



НОВГОРОДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО»

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ

Учебное пособие

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2022

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
К93

Печатается по решению
РИС НовГУ

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент **В. Е. Удальцов**
(ООО «НПО ПКРВ», г. Великий Новгород)

доктор физико-математических наук, профессор **В. А. Абрамовский**
(Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого)

Курс лекций по физике: учеб. пособие / авт.-сост. С. А. Сабельников; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород: НовГУ им. Ярослава Мудрого, 2022. – 564 с.
ISBN 978-5-89896-778-9

Пособие подготовлено на основе курса лекций по общей физике, прочитанных автором в 2005–2021 годах для студентов 1–2 курсов НовГУ различных специальностей.

Содержание курса в целом традиционное и более всего подходит для студентов вузов технических специальностей. Вместе с тем курс лекций имеет некоторые особенности.

В разделе о единицах измерения физических величин приведена информация о переходе с 20 мая 2019 на новые эталоны обновлённой Международной системы единиц. В обновлённой формулировке определений единиц в целом, а также семи основных единиц в частности, положен новый подход через фиксирование числовых значений для семи фундаментальных физических констант.

В связи с использованием в курсе физики математических понятий и методов до их изучения студентами в соответствующих математических дисциплинах в данном пособии по мере необходимости вводились требуемые для изложения физических вопросов математические понятия и методы (часто на основе упрощений и допущений, возможных в рассматриваемых ситуациях).

Особое внимание обращается на аккуратность при использовании векторных физических величин и их характеристик, а также на точность и однозначность определений физических величин и законов.

В конце учебного пособия приведён список рекомендованной литературы.

В тексте присутствуют краткие исторические справки об авторах физических законов, открытий и методов.

Пособие может быть рекомендовано студентам НовГУ всех технических специальностей дневной и заочной форм обучения, изучающим общий курс физики.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-5-89896-778-9

© Новгородский государственный
университет им. Ярослава
Мудрого, 2022
© С. А. Сабельников, составление,
2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Глава 1. Введение.....	13
1.1. Физика как образовательный предмет	13
1.2. Измерение физических величин. Системы единиц	14
Глава 2. Кинематика	28
2.1. Основные понятия и определения.....	28
2.2. Кинематика материальной точки	29
2.3. Кинематика вращательного движения	38
Глава 3. Динамика материальной точки и поступательного движения твёрдого тела	44
3.1. Закон инерции – первый закон Ньютона	44
3.2. Основной закон динамики – второй закон Ньютона	48
3.3. Закон сохранения импульса	58
3.4. Центр масс	61
3.5. Работа и мощность	63
3.6. Кинетическая энергия	67
3.7. Потенциальная энергия	70
3.8. Закон сохранения энергии в механике	78
Глава 4. Динамика вращательного движения.....	80
4.1. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса.....	80
4.2. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси	83
4.3. Теорема Штейнера	85
4.4. Произвольное движение твёрдого тела.....	88
4.5. Понятие о гироскопах	90
Глава 5. Основы специальной теории относительности.....	93
5.1. Постулаты специальной теории относительности	93
5.2. Преобразования Лоренца	96
5.3. Основные следствия из преобразований Лоренца.....	101
5.4. Элементы релятивистской динамики	107
Глава 6. Основы термодинамики	113
6.1. Статистический и термодинамический методы	113
6.2. Основные понятия термодинамики.....	115
6.3. Внутренняя энергия. Работа и теплота. Первый закон термодинамики.....	118

6.4. Теплоёмкость	123
6.5. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам	126
6.6. Адиабатический процесс	129
6.7. Цикл Карно	131
6.8. Энтропия	134
6.9. Неравенство Клаузиуса	138
6.10. Второй закон термодинамики	140
Глава 7. Основы молекулярно-кинетической теории газов	144
7.1. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории	144
7.2. Распределение Максвелла	148
7.3. Барометрическая формула. Распределения Больцмана и Максвелла – Больцмана	151
7.4. Статистическое толкование энтропии	155
7.5. Классическая теория теплоёмкости газов	167
7.6. Средняя длина свободного пробега молекул газа	172
7.7. Явления переноса в газах	175
Глава 8. Электростатическое поле. Напряжённость. Потенциал	183
8.1. Электромагнитное поле и его свойства	183
8.2. Взаимодействие точечных зарядов. Закон Кулона	186
8.3. Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции	187
8.4. Теорема Гаусса	192
8.5. Разность потенциалов. Электрический потенциал	200
8.6. Связь между напряжённостью и разностью потенциалов электрического поля	203
8.7. Электрический диполь	207
Глава 9. Электрическое поле в веществе	213
9.1. Диэлектрик в электрическом поле	213
9.2. Поляризованность (вектор поляризации) диэлектрика	217
9.3. Вектор электрического смещения	223
9.4. Граничные условия для поверхности раздела двух диэлектриков	226
9.5. Проводник в электрическом поле	230
9.6. Электроёмкость. Конденсаторы	232
9.7. Энергия системы точечных зарядов. Энергия конденсатора. Энергия электрического поля	237

Глава 10. Электрический ток.....	242
10.1. Сила тока. Плотность электрического тока	242
10.2. Классическая теория электропроводности. Закон Ома для однородного участка цепи	245
10.3. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Электродвижущая сила	249
10.4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца.....	253
Глава 11. Магнитное поле стационарных токов.....	257
11.1. Магнитное поле. Вектор индукции магнитного поля	257
11.2. Магнитное поле равномерно движущегося заряда.....	262
11.3. Закон Био – Савара – Лапласа.....	264
11.4. Магнитное поле прямолинейного проводника и кругового витка с током.....	267
11.5. Закон Ампера. Сила Ампера.....	269
11.6. Взаимодействие двух прямолинейных проводников	270
11.7. Основные законы магнитного поля стационарных токов	272
11.8. Магнитное поле соленоида и тороида.....	278
11.9. Контур с током в магнитном поле	282
11.10. Работа по перемещению контура с током в магнитном поле	287
Глава 12. Магнитное поле в веществе	290
12.1. Намагничивание вещества. Намагниченность.....	290
12.2. Циркуляция вектора намагниченности	292
12.3. Вектор напряжённости магнитного поля.....	294
12.4. Условия для магнитного поля на границе раздела двух сред.....	296
12.5. Атом в магнитном поле.....	300
12.6. Диамагнетизм. Диамагнетики.....	303
12.7. Парамагнетизм. Парамагнетики	305
12.8. Ферромагнетики и их свойства.....	308
12.9. Явление электромагнитной индукции.....	315
12.10. Явление самоиндукции. Индуктивность.....	320
12.11. Явление взаимной индукции	323
12.12. Энергия магнитного поля.....	325

Глава 13. Основы теории Максвелла электромагнитного поля	329
13.1. Ток смещения	329
13.2. Уравнения Максвелла	332
Глава 14. Колебания.....	335
14.1. Колебания и их описание	335
14.2. Дифференциальное уравнение колебаний	336
14.3. Векторные диаграммы.	
Сложение гармонических колебаний	343
14.4. Энергия гармонических колебаний	345
14.5. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.....	346
14.6. Затухающие колебания	351
14.7. Вынужденные колебания. Резонанс	355
Глава 15. Волновые процессы	363
15.1. Волновые процессы и их характеристики.....	363
15.2. Волновое уравнение	370
15.3. Волны в упругой среде.....	372
15.4. Энергия упругой волны.....	377
15.5. Стоячие волны	382
15.6. Звуковые волны	384
15.7. Эффект Доплера для звуковых волн	386
Глава 16. Электромагнитные волны	388
16.1. Волновое уравнение для электромагнитных волн.....	388
16.2. Свойства электромагнитных волн	390
16.3. Энергия и импульс электромагнитных волн.....	395
16.4. Излучение электромагнитных волн.	
Шкала электромагнитных волн	398
Глава 17. Волновая оптика	402
17.1. Свет и его характеристики	402
17.2. Интерференция световых волн. Когерентность.....	406
17.3. Методы наблюдения интерференции света	411
17.4. Некоторые классические опыты наблюдения	
интерференции света.....	413
17.5. Интерференция света в тонких плёнках.....	414
17.6. Дифракция света. Принцип Гюйгенса – Френеля	418
17.7. Дифракция света на щели	420
17.8. Дифракционная решётка	424

17.9. Поляризация света.....	430
17.10. Поляризация при отражении и преломлении.....	434
17.11. Поляризация при двойном лучепреломлении.....	435
17.12. Вращение плоскости поляризации	439
17.13. Дисперсия света.....	441
17.14. Поглощение света.....	444
Глава 18. Тепловое излучение	446
18.1. Равновесное тепловое излучение. Закон Кирхгофа.....	446
18.2. Формула Релея – Джинса	452
18.3. Законы Стефана – Больцмана и Вина.....	456
18.4. Формула Планка. Корпускулярные свойства света	458
Глава 19. Основы квантовой физики, физики атома.....	470
19.1. Гипотеза де Бройля. Волны де Бройля	470
19.2. Вероятностная трактовка волновой функции	472
19.3 Соотношения неопределённостей Гейзенберга.....	474
19.4. Уравнение Шрёдингера.....	481
19.5. Свободная частица	483
19.6. Частица в потенциальном ящике. Квантование энергии	487
19.7. Квантовый гармонический осциллятор.....	491
19.8. Прохождение частиц через потенциальный барьер	494
19.9. Водородоподобный атом	498
19.10. Многоэлектронные атомы.....	508
Глава 20. Строение и свойства ядра. Частицы и взаимодействия	513
20.1. Состав и характеристики ядер	513
20.2. Масса и энергия связи ядра.....	515
20.3. Ядерные силы	517
20.4. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада	520
20.5. Основные типы радиоактивности	523
20.6. Ядерные реакции.....	528
20.7. Частицы и взаимодействия	537
Приложение 1.....	551
Приложение 2	560
Список рекомендованной литературы	564

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие подготовлено на основе курса лекций по общей физике, прочитанных автором в 2005–2021 годах для студентов 1–2 курсов НовГУ различных специальностей.

Содержание курса в целом традиционное и более всего подходит для студентов вузов технических специальностей. Вместе с тем курс лекций имеет некоторые особенности, основные из которых перечислены ниже.

В разделе о единицах измерения физических величин приведена информация о переходе с 20 мая 2019 на новые эталоны обновлённой Международной системы единиц. В обновлённой формулировке определений единиц в целом, а также семи основных единиц в частности, положен новый подход через фиксирование числовых значений для семи фундаментальных физических констант.

В связи с использованием в курсе физики математических понятий и методов до их изучения студентами в соответствующих математических дисциплинах в данном пособии по мере необходимости вводились требуемые для изложения физических вопросов математические понятия и методы (часто на основе упрощений и допущений, возможных в рассматриваемых ситуациях). Разумеется, эти определения не претендуют на полноту и исчерпывающую строгость. Вместе с тем даваемые нами понятия из математики не противоречат (с учётом наложенных ограничений) последовательным и математически строгим их определениям в соответствующих курсах математических дисциплин.

Особое внимание обращается на аккуратность при использовании векторных физических величин и их характеристик. Необходимость в этом появляется в связи с недоразумениями и ошибками при записи формул, которые содержат векторные величины, их модули и проекции. В частности, опускание (то есть неиспользование) индексов, указывающих на проекцию вектора на некоторую ось, приводит к невозможности различить указанную проекцию этого вектора от его модуля. Это, однако, не худшая ситуация. Хуже дело обстоит, когда по указанной причине в формулах модуль векторной физической величины принимает отрицательные значения или когда встречаются нелепости, состоящие в сравнении векторов (в смысле один вектор больше или меньше другого), и вводятся абсолютно бессмысленные понятия «отрицательных» и «положительных» сил при описании межмолекулярного взаимодействия. В данном курсе также не используется

понятие «геометрическая» сумма векторов, поскольку такая терминология предполагает наличие некоторой другой, «негеометрической» суммы векторов, что абсолютно не соответствует действительности. На самом деле имеет смысл только геометрическая интерпретация суммы векторов. Аналогичная ситуация относится и к понятию суммы вещественных чисел, где нет необходимости говорить об их алгебраической сумме, которая нигде не определяется (по крайней мере, автор данного пособия ни в одном курсе математики такое определение не встречал), как и другие варианты «неалгебраической» суммы вещественных чисел. Единственное место, где встречается это понятие, так это в школе на уровне пятого-шестого класса, когда ученики переходят к изучению операций с отрицательными числами, и представляет это «определение» из себя следующее словосочетание: «Алгебраическая сумма – это выражение, которое можно представить в виде суммы положительных и отрицательных чисел». То есть понятие алгебраической суммы определяют через понятие... суммы. Это, собственно, и означает, что есть только понятие суммы.

В формулировках с суммой вещественных чисел часто возникает путаница и недоразумения, когда не различают вещественное число и его модуль. Это приводит к «эквилибристике» со знаками рассматриваемых физических величин. Такая ситуация, например, часто наблюдается в учебной литературе при рассмотрении вопроса о термическом коэффициенте полезного действия цикла Карно, когда записывают формулу для этой величины через количества теплоты, которыми рабочее тело обменивается с термостатами в виде $\eta = A_{\text{полезн}} / Q_1 = (Q_1 - Q_2) / Q_1$ и которая (формула) будет иметь смысл только при $Q_2 > 0$. Все входящие в эту формулу величины должны относиться *только к рабочему телу*, а именно: $Q_1 > 0$ – количество тепла, которым рабочее тело обменивается с нагревателем, при изотермическом расширении газообразного рабочего тела, и $Q_2 < 0$ – количество тепла, которым рабочее тело обменивается с холодильником при изотермическом сжатии рабочего тела $Q_2 < 0$. Видим, что на самом деле величина Q_2 отрицательна, и правильная формула должна иметь вид $\eta = A_{\text{полезн}} / Q_1 = (Q_1 + Q_2) / Q_1$. В последующих применениях указанной выше формулы для получения равенства и неравенства Клаузиуса заменяют величину Q_2 на $-Q_2$; объясняют смену знака тем, что используют количество тепла, которое отдаёт холодильник, тогда как во всех рассуждениях

должны использоваться только величины, относящиеся к рабочему телу. На самом деле в формуле должны использоваться характеристики процессов, происходящих в рабочем теле, с учётом сказанного выше о знаках характеристик, относящихся к описываемым процессам.

В настоящем курсе лекций особое внимание уделяется точности и однозначности определений физических величин и законов. С этой целью, в частности, исключено использование выражений вида: «... величина ... численно равна ... при единичном значении ...». Такие формулировки и определения, по нашему мнению, приводят, как минимум, к двум недоразумениям. Во-первых, и это главное, приравниваются физические величины, имеющие различные размерности. Во-вторых, такие формулировки затрудняют усвоение сути рассматриваемых явлений по причине подмены определения той или иной физической величины на некоторый частный случай, который является следствием из корректного определения этой величины. Например, при определении теплоёмкости рассматриваемой системы вместо использования определения, на основе которого появляется однозначное выражение для вычисления этой величины дающее одновременно её правильную размерность, часто используются формулировки типа: 1) «Теплоёмкостью какого-либо тела называется величина, равная количеству тепла, которое необходимо сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один кельвин»; или 2) «Удельная теплоёмкость вещества – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К». Из этих определений следует, во-первых, что теплоёмкость «равна» количеству теплоты и, следовательно, имеет размерность количества теплоты; во-вторых, эти определения годятся только для нагревания (!?) и, в-третьих, совершенно непонятно, как быть с вычислением теплоёмкости вещества при «нагревании» не на 1 К или при охлаждении, а также (для второго определения), если масса вещества отличается от 1 кг? Аналогичная ситуация и с определениями других физических величин, например напряжённости и разности потенциалов электростатического поля, электроёмкостей проводника и конденсатора. В случае с определением электроёмкости конденсатора добавляется также проблема со знаком этой величины. Суть проблемы в том, что электроёмкость конденсатора определяют формулой $C = q / (\varphi_1 - \varphi_2)$, в пояснениях к которой сообщают, что q – заряд обкладки (иногда говорят об абсолютной величине заряда, иногда называют зарядом, накопленным конденсатором, и т. п.), $(\varphi_1 - \varphi_2)$ –

разность потенциалов между обкладками. Ясно, что знак электроёмкости при таком определении может быть каким угодно. На самом деле корректное определение электроёмкости конденсатора может иметь два варианта. Один из этих вариантов основан на применении вышеупомянутой формулы $C = q / (\varphi_1 - \varphi_2)$, но предполагает пояснения, состоящие в том, что q – это заряд одной из обкладок конденсатора, а $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов между *данной обкладкой* (заряд которой указан в числителе формулы) и другой обкладкой (но не наоборот!). Во втором корректном варианте, чтобы избавиться от необходимости уточнения в формуле связи между зарядом и разностью потенциалов, в этой формуле нужно подразумевать отношение абсолютной величины заряда на одной из обкладок (всё равно, какой) и абсолютной величины разности потенциалов $|\varphi_1 - \varphi_2|$ между обкладками, то есть: $C = |q| / |\varphi_1 - \varphi_2|$. Возможность применения единичных приращений параметров-аргументов в тех или иных определениях, конечно же, остаётся и может быть целесообразной в случае комментариев и пояснений к определениям. Например, для этого можно использовать вариант со словами «показывает, на какую величину (или на сколько) изменится ...», вместо приравнивания величин, имеющих разные размерности. В частности, в случае с теплоёмкостью системы можно после корректного определения этой величины для пояснения определения использовать такой комментарий: «Теплоёмкость какой-либо системы (тела) показывает, на какую величину изменится внутренняя энергия этой системы в процессе теплообмена с окружающими телами, если температура рассматриваемой системы изменится на один кельвин». Аналогичный приём можно использовать и в других случаях. При этом, разумеется, такие пояснения и комментарии не должны заменять корректные определения рассматриваемых физических величин.

Материал, изложенный в настоящем пособии, несколько превышает объём материала курса лекций за счёт подробности изложения. Это сделано с целью обеспечения возможности самостоятельного изучения материала и чтобы позволить студентам, при необходимости, более обстоятельно изучить интересующие их вопросы.

В настоящем курсе лекций в связи с ограниченным объёмом времени, отводимым в учебных планах на изучение общей физики, отсутствуют некоторые традиционные разделы, а также практически отсутствуют описания различных опытов. По этой причине в конце данного учебного посо-

бия приведён список рекомендованной литературы, в которой можно найти интересующую информацию.

В тексте присутствуют краткие исторические справки по авторам (с указанием, как правило, ударений в именах и фамилиях) физических законов, открытий и методов. Это немного оживляет текст учебного пособия и помогает студентам понять, что физическая наука, как и любая другая, создаётся усилиями множества конкретных людей, а также позволяет обозначить роль и значимость различных исследователей в развитии физической науки.

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Физика как образовательный предмет

Физика в настоящее время является одной из основных естественных наук. Причина передовых позиций физики в её фундаментальном значении в образовании современного специалиста любого естественно-научного направления. Кроме того, физика оказывает значительное влияние на ряд смежных наук и областей, определяющих развитие производительных сил общества. В частности, прогресс во многих областях современной техники, включая так называемые технологии Hi-Tec, основан на применении физических знаний и методов.

Как наука физика непрерывно изменяется и совершенствуется за счёт познания новых явлений природы и расширения и уточнения имеющихся знаний. Поэтому изменяются объём и содержание физики как образовательного предмета. В то же время для образовательного предмета характерно большее или меньшее ограничение по объёму и содержанию, определяемое специальностью обучаемых и спецификой учебного заведения.

Как предмет для изучения, физику делят (достаточно условно) на основные части:

- механику;
- молекулярную физику и термодинамику;
- электродинамику;
- оптику;
- физику атомов и молекул;
- физику ядра и элементарных частиц.

Приведённое деление, как уже отмечено, условное. Это деление определяется в основном удобством изучения физики как образовательного предмета и не содержит многих важных разделов физики, таких, например, как физика твёрдого тела, синергетика, физика плазмы и так далее. В этот ряд можно включить ещё очень много важнейших разделов современной физики, однако следует отметить, что все они (эти разделы) используют базовые представления, формулируемые и изучаемые в упомянутых выше основных частях физики.

Изложение материала в настоящем пособии построено на основе указанного выделения основных частей.

Изучение физики начинается с механики. Несмотря на ограничения на вводимые в механике понятия и модели, они (понятия и модели) легко

могут быть расширены с учётом соответствующей специфики описываемых явлений и поэтому широко применяются в других разделах физики.

1.2. Измерение физических величин. Системы единиц

Для количественного описания физических явлений вводят понятие **физических величин**, под которыми понимают различные **измеряемые** параметры, характеристики, признаки или свойства рассматриваемых объектов или явлений. Устойчивые, повторяющиеся во множестве опытов связи между физическими величинами называются **физическими законами**.

Количественное определение физических величин предполагает наличие способа измерения этих величин. Под измерением физической величины понимают сравнение этой величины с физической величиной, принятой за единицу измерения (часто называют эталоном).

Для всех физических величин, которые сравниваются с одним эталоном, имеется некоторое объединяющее все эти величины качество (или свойство), отражающее природу рассматриваемой физической величины. Это общее для сравниваемых физических величин качество называется **родом**, а сами такие физические величины называются **однородными**.

Необходимо различать понятия «физическая величина» и «значение физической величины». Под физической величиной A понимают некоторый измеряемый физически значимый параметр исследуемого объекта или явления, который может принимать какое-либо значение a из диапазона возможных значений. Для обозначения физической величины A и её возможных значений a используют обозначение прописными и строчными буквами. В результате измерения физическая величина A принимает конкретное значение a из диапазона возможных значений, то есть осуществляется событие $A = a$. С целью упрощения описания рассматриваемых явлений, в дальнейшем, если нет опасности неправильного толкования ситуации, используется соглашение об использовании одной и той же буквы алфавита для самой физической величины и её значений (чаще всего большой, но бывает и наоборот). Одно из возможных значений физической величины A в рассматриваемой системе единиц принимается за эталон e_A . Численное значение самой единицы e_A всегда тождественно равно 1.

Измерить физическую величину A (здесь имеется в виду именно физическая величина) – это значит указать, сколько раз в A (здесь имеется в виду значение физической величины, то есть считается осуществлённым

событие $A = a$) содержится выбранный для измерения этой величины эталон e_A , то есть найти число:

$$\{A\} = A / e_A, \quad (1.2.1)$$

или $A = \{A\} \cdot e_A$.

Из данного определения следует, что результат любых измерений физической величины A сводится к процедуре поиска числа $\{A\}$, а измеренное значение этой величины есть произведение найденного числа $\{A\}$ на эталон e_A .

Изменение размера эталона приводит к изменению измеряемого значения физической величины. Если e_{A_1} и e_{A_2} – два различных эталона одной и той же величины, то измеренные этими эталонами значения связаны соотношением:

$$\{A_1\} \cdot e_{A_1} = \{A_2\} \cdot e_{A_2}, \text{ или } \{A_1\} / \{A_2\} = e_{A_2} / e_{A_1}, \quad (1.2.2)$$

то есть числовые значения физической величины обратно пропорциональны размерам эталонов. Например, если речь идёт о длине конкретной доски, то, обнаружив, что её длина L_X в 1,5 раза больше, чем длина эталона 1 метр ($e_{L_1} = 1$ м), получим длину этой доски $L_X = 1,5$ м, поскольку $\{L_X\}_1 = L_X / e_{L_1} = 1,5$. Если выберем другой эталон для измерения длины, размер которого в 100 меньше первого, то есть $e_{L_1} / e_{L_2} = 100$ (или $e_{L_1} = 100 \cdot e_{L_2}$), и назовём его 1 см (1 сантиметр), то длина рассматриваемой доски (она не изменилась!) принимает значение $L_X = \{L_X\}_1 \cdot e_{L_1} = \{L_X\}_1 \cdot (100 \cdot e_{L_2}) = (\{L_X\}_1 \cdot 100) \cdot e_{L_2} = \{L_X\}_2 \cdot e_{L_2} = 150$ см.

Видим, что уменьшение эталона в 100 раз приводит к увеличению во столько же раз значения измеряемой величины $\{L_X\}_2 / \{L_X\}_1 = 100$.

Выбор эталона определяется многими условиями, обсуждение которых выходит за рамки данного курса. Поэтому мы ограничимся ниже лишь указанием рекомендованных эталонов, оставляя в стороне причины их выбора.

Некоторые из независимых физических величин и их эталоны принимают за основные величины. Материальные носители эталонов основных физических величин должны легко воспроизводиться в любом коли-

честве, иметь высокую неизменность своих свойств и должны быть удобны для использования. Число основных физических величин желательно сделать небольшим. Единицы измерения всех остальных величин называются производными, и их получают, используя связи (физические закономерности) с основными физическими величинами.

Совокупность основных и производных единиц образуют системы единиц. Поскольку выбор основных единиц является предметом соглашения (договорённости), существует возможность построения множества систем единиц. Однако не все они будут удовлетворять перечисленным выше основным условиям, и поэтому на практике используется сравнительно небольшое число систем единиц. В качестве основной системы единиц в нашей стране принята международная система единиц – СИ (англ.: International System of Quantities, ISQ). В этой системе семь основных единиц – метр (длина), килограмм (масса), секунда (время), ампер (сила электрического тока), кельвин (термодинамическая температура), моль (количество вещества), кандела (сила света) – и две дополнительных – радиан (плоский угол) и стерadian (телесный угол).

Рассмотрим понятие **размерности** физических величин. Например, расстояние между двумя точками, длина кривой, толщина доски – все эти величины принадлежат к одному и тому же роду величин – величинам типа длины. Именно это имеют в виду, когда говорят, что размерность этих величин есть длина. Аналогично можно рассуждать о физических величинах, определяемых промежутками времени между какими-либо событиями – все эти величины имеют размерность времени. Точно такие же рассуждения применимы к остальным физическим величинам. Размерность физической величины обозначается в виде той же буквы латинского или греческого алфавитов, что и сама физическая величина, заключённой в квадратные скобки, то есть для физической величины A размерность обозначается $[A]$.

Размерности основных физических величин обозначают с помощью больших букв латинского или греческого алфавитов без квадратных скобок, а именно: размерность длины – L ; размерность массы – M ; размерность времени – T ; размерность силы электрического тока – I ; размерность термодинамической температуры – Θ ; размерность количества вещества – N ; размерность силы света – J .

Размерность любой производной физической величины A в выбранной системе единиц определяется через размерности основных единиц.

Например, из определения скорости v равномерного прямолинейного движения материальной точки:

$$v = l/t, \quad (1.2.3)$$

где l – путь, пройденный материальной точкой за время t , следует, что размерность скорости $[v]$ определяется выражением:

$$[v] = [l]/[t] = L \cdot T^{-1}. \quad (1.2.4)$$

Аналогично для любой механической производной физической величины A :

$$[A] = L^p \cdot M^q \cdot T^r, \quad (1.2.5)$$

где p , q и r – рациональные положительные или отрицательные числа. Из (1.2.5) следует, что **размерность физической величины – это степенной одночлен, состоящий из произведений символов основных величин в различных степенях**. Этот одночлен составляется на основе связи данной физической величины с физическими величинами, принятыми в данной системе величин за основные.

При определении размерности применяются стандартные математические операции – умножение, деление и сокращение степеней. Физическая величина называется **безразмерной**, если в выражение её размерности все основные величины входят в нулевой степени. По определению, размерности однородных физических величин совпадают.

На 26-й Генеральной конференции по мерам и весам, проходившей с 13 по 16 ноября 2018 года в Версáле (Версáль – город во Франции, расположенный в 17,1 километра к юго-западу от центра французской столицы; является административным центром департамента Ивелин), принято решение о переходе с 20 мая 2019 года на новые эталоны обновлённой **Международной системы единиц СИ (SI)**.

В основу формулирования определений единиц в целом, а также **семи основных единиц** в частности, положен новый подход через фиксирование числовых значений для **семи фундаментальных физических констант (ФФК)**. Среди них природные фундаментальные константы, такие как постоянная Планка и скорость света, поэтому определения основаны на нашем современном понимании законов физики и отражают это понимание. Впервые стал доступен полный набор определений, которые не используют в качестве основы для сравнения какие-либо эталоны в виде артефактов, материальные свойства или описания измерений.

Введение нового определения килограмма через постоянную Планка не повлияет на действующие метрологические цепи передачи единицы массы и не изменит сложившуюся практику измерения масс для большинства потребителей. В России метрологи будут переходить на новый метод в течение ближайших пяти лет. За это время будет разработана и внедрена аппаратура, позволяющая ввести новое определение единицы массы.

Ниже в таблице 1.1 приведены **точные числовые значения семи ФФК**, выраженные в соответствующих единицах СИ, а в таблице 1.2 – определяемых ими **семи основных единиц СИ**. Фиксация точного числового значения константы определяет единицу, поскольку произведение числового значения на единицу должно быть равно значению константы, которое полагается постоянным.

Семь констант выбраны таким образом, что любая единица СИ может быть представлена либо через саму определяющую константу, либо через произведения или отношения определяющих констант.

Таблица 1.1. Семь определяющих констант СИ

Определяющая константа	Обозначение	Числовое значение	Единица
Частота невозмущённого сверхтонкого перехода основного состояния атома цезия-133	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9 192 631 770	Гц (Hz)
Скорость света в вакууме	c	299 792 458	м·с ⁻¹ (m·s ⁻¹)
Постоянная Планка	h	$6,62607015 \cdot 10^{-34}$	Дж·с (J·s)
Элементарный заряд	e	$1,602176634 \cdot 10^{-19}$	Кл (C)
Постоянная Больцмана	k	$1,380649 \cdot 10^{-23}$	Дж·К ⁻¹ (J·K ⁻¹)
Постоянная Авогадро	N_A	$6,02214076 \cdot 10^{23}$	моль ⁻¹ (mol ⁻¹)
Световая эффективность монохроматического излучения с частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц	$K_{\text{кд}}$	683	лм·Вт ⁻¹ (lm·W ⁻¹)

Числовые значения семи определяющих констант **не имеют неопределённости**.

Производные единицы СИ герц, джоуль, кулон, люмен и ватт, с обозначениями Гц, Дж, Кл, лм и Вт соответственно, соотносятся с основными единицами СИ секунда, метр, килограмм, ампер, кельвин, моль и кандела, с обозначениями с, м, кг, А, К, моль и кд соответственно, приведёнными в таблице 1.2, таким образом, что $\text{Гц} = \text{с}^{-1}$, $\text{Дж} = \text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$, $\text{Кл} = \text{А} \cdot \text{с}$, $\text{лм} = \text{кд} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}^{-2} = \text{кд} \cdot \text{ср}$, а $\text{Вт} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$.

Таблица 1.2. Основные единицы физических величин СИ

Величина	Обозначение размерности	Наименование; обозначение русское; обозначение международное
Длина	L	метр; м; m
Масса	M	килограмм; кг; kg
Время	T	секунда; с; s
Термодинамическая температура	Θ	кельвин; К; K
Количество вещества	N	моль; моль; mol
Сила электрического тока	I	ампер; А; A
Сила света	J	кандела; кд; cd

На основе указанных в таблице 1.1 фиксированных числовых значений определяющих констант вводятся определения семи основных единиц в СИ (таблица 1.2) так, как это пояснено ниже (все определения основных единиц приведены по [7]).

Секунда

Секунда, обозначение с (s), есть единица времени в СИ. Она определяется путём принятия фиксированного числового значения частоты перехода сверхтонкого расщепления невозмущённого основного состояния атома цезия-133 $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ равным 9 192 631 770 в единицах Гц, что соответствует с^{-1} .

Это определение означает точное соотношение $\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770 \text{ Гц}$. Обратное отношение даёт точное выражение для единицы секунда через определяющую константу $\Delta\nu_{\text{Cs}}$:

$$1 \text{ Гц} = \frac{\Delta\nu_{\text{Cs}}}{9\,192\,631\,770} \quad \text{или} \quad 1 \text{ с} = \frac{9\,192\,631\,770}{\Delta\nu_{\text{Cs}}}. \quad (1.2.6)$$

Следствием из этого определения является то, что **секунда равна продолжительности 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями невозмущённого основного состояния атома цезия-133.**

Определённая таким образом секунда – это единица собственного времени в рамках общей теории относительности. Для обеспечения скоординированной временной шкалы сигналы от разных первичных часов из разных местоположений объединяются, что требует корректировки с учётом релятивистских сдвигов частоты цезия.

Метр

Метр, обозначение м (m), есть единица длины в СИ. Он определяется путём принятия фиксированного числового значения скорости света в вакууме «с» равным 299 792 458 в единицах м·с⁻¹, где секунда определяется через частоту перехода в цезии $\Delta\nu_{Cs}$.

Это определение подразумевает точное соотношение $c = 299\,792\,458\text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$. Обратное соотношение даёт точное выражение для единицы метр через определяющие константы и $\Delta\nu_{Cs}$:

$$1\text{ м} = \left(\frac{c}{299\,792\,458} \right) \text{ с} = \left(\frac{9\,192\,631\,770}{299\,792\,458} \right) \frac{c}{\Delta\nu_{Cs}} \approx 30,633319 \frac{c}{\Delta\nu_{Cs}}. \quad (1.2.7)$$

Из этого определения следует, что **один метр – это длина пути, пройдённого светом в вакууме за интервал времени, равный 1/299 792 458 секунды.**

Килограмм

Килограмм, обозначение кг (kg), есть единица массы в СИ. Он определяется путём принятия фиксированного числового значения постоянной Планка h равным $6,62607015 \cdot 10^{-34}$ в единицах Дж·с, что соответствует кг·м²·с⁻¹, где метр и секунда определяются через c и $\Delta\nu_{Cs}$.

Это определение подразумевает точное соотношение $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34}\text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$. Обратное соотношение даёт точное выражение для единицы килограмм через определяющие константы h , c и $\Delta\nu_{Cs}$:

$$\begin{aligned}
1 \text{ кг} &= \left(\frac{h}{6,62607015 \cdot 10^{-34}} \right) \text{ м}^{-2} \text{ с} = \\
&= \left(\frac{(299\,792\,458)^2}{(6,62607015 \cdot 10^{-34}) \cdot (9\,192\,631\,770)} \right) \frac{h \Delta \nu_{Cs}}{c^2} \approx \\
&\approx 1,4755214 \cdot 10^{40} \frac{h \Delta \nu_{Cs}}{c^2}.
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

В данном определении числовое значение постоянной Планка таково, что на момент его принятия килограмм был равен массе международного прототипа $m(K) = 1 \text{ кг}$, с относительной стандартной неопределённостью $1 \cdot 10^{-8}$, которая являлась стандартной неопределённостью совокупности наилучших оценок значения постоянной Планка на тот момент.

С помощью данного определения, в принципе, могут быть реализованы первичные эталоны в любой шкале масс.

Ампер

Ампер, обозначение А (А), есть единица электрического тока в СИ. Он определяется путём принятия фиксированного числового значения элементарного заряда e равным $1,602176634 \cdot 10^{-19}$ в единицах Кл, что соответствует А·с, где секунда определяется через $\Delta \nu_{Cs}$.

Это определение подразумевает точное соотношение $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ А} \cdot \text{с}$.

Обратное соотношение даёт точное выражение для единицы ампер через определяющие константы e и $\Delta \nu_{Cs}$:

$$\begin{aligned}
1 \text{ А} &= \left(\frac{e}{1,602176634 \cdot 10^{-19}} \right) \text{ с}^{-1} = \\
&= \left(\frac{1}{(9\,192\,631\,770) \cdot (1,602176634 \cdot 10^{-19})} \right) e \cdot \Delta \nu_{Cs} \approx \\
&\approx 6,789687 \cdot 10^8 e \cdot \Delta \nu_{Cs}.
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Из этого определения следует, что один ампер – это сила электрического тока, соответствующая потоку $1/(1,602176634 \cdot 10^{-19})$ элементарных зарядов в секунду через рассматриваемое сечение.

Предыдущее определение ампера было основано на силе взаимодействия двух проводников с током и соответствовало фиксации значения

магнитной постоянной μ_0 равным точно $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{А}^{-2}$, где Гн и Н обозначают когерентные производные единицы генри и ньютон соответственно. Новое определение ампера фиксирует значение e вместо μ_0 . В результате μ_0 должно определяться экспериментально.

Из этого также следует, что поскольку три величины – c , электрическая постоянная ε_0 и магнитная постоянная μ_0 – связаны соотношением $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, а c известна точно, то электрическая постоянная ε_0 (как и магнитная постоянная μ_0) должна определяться экспериментально и иметь ту же относительную стандартную неопределённость. Произведение $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ остаётся точным. На момент принятия настоящего определения ампера величина магнитной постоянной μ_0 равна $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$ с относительной стандартной неопределённостью $2,3 \cdot 10^{-10}$.

Кельвин

Кельвин, обозначение К (K), есть единица термодинамической температуры в SI. Он определяется путём принятия фиксированного числового значения постоянной Больцмана k равным $1,380649 \cdot 10^{-23}$ в единицах Дж·К⁻¹, что соответствует кг·м²·с⁻²·К⁻¹, где килограмм, метр и секунда определяются через h , c и $\Delta\nu_{Cs}$.

Это определение подразумевает точное соотношение $k = 1,380649 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$. Обратное соотношение даёт точное выражение для единицы кельвин через определяющие константы k , h и $\Delta\nu_{Cs}$:

$$\begin{aligned} 1 \text{ К} &= \left(\frac{1,380649}{k} \right) \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} = \\ &= \frac{1,380649 \cdot 10^{-23}}{(6,62607015 \cdot 10^{-34}) \cdot (9\,192\,631\,770)} \cdot \frac{h \Delta\nu_{Cs}}{k} \approx \\ &\approx 2,2666653 \cdot \frac{h \Delta\nu_{Cs}}{k}. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Из этого определения следует, что один кельвин равен такому изменению термодинамической температуры, при котором изменение энергии теплового движения kT равно $1,380649 \cdot 10^{-23}$ Дж.

Предыдущее определение кельвина устанавливало температуру тройной точки воды $T_{\text{ТТВ}}$ равной 273,16 К. Поскольку новое определение

фиксирует числовое значение k , $T_{\text{ТТВ}}$ теперь должна определяться экспериментально. На момент принятия этого определения $T_{\text{ТТВ}}$ была равна 273,16 К с относительной неопределённостью $3,7 \cdot 10^{-7}$, полученной на основе измерений k , предшествующих переопределению.

С учётом истории развития температурных шкал, в установившейся практике до сих пор принято выражать термодинамическую температуру T , с точки зрения её отличия от опорной температуры $T_0 = 273,15$ К, близкой к точке замерзания воды. Эта разность называется температурой Цельсия t и определяется уравнением $t = T - T_0$.

Единицей температуры Цельсия является градус Цельсия, обозначаемый $^{\circ}\text{C}$, который, по определению, равен по величине кельвину. Разность или интервал температур могут быть выражены в кельвинах или в градусах Цельсия, причём числовое значение для разности температур в обоих случаях будет одинаковым. Однако числовое значение температуры Цельсия, выраженное в градусах Цельсия, связано с числовым значением термодинамической температуры, выраженным в градусах Кельвина, соотношением $t / (1^{\circ}\text{C}) = T / \text{K} - 273,15$.

Кельвин и градус Цельсия являются единицами Международной температурной шкалы 1990 года (МТШ-90), принятой МКМВ в 1989 г. в Рекомендации 5 (C1-1989, PV, 57, 115). Обратите внимание, что МТШ-90 определяет две величины, T_{90} и t_{90} , которые являются близкими приближениями к соответствующим термодинамическим температурам T и t .

Также отметим, что при таком определении первичная реализация кельвина может быть осуществлена, в принципе, в любой точке температурной шкалы.

Моль

Моль, обозначение моль (mol), есть единица количества вещества в СИ. Один моль содержит точно $6,02214076 \cdot 10^{23}$ структурных элементов. Это число есть фиксированное числовое значение постоянной Авогадро, N_A , единицах моль $^{-1}$ и называемое числом Авогадро.

Количество вещества в системе, обозначение n , является мерой количества конкретных структурных элементов. Структурными элементами могут быть атомы, молекулы, ионы, электроны и любые другие частицы или определенные группы частиц.

Это определение подразумевает точное соотношение $N_A = 6,02214076 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Обратное соотношение даёт точное выражение для моля через определяющую константу N_A :

$$1 \text{ моль} = \left(\frac{6,02214076 \cdot 10^{23}}{N_A} \right). \quad (1.2.11)$$

Из этого определения следует, что моль – это количество вещества системы, содержащее $6,02214076 \cdot 10^{23}$ определенных структурных элементов.

Предыдущее определение моля фиксировало значение молярной массы углерода-12, $M(^{12}\text{C})$, равное точно 0,012 кг/моль. Согласно новому определению $M(^{12}\text{C})$ больше не известна точно и должна определяться экспериментально. Значение, выбранное для N_A , таково, что на момент принятия настоящего определения моля $M(^{12}\text{C})$ равна 0,012 кг/моль с относительной стандартной неопределённостью $4,5 \cdot 10^{-10}$.

Молярная масса любого атома или молекулы X по-прежнему может быть получена из относительной атомной массы $M(X)$ из уравнения $M(X) = A_r(X)[M(^{12}\text{C})/12] = A_r(X)M_u$. Кроме того, молярная масса любого атома или молекулы X также связана с массой структурного элемента $m(X)$ через зависимость $M(X) = N_A m(X) = N_A A_r(X)m_u$.

В этих выражениях M_u – молярная массовая постоянная, равная $M(^{12}\text{C})/12$, а m_u – атомная единица массы, равная $m(^{12}\text{C})/12$. Они связаны с постоянной Авогадро соотношением $M_u = N_A \cdot m_u$.

В названии «количество вещества» слово «вещество» обычно заменяется словами, характеризующими рассматриваемое вещество, например, «количество хлористого водорода, HCl» или «количество бензола, C₆H₆». Важно дать точное описание структурных элементов (что подчёркнуто в определении моля); предпочтительно указать молекулярную химическую формулу вещества. Хотя слово «количество» имеет более общее словарное определение, для краткости можно сокращать полное наименование «количество вещества» до просто «количество». Это также относится и к производным величинам, таким как «концентрация количества вещества», которую можно назвать просто «молярной концентрацией». В области клинической химии название «концентрация количества вещества» обычно сокращается до «концентрация вещества».

Кандела

Кандела, обозначение кд (cd), в СИ есть единица силы света в заданном направлении. Она определяется путём принятия фиксированного числового значения световой эффективности $K_{\text{кд}}$ монохроматического излучения частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц равным 683 в единицах $\text{лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$, что соответствует $\text{кд} \cdot \text{ср} \cdot \text{Вт}^{-1}$, или $\text{кд} \cdot \text{ср} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^3$, где килограмм, метр и секунда определяются через h , c и $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

Это определение подразумевает точное соотношение $K_{\text{кд}} = 683 \text{ кд} \cdot \text{ср} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^3$ для монохроматического излучения частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц. Обратное соотношение даёт точное выражение для канделы через определяющие константы $K_{\text{кд}}$, h и $\Delta\nu_{\text{Cs}}$:

$$\begin{aligned} 1 \text{ кд} &= \left(\frac{K_{\text{кд}}}{683} \right) \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{ср}^{-1} = \\ &= \frac{1}{(6,62607015 \cdot 10^{-34}) \cdot (9\,192\,631\,770)^2 \cdot 683} \cdot (\Delta\nu_{\text{Cs}})^2 h K_{\text{кд}} \approx \\ &\approx 2,614830 \cdot 10^{10} \cdot (\Delta\nu_{\text{Cs}})^2 h K_{\text{кд}}. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Из этого определения следует, что одна кандела равна силе света в заданном направлении от источника, который излучает монохроматическое излучение с частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет $(1/683) \text{ Вт/ср}$.

Все остальные величины являются производными величинами и могут быть выражены через основные величины в соответствии с уравнениями физики. Размерности производных величин записываются в виде произведений степеней размерностей основных величин с помощью уравнений, которые связывают производные величины с основными.

Существуют величины, для которых в определяющем уравнении все показатели размерности равны нулю. Это имеет место, например, для любой величины, определяемой как отношение двух величин одного и того же рода, и они являются просто числами. Соответствующей единицей таких величин принято называть число «один», обозначаемое как 1. Но эта единица «1» или название «один» практически никогда не записывается в явной форме. Такие величины ещё называют счётными.

Среди величин, имеющих единицу «один», наиболее известными и употребляемыми на практике являются радиан и стерadian.

Радииан

Плоские углы принято измерять **отношением** длины дуги окружности радиусом произвольной величины, заключённой между двумя радиусами, начинающимися в вершине плоского угла, к длине радиуса. **Радииан**, обозначение **рад (rad)** – является единицей плоского угла. Один радиан – плоский угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна длине радиуса. Это также – единица измерения фазового угла. Для периодических явлений фазовый угол увеличивается на 2π рад за один период. Радииан раньше считался дополнительной единицей СИ, но эта категория была отменена в 1995 г.

Стерадииан

Телесные углы принято измерять отношением площади сферической поверхности с радиусом произвольной величины, ограниченной конической поверхностью с вершиной в центре сферы, совпадающей с вершиной рассматриваемого телесного угла, к площади квадрата со стороной, равной длине указанной выше сферы.

Стерадииан является единицей телесного угла. Один **стерадииан**, обозначение **ср (sr)** – телесный угол, ограниченный конической поверхностью с вершиной в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной длине радиуса указанной сферы. Как и радиан, стерадииан ранее считался дополнительной единицей СИ.

На размерность физических величин, кроме произвола в выборе основных физических величин и произвола в выборе их масштаба (размера), влияет произвол в выборе формул и коэффициентов пропорциональности в формулах, которыми вводятся эти производные единицы. Например, единица силы обычно устанавливается на основе второго закона Ньютона $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. В данном случае размерность силы есть:

$$[F] = [m] \cdot [a] = M \cdot L \cdot T^{-2}. \quad (1.2.13)$$

Если же в качестве формулы для определения единицы силы выбрать закон всемирного тяготения, полагая в нём коэффициент пропорциональности равным единице $F = m_1 \cdot m_2 / r^2$, то размерность силы будет иная:

$$[F] = M^2 \cdot L^{-2}. \quad (1.2.14)$$

Во втором законе Ньютона в данном случае, разумеется, появится размерный коэффициент k , делающий размерности величин слева и справа от знака равенства одинаковыми $\vec{F} = k \cdot m\vec{a}$:

$$M^2 \cdot L^{-2} = [k] \cdot M \cdot L \cdot T^{-2}, \quad (1.2.15)$$

то есть

$$[k] = M^2 \cdot L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot L^{-1} \cdot T^2 = M \cdot L^{-3} \cdot T^2. \quad (1.2.16)$$

Видим, что размерность физической величины зависит не только от выбора основных физических величин, но и от выбора формул, выбранных для определения производных физических величин через основные.

Отметим, что кроме указанной выше основной системы единиц, рекомендованной к использованию в учебной и научной литературе, широко используется Гауссова система единиц СГС, построенная на основных единицах сантиметр, грамм, секунда.

Поскольку кроме масштабов основных механических единиц в СГС, по сравнению с СИ, ничего не меняется, то все формулы и уравнения механики одинаково выглядят в обеих системах единиц.

В электродинамике, однако, всё меняется. В СИ все электродинамические величины определяются с использованием основной единицы силы электрического тока – ампера. В СГС все электродинамические величины определяются на основе уже упомянутых механических единиц и, следовательно, многие формулы электродинамики в СГС будут отличаться от аналогичных формул в СИ наличием или отсутствием размерных коэффициентов.

Глава 2. КИНЕМАТИКА

2.1. Основные понятия и определения

В механике изучается простейшая форма движения материи – механическое движение, под которым понимают перемещение тел друг относительно друга или перемещение относительно друг друга частей одного тела.

Принято разделять механику на три части: **кинематику**, **динамику** и **статику**.

В кинематике рассматриваются способы описания перемещения тел независимо от причин этого перемещения. В статике рассматриваются условия и закономерности равновесия тел или различных частей одного тела. В динамике изучаются причины возникновения и закономерности движения тел или различных частей одного тела друг относительно друга.

Для описания физических явлений, в том числе и механического движения, используются *идеализации* и *абстракции*, позволяющие строить физические модели этих явлений, и, используя для их описания имеющийся математический аппарат, получать количественные формулировки рассматриваемых явлений. Соответствие моделей реальности оценивается после сравнения результатов, получаемых на основе этих моделей, с результатами опыта. Следует помнить, что физические модели и абстракции являются упрощённым и приближённым описанием реальных физических явлений, и поэтому полученные с их помощью результаты могут использоваться лишь в границах применимости этих абстракций и моделей.

К наиболее важным и широко используемым относятся следующие абстракции: а) *материальная точка*; б) *абсолютно твёрдое тело*; в) *абсолютно упругое тело*.

Материальной точкой называют любое тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи. Следует понимать, что одно и то же тело в одних ситуациях может считаться материальной точкой, а в других – нет. В качестве примера приведём задачу о движении какой-либо планеты в Солнечной системе. В данном случае размерами любой планеты Солнечной системы (например, Земли – $6,37 \cdot 10^6$ м) и самого Солнца (порядка $7 \cdot 10^8$ м) можно пренебречь по сравнению с расстояниями между данной планетой и Солнцем (расстояние между Солнцем и Землёй около $1,5 \cdot 10^{11}$ м). Однако при изучении движения различных тел по поверхности Земли или на околоземных орбитах размерами Земли, разумеется, уже

пренебрегать нельзя. Любое тело можно поделить (мысленно) на достаточно малые части, так что его (тело) считать совокупностью, или, как говорят в физике, системой материальных точек.

Под **абсолютно твёрдым телом** в физике понимают тело, расстояние между любыми точками которого остаётся неизменным при произвольных перемещениях и воздействиях на него других тел, так что форма и размеры абсолютно твёрдого тела неизменны.

Абсолютно упругим телом в физике называют тело, которое полностью восстанавливает размеры и форму после любых его деформаций.

2.2. Кинематика материальной точки

Простейшим объектом для изучения механического движения является материальная точка. Закономерности движения этого объекта можно, однако, легко обобщить и перенести на многие тела, которые уже нельзя считать материальными точками, поскольку большинство тел можно рассматривать как совокупность материальных точек. Как это делается, станет ясно в процессе изучения соответствующих вопросов.

В кинематике, как отмечалось, рассматриваются способы описания перемещения тел независимо от причин этого перемещения.

Положения тел в пространстве определяется относительно других тел. В частности, при рассмотрении движения самолёта или автомобиля мы всегда интересуемся их положением по отношению к тем или иным географическим точкам на Земле. Потому для описания движения интересующего нас объекта выбирают некоторое тело, относительно которого определяют положение этого объекта. Это тело называют **телом отсчёта**.

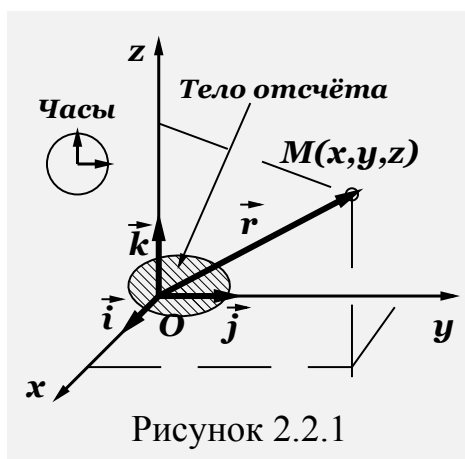
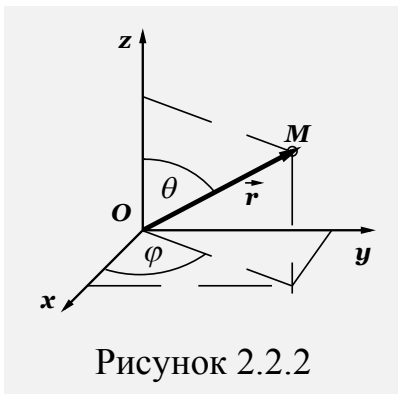


Рисунок 2.2.1

Абсолютно твёрдое тело, с которым жёстко связана некоторая система координат и средство измерения временных промежутков (часы), называется **системой отсчёта**.

В качестве примера на рисунке 2.2.1 изображена система отсчёта, в которой к телу отсчёта привязана декартова прямоугольная система координат. В приведённой системе отсчёта в фиксированный момент времени некоторая материальная точка M имеет координаты x , y и z , что обозначено, как обычно, $M(x, y, z)$. Вектор, начало которого совпадает с началом выбранной системы координат, а ко-

нец – с положением рассматриваемой материальной точки в данный момент времени, называют **радиус-вектором** $\vec{r}(x, y, z, t)$. Величины x , y и z – координаты точки M – являются также проекциями **радиус-вектора** на соответствующие координатные оси. Для упрощения рисунков тело отсчёта и часы, как правило, не изображают. Более того, часто с этой же целью не изображают и систему координат. Отметим, что выбор декартовой прямоугольной системы координат не единственный и указан здесь для определённости. В качестве системы координат возможен выбор и другой системы координат, например сферической или цилиндрической. При этом выбор конкретной системы координат определяется, как правило, симметрией рассматриваемой задачи.



В сферической системе координат положение точки в пространстве задаётся тремя числами r, θ, φ (сферическими координатами точки), смысл которых поясняется на рисунке 2.2.2.

Связь сферических координат точки r, θ, φ с декартовыми координатами этой же точки x, y, z определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} z &= r \cdot \cos \theta, \\ x &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\ y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Линия, которую описывает в пространстве материальная точка (и конец её радиус-вектора), называется **траекторией** этой точки. Траектория аналитически определяется одним векторным уравнением, не зависящим от выбора системы координат:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.2.2)$$

Кроме независимости от выбора системы координат, векторная форма записи уравнения траектории имеет ещё и то преимущество, что в этой форме уравнение траектории имеет очень краткий вид.

