смешанного произведения состоит в том, что:

$$\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})=\underbrace{|(\overline{b}\times\overline{c})|}_{S_{\text{параллелограмма}}}\underbrace{a\cos(\overline{a}\,\hat{,}(\overline{b}\times\overline{c}))}_{h_{\text{параллелепипеда}}}=\pm\underbrace{|(\overline{b}\times\overline{c})|}_{S_{\text{параллелограмма}}}h=\pm V_{\text{параллелепипеда}}, \qquad (12)$$

где $h=\underbrace{|a\cos(\overline{a}\,\hat{,}(\overline{b}\times\overline{c}))|}_{h}$ – высота параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах.

Для вычисления смешанного произведения векторов, заданных в координатном представлении в некотором ортонормированном базисе $\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$, $\overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}$, $\overline{c}=c_x\overline{i}+c_y\overline{j}+c_z\overline{k}$ используют определитель:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)$$

Легко убедиться, что полученный результат совпадает с результатом, получаемым по стандартным диаграммам (рисунок 9) вычисления определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_x b_y c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - \\ -(a_z b_y c_x + a_y b_x c_z + a_x b_z c_y) \end{matrix}$$

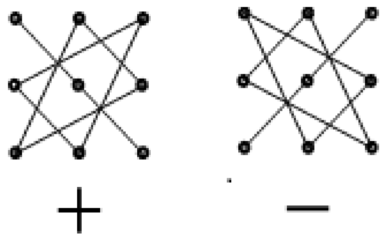

Рисунок 9.

Двойным векторным произведением трёх векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называют вектор, образованный по правилу $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, то есть вектор $\bar{a}$ умножаем на векторное произведение $(\bar{b} \times \bar{c})$. Можно показать, что для двойного векторного произведения трёх векторов имеет место тождество:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b}), \tag{13}$$

Это тождество часто используется в физике при различных вычислениях, в которых появляется двойное векторное произведение трёх векторов. Для запоминания этого тождества используют мнемоническое правило «бац минус цаб», основанное на похожем с этим правилом произношении формул в правой части (13).

Иногда указанное выше определение дают иначе, а именно, двойным векторным произведением называют вектор, образованный по правилу $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$, то есть векторное произведение $(\bar{a} \times \bar{b})$ умножаем на вектор $\bar{c}$.

В этом случае для двойного векторного произведения трёх векторов имеет место тождество:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{c}), \tag{14}$$

Отметим, что $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) \neq (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$, что видно также из приведённых формул (13) и (14).

6. Дифференцирование векторов

Производная вектор-функции $\bar{a}(t)$ по скалярному аргументу t определяется выражением:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t}, \tag{14}$$

при условии существования указанного выше предела.

Правила дифференцирования используют те же что и для скалярных функций, но с учётом особенностей векторных величин, в частности операций с ними:

$$\frac{d}{dt}(\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n) = \lambda_1\frac{d\bar{a}_1}{dt} + \lambda_2\frac{d\bar{a}_2}{dt} + \ldots + \lambda_n\frac{d\bar{a}_n}{dt};\ \lambda_i \in R$$

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d\bar{a}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{a}}{ds}s'(t),\ s = s(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi\bar{a}) = \frac{d\varphi}{dt}\bar{a} + \varphi\frac{d\bar{a}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}\cdot\bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\frac{d\bar{b}}{dt} = \bar{b}\cdot\frac{d\bar{a}}{dt} + \bar{a}\cdot\frac{d\bar{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}\times\bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt}\times\bar{b} + \bar{a}\times\frac{d\bar{b}}{dt};\ \frac{d\bar{a}}{dt}\times\bar{b} \neq \bar{b}\times\frac{d\bar{a}}{dt};\ \bar{a}\times\frac{d\bar{b}}{dt} \neq \frac{d\bar{b}}{dt}\times\bar{a}$$

При дифференцировании постоянного по модулю вектора $\vec{c}$ получается вектор, перпендикулярный к дифференцируемому, то есть $\frac{d\bar{c}}{dt}\perp\bar{c}$. Это следует из условия постоянства длины вектора $\vec{c}$:

$$|\bar{c}| = const \ \Rightarrow\ \bar{c}\cdot\bar{c} = c^2 = const \ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\bar{c}\cdot\bar{c}) = \frac{d}{dt}c^2 = 0;$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{c}\cdot\bar{c}) = \frac{d\bar{c}}{dt}\cdot\bar{c} + \bar{c}\cdot\frac{d\bar{c}}{dt} = 2\bar{c}\cdot\frac{d\bar{c}}{dt} = 2c\cdot\left|\frac{d\bar{c}}{dt}\right|\cos(\bar{c}\,\hat{,}\,\frac{d\bar{c}}{dt}) = 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos(\bar{c}\,\hat{,}\,\frac{d\bar{c}}{dt}) = \pm\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \frac{d\bar{c}}{dt}\perp\bar{c}$$

В частности, если вектор $\bar{c} = \bar{\tau}$, где $\bar{\tau}$ орт касательной к траектории, то имеем $\bar{\tau}\perp\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \lambda\bar{n}$, $\bar{n}$ – орт нормали к касательной к траектории, $\lambda = \upsilon / R$ – скаляр, определяемый геометрией траектории (радиусом кривизны R) и модулем скорости перемещения рассматриваемой материальной точки υ в данной точке траектории. В какой плоскости располагается орт нормали определяется конкретной задачей, в которой возникает необходимость нахождения производной от орта. В частности, в кинематике материальной точки орт нормали к касательной расположен в плоскости окружности, соприкасающейся с траекторией в рассматриваемой точке, и направлен к центру кривизны траектории.