Как известно, радиус-вектор $\vec{r}(t)$ в декартовой прямоугольной системе координат можно представить в виде линейной комбинации:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}, \quad (2.2.3)$$

откуда следует, что уравнение (2.2.2) эквивалентно трём скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Перемещение точки в пространстве за промежуток времени от t_1 до t_2 задаётся **вектором перемещения** $\Delta \vec{r}_{12}$, который определяется равенством:

$$\Delta \vec{r}_{12} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (2.2.5)$$

Часто индексы у вектора перемещения опускают, то есть пишут просто $\Delta \vec{r}$. Это тем более оправдано, что начальное и конечное значение времени часто умышленно не фиксируется, чтобы подчеркнуть независимость результатов от выбора начала отсчёта. При этом начальный момент времени обозначают t , промежуток времени – Δt , а конечный момент времени – $t + \Delta t$. С учётом сказанного для вектора перемещения имеем:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \quad (2.2.6)$$

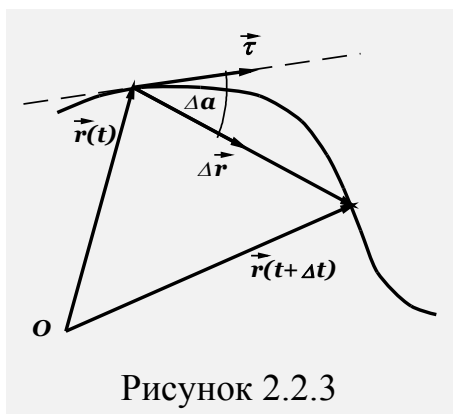


Рисунок 2.2.3

Графическое изображение траектории материальной точки и её вектора перемещения показано на рисунке 2.2.3. Из определения (2.2.5)–(2.2.6) следует, что вектор перемещения материальной точки находится на прямой, соединяющей положения материальной точки в начальный момент времени t и в конечный момент времени $t + \Delta t$, как это показано на рисунке 2.2.3. Длина траектории между начальным и конечным положениями материальной точки называется **длиной пути** (коротко – **путём**), который точка прошла за рассматриваемый промежуток времени, и обозначается Δs . Легко заметить, что длина пути Δs и длина вектора перемещения $\Delta r = |\Delta \vec{r}|$ не равны между собой, то есть $\Delta s \neq \Delta r$.

Вектором средней скорости (кратко – **средней скоростью**) материальной точки за промежуток времени от времени t до $t + \Delta t$ называется вектор $\langle \vec{v} \rangle$, равный произведению скаляра $1 / \Delta t$ на вектор перемещения этой материальной точки за указанный промежуток времени (такое произведение называют *отношением* вектора перемещения материальной точки за указанный промежуток времени к этому промежутку времени), то есть:

$$\langle \vec{v} \rangle = (1 / \Delta t) \cdot \Delta \vec{r} \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.2.7)$$

Из определения следует, что направление вектора средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения за рассматриваемый промежуток времени Δt , а также то, что измеряется средняя скорость в СИ в м/с.

Вектором мгновенной скорости $\vec{v}(t)$ в момент времени t (кратко – **вектором скорости** или просто **скоростью**) называется предел вектора средней скорости $\langle \vec{v} \rangle$ при условии стремления промежутка времени к нулю, то есть вектор, определяемый выражением:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.2.8)$$

Для вектора скорости, как и для любого другого вектора, справедлива запись $\vec{v}(t) = v \cdot \vec{e}_v$, где v – модуль вектора скорости, а $\vec{e}_v$ – орт вектора $\vec{v}$.

С учётом формулы (2.2.3) в декартовой прямоугольной системе координат вектор скорости можно представить в виде:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} (x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}) = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}, \quad (2.2.9)$$

где v_x , v_y и v_z – проекции вектора скорости на соответствующие координатные оси, вычисляемые в соответствии с (2.2.9) по формулам:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.2.10)$$

Учитывая взаимную ортогональность координатных осей в выбранной системе координат, длину вектора скорости можно определить при помощи теоремы Пифагора:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.2.11)$$

Для решения вопроса о направлении вектора $\vec{v}$ обратимся к определению вектора скорости (2.2.8), из которого следует:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}| \cdot \vec{e}_{\Delta r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{e}_{\Delta r} = v \cdot \vec{\tau} = v \cdot \vec{e}_v, \quad (2.2.12)$$

где $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta \vec{r}| / \Delta t$ – модуль вектора скорости, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{e}_{\Delta r} = \vec{e}_v = \vec{\tau}$ – орт касательной к траектории в рассматриваемой точке (то есть в точке, где находится конец радиус-вектора в момент времени t).

Как видно из рисунка 2.2.3, при $\Delta t \rightarrow 0$ угол $\Delta\alpha$ между касательной и секущей, на которой расположен вектор $\Delta\vec{r}$, стремится к нулю, то есть секущая стремится занять положение касательной. Это означает, что вектор скорости $\vec{v}(t)$ и его орт $\vec{e}_v = \vec{\tau}$ находятся на касательной к траектории в указанной точке (см. рисунок 2.2.4).

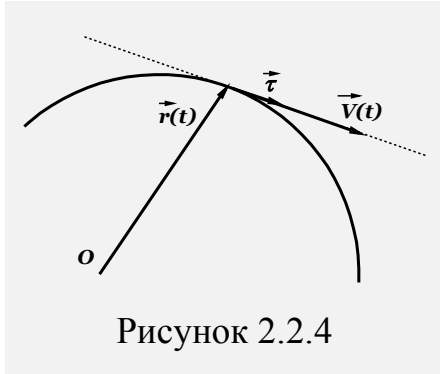


Рисунок 2.2.4

Напомним, что длина пути Δs и длина вектора перемещения $|\Delta\vec{r}|$ не равны между собой. Однако из геометрических соображений легко убедиться, что предел отношения этих величин при $\Delta t \rightarrow 0$ равен единице ($\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta\vec{r}| / \Delta s = 1$), то есть эти величины при $\Delta t \rightarrow 0$ являются эквивалентными и, следова-

тельно, под знаком соответствующего предела взаимозаменяемы.

На практике часто используется понятие **путевой** скорости. Сначала, как и ранее, вводят понятие средней путевой скорости $\langle v \rangle$ за промежуток времени от t до $t + \Delta t$: $\langle v \rangle = \Delta s / \Delta t$. Совершая предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$, приходим к понятию мгновенной **путевой скорости** $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s / \Delta t = ds / dt$. С учётом сказанного выше об эквивалентности $|\Delta\vec{r}|$ и Δs при $\Delta t \rightarrow 0$, для путевой скорости имеем $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta\vec{r}| / \Delta t = dr / dt$.

Характер изменения вектора скорости определяет другой вектор – вектор ускорения.

Сначала определяют **вектор среднего ускорения** $\langle \vec{a} \rangle$ за промежуток времени от t до $t + \Delta t$:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad (2.2.13)$$

где $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ – вектор приращения скорости за рассматриваемый промежуток времени Δt .

Из определения следует, что направление вектора среднего ускорения совпадает с направлением вектора $\Delta \vec{v}$ за рассматриваемый промежуток времени Δt , а также то, что измеряется среднее ускорение в СИ в м/с^2 .

Вектор мгновенного ускорения (коротко – **вектор ускорения**) в момент времени t определяется как предел вектора среднего ускорения $\langle \vec{a} \rangle$ за рассматриваемый промежуток времени Δt при условии стремления промежутка времени к нулю, то есть вектор, определяемый выражением:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.2.14)$$

В декартовой прямоугольной системе координат вектор ускорения можно представить в виде:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \cdot \vec{k} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \quad (2.2.15)$$

где a_x , a_y и a_z – проекции вектора ускорения на соответствующие координатные оси, вычисляемые в соответствии с (2.2.10) и с (2.2.15) по формулам:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}. \quad (2.2.16)$$

Для длины вектора ускорения получаем:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.2.17)$$

Выясним, как располагается вектор ускорения по отношению к траектории движения материальной точки.

Для этого воспользуемся равенством для вектора скорости $\vec{v}(t) = v \cdot \vec{\tau}$ и после подстановки этого соотношения в (2.2.14) получим:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (2.2.18)$$

где введены (пока чисто формально) обозначения:

$$\vec{a}_\tau = (dv / dt) \cdot \vec{\tau}, \quad (2.2.19)$$

и

$$\vec{a}_n = v \cdot (d\vec{\tau} / dt). \quad (2.2.20)$$

Видим, что в формуле (2.2.18) ускорение представлено в виде суммы двух векторов $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$, расположение которых по отношению друг к другу и к траектории мы выясним далее и поймём, почему эти векторы обозначены именно таким образом.

Начнём с вектора $\vec{a}_\tau = (dv / dt) \cdot \vec{\tau}$ (формула (2.2.19)), который называется **тангенциальным ускорением** и направлен вдоль касательной к траектории в рассматриваемой точке. При этом из определения данного вектора видно, что $\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{\tau}$, если $dv / dt > 0$, и $\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{\tau}$, если $dv / dt < 0$. А поскольку $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{\tau}$, то вектор $\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v}$, если скорость по модулю возрастает

(ускоренное движение, $dv/dt > 0$), и $\vec{a}_\tau \uparrow \downarrow \vec{v}$, если скорость по модулю убывает (замедленное движение, $dv/dt < 0$).

Второй вектор $\vec{a}_n = v \cdot (d\vec{\tau}/dt)$ (формула (2.2.20)) называется **нормальным ускорением**, и его направление мы сейчас выясним. Для этого нужно понять, как направлен вектор $d\vec{\tau}/dt$.

Будем исходить из определения:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t}. \quad (2.2.21)$$

На рисунке 2.2.5 изображена часть траектории и отмечены положения ортов касательных в точках, где находится исследуемая материальная точка в моменты времени t и $t + \Delta t$. Реальная траектория заменена частью некоторой окружности, которая называется соприкасающейся с данной траекторией.

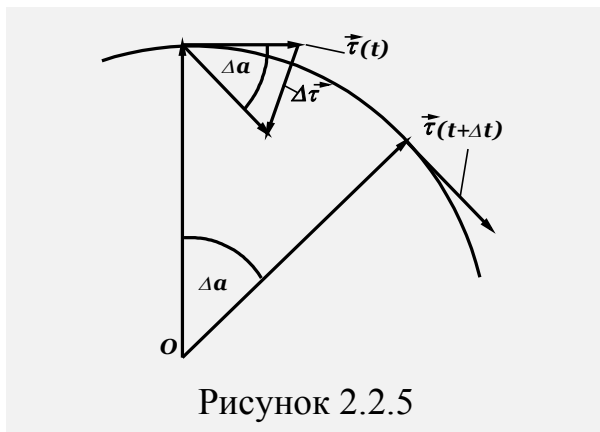


Рисунок 2.2.5

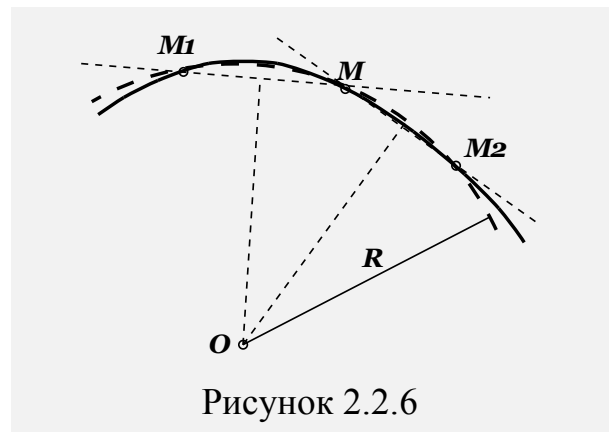


Рисунок 2.2.6

Для определения соприкасающейся окружности в некоторой точке траектории M выбирают на рассматриваемой кривой с обеих сторон от точки M ещё две точки M_1 и M_2 и по известному из элементарной математики правилу строят окружность, проходящую через данные три точки, как это показано на рисунке 2.2.6. Далее рассматривают предел, когда точки M_1 и M_2 неограниченно приближаются к точке M . В итоге окружность, построенная указанным выше способом, стремится в пределе занять положение некоторой окружности, называемой соприкасающейся окружностью, в рассматриваемой точке M кривой, а плоскость, в которой лежит соприкасающаяся окружность, называется соприкасающейся плоскостью (тоже в рассматриваемой точке M кривой). Радиус R соприкасающейся окружности в данной точке кривой называется **радиусом кривизны**, а её центр – **центром кривизны** этой кривой в рассматриваемой точке. Величина $k = 1/R$ называется **кривизной** кривой в рассматриваемой точке.

Кривизна и радиус кривизны для всех линий, кроме двух, изменяются при переходе от одной точки к другой. К двум исключениям относятся прямая линия (кривизна нулевая, $R = \infty$) и окружность (радиус постоянен, $R = const$; кривизна тоже постоянна, $k = 1 / R = const$). Для последней линии справедливо также утверждение о том, что соприкасающиеся окружности для всех точек данной окружности совпадают с этой окружностью.

Теперь вновь возвратимся к вопросу о векторе $d\vec{\tau} / dt$ и преобразуем выражение (2.2.21):

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.2.22)$$

В выражении (2.2.19) использована определённая ранее длина дуги траектории Δs , проходимой материальной точкой за время Δt , а также использован тот факт, что из условия $\Delta t \rightarrow 0$ следует условие $\Delta s \rightarrow 0$. Кроме того, учтено, что Δs и $|\Delta \vec{r}|$ – эквивалентные бесконечно малые величины при $\Delta t \rightarrow 0$, поэтому можно записать $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta s / \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (|\Delta \vec{r}| / \Delta t) = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \vec{r} / \Delta t) \right| = |\vec{v}| = v$.

Рассмотрим более подробно в (2.2.22) величину $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} (\Delta \vec{\tau} / \Delta s)$. Это новый вектор, причём перпендикулярный касательной к траектории в рассматриваемой точке. Действительно, орт $\vec{\tau}$ является постоянным по длине вектором ($|\vec{\tau}| = 1$), а для любого постоянного по длине вектора $\vec{c}$ ($|\vec{c}| = c = const$), зависящего по направлению от некоторого параметра или переменной (неважно, какой), например, от s (s – некоторый скаляр, в частности, это может быть длина дуги, время, путь и т. п.), имеет место утверждение: $(d\vec{c} / ds) \perp \vec{c}$, которое вытекает из тождества $\vec{c} \cdot \vec{c} = c^2 = const$. Дифференцирование последнего равенства по параметру s даёт:

$$\frac{d}{ds} (\vec{c} \cdot \vec{c}) = 2\vec{c} \cdot \frac{d\vec{c}}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \cdot \frac{d\vec{c}}{ds} = 0. \quad (2.2.23)$$

Равенство нулю скалярного произведения двух векторов означает, что они взаимно перпендикулярны, то есть $\vec{c} \perp (d\vec{c} / ds)$. Полученное утверждение применимо, разумеется, и к постоянному по длине орту $\vec{\tau}$, то есть $\vec{\tau} \perp (d\vec{\tau} / ds)$.

Из определения производной следует:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s} \vec{e}_{\Delta \tau} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \vec{e}_{\Delta \tau} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{(\Delta \alpha)l}{(\Delta \alpha)R} \cdot \vec{n} = \frac{1}{R} \cdot \vec{n}. \quad (2.2.24)$$

В (2.2.24) учтено, что длина дуги окружности равна произведению центрального угла, на который опирается эта дуга окружности, на радиус окружности. То есть, как это видно из рисунке 2.2.5, $\Delta \tau = (\Delta \alpha) \cdot l$ и $\Delta s = (\Delta \alpha) \cdot R$. Кроме того, введено обозначение $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \vec{e}_{\Delta \tau} = \vec{n}$ для орта нормали к касательной (а также и к её орту $\vec{\tau}$) в рассматриваемой точке траектории. С учётом всего сказанного имеем для искомого вектора $d\vec{\tau} / ds$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \vec{n}, \quad (2.2.25)$$

а для вектора $\vec{a}_n = v \cdot (d\vec{\tau} / dt)$ с учётом (2.2.22) и (2.2.25) в итоге имеем:

$$\vec{a}_n = v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v^2 \cdot \frac{\vec{n}}{R} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} = a_n \cdot \vec{n}, \quad (2.2.26)$$

где $a_n = v^2 / R$ – модуль вектора $\vec{a}_n$, называемого нормальным ускорением, $\vec{n}$ (как упомянуто выше) – орт нормали к касательной (а также и к её орту $\vec{\tau}$) в рассматриваемой точке траектории. Отметим, что орт $\vec{n}$ всегда направлен к центру кривизны.

Таким образом, окончательно для вектора ускорения $\vec{a}$ имеем:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}. \quad (2.2.27)$$

Учитывая ортогональность векторов $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$, для длины вектора ускорения $\vec{a}$ по теореме Пифагора имеем:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (2.2.28)$$

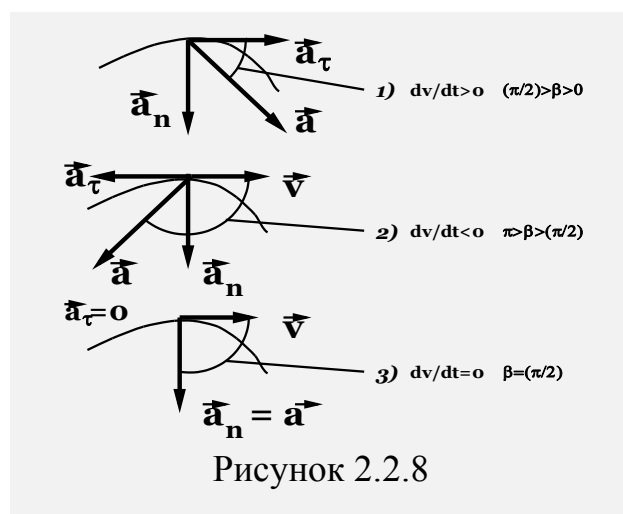
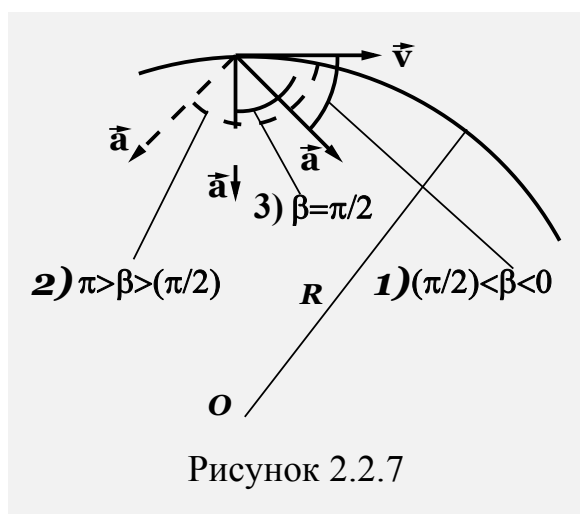
О направлении вектора ускорения $\vec{a}$ можно сказать следующее. Этот вектор может иметь произвольное направление по отношению к траектории и вектору скорости $\vec{v}$, но угол β между векторами $\vec{v}$ и $\vec{a}$ всегда имеет значение в диапазоне $0 \leq \beta \leq \pi$. Это следует из того факта, что вектор

$\vec{a}_n$ всегда направлен к центру кривизны, а вектор $\vec{a}_\tau$ либо одинаково направлен с ортом $\vec{\tau}$ ($(dv/dt) > 0$), либо имеет противоположное ему направление ($(dv/dt) < 0$).

В итоге делаем следующие выводы:

- если движение ускоренное ($(dv/dt) > 0$), угол β между вектором скорости $\vec{v}$ и вектором ускорения $\vec{a}$ острый (ситуация 1 на рисунках 2.2.7 и 2.2.8);
- если движение замедленное ($(dv/dt) < 0$), угол β между вектором скорости $\vec{v}$ и вектором ускорения $\vec{a}$ тупой (ситуация 2 на рисунках 2.2.7 и 2.2.8);
- если движение осуществляется с постоянным по модулю вектором скорости ($(dv/dt) = 0$), то тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau = \vec{0}$, полное ускорение равно нормальному ускорению $\vec{a} = \vec{a}_n$ и угол β между вектором скорости $\vec{v}$ и вектором ускорения $\vec{a}$ прямой, то есть $\vec{v} \perp \vec{a}$ (ситуация 3 на рисунках 2.2.7 и 2.2.8).

Расположение векторов нормального ускорения и тангенциального ускорения в указанных ситуациях изображено на рисунке 2.2.8.



2.3. Кинематика вращательного движения

Как показано далее в п. 4.4, произвольное движение твёрдого тела можно представить в виде наложения двух простейших его (твёрдого тела) движений: 1) поступательного движения твёрдого тела; 2) вращательного движения твёрдого тела вокруг мгновенной (изменяющей своё положение в пространстве) оси.

При поступательном движении все точки этого тела совершают движение по одинаковым траекториям, и поэтому такое движение можно свести к изучению движения одной точки, что уже сделано.

Вращательным движением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называют такое его движение, при котором все точки этого тела движутся по окружностям (различным), центры которых расположены на одной неподвижной прямой линии, называемой осью вращения l . Отметим, что ось вращения перпендикулярна плоскостям, в которых расположены траектории движения (окружности) указанных выше точек (см. рисунок 2.3.1).

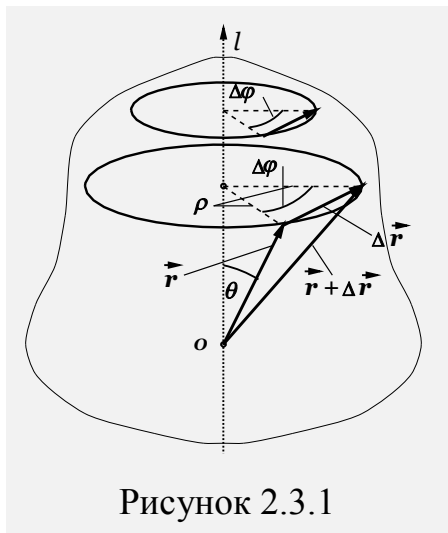


Рисунок 2.3.1

Легко заметить, что одинаковым для всех точек твёрдого тела является угол поворота $\Delta\varphi$ прямых, проходящих через центр окружностей вращения и рассматриваемые материальные точки, за некоторый промежуток времени Δt (рисунок 2.3.2). Желательно ввести такие переменные для описания вращательного движения, которые были бы применимы ко всем точкам сразу и позволили бы найти кинематические характеристики любых точек при вращательном движении твёрдого тела. Исходить при этом нужно из того, что все кинематические характеристики материальных точек можно найти на основе векторов перемещения $\Delta\vec{r}$ интересующих нас точек. Отметим, что векторы перемещения $\Delta\vec{r}$ рассматриваемых точек расположены в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

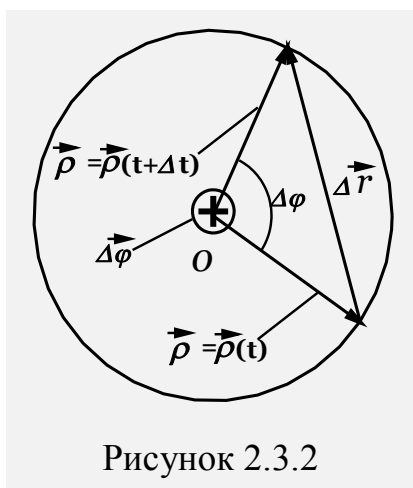


Рисунок 2.3.2

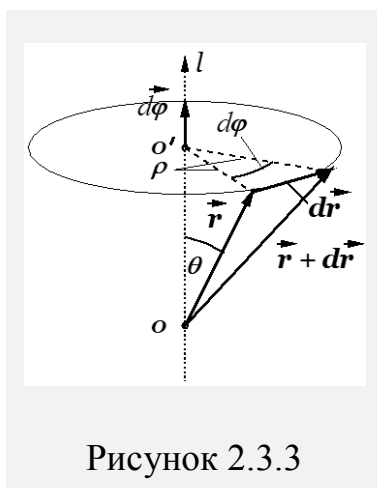


Рисунок 2.3.3

Корректное описание вращательного движения твёрдого тела осуществляется путём ввода вектора **элементарного угла поворота** $d\vec{\varphi}$ (коротко — **элементарного поворота**). Определим этот вектор следующим образом.

Длину вектора $d\vec{\varphi}$ сделаем равной $d\varphi$ и направим его вдоль оси вращения l так, чтобы с конца этого вектора вращение рассмат-

риваемой точки наблюдалось в заданном направлении (против часовой стрелки), как это показано на рисунке 2.3.3. Начало отсчёта выберем в некоторой произвольной точке O на оси вращения. Вектор элементарного перемещения $d\vec{r}$ получим, используя векторное произведение вектора элементарного поворота $d\vec{\varphi}$ на радиус-вектор рассматриваемой точки $\vec{r}$:

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}, \quad (2.3.1)$$

где, как обычно, знаком « $\times$ » обозначено векторное произведение векторов $d\vec{\varphi}$ и $\vec{r}$ ¹.

Для длины вектора элементарного перемещения $dr = |d\vec{\varphi} \times \vec{r}|$, найденного при помощи определения (2.3.1), как это следует из определения векторного произведения двух векторов, имеем:

$$dr = |d\vec{\varphi} \times \vec{r}| = d\varphi \cdot r \sin \theta = |r \sin \theta = \rho| = \rho d\varphi = ds. \quad (2.3.2)$$

Видим, что длина вектора элементарного перемещения, как это и должно быть, совпадает с длиной дуги элементарного угла поворота $d\varphi$. Кроме того, определяемый выражением (2.3.1) вектор $d\vec{r}$, вновь, как и должно быть, направлен по касательной к траектории в рассматриваемой точке (рисунок 2.3.3).

Введённый нами элементарный угол поворота $d\vec{\varphi}$ позволяет найти элементарные линейные перемещения любых материальных точек вращающегося твёрдого тела. Более того, этот вектор позволяет ввести и другие векторные характеристики вращательного движения, а именно векторы угловой скорости и углового ускорения. Отметим также, что введённый выражением (2.3.1) вектор $d\vec{\varphi}$ обладает свойством линейности (по отношению к операции сложения векторов). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим

¹ Можно аналогичным образом ввести вектор конечного угла поворота $\Delta\vec{\varphi}$ с длиной, равной углу поворота $\Delta\varphi$ и направленному вдоль оси вращения таким образом, чтобы с конца этого вектора вращение рассматриваемого тела наблюдалось против часовой стрелки. Но описать вращательное движение на основе этого вектора не удаётся. Дело в том, что вектор $\Delta\vec{r}' = \Delta\vec{\varphi} \times \vec{\rho}$, полученный через векторное произведение радиус-вектора $\vec{\rho}$ (рисунок 2.3.2) и вектора конечного угла поворота $\Delta\vec{\varphi}$, во-первых, имеет направление, не совпадающее с направлением истинного вектора перемещения $\Delta\vec{r}$, и, во-вторых, имеет длину $\Delta r' = \Delta\varphi \cdot \rho$, не равную длине вектора истинного вектора перемещения $\Delta r = 2\rho \sin(\Delta\varphi / 2)$, направленного вдоль хорды окружности, соединяющей начальную и конечную точки (см. рисунок 2.3.2).

элементарный поворот, который является линейной комбинацией двух элементарных поворотов $d\vec{\varphi}_1$ и $d\vec{\varphi}_2$, совершённых твёрдым телом (возможно, вокруг разных осей, проходящих через неподвижную точку O). В этом случае произвольная точка твёрдого тела имеет результирующий элементарный вектор перемещения $d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2$, где $d\vec{r}_1$ и $d\vec{r}_2$ – элементарные перемещения при указанных выше поворотах:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = d\vec{\varphi}_1 \times \vec{r} + d\vec{\varphi}_2 \times \vec{r} = (d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2) \times \vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}, \quad (2.3.3)$$

откуда следует, что и результирующий вектор угла поворота $d\vec{\varphi}$ равен сумме элементарных углов поворота $d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2$.

Это означает, что для каждой точки рассматриваемого твёрдого тела результирующий элементарный поворот вокруг оси, направленной вдоль вектора $d\vec{\varphi}$ (и проходящей через точку O), будет эквивалентен двум последовательным элементарным поворотам, $d\vec{\varphi}_1$ и $d\vec{\varphi}_2$, совершённых твёрдым телом вокруг осей, направленных вдоль этих векторов (и проходящих через точку O).

Введённый элементарный вектор поворота $d\vec{\varphi}$ позволяет определить другие векторные характеристики вращательного движения.

Из формулы (2.3.1) следует:

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt = \underbrace{\left(\frac{d\vec{\varphi}}{dt} dt \right)}_{=d\vec{\varphi}} \times \vec{r} = \left(\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} \right) \cdot dt \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} \quad (2.3.4)$$

и, с учётом определения вектора скорости материальной точки, имеем:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.3.5)$$

В формуле (2.3.5) введена новая величина – **вектор угловой скорости** $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d(\varphi \vec{e}_l)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e}_l = \omega \cdot \vec{e}_l. \quad (2.3.6)$$

Из последней формулы следует, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен также вдоль оси вращения и совпадает по направлению с этой осью и вектором элементарного поворота $d\vec{\varphi} = d\varphi \vec{e}_l$.

В общем случае вектор угловой скорости зависит от времени и изменение этого вектора во времени описывает производная по времени от вектора угловой скорости ($d\vec{\omega} / dt$):

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\omega \vec{e}_l)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_l = \pm \beta \vec{e}_l, \quad (2.3.7)$$

где использовано обозначение модуля вектора $|\vec{\beta}| = |d\vec{\omega}/dt| = \beta$.

Видим, что новый вектор (**вектор углового ускорения**) $\vec{\beta}$ направлен вдоль оси вращения и либо совпадает с нею по направлению ($d\omega/dt > 0$), либо имеет противоположное с нею направление ($d\omega/dt < 0$).

Теперь обратимся к обсуждению связи между угловыми и линейными кинематическими характеристиками.

Одна из формул, связывающих эти величины, уже имеется – это формула (2.3.5). Из неё следует, что вектор скорости (линейной) любой материальной точки определяется вектором угловой скорости $\vec{\omega}$ вращательного движения твёрдого тела и радиус-вектором рассматриваемой материальной точки $\vec{r}$. Из определения векторного произведения векторов следует, что векторы $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ и $\vec{v}$ образуют *правую тройку* векторов (в указанном порядке), а их взаимное расположение показано на рисунке 2.3.4.

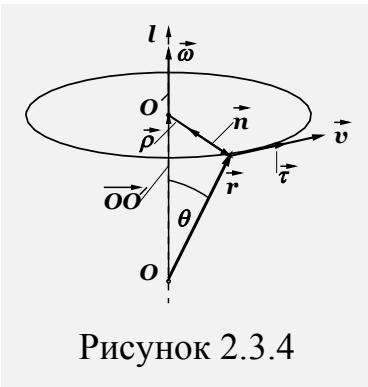


Рисунок 2.3.4

В формуле (2.3.5) можно сделать замену радиус-вектора $\vec{r}$ рассматриваемой материальной точки на вспомогательный вектор $\vec{\rho}$, начало которого совпадает с центром окружности, по которой совершает своё движение рассматриваемая материальная точка, а конец совпадает с положением этой материальной точки. Этот вектор $\vec{\rho}$ имеет, таким образом, длину, равную радиусу окружности (то есть расстоянию от данной материальной точки до оси вращения).

Действительно, видим, что для любой материальной точки (см. рисунок 2.3.4) имеет место равенство:

$$\vec{r} = \overline{OO'} + \vec{\rho}, \quad (2.3.8)$$

причём всегда справедливы соотношения $\overline{OO'} \parallel \vec{\omega}$ и $\vec{\rho} \perp \vec{\omega}$.

Следовательно, можем преобразовать формулу (2.3.5):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times (\overline{OO'} + \vec{\rho}) = \vec{\omega} \times \overline{OO'} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{0} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad (2.3.9)$$

откуда следует, что длины перемножаемых векторов связаны простым и хорошо известным из школьного курса физики соотношением для вращательного движения материальной точки:

$$v = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega} \times \vec{\rho}| = \omega \cdot \rho \cdot \sin(\pi/2) = \omega \cdot \rho. \quad (2.3.10)$$

Теперь посмотрим, как связано ускорение произвольной материальной точки с другими кинематическими характеристиками. Будем исходить из определения вектора ускорения и учтём формулы (2.3.5) и (2.3.8):

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \\ &= \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\beta} \times \vec{r} + [\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})] = \\ &= \vec{\beta} \times \vec{r} + (-\vec{r})\omega^2 = \beta\rho\vec{\tau} + \rho\omega^2\vec{n} .\end{aligned}\quad (2.3.11)$$

В процессе преобразований учтено, что $\vec{\beta} \times \vec{r} = \vec{\beta} \times \vec{\rho} = \beta\rho\vec{\tau}$ (см. пояснения к (2.3.9) и рисунок 2.3.4), векторное тождество $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ и равенство $\vec{\rho} = -\rho\vec{n}$ (см. рисунок 2.3.4).

Видим, что вектор линейного ускорения $\vec{a}$ можно представить в виде:

$$\vec{a} = \beta\rho\vec{\tau} + \rho\omega^2\vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (2.3.12)$$

где введены обозначения $\vec{a}_\tau = \beta\rho\vec{\tau}$, $\vec{a}_n = \rho\omega^2\vec{n}$.

Из полученного выражения следует, что, как и ранее (см. формулу (2.2.27)), вектор ускорения можно представить в виде суммы двух взаимно перпендикулярных векторов $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$, которые направлены, соответственно, по касательной и нормали к траектории в рассматриваемой точке. В данном случае траектория – окружность, и поэтому радиус кривизны постоянен и равен ρ .

Если формулу (2.3.12) немного преобразовать, то получим выражение:

$$\vec{a} = \beta\rho\vec{\tau} + \rho\omega^2\vec{n} = \rho\frac{d\omega}{dt}\vec{\tau} + \rho\frac{v^2}{\rho^2}\vec{n} = \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right)\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}, \quad (2.3.13)$$

полностью совпадающее с полученной ранее формулой (2.2.27) с учётом того, что в (2.3.13) радиус окружности обозначен ρ .

Из формулы (2.3.12) с учётом взаимной перпендикулярности векторов нормального и тангенциального ускорений находим:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \rho\sqrt{\beta^2 + \omega^4}. \quad (2.3.14)$$

Эта формула полезна тем, что позволяет вычислить модуль вектора ускорения (линейного) через угловые кинематические характеристики.

Глава 3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

3.1. Закон инерции – первый закон Ньютона

Как отмечалось в разделе 2, в динамике изучаются причины возникновения и закономерности движения тел друг относительно друга или различных частей одного тела.

Прежде чем приступить к формулировкам основных закономерностей этого раздела механики, отметим два главных момента, которые лежат в основе динамики.

Первое. Практический опыт, наблюдения и научные исследования показывают, что во многих случаях удаётся установить источник происходящих в мире изменений, то есть установить явление, повлёкшее за собой другое явление. Первое из них (событий) называли *причиной*, второе – *следствием*. Один из основных физических (и философских) принципов – **принцип причинности** в общем виде утверждает, что *причина всегда предшествует следствию*.

В классической физике это утверждение означает, что любое событие, произошедшее в некоторый момент времени, может повлиять на событие, произошедшее в последующий момент времени (но не наоборот!) только при условии наличия влияния первого из событий (причины) на второе (следствие). Причинности принцип исключает влияние данного события на все уже прошедшие события («будущее не влияет на прошлое», «событие-причина предшествует по времени событию-следствию»). Принцип причинности утверждает также отсутствие взаимного влияния таких событий, применительно к которым понятия «раньше» и «позже» не имеют смысла. Например, в специальной теории относительности более раннее для одного наблюдателя событие представляется другому наблюдателю более поздним. Такая ситуация возникает, например, когда пространственное расстояние между событиями столь велико, а временной интервал между ними столь мал, что эти события могли бы быть связаны лишь сигналом, распространяющимся быстрее света. Требование отсутствия причинной связи между ними, которую мог бы осуществить соединяющий эти события сигнал, и ведёт к известному выводу о невозможности движения со скоростью, превышающей скорость света в вакууме.

С формальной точки зрения это означает, что если известны механические параметры некоторой системы (далее коротко – задано *состояние*

системы) в некоторый момент времени, то по заданным воздействиям (причинам) исходя из физических закономерностей (их нужно предварительно найти и сформулировать на языке уравнений), можно найти состояние указанной системы в любой последующий момент времени. Отметим, что в кинематике в принципе отсутствует указание на причины тех или иных изменений состояния рассматриваемой системы. Поэтому требуются дополнительные (*не кинематические*) характеристики и параметры, описывающие действие со стороны других тел или взаимодействие между частями данной системы (причины) указанных изменений состояния системы. Далее мы установим соответствующую терминологию для описания этих воздействий.

Второе. Кинематика не накладывает никаких ограничений на выбор системы отсчёта при описании рассматриваемых явлений. Этот выбор может быть сделан только исходя из некоторых дополнительных соображений, например из требования удобства и простоты описания этих явлений. Это означает, что из всех возможных систем отсчёта будет сделан выбор такой системы, в которой рассматриваемые физические законы имеют наиболее простой вид.

Далее для упрощения рассуждений по умолчанию в качестве рассматриваемой системы будет выбираться материальная точка. Если это не так, то будет даваться соответствующая оговорка, указывающая на выбор рассматриваемого объекта.

В качестве критерия для выбора системы отсчёта выбирают ускорение материальной точки. Опыт показывает, что причин наличия ненулевого ускорения у материальной точки может быть всего две. Для удобства будем проводить их обсуждение по отдельности.

Сначала рассмотрим ситуацию, когда воздействия на материальную точку отсутствуют. В данном случае ускорение этой материальной точки может быть отличным от нуля (в произвольный момент времени) только в том случае, если так выбрана система отсчёта. Из всех возможных систем отсчёта в качестве наиболее удобной обычно выбирают такую систему отсчёта, в которой, при отсутствии внешних воздействий, у материальной точки отсутствует ускорение. Такая система отсчёта называется *инерциальной*.

При решении большинства практических задач движения тел вблизи поверхности Земли систему отсчёта, связанную с Землёй (*геоцентрическая* система), можно считать инерциальной. Однако в ситуациях, когда существенно проявляется суточное вращение Земли (опыты Фуко́ 1851 г. (Жан

Берна́р Лео́н Фуко́, фр. 1819–1868)), геоцентрическую систему уже нельзя считать инерциальной.

С более высокой степенью точности инерциальной можно считать *гелиоцентрическую* систему отсчёта, связанную с Солнцем.

В качестве примеров неинерциальных систем отсчёта можно привести систему отсчёта, связанную с цилиндрической платформой, вращающейся вокруг своей оси симметрии или систему отсчёта, связанную с самолётом на взлёте и при посадке.

Наличие или отсутствие инерциальной системы отсчёта может подтвердить только опыт. Опытные данные показывают, что:

~ *при отсутствии воздействий существуют системы отсчёта, в которых материальная точка либо находится в состоянии покоя, либо совершает равномерное прямолинейное движение.*

Только что сформулированное утверждение о существовании инерциальных систем отсчёта составляет содержание **первого закона Ньютона** (Исаа́к Нью́тон, англ., 04.01.1643–31.03.1727).

В любой системе отсчёта, движущейся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчёта, у рассматриваемой материальной точки ускорение будет также равно нулю. Следовательно, эти системы отсчёта также будут инерциальными. Отсюда делаем вывод, что инерциальных систем отсчёта сколько угодно много. Любая система отсчёта, в которой материальная точка, не подверженная воздействию со стороны других тел, движется с ускорением, называется **неинерциальной**.

Первому закону Ньютона можно придать несколько иную формулировку, которая следует из того факта, что существование неограниченного множества инерциальных систем отсчёта не должно приводить к различным формулировкам законов механики в этих системах. Поскольку впервые данное утверждение было высказано и сформулировано Галиле́ем (Галиле́о Галиле́й, итал., 15.02.1564–08.01.1642), поэтому оно называется **принципом относительности Галиле́я**, который выглядит следующим образом:

~ *все механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчёта.*

Из независимости механических явлений от выбора инерциальной системы отсчёта следует, что вид всех законов механики не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой инерциальной системе отсчёта. Такое поведение механических явлений и описы-

вающих их уравнений называется их **инвариантностью** по отношению к выбору инерциальной системы отсчёта и позволяет несколько иначе сформулировать принцип относительности Галилея, а именно:

~ все механические явления инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчёта.

Принцип относительности Галилея позволяет получить соотношения, связывающие координаты и скорость некоторого механического события в точке M в различных инерциальных системах координат.

Пусть имеются две инерциальные системы отсчёта K и K' и пусть система K' движется со скоростью $\vec{V}$ по отношению к системе K .

Отметим, что в классической механике Ньютона, основанной на *принципе дальнего действия*, молчаливо *предполагается*, что существуют сигналы (в частности, световые сигналы), распространяющиеся с бесконечно большой скоростью, и это приводит к следующим выводам²:

- длины отрезков одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта;
- ход времени одинаков во всех инерциальных системах отсчёта, то есть $t = t'$.

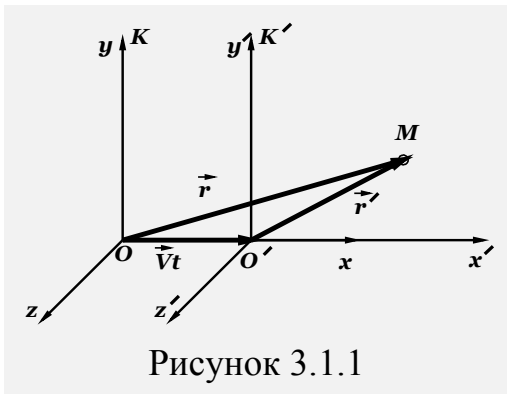


Рисунок 3.1.1

Выберем для удобства системы координат декартовыми прямоугольными, а направления координатных осей выберем параллельными в обеих системах отсчёта, причём оси абсцисс направим параллельно вектору $\vec{V}$ (рисунок 3.1.1). Начало отсчёта времени выберем так, что в момент пуска часов $t = t' = 0$ начала координат O и O'

систем K и K' совпадают. Рассмотрим некоторое событие, которое происходит в некоторой точке пространства, имеющей координаты (x, y, z, t) и (x', y', z', t') в системах отсчёта K и K' , соответственно. С учётом сказанного о длинах отрезков и промежутках времени в системах отсчёта K и K' (рисунок 3.1.1) видим, что в любой момент времени имеет место равенство $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \vec{V} \cdot t + \vec{r}'$, или:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} \cdot t. \quad (3.1.1)$$

² Подробное обсуждение вопроса об измерении промежутков времени и синхронизации часов можно найти, например, в книге: Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевский курс физики. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1971.

Проектируя на координатные оси, получим соотношения:

$$\begin{aligned}x' &= x - V \cdot t ; \\y' &= y; \\z' &= z; \\t' &= t.\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

которые называются *преобразованиями Галилея*.

Рассуждения о длинах отрезков в различных инерциальных системах отсчёта подтверждаются вычислением длины стержня в рассматриваемых инерциальных системах отсчёта. Если концы стержня расположены в точках M_1 и M_2 , то, используя теорему Пифагора, расстояние между этими точками (длина стержня) в обеих системах отсчёта с учётом (3.1.2) есть:

$l' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
и $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Видим, что $l' = l$, то есть расстояние между точками (длина отрезка) инвариантно по отношению к выбору инерциальной системы отсчёта.

После дифференцирования обеих частей равенства (3.1.1) находим соотношение:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V},\tag{3.1.3}$$

которое связывает скорости точек в системах K и K' и означает, что при сложении этих векторов действует простое правило треугольника.

Дифференцирование (3.1.3) даёт:

$$\vec{a}' = \vec{a},\tag{3.1.4}$$

то есть ускорение материальной точки не зависит от выбора инерциальной системы отсчёта.

3.2. Основной закон динамики – второй закон Ньютона

Рассмотренный в предыдущем пункте закон инерции (первый закон Ньютона) имеет очень большое значение, особенно с точки зрения выбора системы отсчёта и постулирования факта существования, по крайней мере, одной инерциальной системы отсчёта. Однако первый закон Ньютона не даёт ответа на вопрос о причинах и закономерностях изменения скорости рассматриваемых объектов, поскольку по определению здесь рассматриваются лишь изолированные объекты.

Как показывает опыт, причиной изменения скорости рассматриваемого тела является действие на него других тел, причём само рассматриваемое тело также действует на тела, вызвавшие изменение его скорости. Таким образом, нужно говорить о *взаимодействии* рассматриваемого тела с другими телами.

При воздействии прочих тел на рассматриваемое говорят, что на данное тело *действует сила* со стороны других тел. На самом деле эта замена слов не дала ничего нового, поскольку не дано никакого нового определения и не указано никакого правила определения природы и значений данной физической величины. Чтобы внести конструктивность в описание взаимодействия, нужно описать процедуру определения параметров (характеристик) новой физической величины – *силы*.

Опыт показывает, что для изменения скорости тела, то есть для сообщения этому телу ускорения, на него необходимо оказать воздействие со стороны других тел (подействовать силой). Опыт также показывает, что все тела «сопротивляются» изменению своей скорости под действием сил. Это свойство тел называется *инертностью*, а количественную характеристику инертности тел называют *массой* и обозначают m . Определение массы данного тела осуществляют путём сравнения с массой эталонного тела. Сделать это можно, например, следующим образом. Создадим условия, при которых рассматриваемые два тела взаимодействуют только между собой (например, имеет место удар этих тел), а с другими телами не взаимодействуют. Такую систему тел называют *замкнутой*. На самом деле полностью исключить взаимодействие с другими телами невозможно, но можно создать условия, при которых взаимодействиями с другими телами можно было пренебречь по сравнению с взаимодействиями рассматриваемых тел, входящих в замкнутую систему. В частности, при столкновении двух тел можно пренебречь действием всех других тел на сталкивающиеся два тела. Рассмотрим две материальные точки (частицы), скорости которых до столкновения постоянны и равны $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, соответственно. После столкновения скорости частиц изменятся на величины $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$. Опыт показывает, что векторы $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$ имеют противоположные направления, то есть $\Delta\vec{v}_1 \uparrow \downarrow \Delta\vec{v}_2$. Отношение модулей изменения скоростей частиц принимают за величину, обратную отношению масс этих частиц, то есть:

$$\frac{|\Delta\vec{v}_1|}{|\Delta\vec{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (3.2.1)$$

Принимая, что массы тел не изменяются при столкновении (пояснения – ниже), приходим к соотношению:

$$\Delta(m\vec{v}_1) = -\Delta(m\vec{v}_2). \quad (3.2.2)$$

Произведение массы материальной точки (частицы) на её скорость называют **импульсом** и обозначают $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (3.2.3)$$

Импульсом системы материальных точек называют сумму импульсов всех материальных точек, входящих в эту систему, то есть $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$, ($i = 1, 2, \dots, N$, N – число частиц в рассматриваемой системе).

Для нашего случая из (3.2.2) имеем для импульса системы:

$$\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{const}. \quad (3.2.4)$$

Это соотношение называют законом сохранения импульса, который в п. 3.3 обсуждается более подробно.

Масса тела *инвариантна* по отношению к преобразованиям Галилея, что означает сохранение массы в классической механике. Этот, подтверждаемый опытом, факт называют **законом сохранения массы**. Также из принципа относительности Галилея следует (и подтверждается опытным путём), что в классической механике масса является *аддитивной* физической величиной.

Следующим логичным шагом является введение эталона массы. Для этого берут некоторое (произвольное) тело и считают его массу эталонной. Массы всех остальных тел находят путём сравнения (в смысле формулы 3.2.1) с эталонной массой.

В СИ *единица* массы – 1 кг (см. формулу 1.2.8 и пояснения к ней).

Изменение скоростей частиц означает наличие ускорений у этих частиц в процессе взаимодействия (в нашем случае, при столкновении). Из определения ускорения (2.2.14) и закона сохранения массы следует, что векторная величина $d\vec{p} / dt = m(d\vec{v}/dt) = m\vec{a}$ количественно определяет оказанное на неё действие со стороны другой частицы, то есть определяет **действующую на данную частицу силу**. Иными словами, сила – это вектор, определяемый выражением: $\vec{F} = (d\vec{p} / dt)$. Таким образом, исходя из сравнения изменений кинематических характеристик взаимодействующих при ударе частиц, нам удалось сначала определить их массы (вернее –

отношение масс), а затем и силы, которыми называют **быстроту изменения импульсов** рассматриваемых частиц, вызванную любыми причинами, то есть: $\vec{F} = (d\vec{p} / dt) = m(d\vec{v} / dt) = m\vec{a}$.

Именно в этом смысле это понятие ввёл Исаак Ньютон в своём знаменитом труде «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г. В этом труде Ньютоном дана следующая формулировка своего закона (второго закона Ньютона): «Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует». Под количеством движения в этой формулировке понимается произведение массы тела на его скорость.

Современная формулировка **второго закона Ньютона** имеет следующий вид:

В инерциальной системе отсчёта ускорение материальной точки пропорционально действующей на эту точку силе и обратно пропорционально массе этой точки, то есть:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ или } \vec{F} = m\vec{a}. \quad (3.2.5)$$

Только что сформулированный второй закон Ньютона не только устанавливает связь между ускорением материальной точки, её массой и действующей на неё силой, но и позволяет определить единицу силы в СИ.

А именно, за единичную силу в СИ принимается такая сила, которая материальной точке массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с². Называется единица силы в СИ **ньютон (Н)**.

Как отмечено ранее, инвариантность массы по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчёта к другой инерциальной системе отсчёта и её независимость от времени позволяют записать второй закон Ньютона, используя понятие импульса в виде:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.2.5a)$$

Второй закон Ньютона в виде (3.2.5a) оказывается применимым и в релятивистской механике, в том числе и в отношении правил действий с силами, о котором сказано ниже.

Величину $d\vec{p} / dt$ называют **скоростью изменения импульса** материальной точки, и из (3.2.5a) следует, что:

скорость изменения импульса материальной точки равна силе, действующей на неё.

Часто имеет место ситуация, когда на материальную точку действует не одна, а несколько сил $\vec{F}_i$, $i=1,2,\dots,N$, под действием каждой из которых рассматриваемая материальная точка получает ускорение $\vec{a}_i$, $i=1,2,\dots,N$ (в отсутствие других сил). В этом случае применяют подтверждаемое опытом правило суперпозиции (наложения) сил, которое позволяет заменить действующие силы одной силой, равной сумме всех указанных выше сил, то есть:

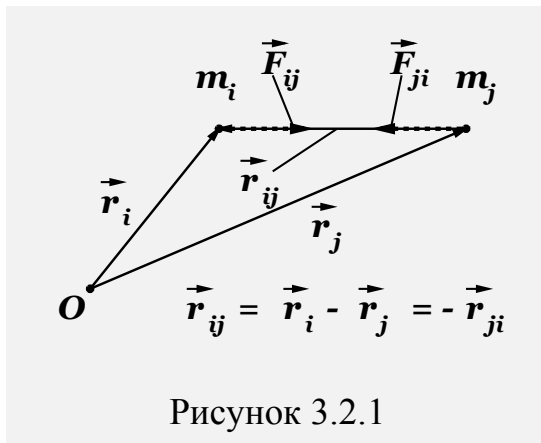
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (3.2.6)$$

С учётом принципа суперпозиции сил второй закон Ньютона в этом случае имеет прежний вид, как это видно после несложных преобразований:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N m \vec{a}_i = m \sum_{i=1}^N \vec{a}_i = m \vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m \vec{a}. \quad (3.2.7)$$

Виды сил, действующих на рассматриваемые объекты в конкретных ситуациях, необходимо определять из опыта.

Зная действующие в системе силы и используя известные из кинематики определения скорости и ускорения, из второго закона Ньютона (3.2.7) получают **уравнения движения системы** – дифференциальные уравнения, в которые входят первые и вторые производные от радиус-вектора по времени и действующие силы. В результате решения уравнений движения находят зависимость радиус-вектора, вектора скорости и вектора ускорения от времени. Это даёт возможность, по заданным в начальный момент времени положению системы и кинематическим характеристикам (вектор скорости), находить эти параметры в любой другой момент времени.



Наиболее часто в классической механике встречаются силы, определяемые основными **фундаментальными** взаимодействиями: *гравитационным* и *электромагнитным*.

Для формулировки законов всемирного тяготения и сил электромагнитного взаимодействия введём некоторые обозначения (см. рисунок 3.2.1).

Сила гравитационного взаимодействия. Эта сила является силой притяжения и определяется законом всемирного тяготения, который можно сформулировать так:

Неподвижные материальные точки массами m_i и m_j , расположенные в вакууме на расстоянии $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = r$ друг от друга, притягиваются друг к другу с силами $\vec{F}_{ij}$ и $\vec{F}_{ji}$, которые определяются формулами:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ij} &= -\gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = -\gamma \frac{m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} = \gamma \frac{m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}, \\ \vec{F}_{ji} &= -\gamma \frac{m_j m_i}{r_{ji}^2} \frac{\vec{r}_{ji}}{r_{ji}} = -\gamma \frac{m_j m_i (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} = \gamma \frac{m_j m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3},\end{aligned}\quad (3.2.8)$$

где коэффициент пропорциональности γ , называемый *гравитационной постоянной*, определяется выбором системы единиц и в СИ имеет значение $\gamma = 6,6720(41) \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$.

Из формул (3.2.8) видим, что имеет место равенство:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \quad (3.2.9)$$

а также тот, факт, что векторы $\vec{F}_{ij}$ и $\vec{F}_{ji}$ имеют одинаковые модули, определяемые выражением:

$$|\vec{F}_{ij}| = |\vec{F}_{ji}| = F = \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} = \gamma \frac{m_i m_j}{r^2}, \quad r_{ij} = r_{ji} = r. \quad (3.2.10)$$

Последнее равенство обычно приводится при формулировке закона всемирного тяготения в школьном курсе физики. Преимущество формул (3.2.8) перед формулой (3.2.10) состоит в том, что выражения (3.2.8) векторные. Это значит, что в них содержится информация о длинах и направлениях векторов $\vec{F}_{ij}$ и $\vec{F}_{ji}$, тогда как при формулировке закона всемирного тяготения с использованием формулы (3.2.10) необходимо дополнительно указывать, что силы притяжения рассматриваемых материальных точек

расположены на прямой, соединяющей эти точки и направлены в противоположные стороны.

Если взаимодействующие тела нельзя считать материальными точками, то в общем случае использовать закон всемирного тяготения в виде (3.2.8) и (3.2.10) нельзя. Здесь необходимо производить разбиение взаимодействующих тел на малые участки и производить суммирование по всем участкам разбиения обоих тел, причём нужно помнить, что осуществляется суммирование векторов и задача в случае произвольной геометрии взаимодействующих тел, несмотря на принципиальную простоту, встречается со значительными техническими (вычислительными) трудностями. Однако можно доказать, что в случае сферической симметрии взаимодействующих тел (когда эти тела являются сферами или шарами с распределением плотностей у этих тел, зависящим только от расстояния до центра соответствующего тела) можно свести результат к взаимодействию точечных масс, равных массам рассматриваемых тел, расположенных в центрах соответствующих сфер или шаров.

Можно отметить, что соотношение (3.2.9) является частным случаем *третьего закона Ньютона*, утверждающего, что:

силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, расположены на прямой, соединяющей взаимодействующие точки, равны по модулю и направлены в противоположные стороны.

Следует отметить, что третий закон Ньютона записывается в виде формулы (3.2.9) при любом виде взаимодействия материальных точек.

В третьем законе Ньютона молчаливо предполагается мгновенное распространение взаимодействий; иными словами, считается скорость передачи взаимодействий бесконечно большой. На самом деле все взаимодействия в природе распространяются с конечными скоростями, не превышающими скорость света в вакууме. Отсюда следует, что третий закон Ньютона носит приближённый характер и справедлив до тех пор, пока скорости рассматриваемых объектов малы по сравнению со скоростью света в вакууме. Отметим, что в механике это условие практически всегда выполняется и третий закон Ньютона справедлив с большой степенью точности.

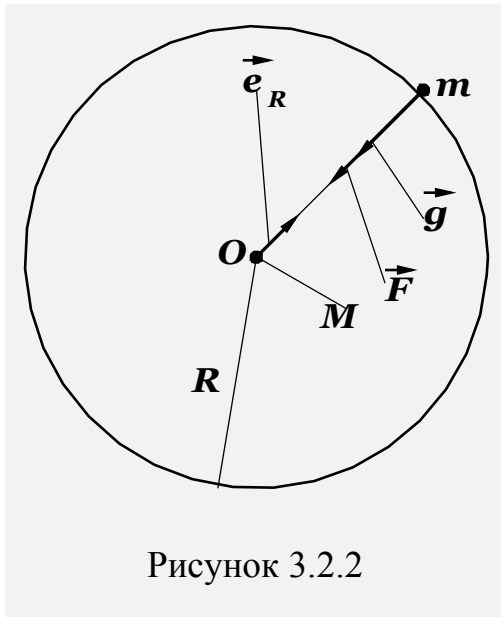


Рисунок 3.2.2

Сила тяжести. Вблизи поверхности большой планеты со сферической симметрией (рисунок 3.2.2) на тела размерами, значительно меньшими радиуса этой планеты, а также при условии, что радиус планеты значительно превышает расстояние от поверхности планеты до рассматриваемого тела, можно считать, что на данные тела действуют постоянные по модулю силы притяжения со стороны планеты, направленные к центру планеты. С учётом данного замечания, если обозначить массу

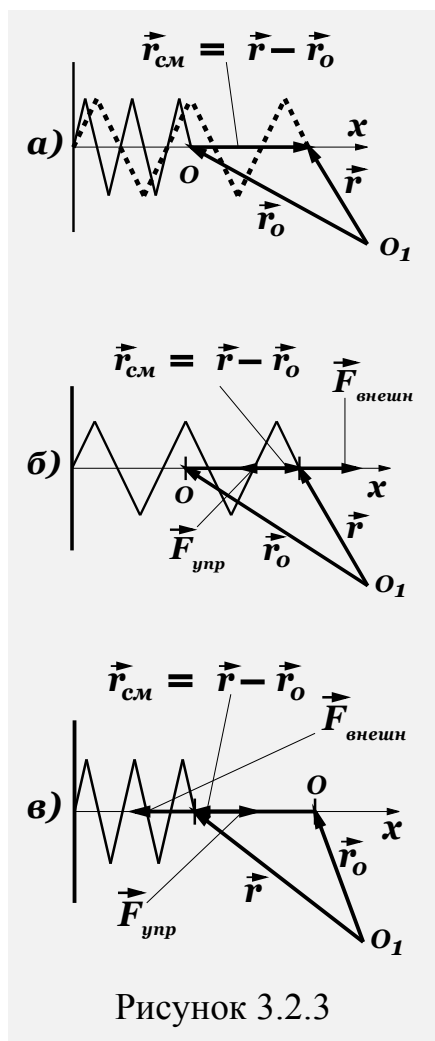
тела, массу планеты и радиус планеты, соответственно, m , M и R , из (3.2.8) имеем для силы притяжения рассматриваемого тела к планете вблизи её поверхности:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{R^2} \vec{e}_R = m\vec{g}, \quad \vec{g} = (-\gamma M / R^2) \vec{e}_R, \quad g = \gamma M / R^2, \quad (3.2.11)$$

где постоянный по модулю вектор $\vec{g} = (-\gamma M / R^2) \vec{e}_R$ называют *вектором ускорения свободного падения*. Знак минус в этой формуле означает, что векторы $\vec{g}$ и $\vec{e}_R$ противоположно направлены.

Для Земли средний радиус $R_3 = 6,371 \cdot 10^6$ м, средний модуль ускорения свободного падения $g = 9,823$ м/с², и для массы Земли имеем $M_3 = 5,976 \cdot 10^{24}$ кг. Поскольку форма Земли отличается от шарообразной, то на практике величина модуля ускорения свободного падения не совсем постоянная величина. В частности, на экваторе эта величина слегка меньше, чем у полюсов. Силу притяжения тел к Земле также называют **силой тяжести**.

От силы тяжести тела следует отличать *вес* тела. **Весом** тела называют силу, с которой рассматриваемое неподвижное тело вблизи поверхности Земли (или другой планеты) действует на горизонтальную опору или вертикальный подвес.



Упругую силу введём на примере некоторой пружины (эта пружина может быть и виртуальной). Пусть один конец этой пружины закреплён в некоторой точке, а второй конец может перемещаться. Ось, на которой расположены закреплённый и свободный концы пружины, обозначим x . Указанная ось всегда проходит через точку крепления одного из концов пружины, а её положение в пространстве может в общем случае меняться. Введём следующие обозначения: точка O_1 – начало отсчёта; O – точка на оси x , в которой находится свободный конец пружины в недеформированном состоянии; $\vec{r}_{см} = \vec{r} - \vec{r}_0$ – вектор *смещения*, начало и конец которого находятся в положениях свободного конца пружины в недеформированном и деформированном состояниях, соответственно (см. рисунок 3.2.3, а, б, в).

Из опыта следует, что пружина противодействует перемещению свободного конца в направлении вектора $\vec{r}_{см}$, вызываемому действием внешних тел (внешней силой) $\vec{F}_{внешн}$. Следовательно, деформируемая пружина действует на внешние тела с силой $\vec{F}_{упр}$, направленной противоположно силе $\vec{F}_{внешн}$, и для придания свободному концу пружины состояния покоя нужно, чтобы эти воздействия компенсировали друг друга, то есть $\vec{F}_{внешн} = -\vec{F}_{упр}$ (см. рисунок 3.2.3, б, в).

Используя рисунок 3.2.3, заключаем, что возникающая при деформации пружины упругая сила $\vec{F}_{упр}$, действующая на внешние тела, и вектор смещения свободного конца этой пружины $\vec{r}_{см}$ направлены в противоположные стороны. Из опытных данных следует также, что при не слишком сильных деформациях после прекращения внешних воздействий пружина полностью восстанавливает свою длину, соответствующую отсутствию внешних сил. Кроме того, при таких воздействиях длины упомянутых векторов $F_{упр}$ и $r_{см}$ пропорциональны друг другу. Отмеченные свойства можно выразить одной формулой:

$$\vec{F}_{уп} = -k \cdot \vec{r}_{см} = -k |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -k |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot \vec{e}_{\vec{r}_{см}}, \quad k > 0, \quad (3.2.12)$$

где положительный коэффициент пропорциональности k называют *коэффициентом упругости* рассматриваемой пружины. Он измеряется в СИ в Н/м. Легко заметить, что вектор упругой силы и вектор смещения всегда коллинеарны и направлены вдоль оси x , а длина вектора упругой силы при фиксированном коэффициенте упругости зависит только от длины вектора смещения. Такого вида силы называются центральными и далее обсуждаются подробнее. Здесь только отметим, что если центр начала отсчёта O_1 совмещено точкой O на оси x , в которой находится свободный конец пружины в недеформированном состоянии, то $\vec{r}_{см} = \vec{r}$, а выражение (3.2.12) примет вид:

$$\vec{F}_{уп} = -k \cdot \vec{r} = -kr \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -kr \cdot \vec{e}_{\vec{r}}, \quad (3.2.12a)$$

который обычно используется при конкретных вычислениях, в частности при вычислении работы силы упругости. При проектировании на ось x в этом случае $r_x = x$ и выражение (3.2.12a) примет вид $F_{уп,x} = -k \cdot x$.

Сила трения скольжения. Рассмотрим скольжение некоторого тела по поверхности другого. Для простоты будем считать поверхности соприкасающихся тел плоскими. Опыты показывают, что при скольжении одного тела относительно плоской поверхности другого возникает сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$. Направлена эта сила по касательной к поверхности соприкосновения всегда в сторону, противоположную направлению движения данного тела относительно другого. Модуль силы трения скольжения $F_{тр}$ оказывается пропорционален модулю силы нормального давления R_N , прижимающей данное тело к другому телу, то есть:

$$F_{тр} = \mu R_N, \quad 1 > \mu > 0. \quad (3.2.13)$$

Положительный коэффициент пропорциональности в (3.2.13) называют *коэффициентом трения скольжения*. Он зависит от многих факторов: от материалов, из которых изготовлены тела, от площади соприкосновения тел, от качества обработки поверхностей соприкасающихся тел и других параметров.

Сила сопротивления. При поступательном движении твёрдого тела со скоростью $\vec{v}$ в жидкости или газе на это тело действует сила сопротив-

ления $\vec{F}_c$, направленная противоположно вектору скорости. Опыт показывает, что при не слишком большой скорости модули векторов скорости и силы сопротивления пропорциональны друг другу, то есть можно записать:

$$\vec{F}_c = -\eta \vec{v}, \quad \eta > 0, \quad (3.2.14)$$

где положительный коэффициент пропорциональности η характеризует вязкие свойства среды (жидкости или газа) и зависит от формы движущегося тела.

Кулоновская сила. С этой силой взаимодействуют электрически заряженные тела. Точная формулировка закона Кулона (Шарль Огюстен де Кулон, фр., 14.06.1736–23.08.1806) с учётом векторных обозначений на рисунке 3.2.1 выглядит следующим образом:

Неподвижные точечные заряды q_i и q_j , расположенные в вакууме на расстоянии r_{ij} друг от друга, взаимодействуют с силой $\vec{F}_{ij}$, которая определяется формулой:

$$\vec{F}_{ij} = k_e \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = k_e q_i q_j \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}, \quad (3.2.15)$$

где коэффициент пропорциональности k_e определяется выбором системы единиц и в СИ есть $k_e = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2 = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$.

Имеются и другие виды сил, которые действуют между телами.

3.3. Закон сохранения импульса

Рассмотрим подробнее вопрос об импульсе системы материальных точек. Пусть имеется некоторая система материальных точек. Обозначим число материальных точек в этой системе N .

Как указывалось в п. 3.2, **импульсом $\vec{p}$ системы материальных точек** массами m_i , $i = 1, 2, \dots, N$, движущихся со скоростями $\vec{v}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, называют сумму импульсов всех материальных точек, входящих в рассматриваемую систему, то есть:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i. \quad (3.3.1)$$

Далее для упрощения формул применяют некоторые соглашения об индексах. Во-первых, по умолчанию нумерация объектов в рассматриваемой

мой системе осуществляется от 1 до N , и поэтому диапазон изменения номеров объектов в формулах со знаком суммы не указывается, то есть вместо $\sum_{i=1}^N$ пишут кратко $\sum_i$. Индекс, по которому производится суммирование в рассматриваемой формуле и который повторяется под знаком суммы у двух сомножителей, называют **немым**. С учётом принятого соглашения выражение (3.3.1) примет вид:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i. \quad (3.3.2)$$

Введённое нами понятие импульса системы материальных точек (3.3.1)–(3.3.2) позволяет определить *импульс любого тела*. Делается это путём разбиения (мысленного) рассматриваемого тела на настолько малые участки (далее иногда такие участки будем называть **частицами**), что каждый из этих участков разбиения можно считать материальной точкой. Число участков разбиения (материальных точек), как обычно, обозначают N . Для импульса рассматриваемого тела имеем:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i \Delta m_i \vec{v}_i, \quad (3.3.3)$$

где применено соглашение о суммировании и использованы обозначения $\Delta m_i, i=1,2,\dots,N$, $\vec{v}_i, i=1,2,\dots,N$ и $\vec{p}_i, i=1,2,\dots,N$ для массы, скорости и импульса участков разбиения, соответственно.

Установим, что является причиной изменения импульса системы. Для этого используем взаимосвязь между скоростью изменения импульса и силой (второй закон Ньютона в виде (3.2.5a)).

Силу, действующую на i -ую частицу рассматриваемой системы, можно разделить на две части:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^{\text{ext}}, \quad (3.3.4)$$

где $\vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik}$, $k=1,2,\dots,N$ – сила, действующая на i -ую частицу рассматриваемой системы со стороны всех остальных частиц этой системы (за исключением, разумеется, этой i -ой частицы, что отмечено символом неравенства $k \neq i$ снизу от знака суммы), а $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ – равнодействующая всех сил, действующих на i -ую частицу рассматриваемой системы со стороны внешних тел.

Исходя из формулировки второго закона Ньютона, через скорость изменения импульса (3.2.5а) имеем:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^{\text{ext}}. \quad (3.3.5)$$

Суммирование по всем частям системы даёт:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{p}_i \right) = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \left(\sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^{\text{ext}} \right) = \sum_i \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} + \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{0} + \vec{F}^{\text{ext}}. \quad (3.3.6)$$

В последней формуле введено обозначение $\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$, а также учтено то обстоятельство, что сумма всех внутренних сил, действующих между различными частями системы, равна нулю в силу третьего закона Ньютона ($\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$). Действительно, запишем подробно двойную сумму в (3.3.6):

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} &= \sum_i (\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{ii-1} + \vec{F}_{ii+1} + \dots + \vec{F}_{iN}) = \\ &= \{(\cancel{\vec{F}_{12}} + \cancel{\vec{F}_{31}} \dots) + (\cancel{\vec{F}_{12}} + \cancel{\vec{F}_{32}} + \dots) + (\cancel{\vec{F}_{13}} + \cancel{\vec{F}_{23}} + \dots) + \dots + (\vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + \dots)\} = \\ &= \{(\cancel{\vec{F}_{12}} + \cancel{\vec{F}_{21}}) + (\cancel{\vec{F}_{13}} + \cancel{\vec{F}_{31}}) + \dots + (\cancel{\vec{F}_{1N}} + \cancel{\vec{F}_{N1}}) + \dots\} = \vec{0}. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Выражение (3.3.6) означает, что изменение импульса системы связано с внешними силами, действующими на систему, тогда как взаимодействие частей рассматриваемой системы между собой не изменяет её импульса. Отмеченная особенность изменения импульса системы произвольно взаимодействующих между собой частей (частиц) рассматриваемой системы является на самом деле проявлением фундаментального закона природы, называемого законом сохранения импульса. Для его формулировки необходимы дополнительные определения.

Как отмечалось в п. 3.2, система тел называется **замкнутой**, если на тела, входящие в эту систему, не действуют силы со стороны тел, не входящих в рассматриваемую систему.

Обратим внимание: замкнутость системы не уточняет характер и вид сил, действующих *между* телами рассматриваемой системы, то есть не важно, есть или нет взаимодействия между телами рассматриваемой системы и каково это взаимодействие, если оно есть.

Для замкнутой системы имеет место фундаментальный закон природы – **закон сохранения импульса**:

~~~~~  
**Импульс замкнутой системы сохраняется.**

Это означает, что если имеется некоторая замкнутая система, импульс которой можно вычислить по формулам (3.3.1) или (3.3.3) и обозначить импульс этой замкнутой системы  $\vec{p}$ , то справедливо равенство:

$$\vec{p} = \overrightarrow{const}. \quad (3.3.8)$$

Установлено, что закон сохранения импульса является следствием *однородности* пространства.

Закон сохранения импульса позволяет существенно упростить решение задач о поведении замкнутых систем, в которых действующие между телами силы носят или очень сложный характер, или вообще неизвестны.

При использовании закона сохранения импульса необходимо учитывать, что он справедлив только в инерциальных системах отсчёта.

Есть ещё один важный момент. При обсуждении понятия импульса системы и причин его изменения мы исходили из законов Ньютона. В частности, в формуле (3.3.6) сумму всех сил внутренних сил, действующих между различными частями системы, мы считали равной нулю в силу третьего закона Ньютона ( $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ ). Это означает, что закон сохранения импульса при таком подходе обосновывается справедливостью третьего закона Ньютона.

Опыт показывает, что на самом деле первичным законом является закон сохранения импульса, который можно применять не только к замкнутым механическим системам, но и к замкнутым системам с частями (частицами), взаимодействующими посредством различных полей (электромагнитных, сильных и др.), при учёте импульса самих полей переносчиков взаимодействия. При таком подходе, как легко заметить из выражения (3.3.6), уже третий закон Ньютона будет следствием закона сохранения импульса.

### 3.4. Центр масс

Полезным и широко используемым на практике является понятие центра масс системы. **Центром масс** системы, состоящей из  $N$  материальных точек массами  $m_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , имеющими радиус-векторы  $\vec{r}_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , соответственно, называют точку, радиус-вектор которой определяются выражением:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m}. \quad (3.4.1)$$

Величина  $m = \sum_i m_i$  называется массой системы.

Отметим, что если начало координат совпадает с центром масс (начало и конец радиус-вектора центра масс совпадают), то из (3.4.1) следует равенство  $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^{\oplus} = \vec{0}$  (значком  $\oplus$  отмечен факт совпадения начала координат с центром масс).

Польза от введённого нами нового понятия становится ясной, если продифференцировать по времени выражение (3.4.1) и учесть определение импульса системы:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum_i m_i (d\vec{r}_i / dt)}{m} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\vec{p}}{m}. \quad (3.4.2)$$

Величина  $\vec{v}_C$  называется вектором скорости центра масс рассматриваемой системы.

Из выражения (3.4.2) следует уравнение движения центра масс:

$$\frac{d(m\vec{v}_C)}{dt} = \vec{F}^{ext} \Rightarrow m\vec{a}_C = \vec{F}^{ext}, \quad (3.4.3)$$

где, в соответствии с (3.3.6), использовано понятие равнодействующей всех внешних сил  $\vec{F}^{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$  и учтено, что сумма всех сил взаимодействия точек системы между собой равна нулю.

Видим, что центр масс рассматриваемой системы движется, как материальная точка массой  $m = \sum_i m_i$ , под действием равнодействующей всех приложенных к системе внешних сил  $\vec{F}^{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$  независимо от сложности системы. Таким образом, данную систему можно заменить (с точки зрения её динамики) материальной точкой с массой, равной массе рассматриваемой системы, с радиус-вектором  $\vec{r}_C$ , определяемым выражением (3.4.1). При этом импульс системы  $\vec{p}$ , как это следует из (3.4.2), определяется выражением  $\vec{p} = m\vec{v}_C$ . Видим, в частности, что у замкнутой системы (независимо от её сложности) центр масс либо покоится, либо

движется с постоянной скоростью в рассматриваемой инерциальной системе отсчёта.

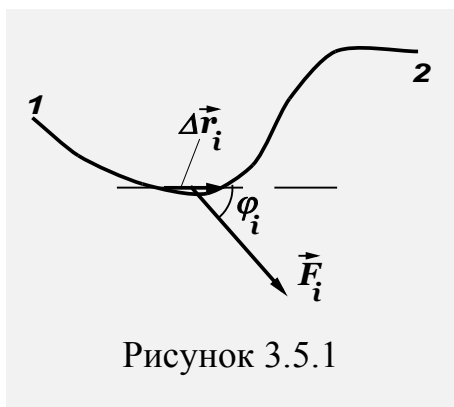
### 3.5. Работа и мощность

Среди различных физических величин имеются такие, как, например, импульс и момент импульса, которые обладают способностью сохраняться (то есть не изменяться) при изменениях состояний рассматриваемой системы. При этом на систему наложен минимум ограничений (например – требование замкнутости в вышеупомянутых примерах).

Есть ещё одна очень важная физическая величина, обладающая способностью при определённых условиях сохраняться, – **полная механическая энергия** системы.

Для того чтобы дать определение полной механической энергии системы, необходимо сначала ввести понятие **работы** силы, причём так, чтобы иметь возможность вычисления работы силы в произвольных ситуациях.

Напомним, что в курсе физики средней школы вводится понятие работы  $A$  постоянной силы  $\vec{F}$  при прямолинейном перемещении материальной точки как скалярного произведения вектора силы  $\vec{F}$  на вектор перемещения  $\Delta\vec{r}$ , то есть  $A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \Delta r \cos(\vec{F}, \Delta\vec{r})$ . Обратите внимание, что в данном определении и всюду далее при вычислении работы используется **вектор перемещения**, поскольку именно на этом векторе «строится» кинематика материальной точки. Ясно, что при непрямолинейном перемещении точки, либо для непостоянной силы, либо при выполнении обоих условий, указанный способ определения работы силы использовать невозможно.



Для обобщения понятие работы на произвольные условия разделим рассматриваемую траекторию на достаточно малые участки так, чтобы на каждом из этих участков можно было приблизительно считать силу постоянной, а перемещение материальной точки – прямолинейным (рисунок 3.5.1). Если обозначить номер участка разбиения  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , траекторию на этом участке заменить вектором перемещения  $\Delta\vec{r}_i$ , найти силу  $\vec{F}_i$  в произвольной точке на этом участке (точке пунктуации), то для работы

силы на данном участке получим  $\Delta A_i \approx \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$ , а для работы силы по перемещению материальной точки по всей траектории  $A_{12} \approx \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$ .

**Работой** силы  $\vec{F}$  по перемещению материальной точки по рассматриваемой траектории назовём величину, получаемую из указанной суммы путём предельного перехода при мелкости разбиения траектории, стремящейся к нулю ( $\lambda \rightarrow 0$ ), то есть:

$$A_{12} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = \int_{l_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.5.1)$$

При замене местами начальной и конечной точек (траектория не меняется) работа сохраняет свою абсолютную величину, но изменяет свой знак на противоположный, поскольку в этом случае подынтегральные выражения на всех участках траектории совпадают по модулю, но отличаются по знаку:  $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ,  $dA' = \vec{F} \cdot d\vec{r}' = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dA$ , так как первые множители ( $\vec{F}$ ) у элементарных работ совпадают, а элементарные перемещения связаны соотношением  $d\vec{r} = -d\vec{r}'$ , и, следовательно:

$$A_{12} = \int_{l_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad A_{21} = \int_{l_{21}} \vec{F} \cdot d\vec{r}' = - \int_{l_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow A_{12} = -A_{21}. \quad (3.5.2)$$

Величину  $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$  в (3.5.1) называют **элементарной работой** силы  $\vec{F}$  на элементарном участке (перемещении)  $d\vec{r}$ . Если сила постоянна, а перемещение осуществляется по прямой линии  $l \parallel d\vec{r}$ ,  $dr = dl$ , то  $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos \varphi = F_l dr$  и из (3.5.1) получаем  $A_{12} = \int_{l_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_l \int_{l_{12}} dr = F_l l$ , что находится в полном соответствии с определением работы постоянной силы при прямолинейном перемещении материальной точки.

Отметим, что работа, в зависимости от условий, может быть как положительной, так и отрицательной величиной.

Единица измерения работы в СИ называется **джоулем** (Дж). 1 Дж – работа постоянной силы величиной 1 Н по перемещению материальной точки на 1 м по прямой, совпадающей с линией действия силы.

При вычислении работы в общем случае существенными являются как вид траектории, так и зависимость силы от точки приложения.

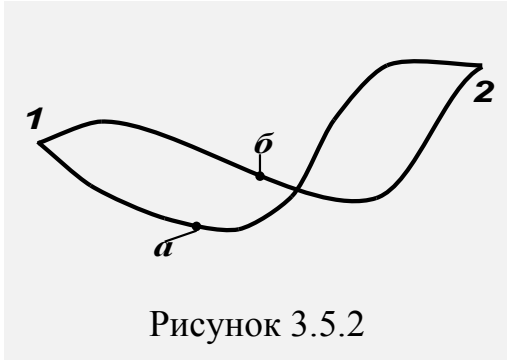


Рисунок 3.5.2

**Потенциальными** (или **консервативными**) называются силы, работа которых не зависит от вида траектории ( $l_{1a2}$  или  $l_{б2}$ , «а» и «б» – промежуточные точки на различных траекториях), по которой осуществляется перемещение материальной точки (рисунок 3.5.2). Количество

этого свойство определяется формулой:

$$\int_{l_{1a2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{l_{б2}} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.5.3)$$

Таким образом, работа потенциальных сил зависит только от положения начальной и конечной точек. Работа таких сил по замкнутому контуру равна нулю. Действительно, если произвольно выбрать две точки 1 и 2 на рассматриваемом замкнутом контуре и назвать их начальной и конечной, соответственно, то по определению:

$$A_{\text{конт}} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{l_{1a2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{l_{б2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{l_{1a2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \overset{\substack{\text{с учётом (3.5.2)}}{\downarrow}}{(- \int_{l_{б2}} \vec{F} \cdot d\vec{r})} = 0. \quad (3.5.4)$$

Полученное выражение (3.5.4) называется критерием потенциальности силы. К потенциальным силам относятся все **центральные силы**. **Центральными** называются силы, модуль которых зависит только от расстояния от некоторой точки (центра), а направлены эти силы вдоль линии, соединяющей точку приложения силы и указанный выше центр, то есть если они имеют вид:

$$\vec{F} = f(|\vec{r} - \vec{r}_o|) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_o)}{|\vec{r} - \vec{r}_o|} = f(r_{cm}) \frac{\vec{r}_{cm}}{r_{cm}} = f(r_{cm}) \vec{e}_{r_{cm}}; \quad \vec{r} - \vec{r}_o = \vec{r}_{cm}; \quad \vec{F} \parallel \vec{r}_{cm}, \quad (3.5.5)$$

где  $\vec{r}_o$  – радиус-вектор центра  $O$ ,  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы. В (3.5.5) начало вектора  $(\vec{r} - \vec{r}_o) = \vec{r}_{cm}$  находится в центре  $O$ , а конец этого вектора находится в точке приложения центральной силы. Легко заметить, что этот вектор показывает, насколько точка приложения центральной силы смещена по отношению к центру  $O$ , и поэтому он (вектор) назван вектором смещения  $\vec{r}_{cm}$ . Отметим также, что вектор центральной силы  $\vec{F}$  и вектор смещения коллинеарны, то есть  $\vec{F} \parallel \vec{r}_{cm}$ . Если начало от-



счёта совпадает с центром  $O$ , то  $\vec{r}_{cm} = \vec{r}$  и вектор смещения является радиус-вектором точки приложения центральной силы.

В частности, к центральным силам (и к потенциальным) относятся сила гравитационного взаимодействия материальных точек и сила кулоновского взаимодействия точечных зарядов.

Есть силы, которые всегда перпендикулярны векторам скоростей перемещения материальных точек (и, соответственно, векторам элементарных перемещений). Работа таких сил равна нулю и, разумеется, не зависит от траектории перемещения материальной точки. Но в данном случае силу называют *гироскопической*, а не потенциальной. Примером гироскопической силы является сила, действующая на движущуюся в магнитном поле заряженную частицу.

Непотенциальными силами, легко заметить, являются любые силы трения скольжения и силы сопротивления, поскольку их работа (кстати, она всегда отрицательна **в системе отсчёта**, связанной с телом, относительно которого перемещается рассматриваемое тело) существенно зависит от траектории перемещения материальной точки и никогда не равна нулю после перемещения материальной точки по замкнутому контуру. Такие силы, как увидим далее, всегда уменьшают запас энергии системы (имеет место рассеивание (*диссипация*) энергии) и называются диссипативными силами.

При вычислении работы нескольких сил, действующих на рассматриваемую материальную точку, используют *принцип суперпозиции* сил (3.2.6), и поэтому нет необходимости вводить новые определения для этих ситуаций.

При движении абсолютно твёрдого тела нужно учитывать только внешние силы, действующие на это тело, так как работа всех внутренних сил взаимодействия точек рассматриваемого тела равна нулю. Действительно, для двух произвольных точек рассматриваемого тела с номерами  $i$  и  $j \neq i$  и радиус-векторами  $\vec{r}_i$  и  $\vec{r}_j$ , соответственно (причём  $|\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  для абсолютно твёрдого тела), имеем:

$$\begin{aligned} dA &= dA_i + dA_j = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = \vec{F}_{ij} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = \\ &= \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

В (3.5.6) использован третий закон Ньютона ( $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ ) и тот факт, что в абсолютно твёрдом теле вектор  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{r}_{ij}$  – постоянный по длине вектор (кроме того,  $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_{ij}$ ). Элементарное приращение постоянного по длине вектора перпендикулярно самому вектору, то есть  $d\vec{r}_{ij} \perp \vec{r}_{ij}$ , а следовательно,  $d\vec{r}_{ij} \perp \vec{F}_{ij}$ , а скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно нулю.

С течением времени работа силы в общем случае изменяется, то есть  $A = A(t)$ . Для элементарной работы за время  $dt$  имеем:

$$dA = (dA / dt)dt. \quad (3.5.7)$$

Величина  $N = dA / dt$  называется **мощностью** силы.

С другой стороны,  $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = [\vec{F} \cdot (d\vec{r} / dt)]dt = [\vec{F} \cdot \vec{v}]dt$ . Сравнивая с (3.5.7), находим:

$$N = dA / dt = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (3.5.8)$$

С учётом введённого понятия мощности для вычисления работы за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  получаем формулу:

$$A = \int dA = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \vec{v})dt = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt. \quad (3.5.9)$$

Разница последней формулы и определения работы (3.5.1) в том, что в (3.5.9) нужно вычислять обычный определённый интеграл от скалярной функции одной переменной (времени)  $N(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}$ , а не криволинейный интеграл (3.5.1).

Единицей мощности в СИ является 1 Вт. 1 Вт = 1 Дж / 1 с.

### 3.6. Кинетическая энергия

**Кинетической энергией** материальной точки массой  $m$ , движущейся со скоростью  $\vec{v}$ , называется скалярная величина  $T$ , определяемая выражением:

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.6.1)$$

В (3.6.1) приведены два варианта определения кинетической энергии материальной точки – через её скорость  $\vec{v}$  и через её импульс  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Оба варианта равноправны и эквивалентны. На практике используют обе приведённые формулы, причём выбор определяется конкретной ситуацией и соображениями удобства. Для произвольного тела определение его кинетической энергии дано ниже.

Размерность кинетической энергии  $[T] = ML^2T^{-2}$  совпадает с размерностью работы, что наводит на мысль о связи кинетической энергии и работы между собой.

Действительно, из определения элементарной работы  $dA$ , второго закона Ньютона и определения кинетической энергии  $T$ , после несложных преобразований получаем:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left| \begin{array}{l} \vec{F} = m(d\vec{v} / dt) \\ d\vec{r} = \vec{v}dt \end{array} \right| = m(d\vec{v} / dt) \cdot \vec{v}dt = \frac{m}{2} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} dt = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT. \quad (3.6.2)$$

Полученное выражение:

- во-первых, подтверждает предположение о связи между кинетической энергией и работой;
- во-вторых, показывает, что за счёт работы силы  $\vec{F}$  на элементарном перемещении  $d\vec{r}$  материальной точки происходит изменение кинетической энергии этой материальной точки на величину совершённой работы;
- в-третьих, показывает, что в отсутствие внешних сил (замкнутая система – материальная точка, не подверженная внешнему воздействию) кинетическая энергия материальной точки сохраняется, так как в этом случае  $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dT = 0$ .

Соотношение между работой силы по перемещению материальной точки из положения 1 в положение 2 за конечный промежуток времени от  $\Delta t = t_2 - t_1$  получается путём интегрирования выражения (3.6.2):

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} dT = \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv^2}{2} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta T. \quad (3.6.3)$$

Кинетической энергией **системы материальных точек** массами  $m_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , движущихся со скоростями  $\vec{v}_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , называют сумму кинетических энергий  $T$  всех материальных точек, входящих в рассматриваемую систему, то есть:

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i}. \quad (3.6.4)$$

Кинетическую энергию произвольно движущегося тела можно вычислить на основе формулы (3.6.4), используя стандартную процедуру представления этого тела в виде совокупности материальных точек массы  $\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$  ( $\rho$  – плотность) и последующего предельного перехода при мелкости разбиения, стремящейся к нулю:

$$T = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N T_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i v_i^2}{2} \Delta V_i = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 dV. \quad (3.6.5)$$

Изменение кинетической энергии системы материальных точек равно суммарной работе внешних и внутренних сил, действующих на точки рассматриваемой системы:

$$dT = dA^{ext} + dA^{int} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i + \sum_i \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} \cdot d\vec{r}_k. \quad (3.6.6)$$

В (3.6.6) под  $\vec{F}_i^{ext}$  понимается равнодействующая всех внешних сил, действующих на  $i$ -ую точку рассматриваемой системы.

Сумма работ всех внутренних сил (второе слагаемое в (3.6.6)) для абсолютно твёрдого тела равна нулю. В этом легко убедиться, если учесть, что все слагаемые двойной суммы в (3.6.6) можно сгруппировать попарно и, как это уже показано при получении выражения (3.5.6), эти пары сводятся к равному нулю скалярному произведению взаимно перпендикулярных векторов  $\vec{F}_{ik}$  и  $d(\vec{r}_i - \vec{r}_k) = d\vec{r}_{ik}$ , то есть:  $d\vec{r}_{ik} \perp \vec{F}_{ik} \Rightarrow \vec{F}_{ik} \cdot d\vec{r}_{ik} = 0$ .

Таким образом, в (3.6.6) остаётся только первое слагаемое, и формула принимает вид:

$$dT = dA^{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i. \quad (3.6.7)$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы зависит от выбора системы отсчёта. Здесь, однако, этот вопрос не будем обсуждать более подробно.

Отметим также тот факт, что определение кинетической энергии было дано для инерциальных систем отсчёта. В подробных курсах классической механики доказывают, что возможно обобщение понятия кинетической энергии на случай неинерциальных систем отсчёта. В этом случае при

рассмотрении изменения кинетической энергии к работе всех внешних и внутренних сил требуется добавить работу переносных сил инерции. Рассмотрение данного вопроса выходит за рамки настоящего курса лекций.

### 3.7. Потенциальная энергия

Способность системы совершать работу определяется не только запасом кинетической энергии, но взаимным расположением частей системы. Для описания поведения различных систем удобно наложить некоторые ограничения путём введения понятия консервативной системы.

Система материальных точек (частиц) называется **консервативной**, если отсутствуют или не совершают работу все непотенциальные (внешние и внутренние) силы, а внешние силы, кроме того, являются **стационарными**, то есть не зависят явно от времени  $\partial \vec{F} / \partial t = \vec{0}$ .

Расположение частей системы по отношению друг к другу и внешним телам называется конфигурацией системы. Работа сил по изменению конфигурации консервативной системы (взаимного расположения частей консервативной системы) не зависит от траекторий перемещения этих частей, что позволяет ввести для такой системы понятие потенциальной энергии  $U$  следующим образом.

Произвольно выбирается некоторая начальная (отмечаемая индексом «0» – нулевая) конфигурация консервативной системы, которой приписывается произвольное значение скалярной величины  $U_0$ , измеряемой в джоулях. Перевод рассматриваемой системы из некоторого состояния «1» в начальное состояние сопровождается совершением работы  $A_{10}$  всех сил, действующих на частицы этой системы. Поскольку совершают работу только потенциальные силы, то их работа по отдельности и в целом  $A_{10}$  не зависит от траекторий перемещения частей системы из состояния «1» в начальное состояние.

**Потенциальной энергией** рассматриваемой системы в состоянии «1» называют величину  $U_1$ , определяемую выражением:

$$U_1 = U_0 + A_{10}. \quad (3.7.1)$$

Аналогично в любом другом состоянии, например состоянии «2», потенциальная энергия консервативной системы  $U_2$  определяется как

сумма работы  $A_{20}$  всех сил, действующих на частицы этой системы, по переводу системы в начальное состояние, и величины  $U_0$ , то есть  $U_2 = U_0 + A_{20}$ . Ясно, что введённая таким образом потенциальная энергия  $U$  в некотором состоянии зависит как от выбора начальной конфигурации консервативной системы, так от выбора величины  $U_0$ . Однако этот «произвол» исчезает, если рассматривать не значение потенциальной энергии системы в конкретном состоянии, а изменение потенциальной энергии при переходе этой системы из одного состояния в другое.

Действительно, найдём разность  $\Delta U = U_2 - U_1$ :

$$\begin{aligned}\Delta U = U_2 - U_1 &= (U_0 + A_{20}) - (U_0 + A_{10}) = A_{20} - A_{10} = \\ &= -A_{10} - A_{02} = -A_{1-0-2} = -A_{12}.\end{aligned}\tag{3.7.2}$$

В (3.7.2) мы воспользовались свойством работы  $A_{20} = -A_{02}$  и учли также консервативность системы, что позволило исключить промежуточный символ «0» у суммарной работы, то есть позволило записать  $A_{1-0-2} = A_{12}$ .

Таким образом, мы показали, что на изменение потенциальной энергии системы действительно не оказывает никакого влияния ни выбор начальной конфигурации консервативной системы, ни выбор величины  $U_0$ .

Для элементарного изменения конфигурации, аналогично, имеем:

$$dU = -dA,\tag{3.7.3}$$

где  $dA$  – суммарная элементарная работа всех сил.

Из определения потенциальной энергии и вытекающих из него формул следует, что работа потенциальных сил по изменению конфигурации системы равна убыли (убыль – приращение, взятое с противоположным знаком, то есть «минус» приращение) потенциальной энергии рассматриваемой системы. Знаки у работы и приращения потенциальной энергии противоположные, что связано с тем, что работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии рассматриваемой системы.

В отличие от кинетической энергии, потенциальная энергия системы не является аддитивной величиной. В этом легко убедиться на простом примере. Возьмём произвольную консервативную систему взаимодействующих между собой материальных точек и обозначим её потенциальную энергию  $U$ . Если эту систему каким-либо образом разделить, например, на две части, и обозначить потенциальные энергии этих частей  $U_1$  и  $U_2$ ,

то легко заметить, что  $U_1 + U_2 \neq U$ . Это связано с тем, что в сумме  $U_1 + U_2$  не содержится потенциальная энергия, соответствующая взаимодействию материальных точек одной из частей системы с материальными точками другой части системы, которая, разумеется, присутствует в потенциальной энергии системы  $U$ .

Легко установить связь потенциальной энергии системы, состоящей из материальной точки, и действующих на неё сил.

Если учесть определение элементарной работы  $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , то из (3.7.3) получаем:

$$dU = -dA = -\vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.7.4)$$

Используя выражения для приращения функции трех переменных  $U(x, y, z)$  ( $x, y, z$  – декартовы прямоугольные координаты точки наблюдения) и скалярного произведения двух векторов в декартовой прямоугольной системе координат, находим:

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (3.7.5)$$

Из полученной формулы следует, что проекции силы, действующей на материальную точку, связаны с потенциальной энергией формулами:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{F} &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right) = -\text{grad}U. \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

В формуле (3.7.6) введён вектор  $\text{grad}U$  – **градиент** скалярной функции  $U$ :

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}. \quad (3.7.7)$$

Широко используется символический векторный оператор «набла»:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}\right). \quad (3.7.8)$$

Следовательно, можем записать:

$$\text{grad}U = \nabla U. \quad (3.7.9)$$

С учётом только что введённых понятий связь между силой, действующей на материальную точку, и её потенциальной энергией можно записать в векторной форме:

$$\vec{F} = -\text{grad}U = -\nabla U. \quad (3.7.10)$$

Векторная формула (3.7.10) не зависит от выбора системы координат. Однако вид векторов  $\text{grad}U$  (формула (3.7.7)) и  $\nabla$  (формула (3.7.8)) изменяется, в зависимости от выбранной системы координат.

Отметим, что все рассуждения велись в предположении о *стационарном* силовом поле ( $\partial \vec{F} / \partial t = \vec{0}$ ). Если поле внешних сил нестационарно ( $\partial \vec{F} / \partial t \neq \vec{0}$ ), то связь между потенциальной энергией и работой всех потенциальных сил определяется выражением:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt = -dA + \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (3.7.11)$$

При этом критерий потенциальности силы (3.5.4) сохраняется, однако при вычислении  $\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r}$  предполагается, что время зафиксировано, то есть значения модуля вектора силы и его направления в разных точках контура, по которому производится вычисление интеграла, выбираются в один и тот же фиксированный момент времени.

Приведём важные примеры определения потенциальной энергии.

**Потенциальная энергия материальной точки в поле однородных сил.** В данном случае считается, что в некоторой области пространства на материальную точку в различных точках этой области действует постоянная по модулю и направлению сила  $\vec{F}$ . Для определённости направим ось  $z$  вдоль линии действия вектора силы и противоположную ему (вектору силы) сторону:  $\vec{F} = -F\vec{k}$ ;  $F_x = F_y = 0$ ;  $F_z = -F$  (обратите внимание:  $F$  – модуль вектора силы, а  $F_z = -F$  – проекция вектора силы на рассматриваемую ось). В данном случае отлична от нуля только проекция  $F_z = -F$ . Найдём работу по перемещению материальной точки из точки  $P_1(x, y, z_1)$  в точку  $P_2(x, y, z_2)$ .

В соответствии с формулой (3.7.4), определением элементарной работы и работы при конечном перемещении (3.5.1) имеем:



$$dU = -(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -F_z dz = d(-F_z z), \quad \Delta U = -\int_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{z_1}^{z_2} F_z dz =$$

$$= -F_z z \Big|_{z_1}^{z_2} = -(F_z z_2 - F_z z_1) . \quad (3.7.12)$$

Обратите внимание, что в (3.7.12) криволинейный интеграл по произвольной траектории между точками  $P_1(x, y, z_1)$  и  $P_2(x, y, z_2)$  свёлся к обыкновенному определённомu интегралу от функции одной переменной по отрезку  $[z_1, z_2]$ . Из полученной формулы видим, что в качестве потенциальной энергии в данном случае выступает выражение:

$$U = -F_z z + C = Fz + C, \quad (3.7.13)$$

где, как всегда, потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной.

Чаще всего, из соображений удобства, произвольную постоянную выбирают так, чтобы потенциальная энергия материальной точки при  $z = 0$  также была равна нулю, то есть

$$U \Big|_{z=0} = -F_z \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow U = -F_z z = Fz. \quad (3.7.14)$$

Такой моделью можно с достаточно большой точностью описывать поведение материальной точки вблизи поверхности большой планеты под действием силы гравитационного притяжения. В частности, вблизи поверхности Земли  $\vec{F} = m\vec{g}$ ,  $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$  и для потенциальной энергии материальной точки в данном случае получаем хорошо известное выражение  $U = mgz$ , или, если обозначить координату  $z = h$  ( $h$  – высота точки над поверхностью Земли),  $U = mgh$ .

В полученных формулах (3.7.12), (3.7.13) и (3.7.14) следует обратить внимание на запись потенциальной энергии с использованием проекции ( $U = -F_z z$ ) или модуля ( $U = Fz$ ) силы, действующей на рассматриваемую материальную точку.

**Потенциальная энергия материальной точки в поле центральных сил.** В данном случае возможно введение понятия потенциальной энергии системы, поскольку все центральные силы являются потенциальными.

Начало отсчёта для удобства выберем в центре, относительно которого определяются центральные силы. Действующие центральные силы и радиус-вектор точки наблюдения коллинеарны. Вновь воспользуемся связью между приращением потенциальной энергии и работой действующей

щих в системе сил и с учётом выбора радиус-вектора центра  $O$  (в формуле (3.5.5) радиус-вектор начала отсчёта  $\vec{r}_O = \vec{0}$ ) и то  $\vec{r}_{см} = \vec{r}$  и вектор смещения является радиус-вектором точки приложения центральной силы:

$$dU = -(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -F_r(r) \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = -F_r(r) \frac{rdr}{r} = -F_r(r)dr,$$

$$\Delta U = -\int_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} F_r(r)dr. \quad (3.7.15)$$

В первой строке (3.7.15) использовано свойство скалярного произведения векторов  $\vec{a} \cdot d\vec{a} = ada$ , применимое к любому вектору, в том числе и радиус-вектору:  $\vec{r} \cdot d\vec{r} = rdr$ . Если линия интегрирования является замкнутым контуром, то интеграл в (3.7.15) равен нулю. Действительно, если обозначить через  $\Phi(r)$  первообразную для функции  $F_r(r)$ , то, поскольку для замкнутого контура начальная и конечная точки совпадают, то совпадают и значения функции  $\Phi(r)$  в этих точках, то есть для  $r_2 = r_1$ , и  $\Phi(r_2) = \Phi(r_1)$  и по формуле Ньютона – Лейбница  $\Phi(r_2) - \Phi(r_1) = 0$ . Вновь, как и в предыдущем случае, криволинейный интеграл по произвольной траектории между точками  $P_1$  и  $P_2$  свёлся к обыкновенному определённом интегралу от функции одной переменной по отрезку  $[r_1, r_2]$ .

Конкретный вид потенциальной энергии в общем случае установить нельзя, так как он определяется зависимостью  $F_r(r)$ .

Очень важным случаем, с практической точки зрения, является зависимость  $|F_r(r)| \sim 1/r^2$ , поскольку именно такая зависимость от расстояния наблюдается для гравитационных и электростатических сил. В данном случае  $F_r(r) = \lambda / r^2$ , где  $\lambda$  – некоторая константа, определяемая видом взаимодействия.

Для потенциальной энергии имеем:

$$dU = -(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -F_r(r)dr = -\frac{\lambda}{r^2}dr,$$

$$\Delta U = -\int_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\lambda \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\lambda}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \left( \frac{\lambda}{r_2} - \frac{\lambda}{r_1} \right). \quad (3.7.16)$$

Следовательно, в качестве потенциальной энергии в случае центральных сил выступает величина:

$$U = \frac{\lambda}{r} + C, \quad (3.7.17)$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Удобно выбрать произвольную постоянную так, чтобы потенциальная энергия в бесконечно удалённой точке была равна нулю:

$$U(\infty) \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} U = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda}{r} + C \right) = 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0. \quad (3.7.18)$$

В частности, для гравитационного взаимодействия рассматриваемой материальной точки массой  $m$  с другой материальной точкой массой  $M$  в соответствии с (3.2.8) имеем:  $\lambda = -\gamma mM$  ( $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup> – гравитационная постоянная). Таким образом, для потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух материальных точек имеем:

$$U_{gp} = -\gamma \frac{mM}{r}. \quad (3.7.19)$$

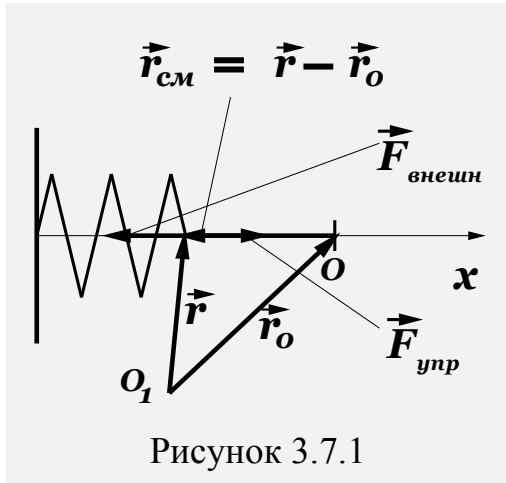
Аналогично для кулоновского (электростатического) взаимодействия точечного заряда  $q$  с другим точечным зарядом  $q'$  (заряды неподвижны друг по отношению к другу и расположены в вакууме на расстоянии  $r$  друг от друга)  $\lambda = k_e qq'$  ( $k_e = 1 / 4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$  Н·м<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup>,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Кл<sup>2</sup>/(Н·м<sup>2</sup>) =  $8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная). Для потенциальной энергии кулоновского (электростатического) взаимодействия двух точечных зарядов имеем:

$$U_{\text{э}} = k_e \frac{qq'}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}. \quad (3.7.20)$$

В отличие от потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух материальных точек, потенциальная энергии электростатического взаимодействия двух точечных зарядов может быть и положительной, и отрицательной величиной: она *положительна* для *одноимённых* зарядов (отталкивание) и *отрицательна* для *разноимённых* зарядов (притяжение).

**Потенциальная энергия упругой деформации.** Напомним, что абсолютно упругим называется тело, которое полностью восстанавливает размеры и форму после любых его деформаций. Ранее в разделе 3.2 уже

было введено определение для упругой силы на примере сил, возникающих при деформации пружины (рисунок 3.7.1).



Видим, что возникающая при деформации пружины упругая сила  $\vec{F}_{упр}$ , действующая на внешние тела, и вектор  $\vec{r}_{см} = \vec{r} - \vec{r}_O$  смещения свободного конца этой пружины направлены в противоположные стороны. В разделе 3.2 было определено аналитическое выражение для упругой силы (3.2.12)  $\vec{F}_{упр} = -k\vec{r}_{см}$ ,  $k > 0$ , где положительный коэффициент пропор-

циональности  $k$  называют коэффициентом упругости рассматриваемой пружины. Он измеряется в СИ в Н/м. Начало отсчёта здесь выберем в точке  $O$ , и поэтому  $\vec{r}_{см} = \vec{r}$  и для силы упругости имеем, в соответствии с (3.2.12a):  $\vec{F}_{упр} = -k\vec{r}$ .

В разделе 3.2 отмечалось, что ось  $x$  выбирается так, что закреплённый и свободный концы пружины всегда расположены на этой оси. Это вновь позволяет свести рассматриваемую задачу к одномерной модели, поскольку упругая сила действует вдоль оси  $x$ .

В данном случае для потенциальной энергии имеем:

$$dU_{упр} = -dA_{упр} = -(\vec{F}_{упр} \cdot d\vec{r}) = -(-k\vec{r} \cdot d\vec{r}) = kr_x dx = kx dx,$$

$$\Delta U_{упр} = -\int_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = \left( \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right). \quad (3.7.21)$$

Следовательно, потенциальная энергия упругой деформации тела (пружины) определяется выражением:

$$U_{упр} = kx^2 / 2 + C, \quad (3.7.22)$$

а если принять  $U_{упр} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow C = 0$ , то потенциальная энергия упругой деформации тела будет определяться выражением:

$$U_{упр} = kx^2 / 2. \quad (3.7.23)$$

### 3.8. Закон сохранения энергии в механике

Сумму кинетической энергии  $T$  и потенциальной энергии  $U$  некоторой системы и называют **полной механической энергией** (коротко – **механической энергией**)  $E$  рассматриваемой системы:

$$E = T + U . \quad (3.8.1)$$

Оказывается, что механическая энергия обладает важным свойством – для консервативной системы она сохраняется, то есть остаётся постоянной, несмотря на изменение отдельных её составляющих (кинетической энергии  $T$  и потенциальной энергии  $U$ ).

Чтобы в этом убедиться, предположим, что в произвольной системе материальных точек произошло элементарное изменение кинетической энергии  $dT$ , которое связано с работой различных сил  $dA = dA_{\text{потенц}} + dA_{\text{непотенц}}$ , где  $dA_{\text{потенц}}$  – элементарная работа всех потенциальных сил (внутренних и внешних), действующих на точки рассматриваемой системы, а  $dA_{\text{непотенц}}$  – элементарная работа всех непотенциальных сил (внутренних и внешних), действующих на точки рассматриваемой системы:

$$dT = dA_{\text{потенц}} + dA_{\text{непотенц}} . \quad (3.8.2)$$

Используя определение потенциальной энергии и формулу связи элементарного изменения потенциальной энергии и элементарной работы (3.7.11)  $dA_{\text{потенц}} = -dU + (\partial U / \partial t)dt$ , находим:

$$\begin{aligned} dT &= -dU + (\partial U / \partial t)dt + dA_{\text{непотенц}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d(T + U)}{E} &= dA_{\text{непотенц}} + (\partial U / \partial t)dt. \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

С учётом определения механической энергии (3.8.1) получаем выражение:

$$dE = dA_{\text{непотенц}} + (\partial U / \partial t)dt , \quad (3.8.4)$$

которое означает, что рассматриваемая система изменяет свою механическую энергию за счёт работы всех внутренних и внешних непотенциальных сил и нестационарности силовых полей.

Если поля внешних сил стационарны ( $(\partial U / \partial t) = 0$ ) и непотенциальные (внутренние и внешние) силы не совершают работы или отсутствуют, то такую систему называют консервативной.

Из (3.8.4) следует *закон сохранения механической энергии*:

» *Механическая энергия консервативной системы сохраняется,*  
то есть

$$T + U = \text{const} . \quad (3.8.5)$$

Прямой метод решения вопроса о поведении механической системы – решения **уравнений движения** рассматриваемой системы, получаемых из второго закона Ньютона. Однако такой путь позволяет получить аналитическое решение задачи в очень малом числе случаев и требует, как правило, значительных усилий и времени на решение уравнений движения. Использование закона сохранения механической энергии значительно упрощает решение механических задач, а зачастую позволяет получить аналитическое решение тех задач, которые невозможно решить на основе уравнений движения.

## Глава 4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### 4.1. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Для описания кинематики вращательного движения тел, как уже отмечалось в п. 2.3, нужно пользоваться углами поворота тел относительно осей. В этой связи и динамические характеристики систем должны выбираться с учётом данного обстоятельства.

При рассмотрении вопросов динамики вращательного движения понадобятся понятия момента импульса и момента сил, вводимые ниже.

Прежде всего отметим, что во избежание тавтологий начало координат  $O$  в приводимых ниже определениях называется центром  $O$ .

**Моментом импульса материальной точки**, имеющей массу  $m$ , импульс  $\vec{p} = m\vec{v}$  ( $\vec{v}$  – вектор скорости) и радиус-вектор  $\vec{r}$ , относительно центра  $O$  называют вектор  $\vec{L}_O$ , определяемый выражением:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (4.1.1)$$

Как следует из определения векторного произведения векторов, вектор  $\vec{L}_O$  перпендикулярен к векторам  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ , и данные векторы образуют правую тройку векторов в порядке  $\vec{r}$ ,  $\vec{p}$ ,  $\vec{L}_O$ .

**Моментом импульса системы  $N$  материальных точек**, имеющих массы  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , импульсы  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , и радиус-векторы  $\vec{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , относительно центра  $O$  называют вектор  $\vec{L}_O$ , равный сумме моментов импульсов  $\vec{L}_{O_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , всех материальных точек этой системы относительно указанного центра  $O$ , то есть вектор, определяемый выражением:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{O_i} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (4.1.2)$$

**Моментом силы  $\vec{F}$** , действующей на материальную точку с радиус-вектором  $\vec{r}$  относительно центра  $O$ , называют вектор  $\vec{M}_O$ , определяемый выражением:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.1.3)$$

Вектор  $\vec{M}_O$  перпендикулярен к векторам  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , и данные векторы образуют правую тройку векторов в порядке  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\vec{M}_O$ .

Выясним, что является причиной изменения момента импульса системы.

Дифференцирование (4.1.2) по времени даёт:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i \left[ \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \left( \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \right] = \\ &= \sum_i [\vec{v}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i.\end{aligned}\quad (4.1.4)$$

В (4.1.4) учтена параллельность векторов  $\vec{v}_i$  и  $\vec{p}_i$ .

Представим силу, действующую на  $i$ -ую частицу в виде суммы внутренней и внешней сил, то есть  $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^{\text{ext}}$ . Тогда из (4.1.4) следует:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \times (\sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i^{\text{ext}}) = \sum_i (\vec{r}_i \times \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik}) + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \\ &= \sum_i \sum_{k \neq i} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}) + \vec{M}_O^{\text{ext}}.\end{aligned}\quad (4.1.5)$$

В (4.1.5) введено обозначение  $\vec{M}_O^{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$  для суммарного момента всех внешних сил, действующих на систему.

Легко убедиться, что первое слагаемое в последнем равенстве выражения (4.1.5) равно нулю. Действительно, с учётом определения момента сил, имеем:

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_{k \neq i} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}) &= \sum_i \sum_{k \neq i} \vec{M}_{O ik} = (\vec{M}_{O 12} + \vec{M}_{O 13} + \dots + \vec{M}_{O 1k} + \dots + \vec{M}_{O 1N}) + \\ &\quad + (\vec{M}_{O 21} + \vec{M}_{O 23} + \dots + \vec{M}_{O 2k} + \dots + \vec{M}_{O 2N}) + \dots \\ &\quad \dots + (\vec{M}_{O i1} + \vec{M}_{O i3} + \dots + \vec{M}_{O ik} + \dots + \vec{M}_{O iN}) + \dots \\ &\quad \dots + (\vec{M}_{O N1} + \vec{M}_{O N2} + \dots + \vec{M}_{O Nk} + \dots + \vec{M}_{O N(N-1)}) = \\ &= \{(\vec{M}_{O 12} + \vec{M}_{O 21}) + (\vec{M}_{O 13} + \vec{M}_{O 31}) + \dots + (\vec{M}_{O ik} + \vec{M}_{O ki}) + \dots\}\end{aligned}\quad (4.1.6)$$

С учётом третьего закона Ньютона ( $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ ) парные суммы дают:

$$\vec{M}_{O ik} + \vec{M}_{O ki} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} + \vec{r}_k \times \vec{F}_{ki} = (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ik}.\quad (4.1.7)$$



А поскольку силы взаимодействия частиц направлены вдоль линии, на которой расположены сами частицы, то есть  $(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \parallel \vec{F}_{ik}$ , то все пары слагаемых в (4.1.6) дают нулевые векторы.

В итоге получаем **закон изменения момента импульса системы**:

Скорость изменения момента импульса системы относительно некоторого центра  $O$  равна суммарному моменту всех внешних сил, действующих на систему, относительно указанного центра:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext}. \quad (4.1.8)$$

В частности, для замкнутой системы (внешние силы отсутствуют) суммарный момент внешних сил относительно любого центра  $O$  равен нулю. Отсюда приходим к **закону сохранения момента импульса**:

Момент импульса замкнутой системы сохраняется.

Наряду с понятием момента импульса и момента сил относительно центра  $O$  используются понятия **момента импульса относительно оси** и **момента сил относительно оси**.

Рассмотрим произвольную ось  $l$ , проходящую через центр  $O$ , относительно которого определены момент импульса рассматриваемой системы  $\vec{L}_O$  и момент действующих на неё сил  $\vec{M}_O$ . Проекции векторов  $\vec{L}_O$  и  $\vec{M}_O$  на указанную ось  $l$  и называют **моментом импульса относительно оси  $l$**  и **моментом сил относительно оси  $l$** , соответственно, то есть:

$$\begin{aligned} L_l &= \text{Pr}_l \vec{L}_O = L_O \cos(\vec{L}_O, \hat{l}) = L_O \cos \varphi; \quad \varphi = (\vec{L}_O, \hat{l}), \\ M_l &= \text{Pr}_l \vec{M}_O = M_O \cos(\vec{M}_O, \hat{l}) = M_O \cos \varphi_l; \quad \varphi_l = (\vec{M}_O, \hat{l}). \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Проекции момента импульса на ось  $l$  и момента сил на ось  $l$ , как это следует из определения, являются величинами скалярными.

Использование введённых выше моментов относительно оси основано на том факте, что равные векторы имеют равные проекции на любую ось, в том числе и на указанную ось  $l$ . В частности, закон изменения импульса для момента импульса относительно оси  $l$  имеет вид:

$$\frac{dL_l}{dt} = M_l^{ext}. \quad (4.1.10)$$

Выражение (4.1.10) аналогично второму закону Ньютона при условии, что роль импульса выполняет момент импульса, а роль силы – момент силы. При вращательном движении вокруг некоторой оси аналогом массы

является другая величина – момент инерции рассматриваемого объекта относительно оси, определение которого приведено ниже.

## 4.2. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Описание произвольного движения твёрдого тела по сравнению с произвольным движением материальной точки значительно усложняется и приводит к необходимости введения новых математических объектов – тензоров. Определения этих объектов и некоторые начальные сведения о них и их применении в физике даны в Приложении 1.

Для упрощения ситуации сначала мы рассмотрим простейший для анализа случай – вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

В пределах данного параграфа под осью будет всегда пониматься неподвижная ось  $x$ . В данном случае все материальные точки, из которых состоит рассматриваемое твёрдое тело, движутся по окружностям с центрами, расположенными на оси вращения. При этом векторы скоростей всех указанных точек направлены по касательным к упомянутым окружностям (рисунок 4.2.1). Если выбрать начало отсчёта на оси вращения, радиус-вектор  $i$ -ой материальной точки обозначить  $\vec{R}_i$  (такое обозначение выбрано с той целью, чтобы полученные результаты имели общепринятый в учебной литературе вид), то для момента импульса относительно оси вращения имеем:

$$\begin{aligned} L_{i,x} &= \Pi p_x(\vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i) = |\vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i| \cos(\pi/2 - \theta_i) = \\ &= m_i (R_i v_i \sin(\pi/2)) \sin \theta_i = m_i (\overbrace{R_i \sin \theta_i}^{r_i}) (\overbrace{v_i}^{r_i \omega}) = m_i r_i^2 \omega, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

а для всего тела:

$$L_x = \sum_i L_{i,x} = \omega \sum_i m_i r_i^2. \quad (4.2.2)$$

С учётом полученных выражений введём определения.

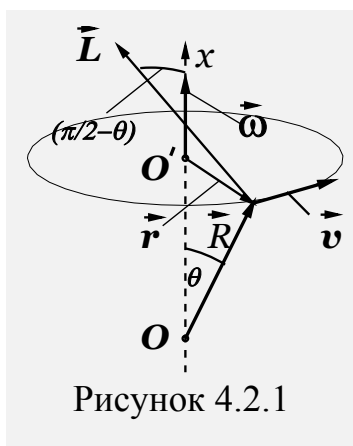


Рисунок 4.2.1

**Моментом инерции материальной точки** относительно оси  $l$  называют произведение массы этой точки  $m$  на квадрат её расстояния  $r$  до оси, то есть  $I_l = mr^2$ .

**Моментом инерции твёрдого тела** относительно оси  $l$  называют сумму моментов инерции всех материальных точек, из которых состоит это тело, относительно указанной оси, то есть  $I_l = \sum_i m_i r_i^2$ .

При вычислении момента инерции конкретных тел знаки сумм заменяются интегралами (совершается стандартная процедура предельного перехода к мелкости разбиения, стремящейся к нулю). При этом масса элементарного объёма  $dm$ , например, в декартовой прямоугольной системе координат, есть произведение плотности вещества  $\rho(x, y, z)$  на элемент объёма  $dV$ . В результате момент инерции тела относительно рассматриваемой оси  $I_l$  вычисляется по формуле:

$$I_l = \int_V \rho(x, y, z) r^2(x, y, z) dV. \quad (4.2.3)$$

Таким образом, для случая вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси  $x$  закон изменения момента импульса (4.1.10) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}(I_x \omega) = M_x^{ext} \Rightarrow I_x \frac{d\omega}{dt} = M_x^{ext} \Rightarrow I_x \beta = M_x^{ext}. \quad (4.2.4)$$

Полученная формула в виде  $I_x \beta = M_x^{ext}$  называется основным законом динамики вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Данное уравнение аналогично второму закону Ньютона  $m\vec{a} = \vec{F}$  (проекция на ось  $x$ :  $ma_x = F_x$ ) для поступательного движения твёрдого тела. Из данного сравнения также следует правомерность утверждения о том, что при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси имеют место следующие аналогии по отношению к поступательному движению твёрдого тела (разумеется, с учётом формы записи):

- момент инерции играет роль массы тела;
- угловое ускорение выступает в роли линейного ускорения;
- момент силы выступает в роли силы;
- момент импульса выступает в роли импульса.

Роль момента инерции тела относительно некоторой оси, как аналога массы тела при его поступательном движении, обнаруживается также при решении другой конкретной задачи – вычисления кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, например оси  $x$ .

По определению кинетической энергии тела имеем:

$$T_{вращ} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{I_x} = \frac{1}{2} I_x \omega^2. \quad (4.2.5)$$

Сравнение полученного выражения с формулой  $T = (1/2)mv^2$  для кинетической энергии материальной точки (или движущегося поступательно твёрдого тела) подтверждает справедливость отмеченной выше роли момента инерции тела относительно оси.

Найдём работу внешних сил при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Для элементарной работы внешних сил и элементарного изменения кинетической энергии рассматриваемого тела имеем (3.6.7)  $dA = dT$ . С учётом этого для работы внешних сил при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси можем записать:

$$dA = dT = \frac{1}{2}d(I_x \omega^2) = I_x \omega d\omega = I_x \omega (d\omega / dt) dt = \underbrace{I_x \omega}_{M_x^{ext}} \overline{\omega dt} = M_x^{ext} d\varphi. \quad (4.2.6)$$

Для конечных перемещений при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси из выражения (4.2.6) следует:

$$A_{12} = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} M_x^{ext} d\varphi. \quad (4.2.7)$$

Из последней формулы видим, в частности, что если момент внешних сил постоянен, то работа при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси равна произведению проекции момента внешних сил на ось вращения и угла поворота, то есть  $A_{12} = M_x^{ext} \Delta\varphi$ .

### 4.3. Теорема Штейнера

Приведём конкретный пример применения полученных формул для вычисления момента инерции однородного цилиндра с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$  относительно его оси симметрии  $x$ . Отметим, что в данном случае ось проходит через центр масс тела.

Для упрощения вычислений данное тело можно представить как совокупность цилиндрических слоёв толщиной  $dr$ , объём  $dV$  которых равен  $dV = 2\pi r H dr$ . Из определения (4.2.1) для данного случая имеем:

$$\begin{aligned} I_{\text{цилиндра}} &= \int_{V_{\text{цилиндра}}} \rho(x, y, z) r^2(x, y, z) dV = 2\pi \rho H \int_0^R r^3 dr = \\ &= \frac{2}{4} \pi \rho H r^4 \Big|_0^R = \frac{1}{2} \overbrace{\rho(\pi R^2 H)}^{m_{\text{цилиндра}}} R^2 = \frac{1}{2} m R^2. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Вычисление моментов инерции других тел относительно осей, проходящих через их центры масс, на которых мы не будем останавливаться, приводит к различным результатам, которые, однако, можно обобщить в виде одной формулы:

$$I = \alpha mL^2, \quad (4.3.2)$$

где  $\alpha < 1$  – безразмерный коэффициент, зависящий от геометрии тела и расположения в пространстве оси,  $m$  – масса рассматриваемого тела,  $L$  – характерный размер тела (радиус цилиндра, радиус шара, длина стержня и т. п.).

В частности, для однородного шара массой  $m$ , радиусом  $R$  относительно оси, проходящей через его центр (там располагается центр масс),  $I = (2/5)mR^2$ ; для тонкого однородного диска массой  $m$ , радиусом  $R$  и толщиной  $h \ll R$  относительно оси, совпадающей с одним из диаметров (проходит через центр масс),  $I = (1/4)mR^2$ ; для тонкого однородного стержня массой  $m$ , длиной  $L$  относительно оси, перпендикулярной к этому стержню и проходящей через его середину (там располагается центр масс),  $I = (1/12)mL^2$ .

Если попытаться вычислить на основании определения (4.2.1) моменты инерции указанных выше тел относительно других осей, не являющихся осями симметрии этих тел и/или не проходящих через центры масс этих тел, то мы столкнёмся со значительными техническими сложностями. Эти сложности возникнут из-за отсутствия симметрии тел относительно новых осей.

Однако имеется замечательная теорема, называемая **теоремой Штейнера**, позволяющая избавиться от некоторых возникших проблем.

Формулируется теорема Штейнера следующим образом:

*Момент инерции тела  $I$  относительно некоторой оси  $l$  равен сумме момента инерции этого тела  $I_0$  относительно оси  $l_0$ , параллельной данной и проходящей через центр масс рассматриваемого тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $a$  между указанными осями:*

$$I = I_0 + ma^2. \quad (4.3.3)$$

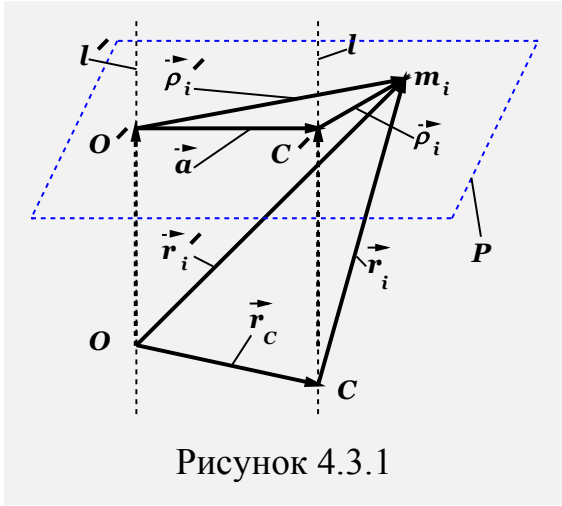


Рисунок 4.3.1

Для доказательства теоремы Штейнера рассмотрим некоторое тело, момент инерции которого известен относительно оси  $l$ , проходящей через центр масс тела (точка  $C$  на рисунке 4.3.1). Обозначим этот момент инерции  $I = I_0 + ma^2$ . Проведём новую ось  $l'$  параллельно первой оси  $l$  и обозначим начало отсчёта на новой оси  $O$ . Выберем произвольный малый участок (материальную точку или частицу) рассматриваемого тела массой  $m_i$  и прове-

дём через эту точку плоскость  $P$ , перпендикулярную указанным осям (рисунок 4.3.1). Точки пересечения плоскости  $P$  с осями  $l$  и  $l'$  обозначим соответственно  $C'$  и  $O'$ . Радиус-вектор в системе отсчёта, связанной с осью  $l'$ , обозначим  $\vec{r}'_i$  материальной точки, а в системе отсчёта, связанной с осью  $l$ , –  $\vec{r}_i$ . Для удобства введём векторы  $\vec{\rho}_i$  и  $\vec{\rho}'_i$ , начала которых находятся в точках  $C'$  и  $O'$  пересечения плоскости  $P$  с осями  $l$  и  $l'$ , соответственно, а концы – в рассматриваемой точке  $m_i$ . Вектор  $\vec{O'C'}$  обозначим через  $\vec{a}$  (длина этого вектора равна расстоянию между осями).

Векторы  $\vec{\rho}_i$  и  $\vec{\rho}'_i$  связаны соотношением:

$$\vec{\rho}'_i = \vec{a} + \vec{\rho}_i, \quad (4.3.4)$$

где вектор  $\vec{a}$  одинаков для всех точек данного твёрдого тела.

Момент инерции рассматриваемого тела относительно новой оси определяется выражением:

$$\begin{aligned} I' &= \sum_i m_i \rho_i'^2 = \sum_i m_i (\vec{a} + \vec{\rho}_i)^2 = a^2 \underbrace{\sum_i m_i}_m + 2\vec{a} \cdot \underbrace{\left( \sum_i m_i \vec{\rho}_i \right)}_{=\vec{0}} + \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}_{I_0} = \\ &= I_0 + ma^2, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

которое доказывает сформулированную выше теорему.

Равенство ноль вектору промежуточного члена требует некоторых пояснений. Из определения центра масс имеем:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}'_i}{m} = \frac{\sum_i m_i (\vec{r}_C + \vec{r}_i)}{m} = \vec{r}_C + \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} \Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i = \vec{0}. \quad (4.3.6)$$

Равенство  $\sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i (\overline{CC'} + \vec{\rho}_i) = \sum_i m_i \overline{CC'} + \sum_i m_i \vec{\rho}_i = \vec{0}$  должно иметь место всегда. Так как векторы  $\sum_i m_i \overline{CC'}$  и  $\sum_i m_i \vec{\rho}_i$  линейно независимы (они, как это следует из определения векторов  $\overline{CC'}$  и  $\vec{\rho}_i$ , взаимно перпендикулярны), то их сумма равна ноль-вектору, если каждое из слагаемых есть ноль-вектор, то есть если  $\sum_i m_i \overline{CC'} = 0$ ;  $\sum_i m_i \vec{\rho}_i = \vec{0}$ .

Оценить пользу доказанной теоремы можно на примере вычисления момента инерции цилиндра (диска) относительно оси, проходящей параллельно оси симметрии и на расстоянии радиуса от этой оси симметрии. Прямые вычисления ввиду отсутствия симметрии в задаче натолкнутся на значительные вычислительные сложности, а по теореме Штейнера, с учётом того, что в данном случае  $I_0 = \frac{1}{2}mR^2$  и  $a = R$ , легко находим:

$$I' = I_0 + ma^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2. \quad (4.3.7)$$

Аналогично можно найти моменты инерции других тел относительно различных осей.

#### 4.4. Произвольное движение твёрдого тела

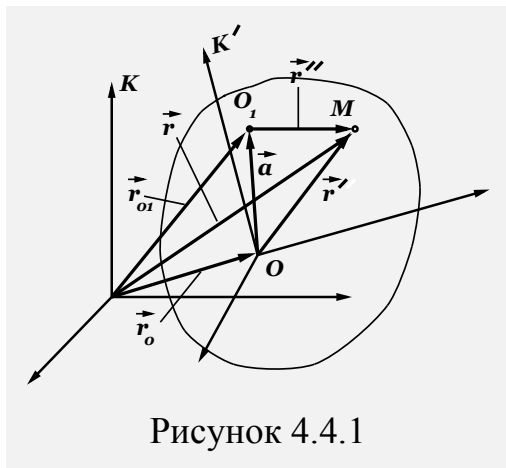


Рисунок 4.4.1

В предыдущем параграфе уже приводились примеры уравнения движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси и вычисления кинетической энергии твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Попробуем сделать обобщение рассмотренных вопросов на случай произвольного движения твёрдого тела.

Для описания произвольного движения твёрдого тела введём две системы координат: неподвижную инерциальную систему координат  $K$ , относительно которой движется рассматриваемое твёрдое тело, и жёстко связанную с этим телом систему координат  $K'$  (рисунок 4.4.1). Для произвольной точки данного твёрдого тела (точки наблюдения) справедливо равенство:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad (4.4.1)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения в системе  $K$ ,  $\vec{r}'$  – радиус-вектор точки наблюдения в системе  $K'$ , а  $\vec{r}_0$  – радиус-вектор начала координат системы  $K'$  в системе  $K$ .

Для элементарного перемещения точки наблюдения получим, с учётом определения вектора элементарного угла поворота  $d\vec{\varphi}$  и его связи с вектором  $\vec{r}'$  (2.3.1) в системе  $K'$ , имеем:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}' = d\vec{r}_0 + d\vec{\varphi} \times \vec{r}'. \quad (4.4.2)$$

При записи второго слагаемого в формуле (4.4.2) учтено, что система  $K'$  жёстко связана с рассматриваемым телом и перемещения частиц (точек) этого тела в данной системе отсчёта может быть обусловлено только поворотами. Следовательно, при повороте на элементарный угол  $d\varphi$  вектор элементарного перемещения  $d\vec{r}'$  связан с вектором элементарного угла поворота  $d\vec{\varphi}$  и радиус-вектором точки наблюдения  $\vec{r}'$  соотношением  $d\vec{r}' = d\vec{\varphi} \times \vec{r}'$ , что и записано в (4.4.2).

Из (4.4.2) для её вектора скорости точки наблюдения имеем:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (4.4.3)$$

Полученный результат означает, что:

*произвольное движение твёрдого тела сводится к наложению поступательного движения этого тела и вращательного движения вокруг некоторой (мгновенной) оси, которая с течением времени может изменять своё положение в пространстве.*

Если выбрать начало отсчёта связанной с твёрдым телом системы  $K''$ , в новой точке  $O_1$ , смещённой на некоторый вектор  $\vec{a}$  относительно начала отсчёта  $O$  системы  $K'$ , то (см. рисунок 4.4.1) радиус-векторы выбранной точки наблюдения и всех других точек связаны соотношениями:

$$\vec{r} = \vec{r}_{01} + \vec{r}'', \quad \vec{r}_{01} = \vec{r}_0 + \vec{a}, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \underbrace{\vec{a} + \vec{r}''}_{\vec{r}'} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \Rightarrow \vec{r}' = \vec{a} + \vec{r}'', \quad (4.4.4)$$

так что для скорости точки наблюдения получим:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{r}'') = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{r}''. \quad (4.4.5)$$

Сравнивая (4.4.5) с выражением  $\vec{v} = \vec{v}_{01} + \vec{\omega} \times \vec{r}''$  (оно получается из (4.4.3) заменами  $\vec{v}_0$  на  $\vec{v}_{01}$  и  $\vec{r}'$  на  $\vec{r}''$ ), находим:

$$\vec{v}_{01} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{a}. \quad (4.4.6)$$



Отметим также, что вектор угловой скорости не зависит от выбора точки, относительно которой он определяется.

Видим, что для данного момента времени всегда можно подобрать такой вектор  $\vec{a}$ , что в правой части (4.4.6) будет получаться ноль-вектор, то есть  $\vec{v}_{01} = \vec{0}$ , а движение твёрдого тела является чистым вращением вокруг мгновенной оси (без поступательной составляющей), причём скорость произвольной точки наблюдения в данный момент времени определяется выражением:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (4.4.7)$$

Умножая (4.4.6) скалярно на  $\vec{\omega}$ , находим:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{01} \cdot \vec{\omega} &= \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times \vec{a}) \cdot \vec{\omega}; \quad \vec{v}_{01} \cdot \vec{\omega} - \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} = (\vec{\omega} \times \vec{\omega}) \cdot \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{v}_{01} \cdot \vec{\omega} &= \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega}, \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

что означает независимость от выбора связанной с твёрдым телом системы отсчёта (инвариантность) произведения  $\vec{v}_0 \cdot \vec{\omega}$ .

Преимущество векторной записи физических законов, как известно, в общности формулировок этих законов и независимости используемых в этих формулировках формул от выбранной системы координат. Однако при попытке записи физических законов в векторной форме зачастую возникает необходимость использования новых объектов, называемых тензорами. Более подробно этот вопрос рассмотрен в Приложении 1.

## 4.5. Понятие о гироскопах

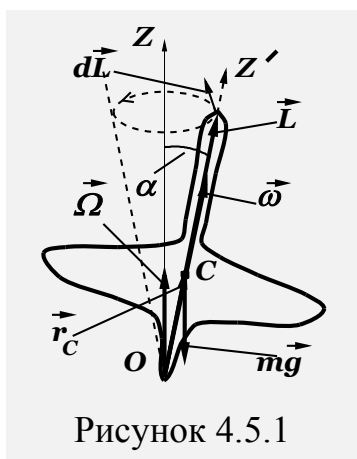


Рисунок 4.5.1

**Гироскопом** называют симметричное твёрдое тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии в поле силы тяжести (рисунок 4.5.1).

Гироскоп закреплён в одной точке  $O$  (называется точкой подвеса) и вращается вокруг оси симметрии  $Z'$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Если точка подвеса гироскопа совпадает с его центром масс, то гироскоп называется *астатическим*, в противном случае гироскоп называют *тяжёлым* гироскопом.

Опыт показывает, что если отклонить ось вращения гироскопа от вертикали, то у гироскопа появляется дополнительное вращательное движение оси вращения вокруг вертикальной оси с небольшой угловой скоростью  $\vec{\Omega}$ .

(по сравнению с  $\vec{\omega}$ ,  $\Omega \ll \omega$ ). Такое вращение оси вращения гироскопа относительно вертикали называется **прецессионным** движением (**прецессией**).

Причина прецессионного движения состоит в следующем. Момент импульса прецессирующего гироскопа можно представить в виде суммы момента импульса за счёт вращательного движения вокруг оси симметрии  $\vec{L}$  и дополнительного момента импульса  $\vec{L}'$ , приводящего к прецессионному движению, причём при условии  $\Omega \ll \omega$  будет выполняться соотношение  $L' \ll L$  и суммарный момент импульса можно считать фактически совпадающим с  $\vec{L}$ . Поскольку гироскоп вращается вокруг оси симметрии, то вектор угловой скорости и момента импульса одинаково направлены, то есть  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ , где  $I$  – момент инерции гироскопа относительно оси симметрии. Из рисунка 4.5.1 следует для приращения момента импульса:

$$|d\vec{L}| = (L \sin \alpha) \Omega dt \Rightarrow d\vec{L} = (\vec{\Omega} dt) \times \vec{L} = (\vec{\Omega} \times \vec{L}) dt. \quad (4.5.1)$$

С другой стороны, приращение вектора  $\vec{L}$  есть

$$d\vec{L} = (d\vec{L} / dt) dt. \quad (4.5.2)$$

Следовательно, закон изменения момента импульса в нашем случае примет вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}. \quad (4.5.3)$$

Найти угловую частоту прецессионного движения можно из следующих соображений. На гироскоп в состоянии прецессии действует внешний момент силы тяжести  $\vec{M} = \vec{r}_C \times m\vec{g}$ , так что в соответствии с законом изменения момента импульса имеем:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_C \times m\vec{g}. \quad (4.5.4)$$

Сравнение (4.5.3) с (4.5.4) даёт:

$$\vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{r}_C \times m\vec{g} \Rightarrow \Omega L \sin \alpha = r_C mg \sin \alpha \Rightarrow \Omega = \frac{r_C mg}{L} = \frac{r_C mg}{I\omega}. \quad (4.5.5)$$

Из последней формулы, определяющей модуль угловой скорости прецессионного движения, видим, что  $\Omega \sim 1/\omega$ , то есть модуль угловой скорости прецессионного движения гироскопа обратно пропорционален модулю угловой скорости его вращения вокруг оси симметрии.

Если для оценки взять  $r_C = 10^{-1}$  м,  $m = 1$  кг,  $g = 10$  м·с<sup>-2</sup>,  
 $I = 10^{-2}$  кг·м<sup>2</sup>,  $\omega = 10^3$  с<sup>-1</sup>, то для  $\Omega$  получим  
 $\Omega = (10^{-1} \cdot 10) / (10^{-2} \cdot 10^3)$  с<sup>-1</sup> =  $10^{-1}$  с<sup>-1</sup>  $\ll \omega = 10^3$  с<sup>-1</sup>. Аналогичное соотношение будет и для модулей момента импульса вращательного движения гироскопа вокруг оси симметрии  $\vec{L}$  и дополнительного момента импульса  $\vec{L}'$ , приводящего к прецессионному движению, то есть  $L' \ll L$ .

## Глава 5. ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### 5.1. Постулаты специальной теории относительности

Классическая механика, основанная на принципе относительности Галилея и законах Ньютона, применима в так называемой нерелятивистской физике, где изучается движение объектов со скоростями, много меньшими скорости света в вакууме  $c = 2,99792458 \cdot 10^8$  м/с. К концу 19 века накопилось достаточно много опытов, которые не могли получить объяснения в рамках классической механики Ньютона. В частности, в 1878–1882 годах Майкельсоном (Альберт Абрахам Майкельсон, амер., 1852–1931) были выполнены знаменитые опыты по определению скорости света. Из этих опытов следовало, что отсутствует особая «светоносная» среда («эфир»), в которой происходит распространение световых волн с одинаковой во всех направлениях скоростью  $c$ . Если бы эта среда существовала, то, в соответствии с классическим принципом относительности Галилея, в инерциальной системе отсчёта, движущейся со скоростью  $\vec{v}$  по отношению к «эфиру», скорость света  $\vec{c}'$  должна быть равной  $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$ . Опыты Майкельсона показали независимость скорости света от скорости движения источника света.

Результаты опытов Майкельсона свидетельствовали о непригодности принципа относительности Галилея при рассмотрении указанных явлений.

В 1905 году Эйнштейном (Альберт Эйнштейн, нем., 1879–1955) была создана новая физическая теория (**специальная теория относительности (СТО)**), позволившая дать объяснения указанным выше опытам.

В основе СТО лежат два постулата Эйнштейна.

1-й постулат (принцип относительности Эйнштейна):

*Все физические явления одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта;*

2-й постулат (о постоянстве скорости света):

*Скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчёта, то есть не зависит от скорости движения источников и приёмников света.*

Первый постулат СТО является обобщением принципа относительности Галилея с явлений механики на все физические явления природы.

Второй постулат, несмотря на простоту его формулировки, имеет глубокое физическое содержание и изменяет многие классические представления об окружающем нас мире. В частности, поскольку скорость света в вакууме является наибольшей из известных науке скоростей перемещения тел и передачи сигналов в пространстве, из него (постулата) следует предельность этой скорости. Именно предельность скорости света и объясняет её инвариантность по отношению к выбору инерциальной системы отсчёта (одинаковость во всех инерциальных системах отсчёта). Если бы это было не так, то инерциальные системы отличались бы друг от друга.

Другим существенным изменением в обычных представлениях об окружающем нас мире является отказ от господствовавшего ранее в физике принципа дальнего действия, состоящего в мгновенной передаче воздействия одного тела на другое и основанного на передаче воздействия в пространстве с неограниченно большой скоростью. Однако, как это постулирует второй принцип СТО, скорость света, хотя по модулю и является очень большой, но, тем не менее, конечной и, следовательно, передача взаимодействия осуществляется за конечный промежуток времени.

В итоге пространство и время оказываются взаимосвязанными и, в отличие от механики Ньютона, воспринимаются в современной физике как единое пространство-время. То есть событию в СТО соответствует точка (мировая точка) в четырёхмерном пространственно-временном континууме, положение которой (даже для неподвижной частицы) изменяется с течением времени по мировой линии. В данном курсе нет возможности подробно останавливаться на этом вопросе, поэтому мы здесь ограничимся на этот счёт лишь данным кратким концептуальным замечанием.

Прежде чем перейти к обсуждению следствий из сформулированных постулатов СТО, обсудим более подробно вопрос об измерении пространственных и временны́х промежутков. Во-первых, физически содержательными являются не пространственные координаты и момент времени рассматриваемого явления по отдельности, а данное событие, то есть место (пространственные координаты) и время его (явления) осуществления.

Поясним причины, которые заставляют обсуждать эти, казалось бы, интуитивно понятные и простые вопросы.

Даже в нерелятивистской ситуации понятия об одновременности событий и осуществлении событий в одном месте пространства неоднозначны и зависят от выбора системы отсчёта, что легко заметить на простом примере, который обычно приводится практически во всех учебниках. Пусть поезд движется равномерно и прямолинейно относительно поверх-

ности Земли. Если в некотором месте одного из вагонов этого поезда последовательно осуществить вспышки источника света, то с точки зрения наблюдателя, находящегося в данном вагоне (поезде), эти события происходят в одной точке пространства. Наблюдатель, находящийся, например, на вокзале (на поверхности Земли), эти события уже будет видеть происходящими в различных точках пространства. Аналогично и одновременность событий зависит от выбора системы отсчёта. Разместим в движущемся вагоне фотоэлементы вдоль прямой, параллельной вектору скорости этого вагона, по разные стороны по отношению к источнику света и на одинаковом расстоянии от него. Если осуществить вспышку указанного источника света, то для наблюдателя в вагоне свет достигнет фотоэлементов одновременно. Для наблюдателя же на поверхности Земли, в соответствии с принципом относительности Галилея и вытекающим из него правилом сложения скоростей, свет быстрее дойдёт до фотоэлемента, расположенного ближе к хвосту поезда, а затем, с некоторым опозданием, дойдёт до фотоэлемента, расположенного ближе к голове поезда.

Поэтому для однозначного толкования всех используемых терминов и понятий сначала необходимо согласовать их использование в различных инерциальных системах отсчёта. В этой связи требуется согласование длин пространственных и временны́х промежутков, а также согласование выбора и синхронизации приборов для измерения времени (часов). Для решения указанных задач используют какой-либо естественный (имеющийся в природе) периодический процесс, позволяющий использовать его характеристики для введения масштабов времени и длины.

Можно, например, использовать процесс излучения монохроматических волн атомов какого-либо вещества. Практически именно так и поступают, выбрав в качестве источника излучения атомы цезия-133. В качестве эталона для временны́х промежутков можно выбрать, например, 1 секунду – промежуток времени, равный 9 192 631 770 периодам излучения этого атома, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния (в системе отсчёта, относительно которой атомы неподвижны). Разумеется, источник излучения и масштаб можно выбирать и другими.

В качестве эталона для пространственных промежутков в рассматриваемой системе отсчёта можно выбрать 1 метр – расстояние, проходимое в вакууме плоской электромагнитной волной за  $1/299792458$  секунды. Вновь отметим, что можно выбрать другой масштаб.

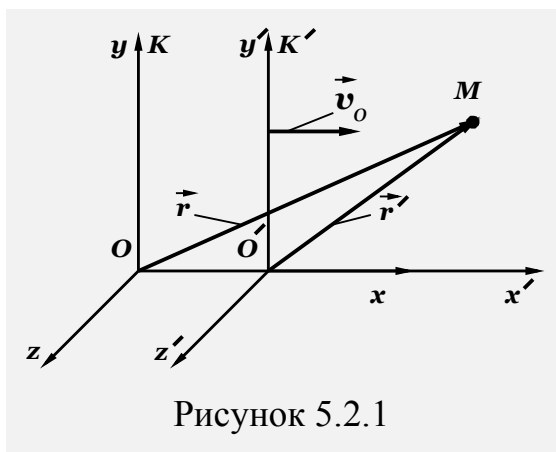
Для сопоставления промежутков времени необходимо также решить вопрос о синхронизации часов. Это делается при помощи передачи свето-

вого сигнала или радиосигнала (как наиболее быстрых из известных сигналов) в начале отсчёта промежутка времени. Выбор данных сигналов обусловлен также тем, что, в соответствии со вторым постулатом СТО, скорость этих сигналов одинакова во всех инерциальных системах отсчёта и не зависит от направления в пространстве.

## 5.2. Преобразования Лоренца

Для дальнейших обсуждений выводов и следствий СТО необходимо установить связь между пространственными и временными координатами событий, фиксируемых в различных инерциальных системах отсчёта.

Описание событий, происходящих в рассматриваемых системах отсчёта, требует указания координат и времени осуществления этих событий. Вопрос о координатах решается путём нанесения равноотстоящих меток вдоль координатных осей. Для нахождения времени событий с каждой меткой совместим часы. Их синхронизация осуществляется с помощью световых сигналов<sup>3</sup>. Например, возможен такой способ синхронизации. Пусть в двух неподвижных точках  $A$  и  $B$  рассматриваемой системы отсчёта размещены одинаковые часы (в указанном в п. 5.1 смысле). Из точки  $C$ , находящейся ровно посередине, посылаем световой сигнал. В момент достижения сигналом часов в точках  $A$  и  $B$  выставляется одинаковое время. Часы в рассматриваемых точках синхронизированы. Аналогично часы во всех других точках рассматриваемой системы отсчёта синхронизируют с часами в точке  $A$ . Такая же процедура осуществляется для синхронизации часов во всех других инерциальных системах отсчёта.



Теперь рассмотрим две инерциальные системы отсчёта  $K$  и  $K'$ . Пусть система  $K'$  движется со скоростью  $\vec{v}_0$  относительно системы  $K$ , причём для упрощения рассуждений координатные оси декартовых прямоугольных систем координат расположим параллельно друг другу, причём оси  $x$  и  $x'$  выберем вдоль вектора скорости (рисунок 5.2.1).

<sup>3</sup> Подробное обсуждение вопроса о синхронизации можно найти в литературе, например в книге: Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевский курс физики. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1971.

Выберем началом отсчёта времени  $t = t' = 0$  в обеих системах отсчёта момент, когда начала координат  $O$  и  $O'$  этих систем совпадают.

Пусть в начальный момент времени в точке, совпадающей с началами координат систем  $K$  и  $K'$ , произошла вспышка света. Свет достигнет точки наблюдения  $M$ , которая, однако, будет иметь разные координаты  $x, y, z, t$  и  $x', y', z', t'$  в рассматриваемых системах отсчёта.

Теперь, в соответствии со вторым постулатом СТО о постоянстве скорости света во всех инерциальных системах отсчёта, мы можем найти пути, пройденные светом в системах  $K$  и  $K'$ , которые должны приравнять к длинам радиус-векторов  $r$  и  $r'$ :

$$\begin{aligned} r &= ct, \\ r' &= ct'. \end{aligned}$$

В координатном представлении (5.2.1) примет вид: (5.2.2)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 &\Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Заметим, что если использовать принцип относительности Галилея и связи координат  $x' = x - v_0 t$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ ,  $t' = t$  (для механики Ньютона время «единое»), то их прямая подстановка в (5.2.2) даст абсурдный результат:  $x^2 = (x - v_0 t)^2 \Rightarrow v_0^2 t^2 - 2xv_0 t = 0$ , поскольку равенство нулю должно быть при любых значениях параметров  $x, v_0$  и  $t$ , тогда как ясно, что при **произвольных** значениях  $x, v_0$  и  $t$  нулю полученная комбинация равна не будет. Это указывает на неприменимость принципа относительности Галилея для рассмотрения данной ситуации.

Связь координат систем  $K$  и  $K'$  в общем случае можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x' &= \varphi_1(x, y, z, t); \\ y' &= \varphi_2(x, y, z, t); \\ z' &= \varphi_3(x, y, z, t); \\ t' &= \varphi_4(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Из эквивалентности всех точек пространства и времени по отношению к выбору начал отсчёта инерциальных систем следует наличие у пространства и времени свойства **однородности**. Это означает, что геометрии



ческие соотношения между объектами должны быть одинаковыми вне зависимости от того, в какой точке находится начало отсчёта и как выбран начальный момент времени. Кроме того, эти геометрические соотношения между объектами должны быть одинаковыми вне зависимости от того, как направлены координатные оси. Последнее свойство пространства называется **изотропностью** пространства.

Из однородности пространства и времени и изотропности пространства следует, что функции в (5.2.3) должны быть линейными функциями.

Действительно, для элементарного приращения (дифференциала), например переменной  $x' = \varphi_1(x, y, z, t)$ , имеем:

$$dx' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dt. \quad (5.2.4)$$

Независимость данного соотношения от выбора начала отсчёта координат и времени системы  $K$  обеспечивается только при постоянных коэффициентах перед дифференциалами координат, то есть если выражение (5.2.4) имеет вид  $dx' = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz + A_4 dt$ . Это означает, что функциональные зависимости (5.2.3) имеют линейный вид:

$$\begin{aligned} x' &= A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 t + A_5; \\ y' &= B_1 x + B_2 y + B_3 z + B_4 t + B_5; \\ z' &= C_1 x + C_2 y + C_3 z + C_4 t + C_5; \\ t' &= D_1 x + D_2 y + D_3 z + D_4 t + D_5, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

где  $A_i, B_i, C_i, D_i; i = 1, 2, 3, 4, 5$  – некоторые постоянные.

Из условия совпадения начал координат (точек  $O(0,0,0)$  и  $O'(0,0,0)$ ) и начал отсчёта времени  $t = t' = 0$  следует, что свободные члены в указанных выше линейных выражениях равны нулю:  $A_5 = B_5 = C_5 = D_5 = 0$ .

Поскольку оси  $x$  и  $x'$  всё время при движении совпадают, то из условия  $y = 0$  должно следовать равенство нулю  $y'$  при любых  $x, z, t$ , то есть:

$$0 = B_1 x + B_3 z + B_4 t. \quad (5.2.6)$$

Последнее равенство при произвольных значениях  $x, z, t$  может выполняться, если только при условии  $B_1 = B_3 = B_4 = 0$ .

Аналогично, из условия  $z = 0$  должно следовать равенство нулю  $z'$  при любых  $x, y, t$ , то есть:

$$0 = C_1x + C_2y + C_4t, \quad (5.2.7)$$

что может иметь место только при условии  $C_1 = C_2 = C_4 = 0$ .

Из условий (5.2.6) и (5.2.7) следует, что координаты событий в поперечных вектору скорости направлениях имеют вид:

$$\begin{aligned} y' &= 0x + B_2y + 0z + 0t \Rightarrow y' = B_2y = by; \\ z' &= 0x + 0y + C_3z + 0t \Rightarrow z' = C_3z = cz. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Равноправность систем  $K$  и  $K'$  приводит к тому, что обратная связь координат  $y$  и  $y'$  имеет тот же вид, то есть:

$$y = by', \quad (5.2.9)$$

откуда следует  $b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$ . Знак «+» соответствует одинаковому направлению осей, знак «-» – противоположному.

Следовательно, для выбранного нами случая имеем:

$$y' = y. \quad (5.2.10)$$

Совершенно аналогично для связи координат  $z'$  и  $z$ :

$$z' = z. \quad (5.2.11)$$

Видим, что переменные координат  $y$  и  $y'$  связаны только друг с другом, так же как и переменные координат  $z$  и  $z'$ . Следовательно, оставшиеся координаты  $x, x', t$  и  $t'$  должны быть линейно связанными между собой, то есть:

$$\begin{aligned} x' &= A_1x + A_4t; \\ t' &= D_1x + D_4t. \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Для нахождения оставшихся коэффициентов используем сведения о координатах точек  $O$  и  $O'$  в рассматриваемых системах отсчёта:

1. Точка  $O'$ .

В системе  $K'$  имеем  $O'(0;0;0)$ , то есть  $x' = 0, y' = 0, z' = 0$ .

В системе  $K$  имеем  $O'(v_0t;0;0)$ , то есть  $x = v_0t, y = 0, z = 0$ .

Подставляем известные координаты  $O'$  в первое из равенств (5.2.12) (второе не даёт ничего конкретного для коэффициентов):

$$\overset{K'}{0} = \overbrace{A_1v_0t + A_4t}^K = (A_1v_0 + A_4)t \Rightarrow A_4 = -A_1v_0. \quad (5.2.13)$$

2. Точка  $O$ .

В системе  $K$  имеем  $O(0; 0; 0)$ , то есть  $x=0, y=0, z=0$ .

В системе  $K'$  имеем  $O(-v_0 t'; 0; 0)$ , то есть  $x' = -v_0 t', y' = 0, z' = 0$ .

Подставляем известные координаты  $O$  в (5.2.12):

$$\overbrace{-v_0 t'}^{K'} = \overbrace{0 + A_4 t}^K, \quad t' = (-A_4 / v_0) t; \quad (5.2.14)$$

$$t' = 0 + D_4 t; \quad t' = D_4 t \Rightarrow D_4 = -A_4 / v_0 = (A_1 v_0 / v_0) = A_1.$$

С учётом полученных результатов (5.2.12) примет вид:

$$\begin{aligned} x' &= A_1 x + A_4 t = A_1 x + (-A_1 v_0) t = A_1 (x - v_0 t) = \gamma (x - v_0 t); \\ t' &= D_1 x + \gamma t. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Теперь вновь воспользуемся выражением (5.2.2) для дальнейшего поиска коэффициентов. С учётом уже полученных результатов (5.2.10) и (5.2.11) подстановка (5.2.15) в (5.2.2) даёт:

$$\begin{aligned} x^2 - c^2 t^2 &= \gamma^2 (x - v_0 t)^2 - c^2 (D_1 x + \gamma t)^2; \\ x^2 - c^2 t^2 &= \gamma^2 (x^2 - 2v_0 x t + v_0^2 t^2) - c^2 (D_1^2 x^2 + 2D_1 \gamma x t + \gamma^2 t^2); \\ x^2 - c^2 t^2 &= x^2 (\gamma^2 - c^2 D_1^2) - x t (2v_0 \gamma^2 + 2\gamma D_1 c^2) - c^2 t^2 (\gamma^2 - \gamma^2 v_0^2 / c^2). \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Приравниваем коэффициенты перед соответствующими степенями переменных, получаем систему уравнений и легко из неё получаем искомые коэффициенты:

$$\begin{cases} \gamma^2 - c^2 D_1^2 = 1; \\ v_0 \gamma + D_1 c^2 = 0 \Rightarrow D_1 = -\gamma v_0 / c^2; \\ \gamma^2 - \gamma^2 v_0^2 / c^2 = 1 \Rightarrow \gamma^2 = 1 / (1 - v_0^2 / c^2) = 1 / (1 - \beta^2) \Rightarrow \gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}. \end{cases} \quad (5.2.17)$$

В последней системе использованы общепринятые обозначения  $\beta = v_0 / c$ ,  $\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}$ . Кроме того, из двух возможных решений для величины  $\gamma$  оставлено только значение  $\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}$ , а значение  $\gamma = -1 / \sqrt{1 - \beta^2}$  отброшено, поскольку при этом получается бессмысленный физический результат: возрастанию времени в системе  $K$  соответствует убывание времени в системе  $K'$ .

Собирая все полученные выражения для штрихованных координат через не штрихованные координаты, получим систему:

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x - v_0 t) ; \\
y' &= y ; \\
z' &= z ; \\
t' &= \frac{t - (\beta / c)x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(t - (\beta / c)x) ,
\end{aligned}
\tag{5.2.18}$$

которую называют **преобразованиями Лоренца** (Хендрик Антон Лоренц, нидерл., 1853–1928). Данные преобразования были введены им при попытке определить вид преобразований координат, по отношению к которым инвариантны уравнения Максвелла в вакууме (эти уравнения описывают поведение электромагнитных полей).

Аналогично для обратных преобразований:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} ; \\
y &= y' ; \\
z &= z' ; \\
t &= \frac{t' + (\beta / c)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} .
\end{aligned}
\tag{5.2.19}$$

Отметим, что надлежащая трактовка преобразований Лоренца, как преобразований пространственным координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой, была дана в СТО именно Эйнштейном в 1905 году.

### 5.3. Основные следствия из преобразований Лоренца

Здесь будут приведены основные следствия из постулатов СТО и полученных на их основе преобразований Лоренца. При этом будут использованы понятия и обозначения п. 5.2.

#### 1. Относительность понятия одновременности событий.

Выберем в системе  $K$  две точки  $M_1(x_1, y, z)$  и  $M_2(x_2, y, z)$ , у которых различаются только координаты  $x$  ( $x_1 \neq x_2$ ). Пусть в выбранных точках одновременно в системе  $K$  осуществляются два события в момент времени  $t_1 = t_2 = t_0$ . В системе  $K'$  те же события будут осуществляться, в соответствии с преобразованиями Лоренца, в моменты времени  $t'_1$  и  $t'_2$ :

$$\begin{aligned} t'_1 &= \frac{t_0 - (\beta / c)x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ t'_2 &= \frac{t_0 - (\beta / c)x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Вычислим разность  $t'_2 - t'_1 = (\beta / c)(x_1 - x_2) / \sqrt{1 - \beta^2} \neq 0$  и видим, что эта разность отлична от нуля, то есть в системе  $K'$  указанные выше события уже не будут одновременными.

## 2. Сокращение длин.

Рассмотрим твёрдый стержень, движущийся вместе с системой  $K'$  по отношению к системе  $K$ . Измерим длину стержня в неподвижной (по отношению к стержню) системе  $K'$  и обозначим эту длину  $l_0$ . Отметим, что в системе  $K'$  длина стержня  $l_0$  не зависит от его расположения по отношению к координатным осям. Посмотрим, останется ли в силе этот факт в системе  $K$ . Напомним, что система  $K'$  движется со скоростью  $\vec{v}_o$  относительно системы  $K$ , координатные оси систем координат которых расположены параллельно друг другу и оси  $x$  и  $x'$  выбраны параллельными вектору скорости  $\vec{v}_o$  (рисунок 5.2.1).

Рассмотрим два варианта расположения стержня.

1-й вариант: стержень расположен **перпендикулярно вектору скорости**  $\vec{v}_o$ , например, вдоль оси  $y'$ , один конец находится в  $M_1(0,0,0)$ , совпадающей с началом координат  $O'(0,0,0)$ , второй конец находится в точке  $M_2(0,l_0,0)$  на оси  $y'$ .

Длина стержня в  $K'$ , разумеется, равна  $l_0$ :

$$l' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \sqrt{(y'_2 - y'_1)^2} = |y'_2 - y'_1| = l_0.$$

В системе  $K$  координаты концов стержня, измеренные *в один и тот же момент времени*  $t_0$ , будут  $M_1(x_1,0,0)$  и  $M_2(x_2,l_0,0)$  (измерения проводятся наблюдателями, расположенными в указанных точках). Здесь учтено, в соответствии с преобразованиями Лоренца, что  $y_1 = y'_1 = 0$ ,  $y_2 = y'_2 = l_0$ ,  $z_1 = z'_1 = 0$ ,  $z_2 = z'_2 = 0$ . Абсциссы точек вычисляем в соответствии с (5.2.18)<sup>4</sup>:

---

<sup>4</sup> Из двух вариантов преобразований Лоренца выбирается тот, который позволяет однозначно определить интересующую величину. Выбор должен быть сделан так, чтобы явно присутствовало время измерения координат в системе  $K$  и было

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{x_1 - v_0 t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow x_1 = v_0 t_0, \\
0 &= \frac{x_2 - v_0 t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow x_2 = v_0 t_0.
\end{aligned}
\tag{5.3.2}$$

Для длины стержня в системе  $K$  таким образом имеем:

$$\begin{aligned}
l &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \\
&= \sqrt{(v_0 t_0 - v_0 t_0)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = l_0.
\end{aligned}
\tag{5.3.3}$$

Аналогичный результат будет, если стержень расположить вдоль оси  $z'$ , а также в любом направлении, перпендикулярном вектору скорости  $\vec{v}_o$ . Назовём поперечными размеры тел в направлениях, перпендикулярных вектору скорости  $\vec{v}_o$ . Следовательно, имеет место утверждение:

*поперечные размеры тел одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта.*

**2-й вариант:** стержень расположен параллельно вектору скорости  $\vec{v}_o$ , вдоль оси  $x'$ , один конец находится в  $M_1(0, 0, 0)$ , совпадающей с началом координат  $O'(0, 0, 0)$ , второй конец находится в точке  $M_2(l_0, 0, 0)$  на оси  $x'$ .

Длина стержня в  $K'$  вновь, разумеется, равна  $l_0$ :

$$l' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2} = |x'_2 - x'_1| = l_0. \tag{5.3.4}$$

В системе  $K$  координаты концов стержня, измеренные в один и тот же момент времени  $t_0$ , будут  $M_1(x_1, 0, 0)$  и  $M_2(x_2, 0, 0)$  (измерения проводятся наблюдателями, расположенными в указанных точках). Здесь вновь учтено, в соответствии с преобразованиями Лоренца, что  $y_1 = y'_1 = 0$ ,  $y_2 = y'_2 = 0$ ,  $z_1 = z'_1 = 0$ ,  $z_2 = z'_2 = 0$ . Абсциссы точек вычисляем в соответствии с (5.2.18)<sup>5</sup>:

$$x'_1 = \frac{x_1 - v_0 t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - v_0 t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{5.3.5}$$

---

ясно, что координаты точек измерены **одновременно** именно в этой системе. В правых частях равенств (5.2.18) присутствуют координаты и времена в интересующей нас системе  $K$  – нужно использовать именно (5.2.18).

<sup>5</sup> См. сноску перед формулой (5.3.2).

Следовательно, можем найти связь длин стержня в системах  $K$  и  $K'$ :

$$l_0 = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = |x'_2 - x'_1| =$$

$$= \left| \frac{x_2 - v_0 t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - v_0 t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right| = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.3.6)$$

Длина  $l$  в системе  $K$  будет связана с длиной  $l_0$  стержня в системе  $K'$  выражением:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} = l_0 / \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1 \Rightarrow l < l_0. \quad (5.3.7)$$

Назовём **продольными** размеры тел в направлениях, параллельных вектору скорости  $\vec{v}_0$ . Следовательно, имеет место утверждение:

*Продольные размеры тел, измеренные в системе отсчёта, относительно которой они движутся, сокращаются по сравнению с продольными размерами этих тел, измеренными в системе отсчёта, относительно которых они покоятся.*

Именно это имеют в виду, когда говорят о сокращении размеров движущихся тел.

Сокращение продольных размеров тел является чисто кинематическим эффектом. Это значит, что если расположить стержень длиной  $l_0$  неподвижно в системе  $K$  параллельно оси абсцисс, то в системе  $K'$  длина этого  $l$  будет определяться тем же выражением (5.3.7), то есть будет меньше в  $\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}$  раз.

### 3. Замедление времени.

Рассмотрим вопрос о длительности промежутка времени в различных инерциальных системах отсчёта. Выберем в системе  $K'$  неподвижную по отношению к этой системе точку. Для упрощения рассуждений выберем точку  $M(x'_0, 0, 0)$  на оси  $x'$ . Пусть в этой точке (одной и той же) системы  $K'$  в различные моменты времени  $t'_1$  и  $t'_2 > t'_1$ , временной промежуток между которыми равен  $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$ , происходят два события. Возникает вопрос: «Какой промежуток времени между указанными выше событиями будет в системе  $K$ , относительно которой система  $K'$  движется со скоростью  $\vec{v}_0$ ?»

Воспользуемся преобразованиями Лоренца (5.2.19)<sup>6</sup> и найдём моменты времени осуществления указанных событий в системе  $K$ :

<sup>6</sup> См. сноски перед формулами (5.3.2) и (5.3.5).

$$t_1 = \gamma[t'_1 + (\beta / c)x'_0], \quad t_2 = \gamma[t'_2 + (\beta / c)x'_0]. \quad (5.3.8)$$

Для искомого промежутка времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  между рассматриваемыми событиями в системе  $K$  из выражений (5.3.8) находим:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\{[t'_2 + (\beta / c)x'_0] - [t'_1 + (\beta / c)x'_0]\} = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma\Delta t_0. \quad (5.3.9)$$

Время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с системой координат, называется *собственным* временем и обозначается  $\tau$  и, следовательно, можем записать  $\Delta t_0 = \tau_2 - \tau_1 = \Delta\tau$ , так что последняя формула примет вид:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\Delta\tau, \quad \Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5.3.10)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1 \Rightarrow \Delta t > \Delta\tau.$$

Из полученных формул (5.3.9)–(5.3.10) следует, что *собственный* промежуток времени  $\Delta\tau$  между событиями, осуществившимися в некоторой точке (*одной и той же*) системы  $K'$  в различные моменты времени, **меньше промежутка времени  $\Delta t$  между этими событиями, измеренного по часам системы  $K$** , относительно которой система  $K'$  движется. Иными словами, с точки зрения системы  $K$ , часы системы  $K'$  идут медленнее. Данный эффект, называемый замедлением времени, как явление сокращения длины, является кинематическим. Это значит, что если измерить промежуток времени  $\Delta\tau$  между двумя событиями в различные моменты времени в одной точке системы  $K$  часами, неподвижными по отношению к системе  $K$ , то промежуток времени  $\Delta t'$  между указанными событиями, измеренный часами, неподвижными по отношению к системе  $K'$ , будет в  $\gamma$  раз больше, чем  $\Delta\tau$ .

Отметим, что эффект замедления времени имеет многочисленные экспериментальные подтверждения. В частности, именно этот эффект объясняет поведение элементарных частиц мюонов при их прохождении через земную атмосферу. Известно, что мюоны образуются в верхних слоях атмосферы Земли (на высоте 20–30 км над поверхностью Земли) и являются очень нестабильными частицами, которые распадаются на другие частицы в среднем через  $\Delta\tau \approx 2 \cdot 10^{-6}$  с (промежуток времени измерен в системе отсчёта, связанной с мюоном). Даже если считать скорость движения мюонов равной скорости света (на самом деле скорость их движения близка,



но всё-таки меньше скорости света), то путь, который мюоны могут пройти в атмосфере Земли, будет порядка  $s \approx c\Delta\tau \approx (2 \cdot 10^{-6}) \cdot (3 \cdot 10^8) = 600$  м. Наблюдения, однако, показывают, что многие мюоны достигают поверхности Земли. Всё становится понятным, если учесть, что приведённое выше время жизни мюонов – собственное время их жизни. В системе же отсчёта, связанной с поверхностью Земли, время жизни мюонов будет значительно превосходить собственное время жизни, и поэтому многие мюоны достигают поверхности Земли до момента распада.

#### 4. Преобразование и сложение скоростей.

Напомним, что в механике Ньютона закон сложения скоростей определялся выражением  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ , которое здесь, по уже отмеченным выше причинам, неприменимо.

Для получения выражения преобразования скоростей в СТО рассмотрим материальную точку в системе  $K$ . В соответствии с определением вектора скорости материальной точки и проекций вектора на координатные оси находим проекции вектора скорости материальной точки в системе  $K$ :

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (5.3.11)$$

Аналогично в системе  $K'$  для проекций вектора скорости имеем:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (5.3.12)$$

Воспользуемся в (5.3.11) возможностью представления производной функции как отношения дифференциалов соответствующих величин (следующей из инвариантности формы первого дифференциала функции) и найдём дифференциалы этих величин из (5.2.19):

$$\begin{aligned} dx &= \gamma \left( \frac{dx'}{dt'} + v_0 \right) dt' ; \\ dy &= dy' ; \\ dz &= dz' ; \\ dt &= \gamma \left( 1 + (\beta / c) \frac{dx'}{dt'} \right) dt' . \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Из полученных формул и определений (5.3.12) для проекции  $v_x, v_y, v_z$  имеем:

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + v_0}{1 + v'_x \beta / c} ; \\
v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_y}{1 + v'_x \beta / c} = \frac{v'_y \sqrt{1 - (v_0 / c)^2}}{1 + v'_x \beta / c} ; \\
v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_z}{1 + v'_x \beta / c} = \frac{v'_z \sqrt{1 - (v_0 / c)^2}}{1 + v'_x \beta / c} .
\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

Обратное преобразование, в силу симметрии, будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{v_x - v_0}{1 - v_x \beta / c} ; \\
v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - v_x \beta / c} = \frac{v'_y \sqrt{1 - (v_0 / c)^2}}{1 - v_x \beta / c} ; \\
v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_z}{1 - v_x \beta / c} = \frac{v'_z \sqrt{1 - (v_0 / c)^2}}{1 - v_x \beta / c} .
\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Формулы упрощаются в случае движения частицы параллельно оси  $x$ , так как в этом случае  $v_y = v'_y = v_z = v'_z = 0$  и:

$$v = \frac{v' + v_0}{v' \beta / c + 1}, \quad v' = \frac{v - v_0}{1 - v \beta / c} . \tag{5.2.16}$$

В частности, при  $v' = c$  из (5.2.16) получим:

$$v = \frac{c + v_0}{c \beta / c + 1} = \frac{c + v_0}{v_0 / c + 1} = c \frac{c + v_0}{c + v_0} = c . \tag{5.2.17}$$

Таким образом, если частица в  $K'$  движется со скоростью света, то и в  $K$  её скорость движения будет равна скорости света, что полностью соответствует второму постулату СТО.

#### 5.4. Элементы релятивистской динамики

Проверка показывает, что законы классической механики Ньютона, такие, как второй Ньютона и закон сохранения импульса, не инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца.

Закон сохранения импульса отражает важнейшее свойство однородности пространства, и отказ от его использования вряд ли был бы оправдан. Поэтому решение возникшей проблемы искали путём изменения определения импульса.

Для того чтобы закон сохранения импульса стал инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца, оказалось, что **импульс материальной точки** (частицы) нужно определить выражением:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (5.4.1)$$

где  $m$  – масса рассматриваемого тела, которая является инвариантом по отношению к преобразованиям Лоренца<sup>7</sup>,  $\vec{v}$  – вектор скорости частицы в рассматриваемой инерциальной системе отсчёта,  $\beta = v/c$ .

При малых скоростях  $v \ll c$  выражение (5.4.1) переходит в классическое выражение импульса в механике Ньютона  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Из (5.4.1) также видно, что скорость света имеет предельный характер, так как при  $v \rightarrow c$  импульс неограниченно возрастает. Исключение составляют лишь частицы, масса которых равна нулю. В этом случае при  $v \rightarrow c$  для модуля импульса в (5.4.1) имеем неопределённость вида  $0/0$  и импульс может остаться конечным. Следовательно, равная нулю масса частицы означает, что она в любой инерциальной системе отсчёта движется со скоростью  $v = c$ .

Кроме того, как увидим ниже, в релятивистской динамике, в отличие от классической механики Ньютона, масса не обладает свойством аддитивности, то есть масса тела, состоящего из отдельных частиц, не равна сумме масс этих частиц. Наиболее ярко это проявляется в ядерной физике и физике элементарных частиц.

Полная энергия  $E$  частицы в релятивистской динамике определяется выражением:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (5.4.2)$$

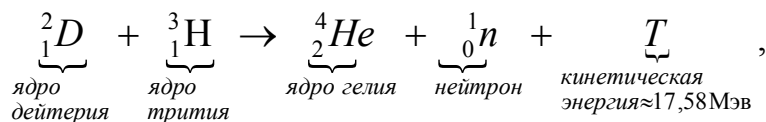
Если рассмотреть движение частицы с малыми скоростями  $v \ll c$ , то, используя два первых члена разложения функции (5.4.2)  $E(v)$  в ряд Маклорена, получим:

---

<sup>7</sup> Иногда выражение (5.4.1) записывают в виде  $\vec{p} = m_r \vec{v}$ , где вводят обозначение  $m_r = m_0 / \sqrt{1-\beta^2}$  и называют величину  $m_r$  «релятивистской массой» или «массой движения», в отличие от «массы покоя»  $m_0$ . Однако такая терминология в настоящее время считается устаревшей и не рекомендуется к использованию (см.: Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 1. М.: Наука, 1982. С. 236; Окунь Л. Б. Успехи физических наук. 1989. Т. 158, вып. 3. С. 511).

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mc^2 \frac{v^2}{c^2} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} = E_0 + T. \quad (5.4.3)$$

В полученном выражении (5.4.3) первое слагаемое  $E_0 = mc^2$  называется энергией покоя частицы, то есть это энергия частицы в инерциальной системе отсчёта, по отношению к которой частица покоится. Второе слагаемое  $T = \frac{1}{2}mv^2$  есть не что иное, как кинетическая энергия рассматриваемой частицы. Энергия покоя в (5.4.3) «играет роль» потенциальной энергии. Несмотря на то, что определение полной энергии даётся для частицы, при этом подразумевается материальное тело, которое в рассматриваемых условиях считается материальной точкой. Таким образом, определение полной энергии в равной степени относится и к любому сложному телу, состоящему из множества частиц. При этом под массой понимается масса данного тела в «целом», а под скоростью понимается скорость его движения в «целом». Энергия покоя составного тела включает в себя кроме энергий покоя частиц, массы покоя которых есть  $E_{0k} = m_k c^2$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $N$  – число частиц), и энергию взаимодействия этих частиц друг с другом. Это значит, что  $mc^2 \neq \sum_i m_i c^2$ , или  $mc^2 \neq c^2 \sum_i m_i \Rightarrow m \neq \sum_i m_i$ , то есть, как уже отмечалось, масса не обладает свойством аддитивности. Указанная разница масс является основой для всей современной ядерной энергетики и современного ядерного оружия. В качестве примера можно привести термоядерные реакции вида:



в которой масса частиц слева превышает массу частиц справа.

Высвобождающая в такой реакции энергия может быть поглощена теплоносителем и использована в промышленных нуждах. Правда, имеются значительные технические проблемы, не позволяющие пока управлять процессом термоядерного синтеза. В результате подобного рода реакции используются пока только в военных целях. Но имеются примеры и управляемых ядерных реакций. К ним относятся реакции деления тяжёлых ядер урана  ${}_{92}^{235}U$ , на которых основана работа атомных электростанций.

Имеется и другое различие полученного выражения от классического определения полной механической энергии  $E = U + T$  в механике Ньютона. В выражении (5.4.3) полная энергия свободной частицы (тела) определено точно (без какой-либо произвольной постоянной), тогда как в ме-

ханике Ньютона полная механическая энергия определена с точностью до произвольной постоянной (поскольку с точностью до произвольной постоянной определена потенциальная энергия  $U$ ).

Из сопоставлений выражений (5.4.1) и (5.4.2) следует формула для связи энергии и импульса:

$$\left. \begin{aligned} \vec{p} &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \vec{p} = \underbrace{\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{E/c^2} \vec{v} \\ E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \frac{E}{c^2} = \underbrace{\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{\uparrow} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}. \quad (5.4.4)$$

Из (5.4.1) и (5.4.2) легко найти ещё одну формулу связи импульса и энергии в релятивистской механике. Для этого возведём оба указанных выражения в квадрат и проделаем несложные преобразования:

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= \frac{m^2 v^2}{1-v^2/c^2} \Rightarrow \frac{p^2}{m^2 c^2} = \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} \quad (a) \\ E^2 &= \frac{m^2 c^4}{1-v^2/c^2} \Rightarrow \frac{E^2}{m^2 c^4} = \frac{1}{1-v^2/c^2} \quad (b) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(b) - (a): \frac{E^2}{m^2 c^4} - \frac{p^2}{m^2 c^2} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Из последних выражений для полной энергии частицы вытекает, в частности, вывод о том, что для случая безмассовой частицы (масса покоя частицы равна нулю) её скорость равна скорости света (в любой инерциальной системе отсчёта). Действительно, из равенства правой части (5.4.5) нулю следует  $E = pc$ , или  $p = E/c$ . Сравнение этого результата с (5.4.4) показывает, что оба выражения согласуются между собой только в том случае, если  $v = c$ , то есть безмассовая частица всегда движется со скоростью света. К таким частицам относятся, например, фотон и нейтрино.

**Основное уравнение (основной закон)** релятивистской динамики записывается в следующем виде:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (5.4.6)$$

Несмотря на схожесть формы основного уравнения динамики в релятивистской динамике и в классической механике Ньютона (там тоже можно

записать второй закон Ньютона в виде  $\vec{F} = m(d\vec{v} / dt) = d\vec{p} / dt$ ), выражение (5.4.6) существенно отличается от классического аналога по содержанию.

Выполнив дифференцирование в (5.4.6), получим:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + m\vec{v} \frac{d}{dt} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m\vec{v}}{c^2} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \frac{d}{dt} (v^2) .\end{aligned}\quad (5.4.7)$$

В последнем слагаемом полученного выражения учтём, что:

$$\frac{d}{dt} (v^2) = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a} , \quad (5.4.8)$$

и (5.4.7) примет вид:

$$\vec{F} = \frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{m\vec{v}}{c^2} \frac{(\vec{v} \cdot \vec{a})}{(1-\beta^2)^{3/2}} . \quad (5.4.9)$$

Видим, что в общем случае ускорение не совпадает с направлением силы (в отличие от классической механики Ньютона, где  $\vec{F} = m\vec{a}$  и  $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{a}$ ). В релятивистском случае нет одного единственного скаляра (массы), связывающего векторы ускорения и силы. Поясним эту ситуацию дополнительными разъяснениями.

Представим ускорение в виде суммы тангенциального ускорения  $\vec{a}_\tau$  (направлено вдоль вектора скорости  $\vec{v} = v\vec{\tau}$ ) и нормального ускорения  $\vec{a}_n$  (направлено перпендикулярно вектору скорости к центру кривизны), то есть:  $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$ . При этом  $\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot (\vec{a}_\tau + \vec{a}_n) = \vec{v} \cdot \vec{a}_\tau + \vec{v} \cdot \vec{a}_n = v \cdot a_\tau$ ; ( $\vec{v} \perp \vec{a}_n \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{a}_n = 0$ ). Тогда вектор силы можно также представить в виде двух составляющих  $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n = F_\tau \vec{\tau} + F_n \vec{n}$ .

Выражение (5.4.9) в этом случае принимает вид:

$$\vec{F} = \frac{m(\vec{a}_\tau + \vec{a}_n)}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{m\vec{v}}{c^2} \frac{(\vec{v} \cdot (\vec{a}_\tau + \vec{a}_n))}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \underbrace{\frac{m\vec{a}_n}{\sqrt{1-\beta^2}}}_{\vec{F}_n} + \underbrace{\left( \frac{m\vec{a}_\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{m\vec{v}}{c^2} \frac{va_\tau}{(1-\beta^2)^{3/2}} \right)}_{\vec{F}_\tau} ,$$

откуда для длины составляющей  $\vec{F}_n$  находим:

$$F_n = |\vec{F}_n| = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} a_n = m_{\perp} a_n, \quad (5.4.10)$$

а для длины составляющей  $\vec{F}_{\tau}$ :

$$\begin{aligned} F_{\tau} = |\vec{F}_{\tau}| &= \frac{ma_{\tau}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{mv}{c^2} \frac{va_{\tau}}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{ma_{\tau}}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( 1 + \frac{v^2/c^2}{(1-v^2/c^2)} \right) = \frac{ma_{\tau}}{(1-\beta^2)^{3/2}} = m_{\parallel} a_{\tau}. \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Обсудим два частных случая взаимного расположения векторов силы, действующей на частицу, и её вектора скорости.

1. Вектор силы и вектор скорости взаимно перпендикулярны друг другу. В этом случае из (5.4.10) имеем:

$$F_{\tau} = 0; \quad F = F_n = m_{\perp} a_n; \quad m_{\perp} = m / \sqrt{1-\beta^2}. \quad (5.4.12)$$

Масса  $m_{\perp}$  называется иногда поперечной массой.

2. Вектор силы и вектор скорости параллельны друг другу. В этом случае из (5.4.11) имеем:

$$F_n = 0, \quad F = F_{\tau} = \frac{ma_{\tau}}{(1-\beta^2)^{3/2}} = m_{\parallel} a_{\tau}; \quad m_{\parallel} = \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}}. \quad (5.4.13)$$

Масса  $m_{\parallel}$  называется иногда продольной массой. Отношение продольной массы к поперечной массе  $m_{\parallel} / m_{\perp} = 1 / (1-\beta^2) > 1$ , то есть  $m_{\parallel} \neq m_{\perp}$ , а точнее  $m_{\parallel} > m_{\perp}$ .

Возвращаясь к аргументации о бесперспективности введения каких-либо масс, отличных от инвариантной по отношению к преобразованиям Лоренца массы  $m$ , добавим следующее. Поскольку существует сколько угодно много вариантов представления вектора в виде линейной комбинации двух других не коллинеарных векторов, то и масс, подобных полученным выше  $m_{\parallel}$  и  $m_{\perp}$  можно ввести столько же. А это означает, что вообще нет смысла говорить о таких массах, а оставить, как и упоминалось выше и в сноске после формулы (5.4.1), лишь одну, инвариантную по отношению к преобразованиям Лоренца, массу  $m$ .

## Глава 6. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

### 6.1. Статистический и термодинамический методы

В настоящее время не вызывает сомнения тот факт, что физические тела состоят из мельчайших электрически нейтральных структурных единиц (частиц), обладающих химическими свойствами данного вещества, которые называют молекулами. Известно также, что молекулы состоят из атомов, которые, однако, химическими свойствами данного вещества не обладают (за исключением ситуации, когда вещество находится в атомарном состоянии, как, например, инертные газы). Простые одноатомные молекулы имеют размер порядка  $10^{-10}$  м. Сложные многоатомные молекулы могут иметь размеры в сотни и тысячи раз больше. В дальнейшем структурные элементы наименьших размеров, обладающие химическими свойствами данного вещества, будем называть молекулами, независимо от того, являются они таковыми на самом деле или являются атомами. Иногда, во избежание тавтологий, вместо термина «молекула» будем использовать термин «частица».

Любое тело, состоящее из большого количества молекул, будем называть *макроскопическим* телом (*макроскопической* системой). Хотя движение микрообъектов, к которым относятся и молекулы, подчиняется законам квантовой механики, часто упрощённые модели, основанные на классической механике, дают удовлетворительные не только качественные, но и количественные результаты. Мы далее для простоты будем исходить из этого факта и будем основывать наши оценки на базе классической механики. Количество молекул, входящих в состав окружающих нас тел, настолько велико, что это становится принципиальным моментом, не позволяющим использовать законы механики, определяющие перемещение отдельных молекул в пространстве и времени, для описания свойств и законов изменения свойств макроскопических тел<sup>8</sup>. Именно по этой

---

<sup>8</sup> Действительно, возьмём для определённости макроскопическую систему, состоящую из  $10^{23}$  молекул (далее станет ясно, почему выбран такой порядок количества молекул макросистемы), каждую из которых будем для простоты считать материальной точкой (МТ). Поскольку для одной МТ нужно три дифференциальных уравнения – уравнения движения (второй закон Ньютона, спроектированный на три координатные оси), то для описания рассматриваемой макросистемы нужно записать  $3 \cdot 10^{23}$  уравнений, в каждом из которых нужно описать силы (задать явную координатную зависимость, а в нестационарном случае и зависимость от времени) и задать по два начальных условия. С задачей решения



причине для описания макроскопических систем используются методы теории вероятностей и математической статистики, в которых свойства и поведение изучаемых систем описываются при помощи средних значений интересующих нас физических величин, и называется такой метод **статистическим**. Сущность данного метода можно пояснить на примере понятия температуры идеального газа. Температура идеального газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия (это понятие разъясняется далее), определяется кинетическими энергиями движения молекул данного газа. Однако кинетические энергии молекул различны, и для определения температуры нужна величина, которая относится ко всем молекулам системы. В качестве простейшей такой величины выступает средняя кинетическая энергия молекулы, вычисленная по известному распределению кинетических энергий молекул (вопрос о нахождении этого распределения также будет обсуждаться далее).

В противоположность статистическому методу, который делает выводы на основе представлений о молекулярном строении вещества, **термодинамический** метод основан на описании макроскопической системы при помощи непосредственно наблюдаемых величин (параметров) и установлении связей между ними. К таким параметрам относятся, например, объём  $V$ , давление  $p$ , температура  $T$ , концентрация  $n$ , поляризованность  $\vec{P}$  и другие. Эти параметры относятся ко всей рассматриваемой системе, а

---

полученной системы дифференциальных уравнений не в состоянии справиться ни одна из существующих вычислительных систем. Но даже если предположить существование такой мощной вычислительной системы, то малейшая неточность в задании начальных условий может кардинальным образом повлиять на характер движения молекул и поведение системы в целом и «обесценить» полученный результат. Но решающее значение имеют не указанные факторы, а время, необходимое на подготовку и ввод задачи в вычислительную систему, и анализ полученных результатов. Действительно, если предположить, что мы будем очень «шустры» и умудримся потратить всего (!) по 1 секунде на ввод в вычислительную систему каждого из уравнений движения с начальными условиями, то потратим  $3 \cdot 10^{23}$  с  $\cong 9,51 \cdot 10^{15}$  лет. Если учесть, что время существования Вселенной составляет около  $13,8 \cdot 10^9$  лет  $\cong 4,35 \cdot 10^{17}$  с, то видим, что данная задача неосуществима, поскольку время ввода данных превышает время существования Вселенной примерно в  $6,9 \cdot 10^5$  раз!!! Добавим к этому время, необходимое на анализ полученных результатов (оно, в лучшем случае, не менее времени ввода данных), чтобы понять, что на самом деле ситуация значительно хуже приведённой выше «оптимистичной» оценки, а описание движения молекул системы на основе уравнений механики фактически неосуществимо.

величины, связанные с её молекулярной структурой (то есть характеристики и особенности движения отдельных молекул системы), не входят в термодинамические расчёты. Физическая наука, использующая указанный метод, называется **термодинамикой**. Её основу составляет совокупность опытных фактов – законов термодинамики, называемых **началами термодинамики**. Хотя законы термодинамики и следствия из них не зависят от внутреннего устройства вещества, в ряде случаев термодинамика привлекает молекулярно-кинетические модели для иллюстрации своих выводов.

## 6.2. Основные понятия термодинамики

Всякое изучаемое тело в термодинамике называют системой. Важнейшую роль в термодинамике играет состояние **термодинамического равновесия** (ТДР) системы. Дать универсальное и всеобъемлющее определение ТДР, применимое к системам, содержащим вещества в различных фазах и агрегатных состояниях в присутствии химических реакций и различных внешних полей, практически невозможно. Поэтому мы ограничимся простейшими ситуациями и примерами, которые, по мере необходимости, можно уточнять и обобщать. Опыт показывает, что любая изолированная от внешних воздействий система через некоторое время переходит в состояние, когда её термодинамические параметры принимают одинаковые значения во всех точках рассматриваемой системы и впоследствии неизменны во времени. Именно это состояние системы и есть состояние ТДР. Только в состоянии ТДР можно говорить о параметрах системы. Например, температуре системы, давлению в системе и т. д. Если система находится в состоянии ТДР, то в ней отсутствуют любые потоки (вещества, энергии, импульса и т. д.).

Если в разных точках изолированной от внешних воздействий системы (вернее, в некоторых окрестностях этих точек<sup>9</sup>) термодинамические параметры имеют различные значения, то система является **неравновесной**. В неравновесной системе возникают потоки, обусловленные пространственной неоднородностью термодинамических параметров. Например, если сосуд с водой стоит на газовой горелке, то слои воды, непосредственно примыкающие к нагреваемой горящим газом поверхности, будут иметь более высокую температуру и возникнут потоки, стремящиеся вы-

---

<sup>9</sup> Окрестность должна быть достаточно малой, чтобы в её пределах имело равенство рассматриваемых параметров, и в то же время достаточно большой, чтобы её можно было считать макроскопической системой.

ровнять температуру в сосуде (конвективный поток, поток тепла за счёт теплопроводности жидкости, тепловое излучение). К неравновесной системе понятие *параметр системы неприменимо*.

В качестве постулата, подтверждаемого всеми опытными данными, в термодинамике выступает уже приведённое ранее утверждение (принцип равновесия):

*Любая физическая система, изолированная от воздействия на неё внешних тел, приходит в состояние термодинамического равновесия.*

Время  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n$  – число параметров системы), в течение которого изучаемый параметр  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , в процессе перехода системы из неравновесного состояния в состояние ТДР примет равновесное значение, называется **временем релаксации** данного параметра. Наибольшее из времён релаксации всех параметров системы  $\tau = \max_{i=1,2,\dots,n} \tau_i$  называется

**временем релаксации системы.**

Из принципа равновесия термодинамики следует, что если термодинамическая система была подвержена внешнему воздействию, которое было затем прекращено, то в итоге она перейдёт в равновесное состояние, в общем случае отличающееся от исходного равновесного состояния (до воздействия). Такой переход называется термодинамическим процессом. Если процесс протекает достаточно медленно, то фактически в каждый момент времени успевает установиться равновесное состояние любого параметра системы  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то есть имеет место состояние ТДР. Процессы, состоящие из последовательности равновесных состояний, называются равновесными (квазистатическими)<sup>10</sup>. Ясно, что все реальные процессы являются неравновесными и могут лишь в большей или меньшей мере приближаться к введённому идеализированному равновесному процессу.

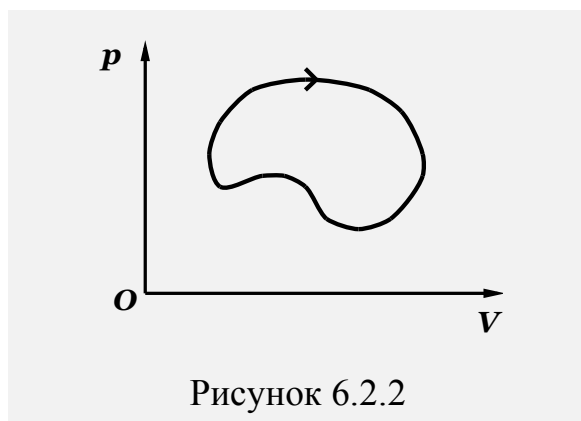
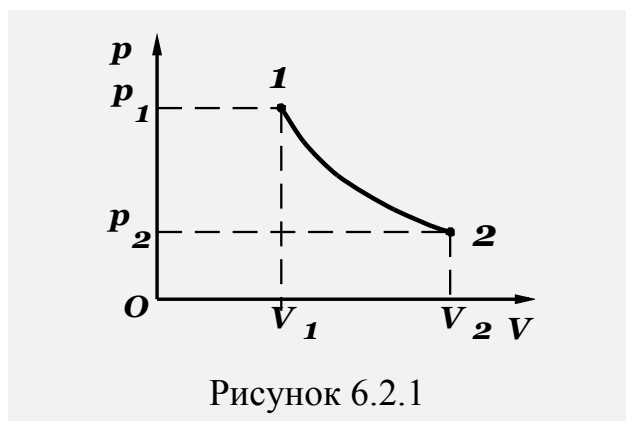
Количественное сформулированное условие равновесности (квазистатичности) процессов можно выразить неравенством:

$$\left| \frac{da_i}{dt} \right| \ll \left| \frac{\Delta a_i}{\tau} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.2.1)$$

где  $\Delta a_i$  – приращение параметра  $a_i$  за промежуток времени  $\tau$ , в течение которого система переходит из одного равновесного состояния в другое равновесное состояние.

<sup>10</sup> Такой процесс должен представлять последовательность неограниченно близких друг к другу равновесных состояний и продолжаться неограниченно долго.

Равновесные состояния и равновесные процессы можно изображать на плоских диаграммах. Для этого выбирают пару параметров системы, например  $(p, V)$ , и значения параметров откладывают на прямоугольных декартовых координатах (рисунок 6.2.1). Аналогично можно выбрать любые другие пары параметров, например  $(p, T)$ ,  $(T, V)$  и другие, и строить для них диаграммы. Отметим, что изображать на диаграммах можно только равновесные состояния и процессы.



Если начальная и конечная точки процесса совпадают (и это состояние не единственное), то такой равновесный процесс называют **круговым** процессом, или **циклом** (рисунок 6.2.2). Стрелкой на диаграмме кругового процесса указывается порядок (направление) перехода из одного равновесного состояния системы в другое, и говорят о процессах по часовой стрелке и против часовой стрелки.

Опыт и теория показывают, что основные параметры рассматриваемой системы связаны между собой, то есть имеется некоторое уравнение, называемое **уравнением состояния системы**, определяющее функциональную зависимость этих параметров друг от друга. Например, для тела в газообразном состоянии в качестве основных параметров выступают объём  $V$ , давление  $p$  и температура  $T$ , которые связаны между собой уравнением состояния  $f(p, V, T) = 0$ . В частности, для идеального газа уравнением состояния является уравнение Менделеева – Клапейрона (Менделеев Дмитрий Иванович, рус., 1834–1907; Клапейрон Бенуа Поль Эмиль, фр., 1799–1864):

$$pV = \nu RT, \quad (6.2.1)$$

где  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$  – универсальная газовая постоянная,  $\nu = m / \mu$  – количество вещества,  $m$  – масса вещества,  $\mu$  – молярная масса вещества.

Процесс называют **обратимым**, если система после перехода из начального состояния в конечное через некоторый ряд равновесных состояний может быть вновь переведена в исходное состояние через тот же ряд равновесных состояний, но проходимый системой в обратном порядке. В противном случае процесс называют **необратимым**.

Систему называют **изолированной**, если она не взаимодействует с телами, не входящими в рассматриваемую систему.

### 6.3. Внутренняя энергия. Работа и теплота. Первый закон термодинамики

Внутренней энергией  $U$  тела называют часть его полной энергии за вычетом кинетической энергии движения тела как целого и потенциальной энергии тела во внешнем поле. Таким образом, во внутреннюю энергию входят: кинетическая энергия движения молекул (поступательного и вращательного); потенциальная энергия их взаимодействия; энергия колебательного движения атомов в молекулах; энергия различных видов движения частиц в атомах (включая энергию ядер атомов). В частности, внутренняя энергия идеального газа равна сумме кинетических энергий поступательного движения всех молекул (частиц) газа, находящихся в непрерывном и беспорядочном тепловом движении. Наиболее важным свойством внутренней энергии системы является то, что она является **функцией состояния** системы. Это означает, что значение внутренней энергии в рассматриваемом состоянии не зависит от того, каким способом система переведена в данное состояние. Отсюда следует, что при переходе системы из начального состояния с внутренней энергией  $U_1$  в конечное состояние с внутренней энергией  $U_2$  приращение (изменение) энергии  $\Delta U = U_2 - U_1$  не зависит от способа перехода системы между указанными состояниями.

Существует только два способа изменения внутренней энергии системы:

1) за счёт работы, производимой системой по изменению положения внешних тел (при механическом понимании работы) или по изменению потенциальной энергии этих тел в каких-либо силовых полях;

2) за счёт передачи тепла системе (осуществляемой без изменения положения внешних тел и их потенциальной энергии в силовых полях). Передача тепла (теплопередача) может осуществляться тремя способами – за счёт теплопроводности тел; за счёт конвективного движения (в газах и жидкостях); за счёт теплового излучения тел.

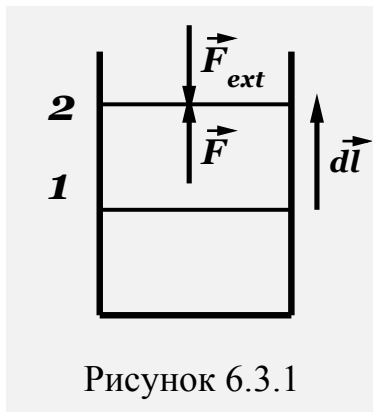


Рисунок 6.3.1

Поясним изменение внутренней энергии системы за счёт работы по перемещению внешних тел (здесь и всюду далее под работой подразумевается эта величина в механическом понимании) на примере газа, находящегося в сосуде цилиндрической формы под поршнем, который может без трения перемещаться вдоль стен цилиндра (рисунок 6.3.1). Пусть под действием силы давления молекул газа  $\vec{F}$  поршень совершает элементарное перемещение из положения 1 в положение 2. Элементарная работа  $dA$  силы  $\vec{F}$  при этом будет определяться известным из механики выражением:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos(\vec{F}, d\vec{l}) = (F / S) \cdot (S dl \cos(\vec{F}, d\vec{l})) = p dV, \quad (6.3.1)$$

где  $S$  – площадь поршня;  $p = F / S$  – давление газа в сосуде;  $dV = S dl \cos(\vec{F}, d\vec{l})$  – изменение объёма газа при перемещении поршня из положения 1 в положение 2<sup>11</sup>.

Работа  $dA = F dl \cos(\vec{F}, d\vec{l}) = p dV$  положительна или отрицательна, в зависимости от знака  $\cos(\vec{F}, d\vec{l})$ :

- при расширении  $\vec{F} \uparrow \uparrow d\vec{l} \Rightarrow \cos(\vec{F}, d\vec{l}) = 1 \Rightarrow dV > 0 \Rightarrow dA > 0$ ;
- при сжатии  $\vec{F} \uparrow \downarrow d\vec{l} \Rightarrow \cos(\vec{F}, d\vec{l}) = -1 \Rightarrow dV < 0 \Rightarrow dA < 0$ .

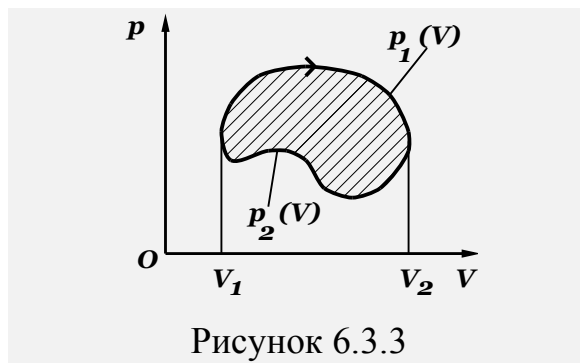
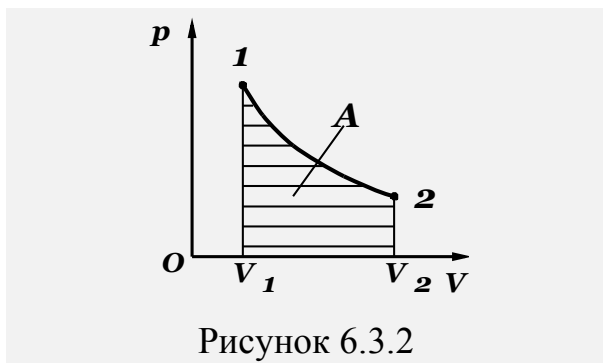
Можно показать, что полученное выражение  $dA = p dV$  для элементарной работы справедливо при любой форме сосуда, ограничивающего изменяющий объём газ. Используя выражение для элементарной работы,

<sup>11</sup> Для обеспечения возможности использования понятия параметров системы (в данном случае давления) процесс перемещения поршня должен осуществляться так, чтобы система была всегда в состоянии ТДР, то есть чтобы сила, создаваемая давлением газа внутри сосуда на поршень, постоянно была «почти» уравновешена внешней силой  $\vec{F}_{ext}$ , действующая на поршень. Такое изменение состояния можно осуществить, например, при очень медленном увеличении температуры газа в сосуде под поршнем или постепенном и очень медленным уменьшением модуля силы  $\vec{F}_{ext}$ . Более обстоятельное и подробное обсуждение этого вопроса можно найти в классической книге по термодинамике: Путилов К. А. Термодинамика. М.: Наука, 1971.

можем записать формулу для вычисления работы  $A_{12}$  (или просто  $A$  – индексы опускают, если нет опасности возникновения недоразумений) при равновесном изменении состояния газа от объёма  $V_1$  до объёма  $V_2$ :

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \text{ или, опуская индексы: } A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (6.3.2)$$

На диаграмме  $p, V$  (рисунок 6.3.2) работа в равновесном процессе изменения объёма газа изображается в виде заштрихованной площади, а именно: эта работа равна площади криволинейной трапеции, заключённой под кривой  $p(V)$ , осью абсцисс и прямыми  $V = V_1$  и  $V = V_2$ . При этом работа может быть и положительной, и отрицательной, в зависимости от величин начального и конечного объёмов газа. Независимо от знака работы, принято говорить, что система совершает работу, хотя при  $A_{12} < 0$  имело бы смысл говорить, что работа совершается внешними телами. Однако этого не делают для сохранения единой терминологии. Очевидно, что работа при равновесном изменении состояния газа от объёма  $V_1$  до объёма  $V_2$  зависит от вида функции  $p(V)$ , то есть неоднозначно определяется начальным и конечным состояниями системы.



В циклическом равновесном процессе работа газа представляется площадью заштрихованной плоской фигуры (рисунок 6.3.3), ограниченной замкнутой линией (контуром), изображающей цикл, и также может быть и положительной, и отрицательной, в зависимости от направления обхода контура. А именно, если контур обходится по часовой стрелке (как изображено на рисунке), работа положительна, в противном случае работа отрицательна. Вновь отметим, что работа в круговом равновесном процессе зависит от вида функций  $p_1(V)$  и  $p_2(V)$ , то есть при совершении кругового процесса системой совершается различная работа, зависящая от вида совершённого цикла.

Тот факт, что работа, совершённая системой, зависит от условий, при которых она совершается, означает, что работа не является функцией состояния системы.

Рассмотрим теперь вопрос о второй форме изменения внутренней энергии – теплопередаче. Как уже отмечено выше, в этом случае внутренняя энергия системы может изменяться за счёт трёх различных процессов – теплопроводности, конвективного теплообмена и теплового излучения, причём независимо от вида процесса, теплообмен осуществляется без изменения положения внешних тел, то есть без совершения работы. Во всех трёх случаях теплопередачи происходит непосредственное изменение кинетической энергии молекул системы за счёт этого процесса (процесса теплопередачи). **Часть конечного приращения внутренней энергии за счёт теплопередачи обозначается  $\Delta Q$  и называется количеством тепла, сообщённого системе.** В элементарном процессе аналогичная часть приращения внутренней энергии обозначается  $dQ$ . Из определения следует, что количество тепла  $dQ$  (или  $\Delta Q$ ) может быть и положительным (внутренняя энергия системы при этом увеличивается) и отрицательным (внутренняя энергия системы при этом уменьшается). Как и в случае с работой системы, независимо от знака количества тепла принято говорить, что система получает количество тепла  $\Delta Q$ , хотя при  $\Delta Q < 0$  имело бы смысл говорить, что система передаёт некоторое количество тела внешним телам. Вновь этого не делают для сохранения единой терминологии. Опыт показывает, что сообщённое системе количество тепла зависит от того, при каких условиях осуществлялся процесс теплообмена. Например, если обозначить количество тепла, сообщённое некоторому количеству вещества в газообразном состоянии при постоянном (зафиксированном) давлении  $\Delta Q_p$ , а количество тепла, сообщённое этому же телу при постоянном (зафиксированном) объёме  $\Delta Q_V$ , то эти величины будут не равны между собой. Это означает, что количество тепла, сообщённое системе, зависит от условий (способа) передачи тепла рассматриваемой системе. По этой причине следует воздерживаться от употребления словосочетания «тепловая энергия», поскольку, как отмечено ранее, важнейшим свойством внутренней энергии системы является то, что она является **функцией состояния** системы и её изменение не зависит от того, каким способом система переведена из одного состояния в другое состояние.

Таким образом, совершаемая системой **работа** и передача системе некоторого **количество тепла** функциями состояния системы не являются.



Отметим ещё одно обстоятельство. Работа системы и количество полученного ею тепла имеют качественное различие. Оно состоит в том, что работа системы может совершаться как за счёт изменения внутренней энергии, так и за счёт других видов энергии этой системы (например, за счёт кинетической энергии системы в целом).

Прежде чем сформулировать первый закон термодинамики, обратим внимание на согласование знаков у величин изменения внутренней энергии совершённой системой работы и полученного этой системой количества тепла, а именно:

- совершение работы  $A_{12}$  системой приводит к уменьшению внутренней энергии, то есть знаки работы  $A_{12}$  и изменения внутренней энергии  $\Delta U$  должны быть противоположными;
- сообщение системе некоторого количества тепла  $\Delta Q$  приводит к увеличению внутренней энергии, то есть знаки количества тепла  $\Delta Q$  и изменения внутренней энергии  $\Delta U$  должны быть одинаковыми.

Поскольку других способов изменения внутренней энергии системы, кроме совершения работы и теплообмена нет, это означает, что имеет место утверждение, называемое *первым законом (началом) термодинамики*:

*Изменение внутренней энергии системы  $\Delta U$  равно количеству тепла  $\Delta Q$ , полученному системой за вычетом работы  $A_{12}$ , произведённой системой, то есть:*

$$\Delta U = \Delta Q - A_{12}, \quad (6.3.3)$$

или в дифференциальной форме:

$$dU = dQ - dA. \quad (6.3.4)$$

Первый закон термодинамики по существу является законом сохранения энергии и является эмпирическим законом, то есть он основан и подтверждается совокупностью всех имеющихся опытных данных.

Иногда формулы (6.3.3) и (6.3.4) записывают иначе:

$$\Delta Q_x = \Delta U + A_{x,12} \quad (6.3.5)$$

и

$$dQ_x = dU + dA_x. \quad (6.3.6)$$

Разумеется, с точки зрения применения приведённых выражений при проведении расчётов в конкретных практических задачах, оба варианта за-

писи первого начала термодинамики равноценны. Однако в формулах (6.3.5) и (6.3.6) с обеих сторон равенств находятся величины, не являющиеся функциями состояния системы, что отмечено индексом «х», означающим некоторое условие процесса теплопередачи и совершения работы. Указанное замечание делает выражения (6.3.3) и (6.3.4) более предпочтительными при формулировке первого начала термодинамики, поскольку результат изменения внутренней энергии определяется только начальным и конечным состояниями этой системы и не зависит от вида процесса, который перевёл систему между этими состояниями. Иногда, впрочем, индекс «х» отсутствует и в уравнениях (6.3.3) и (6.3.4), но это совсем не означает независимости результата от вида процессов теплопередачи и совершения работы, а означает, что условие не конкретизировано.

Можно создать специальные условия изменения внутренней энергии системы, при выполнении которых одно из слагаемых в (6.3.3) будет равным нулю, но быть равными нулю одновременно оба слагаемых в (6.3.3) не могут.

Как уже отмечалось выше, внутренняя энергия является функцией состояния системы, в отличие от количества тепла, полученного системой и работы, совершенной системой. Это означает, что внутренняя энергия системы не изменяется при осуществлении в ней кругового процесса, или:

$$\oint_l dU = 0, \quad (6.3.7)$$

но при этом необходимо помнить, что в данном циклическом процессе  $\oint_l dQ \neq 0$  и  $\oint_l dA \neq 0$ .

Двигатель, действующий периодически (циклически) и совершающий работу большую, чем энергия, подводимая к двигателю извне, называется **вечным двигателем первого рода**. Первый закон термодинамики указывает на **невозможность** построения вечного двигателя первого рода.

В заключение отметим, что первый закон термодинамики является, по сути, законом сохранения энергии и не указывает на направление процессов, удовлетворяющих условиям (6.3.3) и (6.3.4).

## 6.4. Теплоёмкость

Количественной характеристикой процесса теплопередачи, осуществляемого некоторой термодинамической системой с окружающими телами, является теплоёмкость  $C$ . При этом масса и количество вещества рассматриваемой системы считаются неизменными. Как отмечено ранее,

изменение внутренней энергии в процессе теплопередачи зависит от условий. Отсюда следует, что для количественного описания изменений параметров рассматриваемой системы необходимо указывать условия, при которых осуществляется процесс теплопередачи. Условия теплопередачи обычно определяют постоянством какого-либо параметра  $x$  системы –  $p$ ,  $V$ , ... и т. д.

Опыт показывает, что в процессе теплопередачи при некотором условии  $x$  изменение температуры рассматриваемой системы в диапазоне температур от  $T$  до  $T + \Delta T$  и сообщённое системе количество тепла  $\Delta Q$  пропорциональны друг другу, то есть связаны соотношением:

$$\Delta Q_x = \langle C_x \rangle \cdot \Delta T \quad (\text{или} \quad \langle C_x \rangle = \frac{\Delta Q_x}{\Delta T}), \quad (6.4.1)$$

в котором величина  $\langle C_x \rangle$  называется теплоёмкостью этой системы при заданном условии постоянства параметра  $x$ . Как следует из определения, по смыслу  $\langle C_x \rangle$  является средней величиной в рассматриваемом температурном диапазоне. Именно этот факт отмечен угловыми скобками  $\langle \rangle$ .

Для теплоёмкости системы при конкретной температуре  $T$  и при указанном условии  $x$  нужно перейти к элементарному процессу, то есть:

$$dQ_x = C_x \cdot dT \quad (\text{или} \quad C_x = \frac{dQ_x}{dT}). \quad (6.4.2)$$

Из приведённых определений следует, что в СИ теплоёмкость измеряется в Дж/К. Формулы, приведённые в скобках выражений (6.4.1) и (6.4.2), нужно понимать именно как отношения количеств тепла в процессах теплопередачи при некотором условии  $x$  к изменениям температуры рассматриваемой системы в данных процессах. Особенно это замечание относится к формуле  $C_x = dQ_x/dT$ , которую ни в коем случае нельзя воспринимать, как производную  $(\partial Q/\partial T)|_{x=const}$ . В следующем разделе будут приведены выражения для величины  $dQ_x$  в некоторых конкретных ситуациях, из которых станет понятнее смысл данного замечания.

Если температурной диапазон выбран не слишком широким, то теплоёмкость системы, вычисленная по формуле (6.4.2), будет в нём практически постоянной и будет совпадать со средней теплоёмкостью по данному диапазону температур, вычисленной по формуле (6.4.1). Далее, если не оговаривается противное, мы считаем данное условие выполненным и скобки усреднения будем опускать.

Следует отметить не очевидные из определения факты зависимости теплоёмкости системы от её массы, химического состава, агрегатного состояния и других факторов (кроме условия  $x$  процесса теплопередачи).

В зависимости от массы или от количества вещества различают теплоёмкости удельную и молярную.

**Удельной теплоёмкостью** однородной системы массой  $m$  называют отношение теплоёмкости данной системы к её массе, то есть:

$$c_x = C_x / m = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q_x}{\Delta T}. \quad (6.4.3)$$

Видим, что в СИ удельная теплоёмкость измеряется в Дж/(кг·К).

**Молярной теплоёмкостью** однородной системы, содержащей количество вещества, равное  $\nu = m / \mu = N / N_A$  ( $\mu$  – молярная масса вещества рассматриваемой системы;  $N_A$  – число Авогадро (Авогадро Амедео, итал., 1776–1856)), называют отношение теплоёмкости данной системы к количеству вещества этой системы, то есть:

$$C_{(\mu)x} = C_x / \nu = \frac{\mu}{m} \frac{\Delta Q_x}{\Delta T} = \mu \cdot c_x. \quad (6.4.4)$$

Индекс  $(\mu)$  в этом случае означает именно тот факт, что речь идёт о молярной теплоёмкости. В СИ молярная теплоёмкость измеряется в Дж/(моль·К).

В простых однофазных системах (например, идеальный газ) теплоёмкость чаще всего определяют для двух случаев:

- при постоянном объёме (обозначается  $C_V$ ) определяется выражением:

$$dQ_V = C_V dT \quad (\text{или } C_V = \frac{dQ_V}{dT}); \quad (6.4.5)$$

- при постоянном давлении (обозначается  $C_p$ ) определяется выражением:

$$dQ_p = C_p dT \quad (\text{или } C_p = \frac{dQ_p}{dT}). \quad (6.4.6)$$

Ясно, что в условиях постоянства указанных параметров можно вычислить удельные и молярные теплоёмкости, то есть  $c_V$ ,  $c_p$ ,  $C_{(\mu)V}$  и  $C_{(\mu)p}$ . Например, молярные теплоёмкости системы при постоянном объёме и давлении есть:

$$C_{(\mu)V} = \frac{\mu}{m} \frac{dQ_V}{dT}; \quad C_{(\mu)p} = \frac{\mu}{m} \frac{dQ_p}{dT}. \quad (6.4.7)$$

На единицы измерения введённых величин условия их определения не влияют, так что  $c_V$  и  $c_p$  имеют одинаковые размерности (так же, как и  $C_{(\mu)V}$  и  $C_{(\mu)p}$ ).

## 6.5. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Рассмотрим вопрос об особенностях записи первого начала термодинамики в условиях различных изопроцессов.

Для упрощения вычислительных процедур ограничимся простой ситуацией, когда в качестве макроскопических параметров системы выступают три величины:  $p, V, T$ . С целью упрощения интерпретации полученных результатов будем под системой понимать, например, некоторый газ. При этом говорят, что параметры  $p$  и  $V$  сопряжены (связаны) через работу ( $dA = pdV$ ). Уравнение состояния рассматриваемой системы  $f(p, V, T) = 0$  можно записать в различных вариантах, выбирая два из указанных параметров в качестве независимых. В частности, можно записать в виде  $p = p(V, T)$  (в правой части символ  $p$  играет роль некоторой функциональной зависимости). Внутренняя энергия системы в этом случае будет также определяться выбранной парой параметров  $U = U(V, T)$ . Поскольку внутренняя энергия является функцией состояния, то её полный дифференциал определяется выражением:

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV. \quad (6.5.1)$$

С учётом этого первый закон термодинамики  $dQ = dU + dA$  (см. 6.3.6) можно записать в виде (пока никаких условий на процессы теплопередачи и совершения работы не наложено):

$$dQ = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + pdV = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV \quad (6.5.2)$$

или, учитывая, что  $dV = (\partial V / \partial T) dT$ :

$$dQ = \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) \right\} dT. \quad (6.5.4)$$

Из определения теплоёмкости (6.4.2) следует:

$$C = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right). \quad (6.5.5)$$

Теперь обратимся к конкретным примерам процессов, происходящих при наложении некоторых условий на процессы теплопередачи и совершения работы, а именно путём обеспечения постоянства некоторых параметров в этих процессах.

**Изохорный процесс.** Здесь  $V = \text{const} \Rightarrow dV = 0$ ;  $dA = pdV = 0$ , второе слагаемое в (6.5.2) равно нулю,  $dQ_V = dU$ , так что по определению теплоёмкости при постоянном давлении  $dQ_V = C_V dT$  (см. 6.4.5) имеем:

$$dQ_V = dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT = C_V dT \Rightarrow C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \quad (6.5.6)$$

Следует отметить, что полученная связь для изменения внутренней энергии с количеством тепла  $dU = dQ_V = C_V dT$  справедлива для равновесных изохорных процессов в реальных газах. В идеальном газе выражение  $dU = C_V dT$  годится для любого равновесного процесса (не только изохорного), так как внутренняя энергия рассматриваемого количества идеального газа от его объёма не зависит, поскольку молекулы идеального газа не взаимодействуют между собой и расстояния между ними не влияют на внутреннюю энергию.

**Изобарный процесс.** Здесь  $p = \text{const} \Rightarrow dA_p = pdV = d(pV)$ .

Упростить выражение (6.5.5) можно только зная конкретное уравнение состояния. Для идеального газа величина  $(\partial U / \partial V)_T = 0$ , поскольку внутренняя энергия рассматриваемого количества идеального газа от его объёма не зависит, а уравнение состояния – это уравнение Менделеева – Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (6.5.7)$$

из которого следует, что в изобарном равновесном процессе ( $p = \text{const}$ )  $(\partial V / \partial T) = (\nu R / p) = (mR / \mu p)$ , и из (6.5.4) имеем:

$$dQ_p = C_V dT + \frac{m}{\mu} R dT = \left( C_V + \frac{m}{\mu} R \right) dT; \quad (6.5.8a)$$

$$C_p = C_V + \frac{m}{\mu} R \text{ или } C_p = C_V + \nu R. \quad (6.5.86)$$

Выражение (6.5.86) называется уравнением Майера (Майер Юлиус Роберт, нем., врач, естествоиспытатель, 1814–1878).

Теплоёмкость идеального газа в изобарном процессе превышает его теплоёмкость в изохорном процессе, поскольку в первом случае сообщаемое системе тепло расходуется как на увеличение внутренней энергии системы, так и на совершение работы, в отличие от изохорного процесса, где работа не совершается.

**Изотермический процесс.** Здесь  $T = \text{const}$ ,  $dT = 0$ , откуда следует, что  $dU = \nu C_{\mu V} dT = 0$ . Внутренняя энергия идеального газа, как упоминалось выше, зависит только от его температуры и при фиксированной температуре не изменяется.

Таким образом, для элементарного процесса в данном случае имеем:

$$dQ_T = dA_T = p dV, \quad (6.5.9)$$

а для конечного процесса:

$$\Delta Q_T = A_{T,12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (6.5.10)$$

Выражая давление через объём и температуру, для идеального газа из уравнения Менделеева – Клапейрона находим окончательно:

$$\Delta Q_T = A_{T,12} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (6.5.11)$$

Из полученного выражения следует, что в случае изотермического расширения ( $V_2 > V_1$ ) идеального газа совершается положительная работа  $A_{T,12} > 0$  за счёт положительного количества тепла (подводимого к системе, см. правило знаков перед выражением (6.3.3)). И, наоборот, при изотермическом сжатии ( $V_2 < V_1$ ) идеального газа совершается отрицательная работа  $A_{T,12} < 0$  за счёт отрицательного количества тепла (отдаваемого системой).

## 6.6. Адиабатический процесс

Процесс, который совершается в системе без теплообмена с окружающей средой, называют **адиабатическим**. Как увидим далее, этот процесс является очень важным как с практической, так и с теоретической точек зрения. На практике для реализации адиабатического процесса в рассматриваемой системе создаются адиабатические оболочки, такие, например, как в термосах и сосудах Дьюара (Дьюар Джеймс, англ., 1842–1923).

Из определения адиабатического процесса следует, что в этом случае  $dQ = 0$ . Несмотря на то, что полностью исключить теплообмен системы с окружающей средой невозможно, адиабатическим можно считать, например, достаточно быстрый процесс сжатия или расширения газа, в течение которого теплообмен практически отсутствует.

Определим уравнение, связывающее параметры идеального газа в адиабатическом процессе.

Общее выражение первого закона термодинамики (6.5.2) для идеального газа (в идеальном газе  $dU = C_V dT$  справедливо для любого равновесного процесса) и из факта  $dQ = 0$  для адиабатического процесса примет вид:

$$dQ = C_V dT + p dV = C_V dT + \frac{\nu R T}{V} dV = 0. \quad (6.6.1)$$

Из (6.6.1) следует:

$$\frac{dQ}{T} = C_V \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow C_V \cdot (d \ln T) + \nu R \cdot (d \ln V) = 0. \quad (6.6.2)$$

С учётом уравнения Майера (6.5.8б)  $\nu R = C_p - C_V$  выражение (6.6.2) примет вид:

$$\begin{aligned} C_V \cdot (d \ln T) + (C_p - C_V) \cdot (d \ln V) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (d \ln T) + \frac{(C_p - C_V)}{C_V} \cdot (d \ln V) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow d \ln T + (\gamma - 1) \cdot (d \ln V) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow d \ln T V^{(\gamma-1)} = 0 \Rightarrow T V^{(\gamma-1)} &= \text{const}, \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

где введена величина  $\gamma = C_p / C_V$ , называемая *показателем адиабаты* (или *коэффициентом Пуассона*). Отметим, что показатель адиабаты  $\gamma$  не зави-



сит от того, отношение каких теплоёмкостей в выражении для  $\gamma$ , то есть  $\gamma = C_p/C_V = c_p/c_V = C_{(\mu)p}/C_{(\mu)V}$  (проверьте!).

Из последнего выражения следует выражение:

$$TV^{(\gamma-1)} = \text{const} \quad (\text{или } T^{1/(\gamma-1)}V = \text{const}), \quad (6.6.4)$$

называемое уравнением Пуассона. Вариант (6.6.4)  $T^{1/(\gamma-1)}V = \text{const}$  используется далее при рассмотрении цикла Карно.

Если исключить при помощи уравнения Менделеева – Клапейрона переменную  $T = pV/\nu R$ , то получим другой вариант уравнения Пуассона:

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (6.6.5)$$

Аналогично, если исключить переменную  $V = \nu RT/p$ , то получим третий вариант уравнения Пуассона:

$$pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const}. \quad (6.6.6)$$

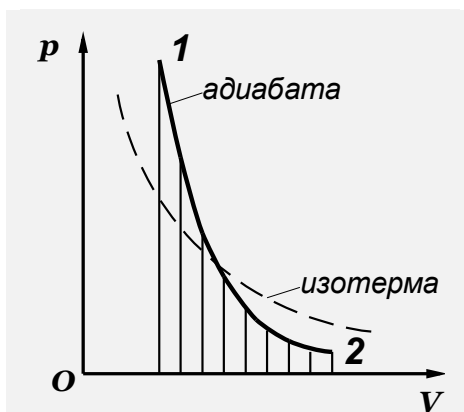


Рисунок 6.6.1

Линия, изображающая графически адиабатический процесс, называют адиабатой (рисунок 6.6.1). Поскольку показатель адиабаты всегда больше единицы ( $\gamma > 1$ ), то адиабата изображается более крутой линией, нежели изотерма (которая является ветвью гиперболы в первой четверти). Физически это обусловлено тем, что при адиабатическом сжатии давление увеличивается не только за счёт уменьшения объёма газа, но и одновременного увеличения его температуры, а при адиабатическом расширении давление уменьшается не только за счёт увеличения объёма газа, но и уменьшения его температуры.

Для вычисления работы, совершаемой идеальным газом в адиабатическом процессе  $1 \rightarrow 2$  (площадь заштрихованной на рисунке 6.6.1 криволинейной трапеции), воспользуемся выражениями (6.3.2) и (6.6.5), причём в последнем примем  $\text{const} = V_1^\gamma p_1$ :

$$A_{12} = V_1^\gamma p_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{V_1^\gamma p_1}{-\gamma + 1} V^{-\gamma+1} \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{V_1 p_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (6.6.7)$$

Если воспользоваться выражениями (6.6.4) и (6.6.6), то можно получить формулы, выражающие работу идеального газа в адиабатическом процессе через отношения температур или давлений.

## 6.7. Цикл Карно

Важнейшим с точки зрения теории и практики является специальный круговой процесс – цикл Карно (Карно Никола Леонард Сади, фр., 1796–1832), который был впервые теоретически рассмотрен в 1824 году в работе «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу».

Прежде всего уточним терминологию, используемую при рассмотрении обсуждаемого вопроса. Термодинамическая система, в которой совершается рассматриваемый цикл, называют **рабочим телом**, а окружающую среду – **термостатом**. Обычно, из соображений упрощения рассуждений и удобства, в качестве рабочего тела выбирают идеальный газ. Размеры и количество вещества термостата выбираются настолько значительно превосходящими размеры и количество вещества рабочего тела, что теплоёмкость рабочего тела можно считать ничтожно малой по сравнению с теплоёмкостью термостата.

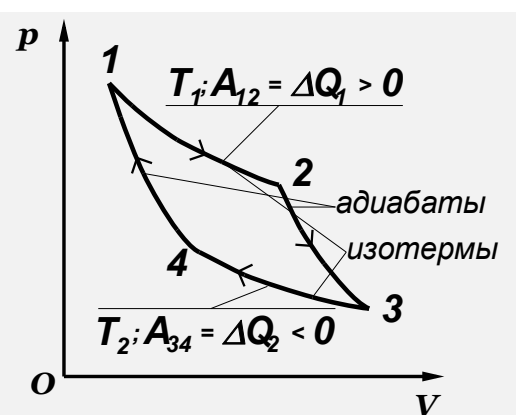


Рисунок 6.7.1

**Прямой цикл** Карно называется обратимый цикл, который состоит из двух изотермических процессов ( $1 \rightarrow 2$  и  $3 \rightarrow 4$ ) и двух адиабатических процессов ( $2 \rightarrow 3$  и  $4 \rightarrow 1$ ) (рисунок 6.7.1). В прямом цикле Карно  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ , который осуществляется в тепловых машинах, рабочим телом совершается положительная работа за счёт разности количества тепла, получаемого от более нагретой части

термостата (нагревателя) и количества тепла, получаемого от менее нагретой части термостата (холодильника). **Обратный цикл** Карно  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  состоит также из двух изотермических процессов и двух адиабатических процессов, но проходимых в противоположном направлении (против часовой стрелки). В обратном цикле Карно, который осуществляется в холодильных установках, рабочим телом совершается отрицательная работа (то есть внешними телами совершается положитель-

ная работа), за счёт чего теплота менее нагретого холодильника передаётся более нагретому нагревателю.

На практике прямой цикл Карно можно осуществить, используя идеальный газ, находящийся в сосуде цилиндрической формы под поршнем, который может без трения перемещаться вдоль стенок цилиндра (рисунок 6.3.1). Поршень соединим с телом, при перемещении которого будет совершаться механическая работа. Сначала осуществляется изотермическое расширение газа (процесс  $1 \rightarrow 2$ ) за счёт тепла  $\Delta Q_1 > 0$ , подводимого от нагревателя при постоянной температуре  $T_1$ , и совершается механическая работа  $A_{12}$ . Как уже отмечалось в разделе 6.5, внутренняя энергия рабочего тела (идеального газа) в этом процессе не изменяется, и из первого начала термодинамики следует, что  $A_{12} = \Delta Q_1 > 0$ . В положении 2 стенки цилиндра изолируются, чтобы обеспечить отсутствие теплообмена с термостатом, и газ в этих условиях совершает адиабатическое расширение и работу (процесс  $2 \rightarrow 3$ ) за счёт внутренней энергии тела. При этом температура рабочего тела понижается до температуры  $T_2 < T_1$  и внутренняя энергия уменьшается на величину  $\Delta U_{23} < 0$ . Затем газ изотермически сжимается (процесс  $3 \rightarrow 4$ ), находясь в контакте с холодильником, имеющим температуру  $T_2$ . В процессе изотермического сжатия от системы к холодильнику отводится количество тепла  $\Delta Q_2 < 0$  за счёт работы  $A_{34}$  внешних тел, причём  $A_{34} = \Delta Q_2 < 0$ . В положении 4 стенки цилиндра вновь изолируются, чтобы обеспечить отсутствие теплообмена с термостатом, и газ в этих условиях совершает адиабатическое сжатие (процесс  $4 \rightarrow 1$ ) за счёт работы внешних сил и возвращается в исходное состояние. При этом температура рабочего тела повышается до температуры  $T_1$  и внутренняя энергия увеличивается на величину  $\Delta U_{41} > 0$ . Поскольку разность температур в адиабатическом процессе  $4 \rightarrow 1$  по модулю та же самая, что и в адиабатическом процессе  $2 \rightarrow 3$ , но отличается знаком, то есть  $\Delta T_{23} = T_2 - T_1 = -\Delta T_{41} = -(T_1 - T_2)$ , то  $\Delta U_{23} = -\Delta U_{41} < 0$ . Убедиться в этом можно и по-другому. Поскольку изменение внутренней энергии рабочего тела в обратимом цикле равно нулю, то:  $\Delta U_{\text{по циклу}} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{34} + \Delta U_{41} = 0 + \Delta U_{23} + 0 + \Delta U_{41} = 0 \Rightarrow \Delta U_{23} = -\Delta U_{41}$ .

При этом рабочим телом в рассматриваемом цикле совершается полезная работа  $A_{\text{полезн}}$  (с учётом равенства  $A_{23} + A_{41} = -(\Delta U_{23} + \Delta U_{41}) = 0$ ):

$$A_{\text{полезн}} = A_{12} + A_{34} = \Delta Q_1 + \Delta Q_2, \quad (6.7.1)$$

где учтено, что  $A_{23} + A_{41} = -(\Delta U_{23} + \Delta U_{41}) = 0$ .

При этом следует отметить, что

$$A_{\text{полезн}} < A_{12}, \quad (6.7.2)$$

так как  $A_{34} < 0$ .

Количественной характеристикой способности системы совершать полезную работу в произвольном прямом обратимом круговом процессе является **термический коэффициент полезного действия (КПД)  $\eta$** , который определяется как отношение полезной работы, совершаемой системой в указанном цикле, к количеству тепла  $\Delta Q_1$ , полученному системой от нагревателя:

$$\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{\Delta Q_1}. \quad (6.7.3)$$

В рассматриваемом нами прямом цикле Карно для термического КПД  $\eta_K$  с учётом выражений для полезной работы получим:

$$\eta_K = \frac{A_{\text{полезн}}}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{\Delta Q_1} = 1 + \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} < 1, \quad \eta_K > 0. \quad (6.7.4)$$

Отметим, что неравенства  $0 < \eta_K < 1$  следуют из того факта, что  $\Delta Q_1 > 0$ ;  $\Delta Q_2 < 0$ ;  $|\Delta Q_1| > |\Delta Q_2| \Rightarrow |\Delta Q_2| / |\Delta Q_1| < 1$  (см. (6.5.9)).

Термический КПД цикла Карно легко выразить через температуры нагревателя и холодильника при помощи выражения для работы (количества тепла) в изотермическом процессе (6.5.9):

$$\eta_K = \frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{\Delta Q_1} = \frac{T_1 \ln(V_2 / V_1) - T_2 \ln(V_3 / V_4)}{T_1 \ln(V_2 / V_1)}. \quad (6.7.5)$$

Из уравнения Пуассона (6.6.4), кроме того, следует:

$$\left. \begin{aligned} V_2 T_1^{1/(\gamma-1)} &= V_3 T_2^{1/(\gamma-1)} \\ V_1 T_1^{1/(\gamma-1)} &= V_4 T_2^{1/(\gamma-1)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (6.7.6)$$

Следовательно, окончательно для термического КПД цикла Карно имеем:

$$\eta_K = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad (6.7.7)$$

откуда сразу следует, что  $0 < \eta_K < 1$ .

Видим, что термический КПД прямого цикла Карно растёт по мере уменьшения отношения  $T_2 / T_1$ . Как увидим ниже, термический КПД прямого цикла Карно не зависит от природы рабочего тела.

В обратном цикле Карно все процессы осуществляются в противоположных направлениях и работа, совершаемая рабочим телом в таком цикле, будет отрицательной, то есть внешними телами будет совершаться положительная работа над системой. В результате в таком круговом процессе осуществляется передача тепла рабочим телом от холодильника к нагревателю за счёт работы внешних тел.

## 6.8. Энтропия

Из сравнения выражений (6.7.4) и (6.7.7) получаем следующее равенство:

$$\left. \begin{aligned} \eta_K &= 1 + \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} \\ \eta_K &= 1 - \frac{T_2}{T_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} + \frac{T_2}{T_1} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} = 0, \quad (6.8.1)$$

называемое **равенством Клаузиуса** (Клаузиус Рудольф Юлиус Эмануэль, нем., 1822–1888), которое позволит ввести новую очень важную функцию состояния системы – **энтропию**.

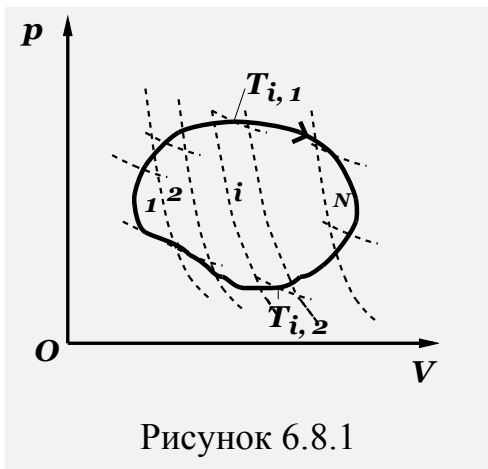


Рисунок 6.8.1

Для этого обобщим полученное равенство (6.8.1) на произвольный обратимый круговой процесс. Произведём разбиение рассматриваемого цикла при помощи близко расположенных адиабат и проведём через некоторые промежуточные точки участков цикла между соседними адиабатами изотермы, как это показано на рисунке 6.8.1. Таким способом мы произвели разбиение рассматриваемого цикла на  $N$  циклов Карно.

Температуры нагревателя и холодильника в  $i$ -ом цикле Карно обозначены  $T_{i,1}$  и  $T_{i,2}$ , соответственно.

Применим равенства Клаузиуса (6.8.1) для каждого из полученных циклов Карно и просуммируем по всем циклам:

$$\sum_{i=1}^N \left[ \frac{\Delta Q_{i,1}}{T_{i,1}} + \frac{\Delta Q_{i,2}}{T_{i,2}} \right] = 0. \quad (6.8.2)$$

Если ввести обозначения для разности между объёмами начала и конца  $i$ -ой верхней изотермы  $\lambda_{i,1}$ ,  $i$ -ой нижней изотермы  $\lambda_{i,2}$  и  $\lambda = \max_{i=1,2,\dots,N} \{\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}\}$ , то совершая предельный переход  $\lambda \rightarrow 0$  (за счёт неограниченно близкого расположения адиабат) получим:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\Delta Q_{i,1}}{T_{i,1}} + \frac{\Delta Q_{i,2}}{T_{i,2}} \right] = 0, \quad (6.8.3)$$

или, если учесть определение криволинейного интеграла 1-го рода, находим:

$$\oint_{\text{по циклу}} \frac{dQ}{T} = 0, \quad (6.8.4)$$

где снизу символа интеграла сделана запись словом «по циклу», вместо указания вида линии, задающей рассматриваемый цикл в координатах  $(V, p)$ .

Кроме обобщения равенства Клаузиуса на произвольный обратимый круговой процесс, выражение (6.8.4) устанавливает ещё один замечательный факт:

— поскольку интеграл по циклу равен нулю, то функция  $S$ , дифференциал которой определяется выражением

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad (6.8.5)$$

и называемая **энтропией** системы, является функцией состояния системы.

Из определения энтропии видим, что эта функция состояния определена с точностью до произвольной постоянной. Правда, дальнейшее изучение свойств этой величины покажет, что эту постоянную нужно выбрать равной нулю.

Теперь соотношение (6.8.4) можно записать в виде:

$$\oint_{\text{по циклу}} dS = 0. \quad (6.8.6)$$

Для энтропии (как и для любой функции состояния системы) справедливо утверждение о том, что при равновесном переходе из произвольного начального равновесного состояния 1 в произвольное конечное равновесное состояние 2 изменение энтропии  $\Delta S = S_2 - S_1$  не зависит от способа перехода системы (в смысле графического вида пути) между указанными состояниями. Отметим также, что изменение направления перехода (то есть начальная точка равновесного состояния 2, а конечное равновесное состояние 1) приводит к смене знака изменения энтропии.

Энтропия системы является *аддитивной* функцией состояния системы, то есть энтропия  $S$  системы, состоящей из нескольких частей с энтропиями  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , равна сумме энтропий этих частей:

$$S = \sum_{i=1}^N S_i. \quad (6.8.7)$$

К изопроцессам теперь можно добавить и адиабатический обратимый процесс, поскольку, с учётом (6.8.5)  $dQ = 0 \Rightarrow dS = (dQ / T) = 0$ , его можно назвать **изоэнтропийным** процессом.

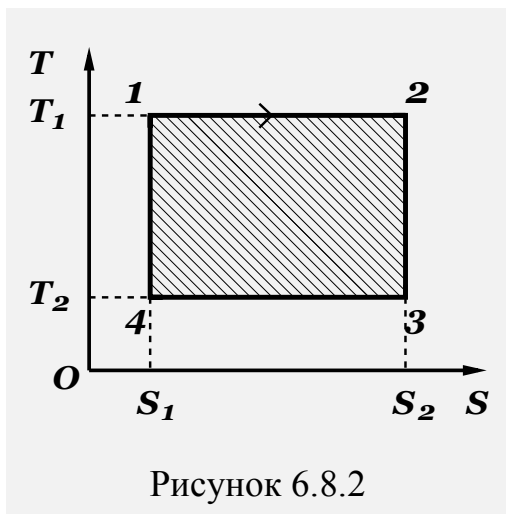


Рисунок 6.8.2

Если изобразить прямой цикл Карно в системе координат  $(S, T)$ , как это показано на рисунке 6.8.2, то полезная работа в рассматриваемом цикле будет равна площади прямоугольника 1234 (заштрихован на рисунке 6.8.2), а подведённое от термостата к рабочему телу количество тепла будет равно площади прямоугольника  $S_1 1 2 S_2$ , и вычисление термического КПД сведётся к вычислению отношения площадей указанных прямоугольников:

$$\eta_K = \frac{(T_1 - T_2)(S_2 - S_1)}{T_1(S_2 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (6.8.8)$$

Важно отметить, что в данном случае при получении выражения для термического КПД прямого цикла Карно не делалось никаких предположений о природе рабочего тела. А это значит, что термический КПД прямого цикла Карно:

- не зависит от природы рабочего тела;
- определяется только температурами нагревателя и холодильника.

В этом состоит содержание **теоремы Карно**.

Теперь рассмотрим произвольный прямой обратимый цикл (не цикл Карно) и оценим термический КПД этого цикла (рисунок 6.8.3).

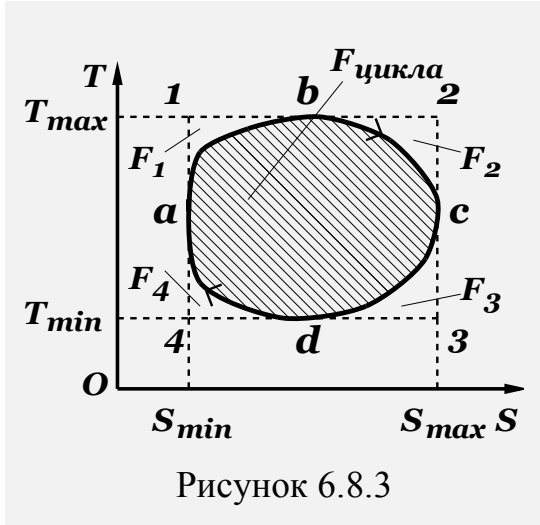


Рисунок 6.8.3

Построим вспомогательный прямой цикл Карно  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  путём проведения касательных прямых, параллельных координатным осям, к крайним точкам, соответствующим на графике экстремальным значениям температуры и энтальпии в рассматриваемом цикле. Построенный указанным способом прямой цикл Карно для рассматриваемого произвольного прямого

обратимого цикла будем называть *соответствующим циклом Карно*.

КПД рассматриваемого цикла определяется, в соответствии с выражением (6.7.3), отношением полезной работы  $A_{\text{полезн}}$ , совершённой рабочим телом в цикле, к количеству тепла  $\Delta Q_1$ , полученному рабочим телом. Из графика видим, что  $A_{\text{полезн}}$  равна площади, ограниченной циклом  $F_{\text{цикла}}$  (для площади использована буква  $F$  латинского алфавита), то есть  $A_{\text{полезн}} = F_{\text{цикла}}$ , а переданное рабочему телу внешними телами количество тепла  $\Delta Q_1$  равно площади криволинейной трапеции  $F_{S_{\min}abcS_{\max}}$ , то есть  $\Delta Q_1 = F_{S_{\min}abcS_{\max}}$ . Таким образом, для термического КПД рассматриваемого цикла имеем:

$$\eta_{\text{обр}} = \frac{F_{\text{цикла}}}{F_{S_{\min}abcS_{\max}}}. \quad (6.8.9)$$

Если обозначить термический КПД соответствующего цикла Карно  $\tilde{\eta}_K$  (знак волнистой чёрточки ( $\sim$ ) читается «тильда», то есть здесь нужно читать так: «эта с тильдой»), то он равен отношению площадей прямоугольников  $F_{1234}$  и  $F_{S_{\min}12S_{\max}}$  и имеет вид:

$$\tilde{\eta}_K = \frac{F_{1234}}{F_{S_{\min}12S_{\max}}} = \frac{(T_{\max} - T_{\min})(S_{\max} - S_{\min})}{T_{\max}(S_{\max} - S_{\min})} = \frac{\Delta T \Delta S}{T_{\max} \Delta S}. \quad (6.8.10)$$

Выражение (6.8.9) преобразуем к виду, удобному для сравнения с (6.8.10):



$$\begin{aligned}
\eta_{обр} &= \frac{F_{цикла}}{F_{S_{min}abcS_{max}}} = \frac{F_{1234} - (\overbrace{F_1 + F_2}^{F_A} + \overbrace{F_3 + F_4}^{F_B})}{F_{S_{min}12S_{max}} - \underbrace{(F_1 + F_2)}_{F_A}} = \frac{F_{1234}}{T_{max}\Delta S - F_A} - \frac{F_A + F_B}{T_{max}\Delta S - F_A} = \\
&= \frac{\Delta T\Delta S}{T_{max}\Delta S} \left[ \frac{1}{1 - (F_1 + F_2)/T_{max}\Delta S} - \frac{(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)}{F_{1234}(1 - (F_1 + F_2)/T_{max}\Delta S)} \right] = \\
&= \tilde{\eta}_K \frac{F_{1234} - (F_1 + F_2 + F_3 + F_4)}{F_{1234}(1 - (F_1 + F_2)/T_{max}\Delta S)} = \tilde{\eta}_K \frac{\overbrace{1 - (F_1 + F_2 + F_3 + F_4)/F_{1234}}^a}{\underbrace{1 - (F_1 + F_2)/T_{max}\Delta S}_b} = \\
&= \tilde{\eta}_K \frac{1-a}{1-b}.
\end{aligned} \tag{6.8.11}$$

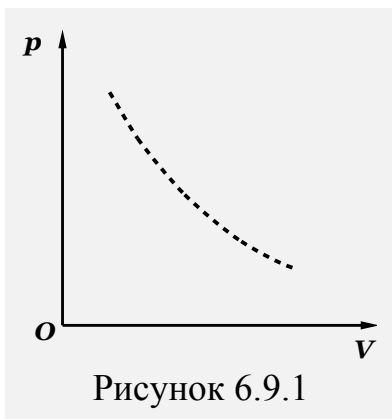
Легко заметить, что  $0 < a < 1$ ;  $0 < b < 1$ ; и  $a \geq b$ , так как числитель дроби  $a$  больше числителя дроби  $b$ , а знаменатель дроби  $a$  меньше знаменателя дроби  $b$ , откуда приходим к неравенству  $1 - a \leq 1 - b \Rightarrow (1 - a)/(1 - b) \leq 1$  и, следовательно, имеем возможность записать:

$$\eta_{обр} \leq \tilde{\eta}_K. \tag{6.8.12}$$

Таким образом, установлено, что:

*термический КПД произвольного прямого обратимого цикла не превышает термический КПД соответствующего прямого цикла Карно.*

## 6.9. Неравенство Клаузиуса



До сих пор мы обсуждали специальные и идеализированные обратимые и равновесные циклы. На практике, однако, чаще всего имеют место неравновесные и, следовательно, необратимые процессы.

Изобразить неравновесный процесс на термодинамической диаграмме невозможно, поскольку на диаграммах можно изображать только процессы, состоящие из последовательности равновесных состояний. Чтобы, тем не менее, иметь возможность обсуждать и сравнивать неравновесные процессы, их принято «изображать» на термодинамических диаграммах пунктирными линиями (рисунок 6.9.1). При этом необходимо помнить, что рассматриваемая система в реальности не проходит

ни через одну точку такой пунктирной линии, изображающей данный неравновесный процесс.

Оценим термический КПД необратимого цикла, состоящего, как и цикл Карно, из двух изотерм и двух адиабат, но отличающегося от цикла Карно тем, что изотермические и адиабатические процессы в рассматриваемом цикле не являются обратимыми за счёт неравновесности этих процессов.

Приведённый ниже результат не является строгим, а является лишь оценкой термического КПД рассматриваемого цикла.

Поскольку изотермические процессы рассматриваемого цикла неравновесные, то осуществляются они не при температурах нагревателя  $T_1$  и холодильника  $T_2$ , а при несколько отличающихся от указанных температурах, именно температура рабочего тела в процессе передачи тепла от нагревателя ниже температуры нагревателя (иначе не будет теплообмена) и равна  $T_1 - \Delta T_1$ , а температура рабочего тела в процессе передачи тепла холодильнику немного выше температуры холодильника и равна  $T_2 + \Delta T_2$ .

Следовательно, при оценке термического КПД рассматриваемого необратимого процесса можем воспользоваться выражениями (6.7.7) или (6.8.8) с соответствующей заменой температур:

$$\eta_{необр} \approx 1 - \frac{T_2 + \Delta T_2}{T_1 - \Delta T_1} < \eta_K. \quad (6.9.1)$$

Если теперь обратимся к определению (6.7.3) термического КПД произвольного цикла и используем результат (6.9.1), то получим:

$$\underbrace{\frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{\Delta Q_1}}_{\eta_{необр}} < \underbrace{\frac{T_1 - T_2}{T_1}}_{\eta_K} \Rightarrow 1 + \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} < 0. \quad (6.9.2)$$

Объединив полученный результат и равенство Клаузиуса (6.8.1), получим неравенство Клаузиуса:

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} \leq 0, \quad (6.9.3)$$

в котором знак «=» относится к обратимому циклу Карно, а знак «<» – к рассматриваемому «необратимому циклу Карно». Кавычки поставлены потому, что цикл Карно по определению обратимый цикл. Но чтобы сократить описание рассматриваемого процесса, был использован этот приём.

Если теперь обратиться к произвольному необратимому циклу, то по аналогии с (6.9.3) и на основании (6.8.4) можем записать неравенство Клаузиуса для произвольного цикла:

$$\oint_{\text{по циклу}} \frac{dQ}{T} \leq 0, \quad (6.9.4)$$

где, как и ранее, знак «=» относится к обратимому циклу, а знак «<» – к необратимому циклу.

## 6.10. Второй закон термодинамики

Как уже отмечалось, первый закон термодинамики, выражаемый равенствами (6.3.3) и (6.3.4), не указывает направление процессов, удовлетворяющих этим выражениям. Однако на практике мы имеем дело с процессами, направление которых подчиняется некоторым закономерностям, не описываемым первым законом термодинамики. Например:

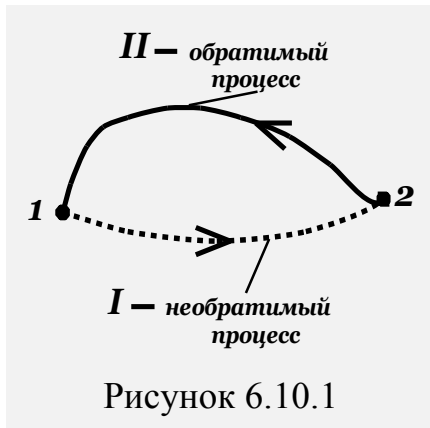
- в адиабатически изолированной системе, состоящей из двух тел, тепло всегда передаётся от более нагретого тела к менее нагретому телу до тех пор, пока температуры этих тел не выровняются;
- воздух, находящийся в замкнутом сосуде, после соединения сосуда с окружающей средой, где давление ниже, чем в рассматриваемом сосуде, **всегда** покидает этот сосуд до выравнивания давлений в сосуде и окружающей среде;
- при соединении двух сосудов с различными газами **всегда** происходит перемешивание газов в этих сосудах, но обратный процесс (разделения смеси газов) на отдельные составляющие самостоятельно никогда не наблюдается.

Таких примеров можно привести множество.

Понять причину направленности процессов стало возможно только после того, как был сформулирован **второй закон (начало)** термодинамики. Второй закон термодинамики, как и первый закон термодинамики, является обобщением многочисленных опытных данных.

Открытие второго закона термодинамики связывается с анализом работы тепловых машин, который в 1824 г. начал, как отмечалось выше, Сади Карно. Однако он не смог правильно сформулировать второй закон термодинамики. Это было впервые сделано независимо друг от друга в 1850 г. Р. Клаузиусом и в 1851 г. У. Томсоном (Уильям Томсон (получив-

ший за научные заслуги титул – лорд Кельвин), англ., 1824–1907). Имеются формулировки и других учёных, в том числе и М. Планка (Планк Макс Карл Эрнст Людвиг, нем., 1858–1947).



Но сначала рассмотрим формулировку второго закона термодинамики, основанную на понятии энтропии.

С этой целью рассмотрим систему, которая может переходить обратимым и необратимым образом между двумя равновесными состояниями 1 и 2, а именно: путь I – необратимым образом от 1 к 2 и путь II – обратимым образом от 2 к 1 (см. рисунок 6.10.1), образуя в

итоге замкнутый процесс.

Используя неравенство Клаузиуса для рассматриваемого цикла, можем записать:

$$\oint_{\text{по циклу}} \frac{dQ}{T} = \int_{\text{путь I}} \frac{dQ}{T} + \overbrace{\int_{\text{путь II}} \frac{dQ}{T}}^{\Delta S_{2 \rightarrow 1} = -\Delta S_{1 \rightarrow 2}} \leq 0 \Rightarrow -\Delta S_{1 \rightarrow 2} \leq - \int_{\text{путь I}} \frac{dQ}{T}, \quad (6.10.1)$$

или

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} \geq \int_{\text{путь I}} \frac{dQ}{T}. \quad (6.10.2)$$

Для элементарного процесса выражение (6.10.2) примет вид:

$$dS \geq \frac{dQ}{T}. \quad (6.10.2a)$$

Если система изолирована, или, как минимум, адиабатически изолирована, то в правой стороне (6.10.2) подынтегральное выражение равно нулю, а следовательно, и сам интеграл тоже равен нулю.

Таким образом, имеет место утверждение:

Энтропия адиабатически изолированной (или изолированной) системы не убывает, то есть

$$\overbrace{\Delta S_{1 \rightarrow 2}}^{\text{адиабат. изолир. система}} \geq 0 \quad (6.10.3)$$

или, для элементарного процесса:

$$\overbrace{dS}^{\text{адиабат. изолир. система}} \geq 0. \quad (6.10.3a)$$

Это и есть искомая формулировка второго закона термодинамики, называемая ещё **законом возрастания энтропии**.

Полученное нами выражение для второго закона термодинамики позволяет делать выводы о возможности (в том числе и по направленности) тех или иных процессов, а именно:

*в адиабатически изолированной системе осуществляются только те процессы, в которых энтропия рассматриваемой системы не убывает.*

Отметим, что применение второго закона термодинамики к открытым системам неправомерно.

Вряд ли так же справедливо утверждение классической термодинамики о так называемой «тепловой смерти» Вселенной (Клаузиус). Основан этот вывод на том, что в результате всех происходящих во Вселенной необратимых процессов с течением времени её энтропия примет наибольшее значение, произойдёт выравнивание температур всех частей Вселенной – наступит «тепловая смерть» Вселенной. Однако известные нам законы термодинамики (в том числе и второй закон термодинамики) основаны на опытных данных, относящихся к ограниченным системам. Распространение их на всю Вселенную ничем не обосновано. Более того, имеются общерелятивистские космологические модели, допускающие непрерывную эволюцию гигантских космологических систем с гравитационным взаимодействием в сторону возрастания энтропии без достижения максимума энтропии. В рамках настоящего пособия нет возможности более подробно обсудить данные вопросы. Подробное обсуждение этих вопросов можно найти в специальной литературе<sup>12</sup>.

Теперь приведём указанные выше формулировки второго закона термодинамики:

формулировка Клаузиуса:

*невозможен процесс, единственным результатом которого является передача тепла от менее нагретого тела (холодного тела) к более нагретому телу (горячему телу);*

---

<sup>12</sup> См., например: Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974. Бёрке У. Пространство-время, геометрия, космология. М.: Мир, 1985.

формулировка Кельвина (У. Томсона):

*невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение тепла от некоторого тела (теплового резервуара) в эквивалентную работу;*

формулировка Планка:

*невозможно построить периодически действующую машину, все действие которой сводилось бы к понятию некоторого груза и охлаждению теплового источника.*

В специальной литературе, посвящённой рассмотрению вопросов термодинамики, доказываем, что все приведённые формулировки эквивалентны.

Используя понятие энтропии, можно привести формулировку, объединяющую первый и второй законы термодинамики.

Действительно, из (6.10.2а) имеем  $TdS \geq dQ$ , а из первого закона термодинамики (6.3.6)  $dQ = dU + dA$ . Следовательно, получим для элементарных процессов выражение, объединяющее первое и второе начала термодинамики:

$$TdS \geq dU + dA, \quad (6.10.4)$$

где знак «=» относится к равновесным, а знак «>» – к неравновесным элементарным процессам.

Выражение  $TdS = dU + dA$  является основой для многочисленных применений, в частности, на его основе вводятся термодинамические функции, такие как свободная энергия (энергия Гельмгольца)  $F = U - TS$ .

В заключение отметим, что рассмотренные нами первый и второй законы термодинамики неприменимы к микросистемам (для них термодинамические параметры не определены) и формулируются для отличных от нуля термодинамических температур. Что происходит в равновесной системе при стремлении условия  $T \rightarrow 0$ , устанавливает так называемый **третий закон** термодинамики, в соответствии с которым для равновесных систем:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (6.10.5)$$

Если вспомним, что энтропия системы определена с точностью до произвольной постоянной, то из (6.10.5) следует, что эта произвольная постоянная равна нулю. В специальной литературе по термодинамике доказываем, что абсолютный нуль недостижим: к температуре  $T = 0$  можно только *асимптотически* приближаться.

## Глава 7. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

### 7.1. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

В данном разделе пособия обсуждение свойств различных систем будет осуществляться на основе молекулярно-кинетической теории, согласно которой все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении. При этом степень и характер взаимодействия молекул определяет свойства рассматриваемой системы и её поведение.

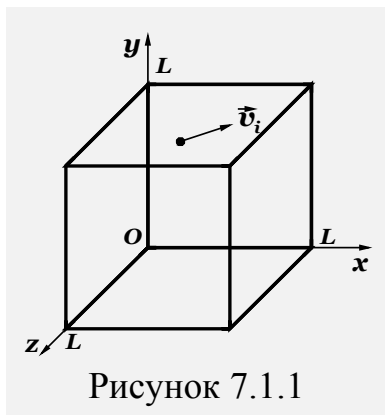


Рисунок 7.1.1

Мы для упрощения ситуации будем выбирать наиболее простые для анализа системы. Среди них особо выделим **идеальный газ**, которым называется *система не взаимодействующих между собой материальных точек*. Такая система, конечно, является идеализацией имеющих место на практике систем, в которых можно пренебречь

взаимодействием между молекулами и размерами молекул по сравнению с расстояниями между ними. Отметим, что идеальными газами можно считать молекулярные кислород, азот, водород, гелий, неон, воздух и другие при условиях, близких к нормальным (температура  $T_{ny} = 273,15$  К, давление  $P_{ny} = 101\,325$  Па). Давление здесь и далее в этом разделе обозначается прописной (большой) буквой  $P$  латинского алфавита во избежание путаницы с модулем вектора импульса частиц.

Установим связь между давлением в идеальном газе и кинетической энергией молекул этого газа.

Пусть идеальный газ при температуре  $T$  находится в сосуде кубической формы (как увидим позже, форма сосуда несущественна) с ребром длины  $L$  (рисунок 7.1.1). Общее число молекул в сосуде обозначим  $N$ . Массу молекул обозначим  $m$ , а их скорости и проекции на координатные оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответственно:  $\vec{v}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  и  $v_{ix}$ ,  $v_{iy}$ ,  $v_{iz}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Соударения молекул со стенками будем считать абсолютно упругими, так что при этом модуль изменения проекции импульса  $|\Delta p_{ix}|$   $i$ -ой молекулы, например на ось  $x$ , будет равно:

$$|\Delta p_{ix}| = 2m |v_{ix}|. \quad (7.1.1)$$

Такой же по модулю импульс при соударении получит стенка сосуда, перпендикулярная оси  $x$ .

Если обозначить через  $\delta t$  время соударения  $i$ -ой молекулы со стенкой, то модуль проекции силы  $|f_{ix}|$  на ось  $x$  при таком соударении будет:

$$|f_{ix}| = |\Delta p_{ix}| / \delta t = 2m |v_{ix}| / \delta t. \quad (7.1.3)$$

К сожалению, определить время такого взаимодействия непросто. Но существует возможность обойти эту проблему путём введения «фигтивной» средней силы с модулем  $\langle |f_{ix}| \rangle$ , действующей «непрерывно» в течение времени  $\Delta t$ , необходимого рассматриваемой  $i$ -ой молекуле для повторного соударения со стенкой сосуда, перпендикулярной оси  $x$ , так, что произведение  $\langle |f_{ix}| \rangle \Delta t$  будет равным произведению  $|f_{ix}| \delta t$  и равным модулю изменения проекции импульса  $|\Delta p_{ix}|$   $i$ -ой молекулы, то есть будет выполняться условие  $\langle |f_{ix}| \rangle \Delta t = |f_{ix}| \delta t = |\Delta p_{ix}|$ . Указанный промежуток времени, как это очевидно, определяется равенством  $\Delta t = 2L / |v_{ix}|$ . Таким образом, для определения среднего модуля силы  $\langle |f_{ix}| \rangle$  имеем:

$$\begin{aligned} \langle |f_{ix}| \rangle \Delta t &= |f_{ix}| \delta t = |\Delta p_{ix}| \Rightarrow \langle |f_{ix}| \rangle = |\Delta p_{ix}| / \Delta t; \\ \langle |f_{ix}| \rangle &= 2m |v_{ix}| \frac{|v_{ix}|}{2L} = \frac{mv_{ix}^2}{L}. \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

В (7.1.4) учтено, что  $|v_{ix}|^2 = v_{ix}^2$ . Для модуля суммарной средней силы, действующей со стороны всех молекул в сосуде на стенку сосуда, перпендикулярную оси  $x$  получим:

$$\langle |f_x| \rangle = \sum_i \langle |f_{ix}| \rangle = \sum_i \frac{mv_{ix}^2}{L} = \frac{m}{L} \sum_i v_{ix}^2. \quad (7.1.5)$$

Давление, осуществляемое на рассматриваемую стенку сосуда площадью  $S = L^2$ , по определению, есть:

$$P_x = \frac{\langle |f_x| \rangle}{L^2} = \frac{m}{L^3} \sum_i v_{ix}^2 = \frac{m}{V} \sum_i v_{ix}^2, \quad (7.1.6)$$

где  $V = L^3$ .

Давление молекул газа на другие стенки сосуда находится аналогично и определяется такими же выражениями (с заменами значков проекций).

Давление, определяемое выражением (7.1.6), по закону Паскаля будет таким в любой точке сосуда, то есть:

$$P = P_x = P_y = P_z \Rightarrow \sum_i v_{ix}^2 = \sum_i v_{iy}^2 = \sum_i v_{iz}^2. \quad (7.1.7)$$



Если учесть, что имеет место равенство:

$$\begin{aligned} v_i^2 &= v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2 \Rightarrow \sum_i v_i^2 = \sum_i v_{ix}^2 + \sum_i v_{iy}^2 + \sum_i v_{iz}^2 = \\ &= 3 \sum_i v_{ix}^2 = 3 \sum_i v_{iy}^2 = 3 \sum_i v_{iz}^2, \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

то можем записать:  $\sum_i v_{ix}^2 = \frac{1}{3} \sum_i v_i^2$ .

Таким образом, для давления газа в сосуде имеем:

$$P = \frac{2}{3V} \sum_i \frac{mv_i^2}{2} = \frac{2}{3V} \sum_i w_{ki} = \frac{2}{3V} W_k, \quad (7.1.9)$$

где  $w_{ki} = \frac{1}{2}mv_i^2$  – кинетическая энергия поступательного движения  $i$ -ой молекулы рассматриваемого идеального газа, а  $W_k$  – кинетическая энергия поступательного движения всех молекул этого газа.

Во избежание недоразумений здесь, в отличие от механики, для кинетической энергии использовано обозначение  $W_k$ , а не  $T$ , поскольку этой буквой латинского алфавита здесь уже обозначена термодинамическая температура. Там, где не будет опасности возникновения недоразумений, мы вновь вернёмся к традиционному обозначению кинетической энергии буквой  $T$ .

Введём понятие среднего квадрата скоростей молекул  $\langle v^2 \rangle$ :

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^N v_i^2 = N \langle v^2 \rangle, \quad (7.1.10)$$

а также понятие среднеквадратичной скорости  $v_{кв}$ :

$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \Rightarrow v_{кв}^2 = \langle v^2 \rangle. \quad (7.1.11)$$

С учётом этого и определения концентрации молекул газа  $n = N / V$  для давления в сосуде имеем:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3V} \sum_i \frac{mv_i^2}{2} = \frac{m}{3V} \overbrace{\sum_i v_i^2}^{N \langle v^2 \rangle} = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \langle v^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{3} \frac{N}{V} m v_{кв}^2 = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{m v_{кв}^2}{2} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle w_k \rangle, \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

где через  $\langle w_k \rangle = \frac{1}{2}m v_{кв}^2$  обозначена средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы рассматриваемого идеального

газа, так что кинетическая энергия поступательного движения всех молекул этого газа  $W_k = N < w_k >$ .

Таким образом, имеем **основное уравнение** молекулярно-кинетической теории идеального газа:

$$PV = \frac{2}{3} W_k. \quad (7.1.13)$$

Если учесть, что количество вещества  $\nu = M / \mu = N / N_A$ , где  $N_A$  – число Авогадро и  $k = R / N_A$  – постоянная Больцмана, то можно преобразовать уравнение Менделеева – Клапейрона к виду:

$$PV = \frac{M}{\mu} RT = \frac{N}{N_A} RT = NkT \Rightarrow P = \frac{N}{V} kT = nkT. \quad (7.1.14)$$

Сравнение (7.1.12) и (7.1.14) даёт:

$$\frac{2}{3} n < w_k > = nkT \Rightarrow < w_k > = \frac{3}{2} kT. \quad (7.1.15)$$

Полученное выражение для средней кинетической энергии поступательного движения одной молекулы идеального газа показывает, что эта величина пропорциональна термодинамической температуре и однозначно ею определяется. Следовательно, внутренняя энергия идеального газа, равная кинетической энергии поступательного движения всех молекул этого газа  $W_k = N < w_k >$ , также пропорциональна термодинамической температуре и однозначно ею определяется.

Поскольку  $< w_k > = \frac{1}{2} m v_{кв}^2$ , то из (7.1.15) находим:

$$v_{кв}^2 = \frac{3kT}{m} \Rightarrow v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (7.1.16)$$

Оценим среднеквадратичную скорость молекул некоторых газов при температуре 300 K (близко к обычной комнатной температуре). Для молекулы кислорода (с учётом значения  $\mu_{O_2} = 2 \cdot 16 \cdot 10^{-3}$  кг/моль) получим  $v_{квO_2} = \sqrt{3 \cdot 8,31 \cdot 3 \cdot 10^2 / 32 \cdot 10^{-3}} \approx 483,4$  м/с, а для молекулы водорода  $\mu_{H_2} = 2 \cdot 10^{-3}$  кг / моль и  $v_{квH_2} = \sqrt{3 \cdot 8,31 \cdot 3 \cdot 10^2 / 2 \cdot 10^{-3}} \approx 1933,8$  м/с. Как видим, при комнатной температуре скорости молекул рассмотренных газов достаточно высоки.

## 7.2. Распределение Максвелла

В результате хаотического движения молекулы газа непрерывно сталкиваются не только со стенками сосуда, но и между собой, что приводит к постоянному изменению как модулей скоростей молекул газа, так и направлений этих скоростей. Поскольку речь идёт о хаотическом движении молекул, то вследствие равноправности всех направлений в любом из направлений движется одинаковое количество молекул за промежуток времени, существенно превышающий среднее время между соударениями молекул. Модули векторов скоростей молекул газа в состоянии ТДР будут распределены от минимального (нулевого) значения до неограниченно больших величин по некоторому закону, который называется **законом распределения** молекул по скоростям.

Закон распределения молекул газа по скоростям в состоянии ТДР впервые был установлен в 1859 г. Ма́ксвеллом (Джеймс Клерк Ма́ксвелл, англ., 1831–1879).

Для количественного описания распределения молекул газа по скоростям (точнее, нужно говорить о распределении молекул по модулям скоростей, но для краткости говорят о распределении молекул газа по скоростям) используют понятие **функции распределения** молекул по скоростям  $f(v)$ , которая вводится следующим образом.

Пусть рассматриваемый газ находится в состоянии ТДР. Обозначим через  $N$  общее количество молекул рассматриваемого газа, а через  $dN(v)$  – число молекул газа, имеющих модули скоростей в диапазоне от  $v$  до  $v + dv$ . Доля молекул, попадающих в указанный диапазон скоростей,  $dN(v)/N$  пропорциональна величине диапазона, то есть  $dN(v)/N \sim dv$ , причём коэффициент пропорциональности не обязательно есть постоянная величина, а может зависеть от скорости, то есть можем записать:

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv, \quad (7.2.1)$$

где  $f(v)$  – зависящий от скорости коэффициент пропорциональности, называемый функцией **распределения**<sup>13</sup> молекул по скоростям.

---

<sup>13</sup> Не следует путать введённую нами функцию распределения молекул по скоростям  $f(v)$  с вводимой в теории вероятностей функцией распределения  $F(v)$  непрерывной случайной величины  $V$ , возможные значения которой принадлежат промежутку  $v \in [0, +\infty)$ . Введённая нами функция распределения молекул по скоростям  $f(v)$  в терминах теории вероятностей есть **плотность распределения**  $\varphi(v)$  непрерывной случайной величины  $V$ , связанной с функцией распределения  $F(v)$  соотношением:  $F(v) = \int_{-\infty}^v \varphi(x)dx = \int_0^v \varphi(x)dx$ .

Интегрирование по всему диапазону доступных значений скоростей в числителе левой стороны равенства (7.2.1) даёт полное число молекул рассматриваемого газа  $N$ , так что для функции распределения молекул по скоростям получаем *условие нормировки*:

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = \frac{N}{N} = 1. \quad (7.2.2)$$

Поиск вида функции распределения молекул по скоростям выходит за рамки данного курса, поэтому мы приведём без доказательства выражение для данной функции:

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (7.2.3)$$

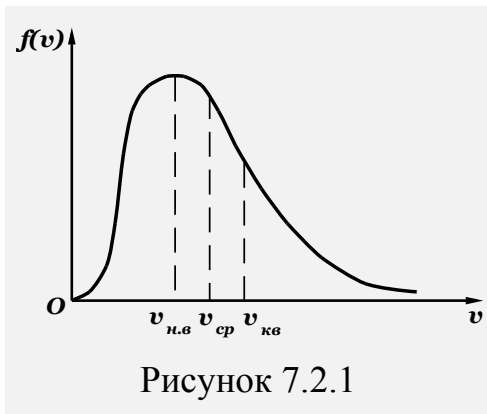


График данной функции при некоторой температуре  $T$  приведён на рисунке 7.2.1. На этом рисунке отмечены три наиболее важные на практике значения скоростей молекул газа. Одна из этих скоростей, среднеквадратичная скорость  $v_{кв}$ , определяемая выражением (7.1.11) и равная в соответствии с (7.1.15)  $v_{кв} = \sqrt{3kT/m} = \sqrt{3RT/\mu}$ ,

а две другие скорости мы определим сейчас. Значение скорости, при которой функция распределения  $f(v)$  молекул по скоростям достигает своего наибольшего значения, обозначается  $v_{н.в}$ , находится обычным исследованием функции на экстремумы. В данном случае функция  $f(v)$  имеет единственный экстремум (максимум) в точке  $v = v_{н.в}$ , где выполняется условие  $(df(v)/dv)|_{v=v_{н.в}} = 0$ . Действительно, из указанного условия имеем уравнение:

$$4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{mv_{н.в}^2}{2kT}} \cdot v_{н.в} \left[ 2 - \frac{mv_{н.в}^2}{kT} \right] = 0, \quad (7.2.4)$$

которое имеет три корня:  $v_{н.в,1} = 0$  находится на границе области определения величины  $v$  ( $v \in [0, +\infty)$ ) и является её наименьшим значением в указанной области определения;  $v_{н.в,2} = -\sqrt{2kT/m}$  не принадлежит области определения величины ( $v_{н.в,2} \notin [0, +\infty)$ ); и последний корень является

максимальным значением величины  $v \in [0, +\infty)$  и называется **наиболее вероятной скоростью** (точнее, наиболее вероятным модулем скоростей) молекул газа:

$$v_{н.в} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (7.2.5)$$

Последняя из указанных на рисунке (7.2.1) скоростей  $v_{cp}$  – так называемая **средняя арифметическая скорость** молекул газа, которая определяется как среднее значение модуля скоростей молекул газа (или первый начальный момент – **математическое ожидание**  $M(V) \equiv \langle v \rangle$  – непрерывной случайной величины  $V$  с плотностью распределения  $f(v)$ , возможные значения которой принадлежат промежутку  $v \in [0, +\infty)$ ) и вычисляемая по формуле (по определению первого начального момента непрерывной случайной величины):

$$v_{cp} = \langle v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v f(v) dv = \int_0^{+\infty} v f(v) dv. \quad (7.2.6)$$

Подстановка (7.2.3) в выражение (7.2.6) и вычисление несобственного интеграла для средней арифметической скорости  $v_{cp}$  даёт:

$$v_{cp} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}; \quad \frac{8}{\pi} \cong 2,546. \quad (7.2.7)$$

Сравнение трёх вычисленных скоростей даёт:  $v_{н.в} < v_{cp} < v_{кв}$ .

Функция распределения молекул по скоростям имеет очень важное значение, поскольку позволяет вычислять средние значения различных физических величин. Например, вычисление среднего квадрата скорости молекул газа (по определению второго центрального момента непрерывной случайной величины) даёт:

$$\langle v^2 \rangle = v_{кв}^2 = \int_0^{+\infty} v^2 f(v) dv = \frac{3kT}{m}, \quad (7.2.8)$$

в полном соответствии с (7.1.15).

Видим, что функция распределения молекул по скоростям является важнейшим инструментом для вычисления средних значений различных физических величин.

Дополнительно отметим, что в идеальном газе от распределения молекул по скоростям легко перейти к распределению молекул по энергиям. Действительно, учитывая, что полная энергия одной молекулы идеального газа есть кинетическая энергия поступательного движения молекулы, имеем:

$$\varepsilon = w_k = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}; \quad dv = \sqrt{\frac{1}{2m}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (7.2.9)$$

а выражению (7.2.1) соответствует формула, которая определяет число молекул  $dN(\varepsilon)$ , попадающих в интервал энергий от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ :

$$dN(\varepsilon) = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{2\varepsilon}{m} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\frac{1}{2m}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = N \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \quad (7.2.10)$$

Следовательно, функция распределения молекул по энергиям  $\varepsilon$  есть:

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon}. \quad (7.2.11)$$

Для средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа, в соответствии с определением среднего в теории вероятностей, имеем:

$$\langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} \varepsilon f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon = \frac{3}{2} kT. \quad (7.2.12)$$

Детали вычислений  $\langle \varepsilon \rangle$  по (7.2.12) опущены. Видим, что в полном соответствии с (7.1.15),  $\langle \varepsilon \rangle = 3kT / 2$ . Как и функция распределения молекул по скоростям, функция распределения молекул по энергиям является важнейшим инструментом для вычисления средних значений различных физических величин.

В заключение отметим, что экспериментальная проверка полностью подтвердила справедливость распределения Максвелла для молекул газа по скоростям и по энергиям.

### 7.3. Барометрическая формула.

#### Распределения Больцмана и Максвелла – Больцмана

Наличие внешних силовых полей, таких как гравитационное или электрическое, существенно влияют на поведение молекул газа и на состояние рассматриваемой системы.

В частности, в отсутствие поля тяготения у планет не было бы атмосферы, так как молекулы газов, входящих в состав атмосферы, беспрепятственно покидали бы поверхность планет и рассеивались бы во Вселенной. На самом деле, однако, мы наблюдаем наличие атмосферы у тяжёлых планет, имеющих достаточно сильное гравитационное поле для удержания атмосферы вблизи своей поверхности.

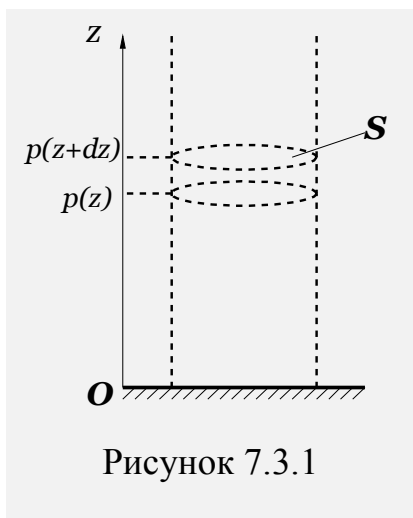


Рисунок 7.3.1

Влияние силового поля на состояние системы мы рассмотрим на простейшем примере идеального газа, находящегося в однородном гравитационном поле в состоянии ТДР. Такой моделью с большой степенью точности можно описывать, например, воздух при условиях, близких к нормальным, вблизи поверхности Земли в пределах высот, на которых можно считать поле тяготения Земли почти постоянным.

Мы также упростим ситуацию, предполагая температуру  $T$  газа в рассматриваемом слое постоянной.

Направим ось  $z$  перпендикулярно поверхности Земли в направлении от этой поверхности (рисунок 7.3.1). Давление газа на высоте  $z$  обозначим  $P(z)$ . Выделим вертикальный столб газа поперечным сечением  $S$  и рассмотрим элементарный слой высотой  $dz$ . На высоте  $z + dz$  давление газа будет  $P(z + dz) = P(z) + dP(z)$ . Разница давлений на высотах  $z$  и  $z + dz$  равна весу газа  $\underbrace{(\rho S dz)}_{dm} g$ , заключённого между данными сечениями, делённого на площадь рассматриваемого столба газа  $S$ , то есть  $\rho g S dz / S$ , так что:

$$P(z) - [P(z) + dP(z)] = \rho g dz, \quad (7.3.1)$$

где  $\rho$  – плотность рассматриваемого газа,  $g$  – ускорение свободного падения.

Исходя из определения плотности однородного вещества  $\rho = m / V$ , из уравнения Менделеева – Клапейрона находим:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow \rho = \frac{P\mu}{RT} = \frac{Pm_0 N_A}{RT} = \frac{Pm_0}{kT}. \quad (7.3.2)$$

Следовательно:

$$-dP = \frac{P\mu}{RT} g dz \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} dz = -\frac{m_0 g}{kT} dz. \quad (7.3.3)$$

Из (7.3.3) находим:

$$d \ln P = -\frac{\mu g}{RT} dz = -\frac{m_0 g}{kT} dz \Rightarrow \ln P = -\frac{m_0 g}{kT} z + \ln C \Rightarrow P = C e^{-\frac{m_0 g}{kT} z}, \quad (7.3.4)$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Если обозначить  $P_0$  давление рассматриваемого идеального газа на поверхности Земли (при  $z = 0$ ), то находим  $C = P_0$ .

Таким образом, для зависимости давления газа от высоты имеем **барометрическую формулу**:

$$P = P_0 e^{-\frac{m_0 g}{kT} z}. \quad (7.3.5)$$

С учётом соотношения  $P = nkT$  (это один из вариантов записи уравнения Менделеева – Клапейрона) находим:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g}{kT} z}, \quad (7.3.6)$$

где  $n_0 = n(z)|_{z=0}$  – концентрация газа у поверхности планеты, связанная с давлением  $P_0$  соотношением  $P_0 = n_0 kT$ .

Полученное выражение можно записать в ином виде, если учесть, что величина  $m_0 g z = U(z)$  является потенциальной энергией молекулы газа в однородном поле сил тяготения:

$$n = n_0 e^{-\frac{U(z)}{kT}}. \quad (7.3.7)$$

В данной форме выражение пригодно для идеального газа в присутствии любого потенциального поля (например, электрического поля). Выражение (7.3.7) называется **распределением Бóльцмана** (Бóльцман Людвиг, австр., 1844–1906).

Отношение концентраций молекул рассматриваемого газа  $n(z_2) / n(z_1) \equiv n_2 / n_1$  на высотах  $z_2$  и  $z_1$  определяется выражением:

$$n_2 / n_1 = e^{-\frac{U_2}{kT}} / e^{-\frac{U_1}{kT}} = e^{-\frac{U_2 - U_1}{kT}}, \quad (7.3.8)$$



которое показывает, что концентрация молекул идеального газа в присутствии потенциального силового поля выше там, где меньше потенциальная энергия молекул в данном силовом поле.

Если потенциальная энергия частицы в силовом поле зависит от всех координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то есть  $U = U(x, y, z)$ , количество молекул в элементе объёма  $dV = dxdydz$  будет определяться выражением:

$$dN(x, y, z) = n_0 e^{-\frac{U(x, y, z)}{kT}} dxdydz. \quad (7.3.9)$$

Из приведённой формулы, являющейся обобщением распределения Больцмана (7.3.7), вытекает, что вероятность обнаружения молекул в некоторой окрестности точки  $M(x, y, z)$  пространства с потенциальной энергией  $U(x, y, z)$  пропорциональна  $e^{-U(x, y, z)/kT}$ .

Распределения Максвелла и Больцмана можно объединить в одно выражение, называемое **распределением Максвелла – Больцмана**:

$$\begin{aligned} dN(v_x, v_y, v_z, x, y, z) &= C e^{-\frac{mv^2/2 + U(x, y, z)}{kT}} dv_x dv_y dv_z dxdydz = \\ &= C e^{-\frac{E(v_x, v_y, v_z, x, y, z)}{kT}} dv_x dv_y dv_z dxdydz, \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

где  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ ,  $E(v_x, v_y, v_z, x, y, z)$  – полная энергия частицы, а  $C$  – некоторая постоянная, определяемая из условия:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} dN(v_x, v_y, v_z, x, y, z) = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv^2/2 + U(x, y, z)}{kT}} dv_x dv_y dv_z dxdydz, \quad (7.3.11)$$

являющегося условием нормировки и утверждающего, что число частиц в системе с всевозможными значениями проекций импульсов (скоростей) и координат должно быть равно полному числу частиц рассматриваемой системы  $N$ .

Если энергия частиц принимает не непрерывный, а дискретный ряд значений  $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , из некоторого ряда (**спектра**) возможных значений энергии, то выражение (7.3.11) примет вид:

$$N_i = C e^{-\frac{E_i}{kT}} = \left( N / \sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}} \right) e^{-\frac{E_i}{kT}}, \quad (7.3.12)$$

где  $N_i$  – число частиц системы, имеющих энергию  $E_i$ ,  $C$  – нормировочная постоянная, определяемая из условия  $C = N / \sum_i e^{-E_i/kT}$ .

#### 7.4. Статистическое толкование энтропии

Термодинамика не может раскрыть физическое содержание введённой в п. 6.8 энтропии системы  $S$ , как некоторой термодинамической функции состояния системы, поскольку, как отмечалось в п. 6.1, её метод основан на описании макроскопической системы при помощи непосредственно наблюдаемых величин (параметров) и установлении связей между ними. Эти параметры относятся ко всей рассматриваемой системе и описывают её **макросостояние**, а величины, связанные с её молекулярной структурой (то есть характеристики движения отдельных частиц (молекул) системы, определяющие **микросостояние** системы), не входят в термодинамические расчёты.

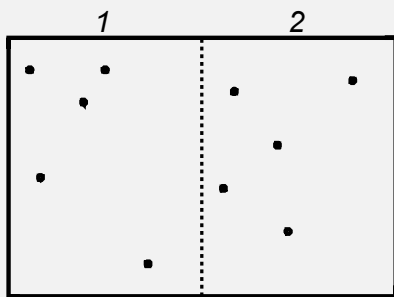


Рисунок 7.4.1

Эту задачу решает статистическая физика, устанавливающая связь между макроскопическим параметром – энтропией системы – и количеством микросостояний (способов), которым может быть реализовано данное макросостояние системы. Количество различных микросостояний (способов), которым может быть реализовано данное макросостояние системы, называется **статистическим**

**весом** этого макросостояния и обозначается  $W$ . Для реальных макросистем статистические веса являются гигантскими числами.

Поясним понятие статистического веса макросостояния конкретным упрощённым примером. Пусть имеется замкнутый сосуд, содержащий внутри  $N$  молекул газа (на рисунке 7.4.1  $N = 10$ ). Мысленно разделим сосуд на две части одинакового объёма. Рассмотрим макросостояние, состоящее в том, что в некоторый момент времени количество молекул в левой части сосуда равно  $N_1$ , а в правой части –  $N_2$  ( $N_1 + N_2 = N$ ). Фактически мы считаем единственной характеристикой каждой молекулы её принадлежность конкретной части сосуда (то есть попадание в эту часть сосуда), не принимая во внимание все остальные параметры молекул. Это, разумеется, не соответствует действительному набору характеристик молекул, необходимых для полного описания их состояния, но для нашей цели (по-

яснения понятия статистического веса) этого вполне достаточно. Присутствие *конкретных*  $N_1$  и  $N_2$  молекул в частях 1 и 2, соответственно, является некоторым микросостоянием, приводящим к реализации рассматриваемого макросостояния.

В левой части  $N_1$  молекул из общего числа  $N$  молекул можно выбрать  $W'$  способами:

$$\begin{aligned}
 W' &= \underbrace{N}_{\substack{\text{число способов выбора} \\ \text{1-й молекулы}}} \cdot \underbrace{(N-1)}_{\substack{\text{число способов выбора} \\ \text{2-й молекулы}}} \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-N_1+1) = \\
 &= \frac{\overbrace{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-N_1+1)}^{N!} \cdot \underbrace{(N-N_1) \cdot (N-N_1-1) \cdot \dots \cdot 1}_{(N-N_1)!}}{(N-N_1)!} = \quad (7.4.1) \\
 &= \frac{N!}{(N-N_1)!} .
 \end{aligned}$$

Молекулы идентичны, поэтому перестановки местами молекул в каждой из частей, учтённые выражением (7.4.1), не приводят к новому макросостоянию системы. Число таких перестановок равно  $N_1!$ . Следовательно, число микросостояний, которым реализуется рассматриваемое макросостояние, равно:

$$W = \frac{W'}{N_1!} = \frac{N!}{N_1! \cdot (N-N_1)!} = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2!} . \quad (7.4.2)$$

Выражение (7.4.2) симметрично относительно  $N_1$  и  $N_2 = N - N_1$  и, следовательно, то же самое число получится, если определять количество отличающихся друг от друга способов выбора  $N_2$  молекул из общего числа  $N$ . Таким образом, выражение (7.4.2) даёт число микросостояний, соответствующих рассматриваемому макросостоянию, или статистический вес этого макросостояния. Статистические веса макросостояний системы являются важными факторами, поскольку позволяют судить о том, какими будут наблюдаемые макроскопические параметры рассматриваемой системы. Чтобы пояснить, как это можно осуществить, рассмотрим несколько примеров.

Сначала возьмём число частиц  $N$  в системе равным 2.

Результаты расчётов статистических весов различных макросостояний для данной ситуации приведены в табл. 7.4.1. Кроме того, в последнем столбце этой таблицы приведено значение вероятности  $\mathcal{P}$  (это не давление!) осуществления данного состояния системы. Эта величина определяется в таблице по формуле, которую мы приведём без доказательства:

$$\mathcal{P} = W \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2!} \left(\frac{1}{2}\right)^N. \quad (7.4.3)$$

Таблица 7.4.1

| Число молекул |           | Формула (7.4.2)  | Статистический вес W | Вероятность (7.4.3) |
|---------------|-----------|------------------|----------------------|---------------------|
| В части 1     | В части 2 |                  |                      |                     |
| 0             | 2         | $W=2!/(0!*2!) =$ | 1                    | 0,25                |
| 1             | 1         | $W=2!/(1!*1!) =$ | 2                    | 0,5                 |
| 2             | 0         | $W=2!/(2!*0!) =$ | 1                    | 0,25                |

Из приведённой таблицы можно сделать такие выводы. Число микросостояний, соответствующее ситуациям, когда обе молекулы находятся в одной из половин сосуда, равно 1, а число микросостояний, соответствующее ситуации, когда в каждой из частей сосуда находятся по одной молекуле, равно 2. Поскольку в идеальном газе молекулы между собой не взаимодействуют (нет влияния каждой из молекул на место положения другой молекулы), то вероятность обнаружения любой молекулы в какой-либо части сосуда одинакова и все микросостояния равновероятны. Вероятность осуществления макросостояния прямо пропорциональна числу микросостояний (статистическому весу), которым оно реализовано. Обосновать такой результат можно следующим образом. В силу равной вероятности всех микросостояний, время, проводимое макросистемой в каждом из этих микросостояний, одинаково. Всего микросостояний 4 (это сумма всех статистических весов). Но два из четырёх микросостояний (то есть половина) соответствуют одному макросостоянию. Следовательно, в процессе наблюдения за системой мы обнаружим, что половину времени эта система находится в состоянии, когда в каждой из частей сосуда находятся по одной молекуле.

Увеличим число частиц  $N$  в системе, но оставим его небольшим, например,  $N = 6$ .

Результаты расчётов статистических весов различных макросостояний для данной ситуации приведены в таблице 7.4.2.

Таблица 7.4.2

| Число молекул |           | Формула (7.4.2)  | Статистический вес W | Вероятность (7.4.3) |
|---------------|-----------|------------------|----------------------|---------------------|
| В части 1     | В части 2 |                  |                      |                     |
| 0             | 6         | $W=6!/(0!*6!) =$ | 1                    | 0,015625            |
| 1             | 5         | $W=6!/(1!*5!) =$ | 6                    | 0,09375             |
| 2             | 4         | $W=6!/(2!*4!) =$ | 15                   | 0,234375            |
| 3             | 3         | $W=6!/(3!*3!) =$ | 20                   | 0,3125              |
| 4             | 2         | $W=6!/(4!*2!) =$ | 15                   | 0,234375            |
| 5             | 1         | $W=6!/(5!*1!) =$ | 6                    | 0,09375             |
| 6             | 0         | $W=6!/(6!*0!) =$ | 1                    | 0,015625            |

Всего микросостояний в этом случае 64. 50 из 64 микросостояний (то есть 78,125% от общего числа) соответствуют макросостояниям с числом молекул в каждой из частей сосуда, равным половине от общего числа молекул, либо минимально отличающимся от половины общего числа молекул (от 2 до 4 молекул,  $\Delta N = \pm 1$ ;  $\Delta N / (N / 2) = \pm 0,333$ ). Следовательно, в процессе наблюдения за системой мы обнаружим, что 78,125% от общего времени наблюдения эта система находится в состояниях, когда в каждой из частей сосуда находятся либо по половине от общего числа молекул, либо число молекул в каждой из частей сосуда минимально отличается от половины общего числа молекул.

Далее рассмотрим пример, аналогичный предыдущему, но с числом молекул  $N = 20$ . Расчёт статистических весов, соответствующих возможным вариантам расположения молекул в различных частях сосуда, приведён в таблице 7.4.3.

Таблица 7.4.3

| Число молекул |           | Формула (7.4.2)    | Статистический вес W | Вероятность (7.4.3)     |
|---------------|-----------|--------------------|----------------------|-------------------------|
| В части 1     | В части 2 |                    |                      |                         |
| 0             | 20        | $W=20!/(0!*20!) =$ | 1                    | $9,53674 \cdot 10^{-7}$ |
| 1             | 19        | $W=20!/(1!*19!) =$ | 20                   | $1,90735 \cdot 10^{-5}$ |
| 2             | 18        | $W=20!/(2!*18!) =$ | 190                  | 0,000181198             |
| 3             | 17        | $W=20!/(3!*17!) =$ | 1140                 | 0,001087189             |

Продолжение таблицы 7.4.3

|    |    |                   |   |        |                         |
|----|----|-------------------|---|--------|-------------------------|
| 4  | 16 | $W=20!/(4!*16!)$  | = | 4845   | 0,004620552             |
| 5  | 15 | $W=20!/(5!*15!)$  | = | 15504  | 0,014785767             |
| 6  | 14 | $W=20!/(6!*14!)$  | = | 38760  | 0,036964417             |
| 7  | 13 | $W=20!/(7!*13!)$  | = | 77520  | 0,073928833             |
| 8  | 12 | $W=20!/(8!*12!)$  | = | 125970 | 0,120134354             |
| 9  | 11 | $W=20!/(9!*11!)$  | = | 167960 | 0,160179138             |
| 10 | 10 | $W=20!/(10!*10!)$ | = | 184756 | 0,176197052             |
| 11 | 9  | $W=20!/(11!*9!)$  | = | 167960 | 0,160179138             |
| 12 | 8  | $W=20!/(12!*8!)$  | = | 125970 | 0,120134354             |
| 13 | 7  | $W=20!/(13!*7!)$  | = | 77520  | 0,073928833             |
| 14 | 6  | $W=20!/(14!*6!)$  | = | 38760  | 0,036964417             |
| 15 | 5  | $W=20!/(15!*5!)$  | = | 15504  | 0,014785767             |
| 16 | 4  | $W=20!/(16!*4!)$  | = | 4845   | 0,004620552             |
| 17 | 3  | $W=20!/(17!*3!)$  | = | 1140   | 0,001087189             |
| 18 | 2  | $W=20!/(18!*2!)$  | = | 190    | 0,000181198             |
| 19 | 1  | $W=20!/(19!*1!)$  | = | 20     | $1,90735 \cdot 10^{-5}$ |
| 20 | 0  | $W=20!/(20!*0!)$  | = | 1      | $9,53674 \cdot 10^{-7}$ |

Во-первых, видим, как существенно возрастают числа для статистических весов в случае  $N = 20$ . Всего микросостояний в этом случае 1 048 576, и 927 656 из них (то есть 88,468% от общего числа) соответствуют макросостояниям с числом молекул в каждой из частей сосуда, равным половине от общего числа молекул, либо незначительно отличающимся от половины общего числа молекул (от 7 до 13 молекул;  $\Delta N = \pm 3$ ;  $\Delta N / (N / 2) = \pm 0,30$ ). Следовательно, в процессе наблюдения за системой мы обнаружим, что 88,468% от общего времени наблюдения эта система находится в состояниях, когда в каждой из частей сосуда находятся либо по половине от общего числа молекул, либо число молекул в каждой из частей сосуда минимально отличается от половины общего числа молекул.

В случае 100 молекул статистические веса в средней части таблицы становятся гигантскими числами, что видно из фрагмента таблицы 7.4.4 (приведены только начало таблицы, несколько строк вблизи середины таблицы и конец таблицы):

Таблица 7.4.4

| Число молекул |           | Статистический вес W                |                          | Вероятность<br>(7.4.3)   |
|---------------|-----------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| В части 1     | В части 2 |                                     |                          |                          |
| 0             | 100       | 1 =                                 | 1                        | $7,88861 \cdot 10^{-31}$ |
| 1             | 99        | 100 =                               | 100                      | $7,88861 \cdot 10^{-29}$ |
| 2             | 98        | 4950 =                              | 4950                     | $3,90486 \cdot 10^{-27}$ |
| 3             | 97        | 161700 =                            | 161700                   | $1,27559 \cdot 10^{-25}$ |
| 4             | 96        | 3921225 =                           | 3921225                  | $3,0933 \cdot 10^{-24}$  |
| 5             | 95        | 75287520 =                          | 75287520                 | $5,93914 \cdot 10^{-23}$ |
| 6             | 94        | 1192052400 =                        | 1192052400               | $9,40364 \cdot 10^{-22}$ |
| 7             | 93        | 16007560800 =                       | 16007560800              | $1,26277 \cdot 10^{-20}$ |
|               |           |                                     |                          |                          |
| 45            | 55        | 61448471214136200000000000000000 =  | $6,14485 \cdot 10^{+28}$ | 0,048474297              |
| 46            | 54        | 73470998190815000000000000000000 =  | $7,3471 \cdot 10^{+28}$  | 0,057958398              |
| 47            | 53        | 84413487283064100000000000000000 =  | $8,44135 \cdot 10^{+28}$ | 0,0665905                |
| 48            | 52        | 93206558875049900000000000000000 =  | $9,32066 \cdot 10^{+28}$ | 0,07352701               |
| 49            | 51        | 98913082887808100000000000000000 =  | $9,89131 \cdot 10^{+28}$ | 0,078028664              |
| 50            | 50        | 100891344545564000000000000000000 = | $1,00891 \cdot 10^{+29}$ | 0,079589237              |
| 51            | 49        | 98913082887808100000000000000000 =  | $9,89131 \cdot 10^{+28}$ | 0,078028664              |
| 52            | 48        | 93206558875049900000000000000000 =  | $9,32066 \cdot 10^{+28}$ | 0,07352701               |
| 53            | 47        | 84413487283064100000000000000000 =  | $8,44135 \cdot 10^{+28}$ | 0,0665905                |
| 54            | 46        | 73470998190815000000000000000000 =  | $7,3471 \cdot 10^{+28}$  | 0,057958398              |
| 55            | 45        | 61448471214136200000000000000000 =  | $6,14485 \cdot 10^{+28}$ | 0,048474297              |
|               |           |                                     |                          |                          |
| 93            | 7         | 16007560800 =                       | 16007560800              | $1,26277 \cdot 10^{-20}$ |
| 94            | 6         | 1192052400 =                        | 1192052400               | $9,40364 \cdot 10^{-22}$ |
| 95            | 5         | 75287520 =                          | 75287520                 | $5,93914 \cdot 10^{-23}$ |
| 96            | 4         | 3921225 =                           | 3921225                  | $3,0933 \cdot 10^{-24}$  |
| 97            | 3         | 161700 =                            | 161700                   | $1,27559 \cdot 10^{-25}$ |
| 98            | 2         | 4950 =                              | 4950                     | $3,90486 \cdot 10^{-27}$ |
| 99            | 1         | 100 =                               | 100                      | $7,88861 \cdot 10^{-29}$ |
| 100           | 0         | 1 =                                 | 1                        | $7,88861 \cdot 10^{-31}$ |

Если вновь взять 30%-й диапазон отклонения от половинного значения числа молекул  $N/2 = 50$ , то 1 265 381 593 893 090 000 000 000 000 000 =  $1,26538 \cdot 10^{+30}$  микросостояний из общего числа микросостояний 1 267 650 600 228 230 000 000 000 000 000 000 =  $1,26765 \cdot 10^{+30}$  (то есть уже

99,821% от общего числа) соответствуют макросостояниям с числом молекул в каждой из частей сосуда, равным половине от общего числа молекул, либо незначительно отличающимся от половины общего числа молекул (от 35 до 65 молекул;  $\Delta N = \pm 15$ ;  $\Delta N / (N / 2) = \pm 0,30$ ). Следовательно, теперь в процессе наблюдения за системой мы обнаружим, что уже 99,821% от общего времени наблюдения эта система находится в состояниях, когда в каждой из частей сосуда находятся либо по половине от общего числа молекул, либо число молекул в каждой из частей сосуда минимально отличается от половины общего числа молекул. Видим также, что вероятность обнаружения системы из  $N = 100$  молекул в состоянии, когда все молекулы находятся в одной из частей сосуда, ничтожно мала.

Следует отметить, что наблюдаемое в равновесном состоянии равенство молекул  $N_1$  и  $N_2$  в двух частях сосуда, относится *только* к их *средним* значениям, то есть имеет место равенство  $\langle N_1 \rangle = \langle N_2 \rangle$ . Сами же величины  $N_1$  и  $N_2$  постоянно изменяются за счёт теплового движения молекул. Отклонения  $\Delta N_i = \langle N_i \rangle - N_i$  числа молекул в различных частях сосуда от своих средних значений, называемые *флуктуациями*, не вызваны никакими внешними причинами, и поэтому называются (и являются) самопроизвольными. За счёт постоянного изменения величин  $N_1$  и  $N_2$  система проходит через весь ряд возможных (и равновероятных) микросостояний. При этом подавляющее число микросостояний соответствует макросостояниям с незначительными отклонениями величин  $N_1$  и  $N_2$  от своих средних значений. При проведении измерений величин  $N_1$  и  $N_2$  на опыте осуществляется конечная выборка из ряда возможных (и равновероятных) микросостояний. С учётом сказанного относительно количества микросостояний с большими отклонениями от средних значений, можно сделать вывод о том, что измеренные значения величин  $N_1$  и  $N_2$  будут практически всегда совпадать с их средними значениями. Поясним это следующим примером. Если предположить, что микросостояния меняются, например с огромной частотой  $10^6 \text{ с}^{-1}$  (на 1 состояние отводится  $10^{-6} \text{ с}$ ), то для фиксации сбора всех молекул в одной половине сосуда нужно ждать  $1,26765 \cdot 10^{+24} \text{ секунд} = 4,01969 \cdot 10^{+16} \text{ лет}$ , что существенно превышает время существования Вселенной  $13,8 \cdot 10^9 \text{ лет} \cong 4,35 \cdot 10^{+17} \text{ с}$ . Это означает, что фактически это событие не наступит никогда!



Если взять число молекул равным, например, числу Авогадро, то статистические веса будут просто гигантскими. Действительно, воспользуемся для оценки статистического веса состояния с равным количеством молекул в частях 1 и 2 при  $N_1 = N_2 = N_A / 2 = 6,02 \cdot 10^{23} / 2$ . Для оценки статистического веса данного состояния воспользуемся формулой Стирлинга (применима при  $N \geq 10^{10}$ ):

$$\begin{aligned} \ln(N!) &\cong N(\ln N - 1) = N(\ln N - \ln e) = N \ln \frac{N}{e} = \ln \left( \frac{N}{e} \right)^N \Rightarrow \\ &\Rightarrow N! = \left( \frac{N}{e} \right)^N, \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

из которой следует:

$$\begin{aligned} W &= \frac{N_A!}{(N_A/2)! (N_A/2)!} = \frac{(N_A/e)^{N_A}}{((N_A/2)/e)^{N_A/2} \cdot ((N_A/2)/e)^{N_A/2}} = \\ &= \frac{(N_A/e)^{N_A}}{(N_A/e)^{N_A} \cdot (1/2)^{N_A}} = \\ &= 2^{N_A} = 2^{6,02 \cdot 10^{23}} = \left| 2^N = 10^{(\ln 2 / \ln 10) N} = 10^{0,3 N} \right| = 10^{1,81 \cdot 10^{23}}. \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Если учесть, что близкие по величине статистические веса имеют состояния с небольшими отклонениями от состояния с равным числом молекул в каждой части сосуда, то общее число микросостояний системы и сумма числа микросостояний с небольшими отклонениями от состояния с равным числом молекул в каждой части сосуда будут чудовищно большими. При этом выяснится, что подавляющую часть времени система проводит в состояниях, с почти равным числом молекул в каждой части сосуда.

Результат, полученный для распределения молекул по двум частям сосуда, легко обобщить на ситуацию, когда в рассматриваемом сосуде выделено не 2 части (ячейки), а  $K$  частей (ячеек), в каждой из которых в рассматриваемом макросостоянии находится  $N_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ , молекул

$$\left( \sum_{i=1}^K N_i = N \right):$$

$$W = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdot \dots \cdot N_K!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^K N_i!}. \quad (7.4.6)$$

Несмотря на усложнение рассуждений, итог и здесь будет аналогичным. При большом количестве молекул в каждой из ячеек общее число микросостояний системы и сумма числа микросостояний с небольшими отклонениями числа молекул в ячейках от своих средних значений в соответствующих ячейках будут чудовищно большими. И это вновь означает, что подавляющую часть времени система проводит в состояниях с числом молекул в каждой части сосуда, почти равным их средним значениям.

В термодинамике параметры системы, находящейся в состоянии ТДР, однозначны и, следовательно, флуктуации в термодинамике не рассматриваются. Значения параметров системы просто равны средним их значениям, определённым статистическими методами. Если система выведена из состояния ТДР, то в этом случае, как это следует из второго закона термодинамики и подтверждает опыт, в системе возникают процессы, приводящие к возрастанию её энтропии и переходу системы в итоге к состоянию ТДР. Очевидны аналогии между, во-первых, состоянием ТДР и макросостоянием системы, реализуемым наибольшим числом микросостояний и, во-вторых, между тенденциями в возрастании энтропии и стремлении системой принять состояние, соответствующее наибольшему числу микросостояний. Это позволяет сделать вывод о том, энтропия системы и число микросостояний, соответствующее её возможным состояниям, между собой связаны однозначной функцией, то есть записать:

$$S = f(W). \quad (7.4.7)$$

Впервые такая идея была сформулирована Больцманом. Однако способ определения вида функции в (7.4.7), предложенный Больцманом, достаточно сложен, и мы приведём другие, более элементарные рассуждения, приводящие к определению функциональной зависимости в формуле (7.4.7).

Прежде всего отметим, что величины  $S$  и  $W$  имеют в своих свойствах существенное отличие: энтропия системы – величина аддитивная, а число микросостояний системы – величина мультипликативная. Это означает, что если выделить в системе две части (подсистемы), энтропии которых равны  $S_1$  и  $S_2$ , а числа микросостояний указанных подсистем, соответственно, равны  $W_1$  и  $W_2$ , то для всей системы имеют место равенства  $S = S_1 + S_2$  и  $W = W_1 \cdot W_2$ . Согласовать поведение величин  $S$  и  $W$  можно, если взять в качестве связывающей их функции логарифмическую функцию, то есть если принять, что  $S \sim \ln W \Rightarrow S = a \ln W$ , где  $a > 0$  – некото-

рая константа, смысл и значение которой нужно определить. Предложенная функциональная зависимость между величин  $S$  и  $W$  приводит в соответствие поведение физических величин в обеих частях равенства (7.4.7), поскольку, с учётом положительности числа микросостояний, имеем:  $S = S_1 + S_2 = a \ln(W_1 \cdot W_2) = a \ln W_1 + a \ln W_2$ .

Логарифмическая зависимость в (7.4.7) может быть обоснована и более строго. Для этого вновь выделим в системе две подсистемы, энтропии которых обозначим  $S_1$  и  $S_2$ , а числа микросостояний указанных подсистем, соответственно,  $W_1$  и  $W_2$ , причём, поскольку речь идёт об энтропии одной системы, то независимо от значений  $S_1$  и  $S_2$  их сумма постоянна ( $S = S_1 + S_2 = \text{const}$ ), откуда следует, что произведение величин  $W_1$  и  $W_2$  тоже должно быть постоянным ( $W_1 \cdot W_2 = \text{const}$ ). Для энтропии системы, как функции двух переменных, из  $S = S_1 + S_2 = f(W_1) + f(W_2) = \text{const}$  следует:

$$d[f(W_1) + f(W_2)] = 0 \Rightarrow df(W_1) = -df(W_2). \quad (7.4.8)$$

Из условия  $W_1 \cdot W_2 = \text{const}$  находим:

$$W_2 \cdot dW_1 + W_1 \cdot dW_2 = 0 \Rightarrow \frac{dW_1}{W_1} = -\frac{dW_2}{W_2}. \quad (7.4.9)$$

Деление левой части (7.4.8) на левую часть (7.4.9) и правой части (7.4.8) на, соответственно, правую часть (7.4.9) даёт:

$$W_1 \cdot \frac{df(W_1)}{dW_1} = W_2 \cdot \frac{df(W_2)}{dW_2}. \quad (7.4.10)$$

Функциональное уравнение (7.4.10) в левой части содержит только функции от  $W_1$ , а в правой – только функции от  $W_2$ . При произвольных значениях (из областей их допустимых значений) величин  $W_1$  и  $W_2$  такое равенство может выполняться только при условии, что обе части выражения (7.4.10) равны одной и той же константе (обозначим её, например,  $a$ ). Поскольку  $W_1$  и  $W_2$  произвольны, то индекс можно опустить и записать:

$$W \cdot \frac{df(W)}{dW} = a \Rightarrow df(W) = a \frac{dW}{W} \Rightarrow df(W) = d(a \ln W), \quad (7.4.11)$$

или

$$f(W) = a \ln W + C. \quad (7.4.12)$$

Произвольная постоянная в (7.4.11) должна быть равной нулю, что следует из условия  $a \ln(W_1 \cdot W_2) + C = (a \ln W_1 + C) + (a \ln W_2 + C) \Rightarrow C = 0$ , то есть для энтропии системы имеем:

$$S = a \ln W. \quad (7.4.13)$$

Для определения константы  $a$  в выражении (7.4.13) сравним выражения для изменения энтропии идеального газа при обратимом изотермическом переходе из равновесного состояния 1 с параметрами  $(p_1, V_1, T)$  в равновесное состояние 2 с параметрами  $(p_2, V_2, T)$ , полученные на основе термодинамического определения энтропии  $dS = dQ / T$  (формула (6.8.5)) и статистического определения энтропии (7.4.13).

Из первого начала термодинамики и (6.8.5) и уравнения Менделеева – Клапейрона для произвольного элементарного обратимого процесса имеем:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dU + pdV}{T} = \frac{1}{T} \overbrace{\frac{dU}{dT}}^{=(m/\mu)C_V} + \overbrace{\frac{p}{T}}^{=(mR/\mu V)} dV = \frac{m}{\mu} C_V \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} \frac{R}{V} dV = \\ &= \frac{m}{\mu} \left\{ C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right\} = \frac{m}{\mu} \{ C_V d \ln T + R d \ln V \}, \end{aligned} \quad (7.4.14)$$

а для произвольного конечного обратимого процесса приращения энтропии между указанными выше равновесными состояниями 1 и 2 имеем:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} \left\{ C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right\}. \quad (7.4.15)$$

В частности, в обратимом изотермическом процессе для изменения энтропии имеем:

$$\Delta S_T = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (7.4.16)$$

Теперь вычислим изменение энтропии идеального газа при переходе из состояния 1, в котором  $N$  молекул сосредоточены полностью в одной из двух равных частей объёмом  $V / 2$  сосуда, в состояние 2, когда молекулы равномерно распределены по обеим частям сосуда, то есть по объёму  $V$ . Из выражения (7.4.2) следует, что состояние 1 имеет статистический вес  $W_1 = N! / (N)! = 1$ , а статистический вес системы в состоянии 2 равен  $W_2 = N! / [(N / 2)!]^2$ . Следовательно, для изменения энтропии при переходе из состояния 1 в состояние 2 по формуле (7.4.13) имеем:

$$\begin{aligned}
\Delta S &= a \ln \frac{W_2}{W_1} = a \ln \frac{N!}{[(N/2)!]^2} = a \{ \ln N! - 2 \ln [(N/2)!] \} = \\
&= a \left[ \ln \left( \frac{N}{e} \right)^N - 2 \ln \left( \frac{N}{2e} \right)^{\frac{N}{2}} \right] = \\
&= a \left[ N(\ln N - 1) - 2 \frac{N}{2} (\ln N - \ln 2 - 1) \right] = \\
&= a [N \ln N - N - N \ln N + N \ln 2 + N] = aN \ln 2. \quad (7.4.17)
\end{aligned}$$

Сравнивая (7.4.16) для случая, когда  $V_2 / V_1 = 2$  и (7.4.17), находим, что:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln 2 = aN \ln 2 \Rightarrow a = \frac{m}{\mu} \frac{R}{N} = \frac{N}{N_A} \frac{R}{N} = \frac{R}{N_A} = k, \quad (7.4.18)$$

где  $N_A$  – число Авогадро,  $k = R / N_A = 1,380662(44) \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. Таким образом, для энтропии, с учётом того, что константа  $a = k$ , окончательно имеем:

$$S = k \ln W. \quad (7.4.19)$$

Выражение (7.4.19) позволяет понять причину роста энтропии в необратимых процессах. Формально процесс перехода из состояния 1, когда  $N$  молекул сосредоточены полностью в одной из двух равных частей объёмом  $V / 2$  сосуда, в состояние 2, когда молекулы равномерно распределены по обеим частям сосуда (то есть по объёму  $V$ ), обратим, но вероятность осуществления обратного процесса, состоящего в том, что все молекулы вновь соберутся в одной половине сосуда, будет пропорциональна  $((V_1 / V)^N = (1/2)^N)$  и при макроскопических значениях  $N \sim N_A$  ничтожно мала, то есть фактически обратный процесс неосуществим. Чтобы он осуществился, потребуется время, значительно (на десятки порядков!) превышающее время существования Вселенной. Именно этот факт и означает, практическую необратимость процесса, состоящего в том, молекулы газа, распределённые равномерно по сосуду, соберутся в одной из его половин.

Таким образом, второй закон термодинамики с учётом статистического определения энтропии означает, что в изолированной системе в *подавляющем числе случаев* будут осуществляться процессы, в которых система из менее вероятных состояний переходит в более вероятные, пока не достигнет состояния, соответствующего максимальной вероятности и, со-

ответственно, энтропии. Процессы, в которых система из более вероятных состояний переходит в менее вероятные, возможны, но для осуществления таких процессов в макроскопических системах (содержащих число частиц порядка  $N_A$ ) требуется время, значительно превышающее время жизни Вселенной, что фактически означает неосуществимость этих процессов.

Имеется ещё одно обстоятельство, связанное со статистическим определением энтропии, которое состоит в том, что нет никаких принципиальных возражений против использования выражения  $S = k \ln W$  в качестве определения энтропии системы в неравновесных состояниях. При этом нужно, конечно, указать методы определения числа микросостояний, которыми реализуется рассматриваемое неравновесное состояние.

### 7.5. Классическая теория теплоёмкости газов

Для определения теплоёмкости газов воспользуемся полученным ранее значением средней кинетической энергии  $\langle \varepsilon \rangle$  хаотического поступательного движения молекул идеального газа (см. (7.1.15) или (7.2.12))

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (7.5.1)$$

Для  $N$  молекул рассматриваемого идеального газа величина  $U = N \langle \varepsilon \rangle = N \frac{3}{2} kT$  ввиду отсутствия взаимодействия между молекулами идеального газа есть внутренняя энергия этого газа. Следовательно, исходя из (7.5.1), для молярной теплоёмкости идеального газа при постоянном объёме  $C_{(\mu)V}$  имеем:

$$C_V = \frac{dQ_V}{dT} = \frac{dU}{dT} = N \frac{3}{2} k = \nu \frac{3}{2} R; \quad C_{(\mu)V} = \frac{C_V}{\nu} = \frac{3}{2} R. \quad (7.5.2)$$

Полученные выражения для теплоёмкости идеального газа при постоянном объёме можно обобщить на газы, молекулы которых не взаимодействуют друг с другом или этим взаимодействием можно пренебречь, но сами молекулы нельзя считать материальными точками. Таким приближением можно пользоваться для многих реальных газов вблизи нормальных условий, имеющих не одноатомные молекулы (как, например, входящие в состав воздуха газы  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $CO_2$  и многие другие).

При этом, однако, придётся учесть способность молекул таких газов запасать энергию за счёт вращательного и колебательного движений.

Напомним, что число **степеней свободы**  $i$  механической системы называется *наименьшее число независимых величин (координат), задание которых однозначно определяет положение системы*. Поскольку в любой системе координат положение материальной точки в пространстве однозначно определяется тремя координатами (декартовыми прямоугольными  $x, y, z$ , сферическими  $\rho, \varphi, \theta$ , цилиндрическими  $\rho, \varphi, z$  или какими-либо другими), число степеней свободы материальной точки равно 3, то есть  $i = 3$ . Каждой из степеней свободы одноатомной молекулы можно сопоставить способность перемещаться относительно одной из трёх координатных осей и, следовательно, способность запасать кинетическую энергию хаотического поступательного движения. Причём, вследствие равноправия всех направлений при хаотическом движении, кинетические энергии хаотического поступательного движения, соответствующие каждой степени свободы, равны между собой. С учётом сказанного выражение (7.5.1) можно записать несколько иначе:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2}kT; \quad i = 3. \quad (7.5.3)$$

Обобщим полученный результат на более сложные молекулы. Для этого сначала определим число степеней свободы абсолютно твёрдого тела (АТТ).

Положение АТТ однозначно определяется заданием координат (например, декартовых прямоугольных) трёх произвольных, но жёстко фиксированных по отношению к рассматриваемому АТТ, точек, не лежащих на одной прямой. Это значит, что расстояния между указанными точками фиксированы (постоянны). Следовательно, имеем девять переменных  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$  и три жёсткие связи:

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 &= l_1^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 &= l_2^2 \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 &= l_3^2 \end{aligned} \right\}, \quad (7.5.4)$$

то есть независимых переменных шесть, или  $i = 9 - 3 = 6$ .

Данный результат можно получить и из других соображений. Задать положение АТТ в пространстве можно с помощью шести координат: трёх координат центра масс этого АТТ и трёх углов —  $\varphi, \theta$  и  $\psi$ , из которых первые два угла ( $\varphi$  и  $\theta$ ) задают положение оси  $l_1$ , проходящей через центр

масс рассматриваемого АТТ и произвольную фиксированную точку этого АТТ, а третий угол  $\psi$  определяет положение второй оси  $l_2$ , также проходящей через центр масс рассматриваемого АТТ, перпендикулярной к первой оси  $l_1$ , по отношению к некоторой фиксированной оси  $l_2'$  (то есть некоторому произвольно выбранному, но фиксированному положению оси  $l_2$ , обозначенному  $l_2'$ , см. рисунок 7.5.1). Вновь видим, что число степеней свободы АТТ  $i = 6$ .

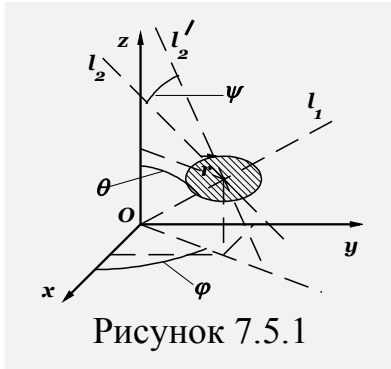


Рисунок 7.5.1

Для молекулы, состоящей из двух жёстко связанных атомов, число степеней свободы равно пяти (шесть координат и одна жёсткая связь). По аналогии с (7.5.4) имеем:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2, \quad (7.5.5)$$

то есть  $i = 6 - 1 = 5$ .

У молекул из трех и более жёстко связанных атомов, как и у АТТ, число степеней свободы равно шести  $i = 6$ . Движение центра масс относительно трёх независимых координатных осей сопоставляется поступательному движению, и поэтому эти степени свободы молекулы называются поступательными и обозначаются  $i_{пост}$ . Остальные степени свободы многоатомной молекулы с жёстко связанными атомами соответствуют вращательному движению вокруг взаимно перпендикулярных осей и обозначаются  $i_{вр}$ .

В курсах статистической физики доказывается закон о **равномерном распределении** кинетической энергии хаотического движения молекулы газа невзаимодействующих между собой молекул по степеням свободы:

В состоянии ТДР на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия хаотического движения, равная  $\frac{1}{2}kT$ .

На основе сформулированного закона о равномерном распределении кинетической энергии хаотического движения молекулы для всех многоатомных молекул с жёстко связанными атомами по аналогии с (7.5.3) можем записать:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (7.5.6)$$

где число степеней свободы  $i = i_{пост} + i_{вр}$  принимает значение, соответствующее структуре молекулы.



Однако не всегда связи атомов в молекулах можно считать жёсткими. При достижении некоторых температур (разных для различных молекул) и выше этих температур атомы в многоатомных молекулах становятся подвижными относительно своих положений равновесия. Смещение атомов в такой молекуле из своих положений равновесия приводит к возникновению сил, стремящихся вернуть атомы в положения равновесия (то есть **упругих сил**), что приводит к колебаниям атомов относительно указанных положений равновесия. Наличие упругих сил, стремящихся вернуть атомы в положение равновесия, означает, что данная система (многоатомная молекула) может запасать энергию, в том числе и энергию хаотического движения, в колебательном движении атомов данной молекулы. При колебательном движении вдоль направления, соединяющего любые два атома молекулы, эти атомы имеют и кинетическую, и потенциальную энергии, средние значения которых равны между собой. Следовательно, способность запасать энергию у колебательной степени свободы вдвое больше, чем у поступательной степени свободы или вращательной степени свободы.

Подводя итог, можем для определения числа степеней свободы многоатомной молекулы можем записать:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}. \quad (7.5.7)$$

Формула (7.5.6) для средней кинетической энергии хаотического движения многоатомной молекулы, с учётом понятия числа степеней свободы молекулы, можно записать в виде:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}. \quad (7.5.8)$$

Для внутренней энергии газа, состоящего из  $N$  невзаимодействующих между собой многоатомных молекул, имеем:

$$U = \frac{i}{2} NkT = \frac{i}{2} \frac{N}{N_A} N_A kT = \nu \frac{i}{2} RT, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}. \quad (7.5.9)$$

Следовательно, для молярных теплоёмкостей многоатомного газа при постоянном объёме, определяемых выражениями  $C_{(\mu)V} = dQ_{(\mu)V} / dT = dU_{(\mu)} / dT$ ,  $C_{(\mu)p} = C_{(\mu)V} + R$ , получим:

$$C_{(\mu)V} = \frac{i}{2} R; \quad C_{(\mu)p} = \frac{i+2}{2} R; \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}. \quad (7.5.10)$$

Отношение теплоёмкостей  $\gamma = C_p / C_V$  рассматриваемых газов будет зависеть только от числа степеней свободы молекул этих газов. Действительно:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_{\mu p}}{C_{\mu V}} = \frac{i + 2}{i}. \quad (7.5.11)$$

Так, если молекулы газа состоят из двух жёстко связанных атомов, то  $i = i_{\text{норм}} + i_{\text{вр}} = 3 + 2 = 5$  и по (7.5.11) находим  $\gamma = 7 / 5 = 1,4$ .

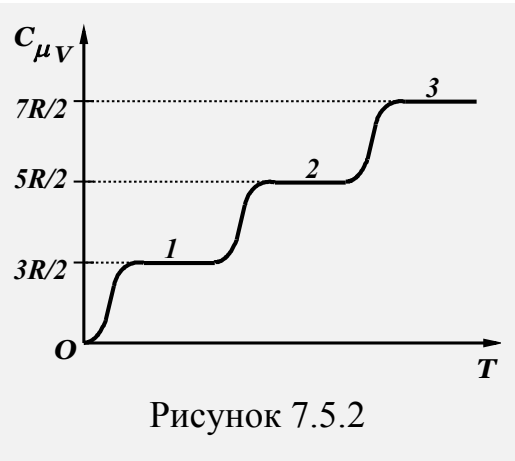


Рисунок 7.5.2

Опыт даёт хорошее согласование с теорией для многих газов при условиях, близких к нормальным. Однако имеющиеся отклонения от опытных данных (на рисунке 7.5.2 изображены опытные данные для молекулярного водорода) носят принципиальный характер, потому что их нельзя объяснить на основе изложенной выше теории. Суть противоречий состоит, во-первых, в том, что молярные теплоёмкости газов, состоящих из невзаимодействующих между собой многоатомных молекул, должны быть кратными  $R / 2$  и, во-вторых, теплоёмкости этих газов не могут зависеть от температуры. Из рисунка 7.5.2 видим, что есть горизонтальные участки 1, 2 и 3, которые соответствуют ситуациям, когда молекулы газа ведут себя, как одноатомные ( $i = i_{\text{норм}} = 3$ , участок 1), двухатомные с жёсткой связью ( $i = i_{\text{норм}} + i_{\text{вр}} = 3 + 2 = 5$ , участок 2) и двухатомные с упругой связью ( $i = i_{\text{норм}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}} = 3 + 2 + 2 \cdot 1 = 7$ , участок 3).

Изложенная выше теория не допускает такой «многозначности» в поведении молекул рассматриваемого газа.

Последовательное объяснение такого поведения молекул газа оказалось возможным только на основе квантово-механических представлений об атомах и молекулах, и мы не будем их здесь обсуждать. Отметим лишь, что такое поведение молекул газа обусловлено тем, что при низких температурах вращательное движение молекул рассматриваемого газа и колебательное движение атомов в них недоступны («запрещены») и «отключены» соответствующие этим движениям степени свободы, а затем, по мере повышения температуры, последовательно становятся доступными, сначала вращательное движение молекул («включаются» вращательные степени свободы), а затем и колебательное движение атомов в молекулах («включаются» колебательные степени свободы).

## 7.6. Средняя длина свободного пробега молекул газа

До настоящего момента столкновениями молекул при изучении свойств газов мы пренебрегали. Не всегда, однако, такое допущение оправдано. В частности, процессы, возникающие в газах при выведении их из состояния ТДР, *существенно* обусловлены столкновениями молекул между собой.

В столкновении могут участвовать две и более молекулы газа. Теоретические расчёты и опытные данные показывают, что вероятность столкновения трёх и более молекул между собой ничтожно мала по сравнению с вероятностью парных столкновений молекул. Поэтому далее мы будем учитывать только парные столкновения молекул между собой, пренебрегая столкновениями, в которых участвуют более двух молекул. Процесс столкновения молекул между собой мы будем упрощённо представлять в виде упругого столкновения двух шаров, хотя на самом деле механизм взаимодействия сталкивающихся молекул очень сложен. Такое упрощение возможно по той причине, что взаимодействующие молекулы можно представить замкнутой системой (по отношению ко всем остальным молекулам) так, что механическая энергия взаимодействующей пары молекул остаётся неизменной.

Обозначим, как это принято, через  $d$  минимальное расстояние между центрами взаимодействующих (сталкивающихся) молекул (см. рисунок 7.6.1, а).

Если в некоторой плоскости, проходящей через центр рассматриваемой молекулы, изобразить круг радиусом  $d$  с центром, совпадающим с центром масс данной молекулы, то все другие молекулы, движущиеся в направлении перпендикуляра к этой плоскости, будут «сталкиваться» с выделенной молекулой, если их центры попадают в площадь указанного круга радиусом  $d$  (см. рисунок 7.6.1, б). Поэтому круг с радиусом  $d$ , равным минимальному расстоянию между центрами сталкивающихся молекул, называется **эффективным сечением** молекулы, а само минимальное расстояние  $d$  называется **эффективным диаметром** молекулы. **Площадь эффективного сечения**  $\sigma$  молекулы, таким образом, связана с её эффективным диаметром  $d$  формулой  $\sigma = \pi d^2$ . Часто вместо словосоче-

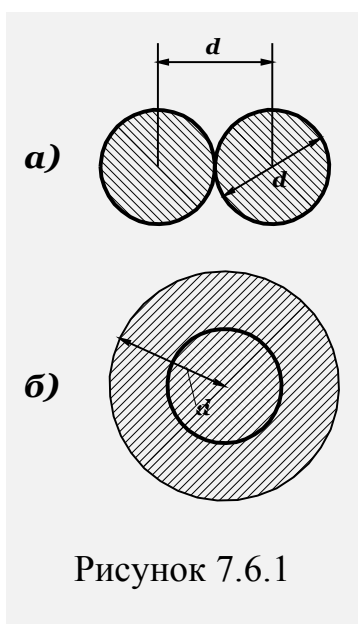


Рисунок 7.6.1

тания «площадь эффективного сечения молекулы  $\sigma$ » говорят кратко «эффективное сечение молекулы  $\sigma$ ».

Выделим произвольную молекулу газа и проследим за её движением в течение некоторого времени  $\Delta t$ . Если с целью упрощения анализа считать все другие молекулы, кроме выделенной, неподвижными, то рассматриваемая молекула со средней арифметической скоростью  $\langle v \rangle$  (см. формулу (7.7.6)) за промежуток времени  $\Delta t$  пройдёт путь  $\Delta l = \langle v \rangle \Delta t$ . Столкновения с другими молекулами будут иметь место, если центры этих молекул попадут при движении выделенной молекулы в её эффективное сечение, то есть если встречающиеся молекулы попадут в объём «ломаного» цилиндра  $\Delta V = \sigma \Delta l = \pi d^2 \langle v \rangle \Delta t$ . Если обозначить концентрацию молекул  $n$ , то число столкновений  $\Delta N$  выделенной молекулы с другими за время  $\Delta t$  будет определяться выражением  $\Delta N = n \Delta V = n \pi d^2 \langle v \rangle \Delta t$ .

Следовательно, среднее расстояние между соседними столкновениями, называемое *средней длиной свободного пробега* молекулы  $\langle \lambda \rangle$ , будет определяться выражением:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\Delta l}{\Delta N} = \frac{\langle v \rangle \Delta t}{n \pi d^2 \langle v \rangle \Delta t} = \frac{1}{n \pi d^2}. \quad (7.6.1)$$

Выражение (7.6.1) для средней длины свободного пробега молекулы газа зависит, как и следовало ожидать, от концентрации молекул газа и от размеров молекул, характеризующих их эффективным диаметром  $d$  и эффективным сечением  $\sigma$ .

Напомним, что в наших рассуждениях было использовано упрощающее предположение о неподвижности всех молекул, кроме выделенной. Разумеется, на самом деле движутся все молекулы. Учесть это обстоятельство можно путём введения относительной средней арифметической скорости  $\langle v_{отн} \rangle$ , которая, как это легко показать, равна  $\sqrt{2} \langle v \rangle$ . Действительно, если обозначить векторы скоростей двух произвольных молекул  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , их относительная скорость  $\vec{v}_{отн}$  будет определяться выражением  $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ . Следовательно,  $v_{отн}^2 = \vec{v}_{отн} \cdot \vec{v}_{отн} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = v_2^2 - v_1^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ . Усреднение полученного выражения даёт  $\langle v_{отн}^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle + \langle v_1^2 \rangle - 2 \langle \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \rangle = 2 \langle v^2 \rangle - 2 \langle \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \rangle$  (учтено, что  $\langle v_2^2 \rangle = \langle v_1^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$ ). Поскольку движения молекул газа статистически независимы, то среднее произведение  $\langle \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \rangle$  равно произведению средних век-

торов  $\langle \vec{v}_1 \rangle \cdot \langle \vec{v}_2 \rangle$ , каждый из которых, как средний вектор скорости хаотического движения, равен нуль-вектору (если это не так, то есть средняя скорость молекул не равна нуль-вектору, то в системе имеет место перенос частиц, что противоречит условию хаотичности движения). Таким образом, для среднего квадрата относительной скорости молекул газа имеем:

$$\langle v_{отн}^2 \rangle = 2 \langle v^2 \rangle. \quad (7.6.2)$$

Для среднеквадратичных относительных скоростей имеем  $v_{кв,отн} = \sqrt{2}v_{кв}$ . Поскольку среднеквадратичные и среднеарифметические скорости молекул пропорциональны друг другу, то имеем  $\langle v_{отн} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle$ .

Следовательно, в знаменателе формулы (7.6.1) нужно добавить множитель  $\sqrt{2}$  (в числителе этого делать не нужно, так как там речь идёт о пути, пройденном выделенной молекулой). В итоге, для средней длины свободного пробега находим уточнённое выражение:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}. \quad (7.6.3)$$

С учётом уточнений для средней частоты  $\langle z \rangle$  столкновений молекулы, равной отношению среднего числа столкновений молекулы за время  $\Delta t$  к промежутку времени  $\Delta t$ , то есть  $\langle z \rangle = \Delta N / \Delta t$ , имеем:

$$\langle z \rangle = (\sqrt{2}n\pi d^2 \langle v \rangle \Delta t) / \Delta t = \sqrt{2}n\pi d^2 \langle v \rangle. \quad (7.6.4)$$

Поскольку давление газа и концентрация молекул связаны между собой соотношением  $p = nkT$ , то при постоянной температуре средняя длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна давлению:  $\langle \lambda \rangle = kT / (\sqrt{2}\sigma p)$ .

Оценим величину средней длины свободного пробега, например, для молекулы кислорода ( $O_2$ ) при нормальных условиях:

$$V_{(\mu)} = 22,4 \text{ л} \cdot \text{моль}^{-1} = 2,24 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3 \cdot \text{моль}^{-1}; N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1};$$

$$d_{O_2} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}; n = N_A / V_{(\mu)} \approx 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

$$\text{Следовательно, } \langle \lambda \rangle_{O_2} \approx 1 / (1,41 \cdot 3,14 \cdot 2,7 \cdot 9) \cdot 10^{-25} \cdot 10^{20} \text{ м} \approx 10^{-7} \text{ м}.$$

Для молекул с меньшими эффективными диаметрами молекул средние длины свободного пробега будут больше. Например, для молекулы водорода ( $H_2$ )  $d_{H_2} \approx 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$  имеем:

$\langle \lambda \rangle_{H_2} \approx 1 / (1,41 \cdot 3,14 \cdot 2,7 \cdot (2,3)^2) \cdot 10^{-25} \cdot 10^{20} \text{ м} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  при нормальных условиях.

Сравнение средних длин свободного пробега молекул при указанных условиях с их эффективными диаметрами показывает, что  $\langle \lambda \rangle / d \approx 10^3 \gg 1$ .

## 7.7. Явления переноса в газах

Напомним, что все рассмотренные нами до сих пор системы считались находящимися в состоянии термодинамического равновесия (ТДР), которое означает, что значения всех термодинамических параметров этих систем одинаковы во всех точках рассматриваемой системы и неизменны во времени. Отмечалось также, что в системе, находящейся в состоянии ТДР, отсутствуют любые потоки (вещества, энергии, импульса и т. д.).

Теперь мы будем обсуждать *неравновесные* системы, которые выведены каким-либо способом из состояния ТДР, так что в разных точках этих систем термодинамические параметры имеют различные значения. Вследствие этого в таких системах возникают потоки – *явления переноса* – различных физических величин (потоки частиц, импульса, энергии и др.), стремящиеся возратить систему в состояние ТДР. Наша задача состоит в поиске способов описании явлений переноса и выявлении общих закономерностей для потоков различных физических величин.

Необходимо внести уточнения и выяснить, какой смысл мы вкладываем во фразу «в разных точках неравновесных систем термодинамические параметры имеют различные значения». Дело в том, что с точки зрения термодинамики данная фраза лишена смысла, поскольку понятие «параметр системы» по определению применим только для системы, находящейся в состоянии ТДР и он (параметр системы) имеет одинаковое значение во всех точках системы. Выход из создавшегося положения осуществляется путём введения понятия *локального равновесия*. Известно, что время релаксации зависит от размеров рассматриваемой системы и увеличивается с ростом размеров этой системы. Поэтому, если выделить в системе малые её части (но всё ещё макроскопические!), то в этих малых частях (подсистемах) состояние равновесия будет устанавливаться значительно быстрее, нежели во всей рассматриваемой системе. Этот факт даёт возможность говорить о *локальном* равновесии в этих малых частях и о *локальных* параметрах, характеризующих данные малые части. Именно в

этом смысле нужно понимать упомянутую выше фразу «в разных точках неравновесных систем термодинамические параметры имеют различные значения». Таким образом, хотя рассматриваемая система и находится в неравновесном состоянии, малые её части будут находиться в состоянии локального равновесия и их можно характеризовать параметрами, такими, как температура, давление, химический потенциал и др.

Из множества явлений переноса мы ограничимся обсуждением теплопроводности, диффузии и внутреннего трения (вязкости).

Предварительно введём понятия, применимые к различным явлениям переноса, что позволит не делать каждый раз при рассмотрении отдельных ситуаций.

Рассмотрим некоторую скалярную физическую величину (параметр)  $\varphi$ . Наличие переноса этой величины означает, что за время  $\Delta t$  (от  $t$  до  $t + \Delta t$ ) через произвольно выделенную площадку переносится некоторое количество  $\Delta\varphi$  рассматриваемой величины, то есть отлична от нуля величина  $\langle \Pi_\varphi \rangle = \Delta\varphi / \Delta t$ , называемая **средним потоком** за промежуток времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  рассматриваемой величины. При  $\Delta t \rightarrow 0$  будем иметь мгновенный поток (или, для краткости, **поток**) величины  $\varphi$ , то есть  $\Pi_\varphi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta\varphi / \Delta t) = d\varphi / dt$ . Размерность потока определяется размерностью величин  $\varphi$  и времени.

Возникшая по каким-либо причинам пространственная неоднородность скалярной физической величины  $\varphi(P)$  (параметра), выражающаяся в зависимости этой величины от точки наблюдения  $P$  (и, разумеется, координат этой точки, например декартовых прямоугольных), приводит к возникновению потоков, стремящихся выровнять значение данного параметра в области, занимаемой рассматриваемой системой.

Наличие неоднородности этой величины  $\varphi(P)$  проявляется в том, что в рассматриваемой области имеются точки, в которых отлична от нуля, по крайней мере, одна из величин  $\partial\varphi / \partial x$ ,  $\partial\varphi / \partial y$  или  $\partial\varphi / \partial z$ , то есть вектор  $(\partial\varphi / \partial x)\vec{i} + (\partial\varphi / \partial y)\vec{j} + (\partial\varphi / \partial z)\vec{k} \neq \vec{0}$  и, следовательно, отлична от нуля длина этого вектора в этих точках:  $\sqrt{(\partial\varphi / \partial x)^2 + (\partial\varphi / \partial y)^2 + (\partial\varphi / \partial z)^2} \neq 0$ .

**Вектор**  $(\partial\varphi / \partial x)\vec{i} + (\partial\varphi / \partial y)\vec{j} + (\partial\varphi / \partial z)\vec{k}$  позволяет судить о наличии неоднородности рассматриваемой физической величины в рассматриваемой области и, соответственно, о наличии потока этой величины. Он получил специальное название – **градиент** рассматриваемой величины  $\varphi$

и специальное обозначение  $grad\varphi$ . В декартовой прямоугольной системе координат вектор  $grad\varphi$  определяется выражением:

$$grad\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}. \quad (7.7.1)$$

Отметим, что в других системах координат выражение (7.7.1) для вектора  $grad\varphi$  неприменимо.

Проекции вектора  $grad\varphi$  на координатные оси есть скаляры:

$$(grad\varphi)_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad (grad\varphi)_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad (grad\varphi)_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (7.7.2)$$

Если провести в некоторой точке пространства элементарную площадку  $d\vec{S} = \vec{n}dS$ ;  $d\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{n}$ , то поток  $\Pi_\varphi$  через указанную площадку будет зависеть от взаимного расположения орта нормали  $\vec{n}$  этой площадки и вектора  $grad\varphi$  в рассматриваемой точке. Опыт показывает, что при не слишком сильных неоднородностях поток (величина скалярная) пропорционален величине  $(-grad\varphi \cdot d\vec{S})$ . Сам поток  $\Pi_\varphi$  можно представить в виде скалярного произведения **вектора плотности потока**  $\vec{j}_\varphi$  такого, что в каждой точке пространства будет иметь место равенство  $\Pi_\varphi = \vec{j}_\varphi \cdot d\vec{S}$ . Следовательно, с учётом сказанного о пропорциональности потока  $\Pi_\varphi$  через некоторую элементарную площадку  $d\vec{S}$  можем записать:

$$\vec{j}_\varphi \cdot d\vec{S} = K_\varphi (-grad\varphi) \cdot d\vec{S}, \quad (7.7.3)$$

где  $K_\varphi > 0$  – коэффициент пропорциональности, называемый кинетическим коэффициентом, зависящий от природы рассматриваемого потока, или:

$$\vec{j}_\varphi = -K_\varphi grad\varphi; \quad K_\varphi > 0. \quad (7.7.4)$$

Из наличия знака «минус» перед вектором  $grad\varphi$  в (7.7.4) следует, что векторы плотности потока  $\vec{j}_\varphi$  и  $grad\varphi$  противоположно направлены, то есть  $\vec{j}_\varphi \uparrow\downarrow grad\varphi$ . Это означает, что вектор плотности потока  $\vec{j}_\varphi$  в любой точке пространства направлен так, чтобы устранить имеющуюся неоднородность рассматриваемой физической величины  $\varphi$ .



Для упрощения обсуждаемых ниже явлений переноса мы далее рассмотрим ситуацию, когда векторы  $\vec{j}_\varphi$  и  $\text{grad}\varphi$  направлены вдоль одной из координатных осей, например оси  $x$ . В этом случае отличны от нуля только проекции этих векторов на ось  $x$ , то есть  $j_{\varphi,x}$  и  $\partial\varphi/\partial x$ , так что вместо (7.7.4) имеем:

$$j_{\varphi,x} = -K_\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x}. \quad (7.7.5)$$

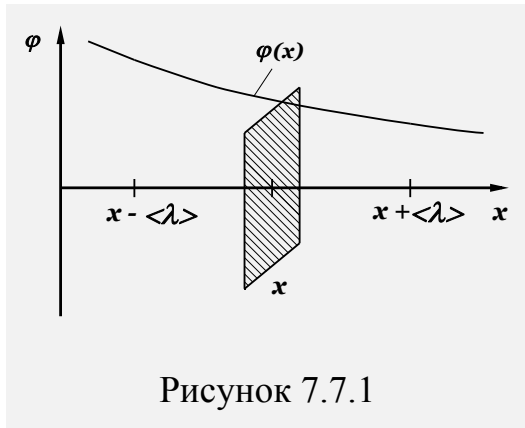


Рисунок 7.7.1

С другой стороны, попытаемся вычислить поток величины  $\varphi$  через площадку  $\Delta S$ , перпендикулярную оси  $x$ , исходя из молекулярно-кинетических соображений. Будем считать установившимся во времени пространственное распределение параметра  $\varphi$ , что делает возникающие при этом потоки стационарными. Кроме того, будем обозначать среднее значение

величины  $\langle \varphi \rangle$ , отнесённое к одной молекуле, в сечении, совпадающем с выделенной площадкой, просто  $\varphi$ . Для определённости пусть величина  $\varphi$  убывает (рисунок 7.7.1), то есть  $d\varphi/dx < 0$ . Отличаться от данного значения величина  $\varphi$  может только на расстояниях, не меньших средней длины свободного пробега молекул  $\langle \lambda \rangle$ , поскольку изменить своё значение рассматриваемая величина  $\varphi$  может только за счёт столкновения с другими молекулами.

Обозначим средние значения рассматриваемой величины  $\varphi$  в сечениях, параллельных выделенной площадке, слева и справа от неё  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , соответственно. Молекулы движутся между столкновениями со средними арифметическими скоростями  $\langle v \rangle$ , определяемыми температурой. Из левого сечения за время  $\Delta t$  через площадку  $\Delta S$  слева направо (вдоль оси  $x$ ) переносится количество  $\frac{1}{6}\varphi_1 \cdot n \cdot \langle v \rangle \Delta S \Delta t$  величины  $\varphi$  и количество  $\frac{1}{6}\varphi \cdot n \cdot \langle v \rangle \Delta S \Delta t$  в обратном направлении. Из правого сечения за время  $\Delta t$  площадку  $\Delta S$  справа налево (противоположно оси  $x$ ) переносится количество  $\frac{1}{6}\varphi_2 \cdot n \cdot \langle v \rangle \Delta S \Delta t$  величины  $\varphi$  и количество  $\frac{1}{6}\varphi \cdot n \cdot \langle v \rangle \Delta S \Delta t$  в обратном направлении. Разность этих величин даёт количество величины  $\varphi$ , переносимой через выделенную площадку  $\Delta S$  за время  $\Delta t$ :

$$\Delta\varphi = \varphi^+ - \varphi^- = \frac{1}{6}(\varphi_1 - \varphi_2)n < v > \Delta S \Delta t. \quad (7.7.6)$$

Ввиду малости средней длины свободного пробега молекул можно заменить приращения величины  $\varphi$  её дифференциалами и для значений  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  записать:  $\varphi_1 = \varphi - (d\varphi / dx) < \lambda >$ ;  $\varphi_2 = \varphi + (d\varphi / dx) < \lambda >$ .

Таким образом, имеем:

$$\Delta\varphi = \varphi^+ - \varphi^- = -\frac{1}{6} \frac{d\varphi}{dx} 2 < \lambda > n < v > \Delta S \Delta t = -\frac{1}{3} \frac{d\varphi}{dx} < \lambda > n < v > \Delta S \Delta t. \quad (7.7.7)$$

Если учесть определение плотности потока величины  $\varphi$ , то получим для проекции потока:

$$j_{\varphi, x} = - \frac{1}{3} < \lambda > n < v > \frac{d\varphi}{dx}. \quad (7.7.8)$$

А для вектора потока:

$$\vec{j}_{\varphi} = - \frac{1}{3} < \lambda > n < v > \cdot \text{grad} \varphi. \quad (7.7.9)$$

Теперь можно применить полученное выражение для плотности потока рассматриваемой величины  $\varphi$  к конкретной физической ситуации, то есть рассмотреть конкретные явления переноса, из множества которых мы рассмотрим теплопроводность, диффузию и внутреннее трение (вязкость).

**Теплопроводность.** Это явление наблюдается в твёрдых телах, жидкостях и газах и заключается в том, что при наличии неоднородностей температуры в рассматриваемой системе возникают потоки тепла за счёт обмена энергиями хаотического (теплого) движения молекул из различных частей системы, находящихся в состоянии локального ТДР. Подчеркнём, что при этом в системе отсутствует упорядоченный перенос молекул (поток молекул), а перенос энергии осуществляется только за счёт хаотического движения молекул.

Для газов в роли величины  $\varphi$  выступает средняя кинетическая энергия хаотического поступательного движения молекулы газа, то есть  $\varphi = \frac{1}{2} kT$ , и для потока  $\vec{j}_{\varphi}$  (обозначается  $\vec{q} (\equiv \vec{j}_{\varphi})$ ) имеем **закон Фурье** (Жан-Батист Жозеф Фурье, фр., 1768–1830):

$$\vec{q} = - \overbrace{\frac{1}{3} < \lambda > n < v > (ik/2)}^{K=\kappa} \cdot \text{grad} T = - \kappa \cdot \text{grad} T. \quad (7.7.10)$$

В выражении (7.7.10) кинетический коэффициент  $K = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle n \langle v \rangle (ik/2) > 0$  для данного явления переноса (теплопроводности) обозначен  $\kappa$  ( $\kappa$  – буква греческого алфавита, читается «каппа») и называется *коэффициентом теплопроводности* рассматриваемой газобразной среды. Коэффициент теплопроводности  $\kappa$  принято записывать в несколько ином виде:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle n \langle v \rangle \frac{ik}{2} = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \frac{ikN_A}{2V_{(\mu)}} = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \frac{\overbrace{iR/2}^{=C_{(\mu)V}}}{\underbrace{V_{(\mu)}}_{=\mu/\rho}} = \\ &= \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \overbrace{(C_{(\mu)V}/\mu)}^{=c_V} \rho = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle c_V \rho, \end{aligned} \quad (7.7.11)$$

где  $\rho$  и  $c_V$  – плотность и удельная теплоёмкость при постоянном объёме, соответственно. Коэффициент теплопроводности в СИ измеряется в Дж/(с·м·К) = Вт/(м·К).

Если подставить в (7.7.11) выражения для средней длины свободного пробега молекулы (7.6.3) и для средней арифметической скорости (7.7.6), то увидим, что  $\kappa \sim \sqrt{T}$ .

**Диффузия.** Это явление, как и теплопроводность, наблюдается в твёрдых телах, жидкостях и газах. Общий случай диффузии можно пояснить следующим образом. Пусть имеется два или более вещества, каждое из которых состоит из молекул одного сорта. Если осуществить контакт этих веществ между собой, то молекулы каждого из этих веществ начнут взаимное проникновение в области, занимаемые молекулами других соприкасающихся веществ. В случае вещества, состоящего из молекул одного сорта, находящихся в некоторой замкнутой области пространства, диффузия, называемая *самодиффузией*, наблюдается в случае неоднородного распределения концентрации молекул этого вещества и состоит в возникновении потоков, стремящихся выровнять концентрацию во всей указанной области. Мы для упрощения анализа ограничимся рассмотрением явления самодиффузией в газах. Чтобы воспользоваться общими для всех явлений переноса результатами, нужно получить *отнесённую к одной молекуле* концентрацию молекул газа  $n$  (отнесённое к одной молекуле локальное среднее значение величины  $\langle \varphi \rangle$ , имеющей пространственные неоднородности в данном случае). В качестве такой величины возьмём отношение  $\xi = n / n_0$  – относительное число молекул в единице объёма, где

$n$  – это локальное среднее значение концентрации молекул, а  $n_0$  – равновесное значение концентрации молекул рассматриваемой системы, то есть отношение общего числа молекул  $N$  рассматриваемого газа к занимаемому им объёму  $V$ :  $n_0 = N / V$ . Отметим, что именно эта величина фигурирует в правой части формул (7.7.6)–(7.7.9). Для плотности потока числа частиц рассматриваемого газа имеем  $\vec{j}_N = - \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle n_0 \langle v \rangle \text{grad} \xi$ , или, с учётом определения величины  $\xi$ , имеем **закон Фи'ка** (Фик Адольф, нем., 1829–1901):

$$\begin{aligned} \vec{j}_N &= - \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle n_0 \langle v \rangle (1/n_0) \cdot \text{grad} n = \\ &= - \overbrace{\frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle}^D \cdot \text{grad} n = - D \cdot \text{grad} n, \end{aligned} \quad (7.7.12)$$

где  $D = (1/3) \langle \lambda \rangle \langle v \rangle$  – коэффициент диффузии молекул данного газа.

Как и в предыдущем случае теплопроводности, предполагается, что в системе нет упорядоченного переноса молекул (типа конвективного потока), а выравнивание концентрации молекул происходит только за счёт диффузии.

Если умножить обе части уравнения (7.7.12) на массу одной молекулы, то получим другую форму закона Фика:

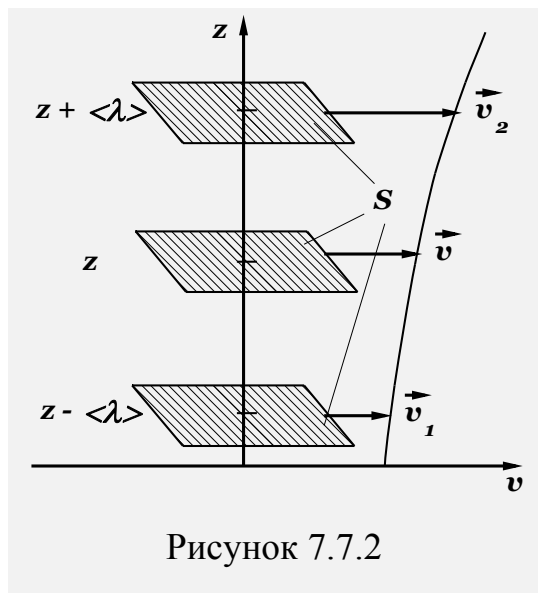
$$\vec{j}_M = -D \cdot \text{grad} \rho, \quad (7.7.13)$$

где  $\vec{j}_M = m\vec{j}_N$  и  $\rho = mn$ . Коэффициент диффузии в СИ измеряется в м<sup>2</sup>/с.

Подстановка в (7.7.13) выражения для средней длины свободного пробега молекулы (7.6.3) и для средней арифметической скорости (7.7.6) даёт:  $D \sim \sqrt{T}$ .

**Внутреннее трение.** Это явление наблюдается только в жидкостях и газах и заключается в обмене импульсами за счёт хаотического теплового движения молекул между слоями газа или жидкости, движущимися с различными скоростями. Поскольку в данном случае макроскопическую неоднородность имеет векторная физическая величина, неприменимы полученные ранее результаты для потоков скалярных величин. Обобщение указанных формул на случай потоков векторных величин требует использования тензорного анализа. Однако можно обойти возникшую трудность, ограничившись рассмотрением макроскопической неоднородности импульса в одном измерении, например, вдоль координатной оси  $z$ . Предпо-

ложим, что имеется движение плоских слоёв газа с различными скоростями, причём модуль скорости слоёв возрастает в направлении оси  $z$  (рисунок 7.7.2). В данном случае в качестве скалярной физической величины  $\langle \varphi \rangle$ , отнесённой к одной молекуле, выбираем модуль проекции импульса направленного движения молекулы на направление движения слоёв  $p = mv$ .



Кроме того, рассуждения здесь удобнее вести не о плотности потока рассматриваемой величины, а о её потоке. В данном случае поток модуля импульса есть  $dp/dt = d(mv)/dt = F$ , где  $F$  – модуль силы, возникающей за счёт переноса импульса хаотически движущимися молекулами через выделенный участок площадью  $S$  движущегося слоя газа из соседних слоёв газа, соприкасающихся с рассматриваемым слоем (эти слои расположены на расстоянии средней длины свободного пробега молекулы от рассматриваемого слоя). Эта сила имеет смысл силы трения между соприкасающимися слоями. Учитывая направления движения слоёв, легко заметить, что направлена сила  $F$  вдоль движущихся слоёв.

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{3} \left| \frac{dmv}{dz} \right| \langle \lambda \rangle n \langle v \rangle S = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \overbrace{nm}^{\rho} \left| \frac{dv}{dz} \right| S = \\
 &= \frac{1}{3} \underbrace{\langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho}_{\eta} \left| \frac{dv}{dz} \right| S = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S.
 \end{aligned}
 \tag{7.7.14}$$

В выражении (7.7.14) коэффициент пропорциональности  $\eta = (1/3) \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho$  называется коэффициентом внутреннего трения (кратко – коэффициентом вязкости) рассматриваемого газа. Коэффициент внутреннего трения в СИ измеряется в  $\text{Н/м}^2 = \text{Па} \cdot \text{с}$ .

## Глава 8. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЁННОСТЬ. ПОТЕНЦИАЛ

### 8.1. Электромагнитное поле и его свойства

Экспериментальные данные свидетельствуют, что существует только четыре качественно различных вида взаимодействий, в которых участвуют частицы-переносчики взаимодействий. Эти взаимодействия называются фундаментальными, то есть самыми основными, исходными, первичными.

Современные физические представления основаны на концепции близкодействия. Согласно этой концепции взаимодействия между телами осуществляется с конечной скоростью, не превышающей скорость света в вакууме, посредством обмена соответствующими частицами-переносчиками взаимодействия (квантами взаимодействия). Таким образом, пространство между взаимодействующими телами «заполнено» частицами-переносчиками взаимодействия, или соответствующим взаимодействием полем.

Помимо качественных различий, фундаментальные взаимодействия отличаются в количественном отношении по силе воздействия, которая характеризуется термином интенсивность. По мере увеличения интенсивности фундаментальные взаимодействия (и соответствующие им поля) располагаются в следующем порядке: *гравитационное, слабое, электромагнитное и сильное*. Каждое из этих взаимодействий (полей) характеризуется соответствующим параметром, называемым *константой связи* ( $g$ ), численное значение которого определяет интенсивность взаимодействия, и характерным *радиусом действия* ( $r$ ). Более подробное изучение фундаментальных взаимодействий отложим на последнюю часть курса физики, а сейчас приступим непосредственно к электромагнитному взаимодействию.

Именно электромагнитное взаимодействие проявляется в большинстве окружающих нас явлений природы и технике. Радиус действия электромагнитного взаимодействия не ограничен.

*Константа связи* для электромагнитного взаимодействия называется электрическим зарядом и обозначается  $q$ . Электрический заряд – это неотъемлемое свойство элементарных частиц, первичное понятие. Его нельзя описать и объяснить в терминах других понятий и определений.

Если частица обладает электрическим зарядом, лишить её этого свойства невозможно. Кроме электрического заряда, частица может обладать и другими свойствами, описываемыми различными параметрами. Например, электрон имеет электрический заряд, но он обладает также и другими свойствами: массой, спином, магнитным моментом. Имеются частицы и не обладающие электрическим зарядом. Такие частицы не участвуют в электромагнитном взаимодействии.

Основные экспериментальные факты, относящиеся к электрическим зарядам, состоят в следующем:

1) существует минимальный (элементарный) электрический заряд. Его абсолютная величина обозначается  $e$ . В СИ  $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19}$  Кл и не имеет неопределённости (см. раздел 1.2);

2) имеется два вида зарядов. Их назвали отрицательные заряды ( $q^-$ ) и положительные заряды ( $q^+$ ). Хотя назвать можно было и иначе, например, зелёные и красные заряды. Носителями отрицательного заряда являются, в частности, электроны, а носителями положительного заряда – протоны, позитроны;

3) одноимённые заряды отталкиваются, разноимённые притягиваются;

4) заряд любого тела кратен элементарному заряду (*дискретность*, или *квантование*, заряда);

5) электрический заряд *аддитивен*, то есть заряд любой системы равен сумме зарядов всех тел (частиц), входящих в эту систему;

6) отсутствие дробного заряда в свободном состоянии. Дробный заряд ( $\pm \frac{1}{3}e$ ,  $\pm \frac{2}{3}e$  и т. п.) имеют *кварки*, составляющие протоны и нейтроны, однако выделить кварки в свободном состоянии невозможно.

Сумма всех зарядов системы (и положительных, и отрицательных) называется *полным зарядом*:

$$q = \sum_i q_i^+ + \sum_k q_k^- . \quad (8.1.1)$$

Если суммарный электрический заряд всех положительно заряженных частиц в системе равен по абсолютной величине электрическому заряду всех отрицательно заряженных частиц в системе, то система называется *электрически нейтральной*. Для электрически нейтральной системы:

$$\sum_i q_i^+ + \sum_k q_k^- = 0 . \quad (8.1.2)$$

Система, не обменивающаяся электрическим зарядом с окружающими телами, называется электрически замкнутой (изолированной).

Для таких систем имеет место фундаментальный закон природы – *закон сохранения заряда* (М. Фарадей, 1843 г.). *Полный заряд электрически изолированной системы сохраняется*, то есть

$$q = \sum_i q_i^+ + \sum_k q_k^- = \text{const}. \quad (8.1.3)$$

Следствием данного закона является тот факт, что если в электрически изолированной системе могут рождаться заряды, то только парами, то есть только положительно заряженная частица с зарядом  $q^+$  и одновременно отрицательно заряженная частица с зарядом  $q^-$ , причём  $|q^-| = q^+$ .

Следовательно, в замкнутых системах возникновение зарядов осуществляется либо разделением электрических зарядов, возникающим, например, при трении (ионизация, поляризация), либо рождение зарядов только парами. В дальнейшем, говоря об электрических зарядах, для краткости слово «электрический» чаще всего будем опускать.

Если все заряды, создающие электромагнитное поле, в данной системе отсчёта неподвижны, то (в этой системе отсчёта) поле называется электростатическим. Заряды заняли равновесные положения, при которых силы, действующие на каждый заряд со стороны электрического поля всех других зарядов, не меняются во времени (например, скомпенсированы другими силами). В случаях, когда нет опасности неправильного понимания, вместо термина *электростатическое поле* будем использовать термин *электрическое поле*, тем более что такая замена повсеместно применяется.

*Точечным зарядом* называется заряженное тело (частица), размеры которого (которой) пренебрежимо малы по сравнению с расстояниями до других зарядов рассматриваемой системы. *Пробным зарядом* называется точечный заряд, который вносится в изучаемое электромагнитное поле для измерения его характеристик. Этот заряд должен быть достаточно мал, чтобы не нарушать положение зарядов – источников измеряемого поля и тем самым не искажать его. Таким образом, пробный заряд служит индикатором электромагнитного поля (точнее, покоящийся пробный заряд является индикатором электрического поля).

Имеет место также экспериментально установленный (Г. Лоренц, 1877 г.) *закон релятивистской инвариантности заряда*, который формулируется следующим образом:

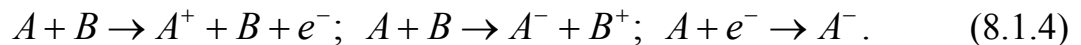


*Заряд любого тела инвариантен относительно изменения системы отсчёта.*

Следствие из этого закона: *заряд тела не зависит от его скорости и ускорения.*

В качестве примеров проявления сформулированных выше законов можно привести следующие процессы возникновения и исчезновения свободных зарядов.

Ионизация при столкновении атомов и атома с электроном:



Рождение электрона и позитрона при столкновении гамма-квантов и аннигиляция (уничтожение) пары электрон–позитрон:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+; \quad e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (8.1.5)$$

## 8.2. Взаимодействие точечных зарядов. Закон Кулона

Закон взаимодействия точечных зарядов (закон Кулона) экспериментально установлен Ш. Кулоном в 1785 г.:

*Неподвижные точечные заряды  $q_i$  и  $q_j$ , расположенные в вакууме на расстоянии  $r$  друг от друга, взаимодействуют с силой, модуль которой  $F$  пропорционален модулю произведения зарядов и обратно пропорционален квадрату расстояния между зарядами, то есть определяется выражением:*

$$F = k_e \frac{|q_i q_j|}{r^2}, \quad k_e > 0, \quad (8.2.1)$$

*а направлена эта сила вдоль линии, на которой расположены заряды. Причём одноимённые заряды отталкиваются, а разноимённые – притягиваются.*

Величина коэффициента пропорциональности  $k_e$  в формуле (8.2.1) определяется выбором системы единиц. В СИ этот коэффициент – размерная величина:

$$k_e = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2 = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}, \quad (8.2.2)$$

где Фарад (Ф) – единица электрической ёмкости, будет определена позднее. Принято записывать коэффициент  $k_e$  в *нормализованной* форме:

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \quad \epsilon_0 - \text{электрическая постоянная.} \quad (8.2.3)$$

Поскольку сила – величина векторная, то для проведения вычислений необходимо осуществить запись закона Кулона в векторной форме.

Для этого введём вектор  $\vec{r}_{ij}$ , начало которого совпадает с точкой, где находится заряд  $q_j$ , конец – с точкой, где находится заряд  $q_i$ . Радиус-векторы зарядов  $q_i$  и  $q_j$  обозначим  $\vec{r}_i$  и  $\vec{r}_j$ , соответственно. Из определения следует, что  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  и  $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ .

Тогда закон Кулона можно сформулировать так:

*Неподвижные точечные заряды  $q_i$  и  $q_j$ , расположенные в вакууме на расстоянии  $r_{ij}$  друг от друга, взаимодействуют с силой  $\vec{F}_{ij}$ , которая определяется формулой:*

$$\vec{F}_{ij} = k_e \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = k_e \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = k_e q_i q_j \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}, \quad (8.2.4)$$

где коэффициент пропорциональности  $k_e$ , как уже сказано, определяется выбором системы единиц.

Среда, которая не проводит электрический ток, называется диэлектриком, а сила взаимодействия между зарядами в такой среде уменьшается по сравнению со случаем взаимодействующих зарядов в вакууме. Это уменьшение обусловлено влиянием среды и учитывается введением в коэффициент  $k_e$  дополнительного параметра  $\epsilon > 1$ , а именно:

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon}, \quad (8.2.5)$$

называемого *диэлектрической проницаемостью* среды. Более подробно данный вопрос обсуждается при рассмотрении электрического поля в диэлектриках.

Замечание. Всюду далее будем рассматривать электрические поля в вакууме, если противное специально не оговорено.

### 8.3. Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции

Пусть в некоторой области пространства имеется электростатическое поле, созданное системой неподвижных зарядов. В принципе, для его

описания достаточно определить силу  $\vec{F}_q(\vec{r})$ , действующую в каждой точке  $P(\vec{r})$  рассматриваемой области, (далее  $P(\vec{r})$  будем называть *точкой наблюдения*; положение этой точки однозначно определяется радиус-вектором  $\vec{r}$ ) на пробный заряд  $q$ . Главное неудобство при таком описании электрического поля состоит в том, что сила  $\vec{F}_q(\vec{r})$ , действующая на пробный заряд в данной точке пространства, зависит не только от величин и расположения зарядов-источников электрического поля в рассматриваемой области, но и от абсолютной величины и знака пробного заряда. Однако легко избавиться от этого неудобства, если ввести новую векторную величину  $\vec{E}(\vec{r})$ , называемую напряжённостью электростатического поля и определяемую выражением

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{q} \vec{F}_q(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}. \quad (8.3.1)$$

Замечание. Поскольку операция деления вектора на скаляр не определена, то последнее тождественное равенство в (8.3.1) следует понимать как краткое обозначение произведения скаляра  $1/q$  на вектор  $\vec{F}_q(\vec{r})$ . Далее подобное обозначение будет использоваться без всяких комментариев.

Итак, выражение (8.3.1) даёт определение напряжённости электростатического поля. Из этого выражения следует, что в СИ единица напряжённости электрического поля 1 Н/Кл. Далее мы увидим, что 1 Н/Кл = 1 В/м, где Вольт (В) – единица разности потенциалов в СИ (определена в разделе 8.5).

Если во всех точках некоторой области пространства векторы напряжённости электрического поля имеют одинаковую длину и одинаковое направление, то электрическое поле в данной области пространства называется однородным.

Зная  $\vec{E}(\vec{r})$  как функцию  $\vec{r}$ , нетрудно найти силу, действующую в данной точке пространства на пробный заряд  $q$ :

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}). \quad (8.3.2)$$

Для вычисления напряжённости электрического поля в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$ , создаваемого точечным зарядом  $q_i$ , расположенным в точке с радиус-вектором  $\vec{r}_i$ , можно воспользоваться законом Кулона (8.2.4), в котором  $\vec{r}_i$  нужно заменить на  $\vec{r}$ , а  $\vec{r}_j$  на  $\vec{r}_i$ :

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = k_e q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (8.3.3)$$

В частности, если начало координат совпадает с точкой расположения заряда-источника поля, то  $\vec{r}_i = \vec{0}$  и  $\vec{E}_i(\vec{r}) = k_e \cdot q_i (\vec{r} / r^3)$ .

Разумеется, не всегда размерами заряженного тела можно пренебречь по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. Для решения возникшей проблемы пользуются *принципом суперпозиции* (наложения) электрических полей, который является обобщением опытных фактов и формулируется следующим образом:

*Напряжённость электростатического поля  $\vec{E}(\vec{r})$  в некоторой точке наблюдения  $P(\vec{r})$ , создаваемая системой неподвижных точечных зарядов  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , равна сумме напряжённостей электростатических полей  $\vec{E}_i(\vec{r})$ , создаваемых в точке  $P(\vec{r})$  каждым из указанных зарядов в отсутствие других зарядов, т. е.:*

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{r}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.3.4)$$

или, принимая соглашение о суммировании, которое состоит в том, что суммирование производится по значениям индекса суммирования  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}). \quad (8.3.5)$$

Замечание. Нет необходимости в формулах (8.3.4) и (8.3.5) употреблять словосочетание «векторная сумма», т. к. по определению сумма векторов – вектор. Аналогично при сложении скаляров результатом будет объект той же природы.

Только что сформулированный принцип суперпозиции электрических полей является мощным инструментом для расчётов электрических полей, создаваемых заряженными телами различной геометрии.

Для практического использования принципа суперпозиции электрических полей следует произвести мысленное разбиение заряженного тела на  $N$  достаточно малых по размерам заряженных участков, каждый из которых имеет заряд  $\Delta q_i(\vec{r}_i)$  и может считаться в условиях рассматриваемой задачи точечным зарядом. Радиус-векторы  $\vec{r}_i$  – это радиус-векторы произвольных точек (точек пунктуации) внутри участков разбиения. Далее необходимо воспользоваться формулами (8.3.3) и (8.3.4) и, наконец, со-

вершить предельный переход при мелкости разбиения области  $\lambda$ , стремящейся к нулю (подробно техника разбиения и понятие мелкости разбиения области излагаются в стандартных курсах математического анализа).

Если полный заряд системы равен 0, то поле вдали от системы практически отсутствует (см. п. 8.7). Именно поэтому большинство тел, хоть и содержит множество заряженных частиц, не создают поля, так эти тела в обычном состоянии электронейтральны. Однако этот результат справедлив не для всех зарядовых систем. Системы с полным зарядом, равным 0, но обладающие, так называемым, *дипольным моментом*, создают вокруг себя заметное поле.

При проведении указанных процедур необходимо различать геометрию заряженного тела. А именно:

1. Трёхмерный (объёмный) неравномерно заряженный объект (область  $V$ ). В этом случае при разбиении области  $V$  получаем малые части с объёмами  $\Delta V_i$  и зарядами  $\Delta q_i(\vec{r}_i)$ .

Введём скалярную величину  $\rho(\vec{r})$ , называемую объёмной плотностью заряда, при помощи равенства:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{D(\Delta V) \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta V}, \quad \text{в СИ } [\rho] = \text{Кл/м}^3. \quad (8.3.6)$$

В формуле (8.3.6) символом  $D(\Delta V)$  обозначен *диаметр* участка (области)  $\Delta V$ , который понимается как расстояние между наиболее удалёнными точками рассматриваемой области. При помощи введённой плотности заряда легко найти заряд любого участка разбиения по правилу  $\Delta q_i(\vec{r}_i) = \rho(\vec{r}_i)\Delta V_i$ . Применяя формулы (8.3.3) и (8.3.4), для напряжённости электрического поля получим

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = k_e \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \rho(\vec{r}_i) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \Delta V_i = \\ &= k_e \int_V \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = k_e \int_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

2. Двухмерный (поверхностный) неравномерно заряженный объект (поверхность  $S$ ). В этом случае при разбиении поверхности  $S$  получаем малые части с площадями  $\Delta S_i$  и зарядами  $\Delta q_i(\vec{r}_i)$ .

Введём скалярную величину  $\sigma(\vec{r})$ , называемую поверхностной плотностью заряда, при помощи равенства:

$$\sigma(\vec{r}) = \lim_{D(\Delta S) \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta S} \quad \text{в СИ } [\sigma] = \text{Кл/м}^2. \quad (8.3.8)$$

Далее, как и в предыдущем случае, применяя формулы (8.3.3) и (8.3.4), для напряжённости электрического поля получим

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = k_e \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \sigma(\vec{r}_i) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \Delta S_i = \\ &= k_e \int_S \sigma(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS' = k_e \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

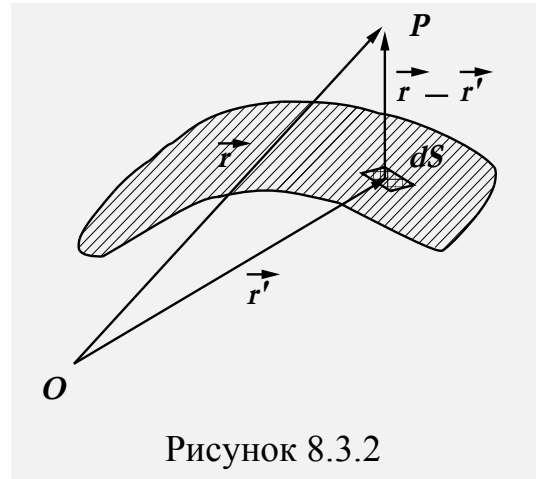
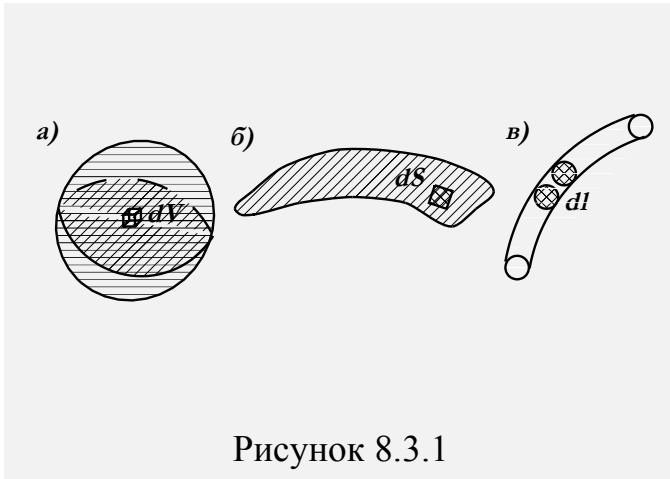
3. По аналогии, для одномерного (линейного) неравномерно заряженного объекта линии  $l$  имеем линейную плотность заряда  $\tau(\vec{r})$ :

$$\tau(\vec{r}) = \lim_{D(\Delta l) \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta l} \quad \text{в СИ } [\tau] = \text{Кл/м}, \quad (8.3.10)$$

а для напряжённости электрического поля получим

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = k_e \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \tau(\vec{r}_i) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \Delta l_i = \\ &= k_e \int_l \tau(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl' = k_e \int_l \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

Введение плотностей заряда в соответствующих областях поясняется рисунком 8.3.1, а вычисление напряжённости электрического поля, создаваемого в точке наблюдения заряженной поверхностью, – рисунком 8.3.2.



Очень полезным оказывается понятие силовой линии электрического поля. Силовой линией электростатического поля называется линия (в общем случае пространственная), в каждой точке которой вектор напряжённости

ности электростатического поля  $\vec{E}$  находится на касательной, проведённой к данной линии в рассматриваемой точке. При этом начало вектора  $\vec{E}$  находится в рассматриваемой точке пространства, а его направление указывается при помощи стрелки на силовой линии, как это показано на рисунке 8.3.3. Длина вектора  $\vec{E}$  изображается пропорциональной густоте силовых линий в рассматриваемой точке. На этом рисунке показаны векторы  $\vec{E}$  и силы, действующие на заряды разного знака.

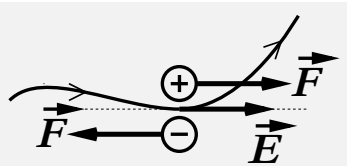


Рисунок 8.3.3

Свойства электрических силовых линий вытекают из определения напряжённости электрического поля  $\vec{E}$  и принципа суперпозиции. Силовые линии электростатического поля не бывают замкнутыми, нигде не пересекаются вне зарядов, начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных или уходят в бесконечно удалённую точку (бесконечность).

Отсюда можно сделать вывод о том, что если внутри некоторой области и на ограничивающей её замкнутой поверхности отсутствуют заряженные частицы, то число силовых линий электрического поля, входящих внутрь этой области, и число силовых линий электрического поля, выходящих из неё, равны между собой.

Неравенство между числом входящих в область силовых линий электрического поля и числом выходящих из неё силовых линий электрического поля обуславливается наличием заряженных частиц в рассматриваемой области (включая её границу). Сказанное нами обобщается соответствующей теоремой – теоремой Гаусса, которая рассмотрена ниже.

#### 8.4. Теорема Гаусса

Для формулировки теоремы Гаусса необходимо ввести понятие потока вектора напряжённости электрического поля через поверхность.

Понятие потока вектора относится к любому векторному полю, в том числе и вектора напряжённости электрического поля. Поэтому будем рассматривать векторное поле произвольной природы, а введённые понятия будем применять для электрического поля как частного случая векторного поля.

Пусть в некоторой области пространства  $V$  задано векторное поле  $\vec{A}$ , то есть имеется правило, по которому в каждой точке  $P$ , принадлежащей этой области, определён вектор  $\vec{A}$ .

Сначала рассмотрим однородное векторное поле ( $\vec{A}$  одинаков во всех точках  $P \in V$ ) и участок плоскости площадью  $\Delta S$ . Обозначим орт нормали к данной плоскости  $\vec{n}$ . При этом из двух возможных ортов выберем тот, с конца которого обход контура, ограничивающего участок плоскости  $\Delta S$ , наблюдается происходящим против часовой стрелки. Такой выбор орта нормали будем называть согласованным и всюду далее производить согласованный выбор орта нормали, если специально не оговорено иное условие. Введём вектор площадки  $\Delta \vec{S}$  при помощи равенства:

$$\Delta \vec{S} = \Delta S \cdot \vec{n}. \quad (8.4.1)$$

Поскольку векторное поле в рассматриваемой области однородное, то угол между векторами  $\vec{A}$  и  $\vec{n}$  постоянен в любой точке на рассматриваемом участке плоскости. Это позволяет однозначно определить новый скаляр  $\Delta \Phi_A$ , называемый потоком вектора поля  $\vec{A}$  через рассматриваемый участок плоскости, как *скалярное произведение* двух векторов  $\vec{A}$  и  $\Delta \vec{S}$ , то есть:

$$\Delta \Phi_A = \vec{A} \cdot \Delta \vec{S} = A \cdot \Delta S \cdot \cos(\vec{A} \wedge \Delta \vec{S}) = A_n \Delta S. \quad (8.4.2)$$

Теперь рассмотрим произвольную поверхность  $S$  в некоторой области пространства, где имеется неоднородное векторное поле  $\vec{A}$ . Разобьём данную поверхность на  $N$  малых участков, площади которых равны  $\Delta S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Размеры полученных участков будем считать настолько малыми, что их можно считать плоскими. Для каждого участка разбиения вводим вектор площадки  $\Delta \vec{S}_i$ . Выбираем внутри каждого участка произвольную точку (точку пунктуации)  $P_i$ , векторное поле в которой равно  $\vec{A}_i$ . Участки выбираются достаточно малыми, так что векторное поле в пределах каждого из участков можно считать практически однородным и равным  $\vec{A}_i$ . Для каждого из участков разбиения находим поток векторного поля  $\Delta \Phi_{A,i} = \vec{A}_i \cdot \Delta \vec{S}_i$ . Далее для всей поверхности  $S$  поток векторного поля  $\vec{A}$  получаем по схеме:

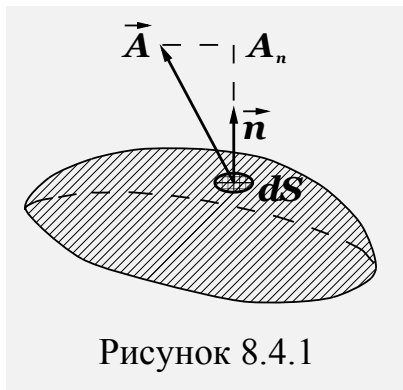
$$\Phi_A \approx \sum_i \Delta \Phi_{A,i} = \sum_i \vec{A}_i \cdot \Delta \vec{S}_i. \quad (8.4.3)$$



Переходя к пределу при неограниченном уменьшении мелкости разбиения, получим точное равенство для потока векторного поля  $\vec{A}$  через рассматриваемую поверхность, а именно:

$$\Phi_A = \lim_{\lambda(S) \rightarrow 0} \sum_i \vec{A}_i \cdot \Delta \vec{S}_i \equiv \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}. \quad (8.4.4)$$

В выражении (8.4.4) знак тождественного равенства нужно понимать в смысле обозначения предела последовательности интегральных сумм  $\lim_{\lambda(S) \rightarrow 0} \sum_i \vec{A}_i \cdot \Delta \vec{S}_i$ . Этот предел, если он существует, называется *поверхностным интегралом 2-го рода*, или *поверхностным интегралом типа потока*. Существование данного предела означает, что он (предел) не зависит от способа разбиения поверхности  $S$  на участки и от выбора точек пунктуации в участках разбиения. Вопрос о способах вычисления введённых интегралов здесь не рассматривается. Далее для краткости, в подобных



ситуациях (при введении каких-либо физических понятий через предел последовательности интегральных сумм) всюду будем считать последнее требование (существования предела) выполненным. Кроме того, с целью упрощения записи вместо двух знаков интеграла в выражении (8.4.4) часто пишут только один знак интеграла, то есть  $\int_S$ . Недоразумений при этом не возникнет, так как знак  $S$  чётко указывает, что интегрирование идёт по поверхности  $S$ .

Находящуюся в (8.4.4) под знаком интеграла величину  $d\vec{S}$  называют *элементарной площадкой*, а величину  $d\Phi_A = \vec{A} \cdot d\vec{S}$  называют *элементарным потоком* вектора  $\vec{A}$ .

Рисунок 8.4.1 поясняет введённые понятия.

Знак элементарного потока  $d\Phi_A$ , очевидно, зависит от взаимной ориентации нормали и вектора напряжённости электрического поля в рассматриваемой точке. Если эти два вектора образуют острый угол, поток  $d\Phi_A$  положителен, если тупой – отрицателен.

Если поверхность  $S$ , через которую вычисляется поток векторного поля  $\vec{A}$ , замкнутая, то интеграл для обозначения этого факта (замкнутости поверхности) содержит дополнительный элемент – небольшую окруж-

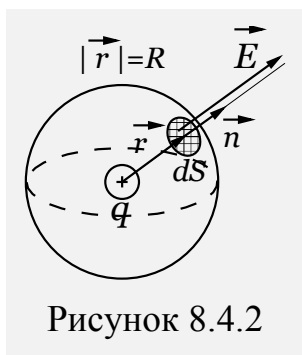
ность в центральной части интеграла, то есть имеет вид  $\oiint_S$ , или, как упоминалось выше, в краткой форме  $\oint_S$ .

Введённые понятия используем для векторного поля напряжённости  $\vec{E}$  электрического поля при формулировке теоремы Гаусса.

К. Гауссом в 1844 г. доказана теорема (теорема Гаусса), устанавливающая связь источников электрического поля и потока напряжённости электрического поля через произвольную поверхность, окружающую источники, которая формулируется в интегральной форме следующим образом:

*Поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность равен отношению полного (суммарного) электрического заряда, находящегося внутри этой замкнутой поверхности, к электрической постоянной  $\epsilon_0$ , то есть:*

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\Sigma}}{\epsilon_0}. \quad (8.4.5)$$



Здесь не будем приводить строгое и полное доказательство теоремы Гаусса для вектора напряжённости электрического поля  $\vec{E}$ , изложим идею доказательства, которая очень проста и изящна. Доказательство теоремы Гаусса для вектора  $\vec{E}$  разбивается на 3 части.

1. Сначала выберем специальную ситуацию: точечный и для определённости положительный заряд  $q = q^+$  ( $|q^+| = q^+$ ) расположим в центре сферы радиусом  $R$ , как это показано на рисунке 8.4.2. Начало координат для удобства совместим с точечным зарядом (хотя это не обязательно).

В силу симметрии задачи вычисление интеграла в формуле (8.4.5) для данной ситуации значительно упрощается и не требует специальных знаний по вычислению поверхностных интегралов. Достаточно заметить, в любой точке на рассматриваемой поверхности векторы  $\vec{E}$  и  $d\vec{S}$  одинаково направлены, то есть скалярное произведение под знаком интеграла в (8.4.5) просто равно произведению модулей этих векторов и, кроме того, вектор  $\vec{E}$  имеет в любой точке на данной поверхности одинаковую длину, равную  $|q^+|/4\pi\epsilon_0 R^2 = q^+/4\pi\epsilon_0 R^2$ . Таким образом, имеем:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \left( \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) dS = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oint_S dS = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{q^+}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (8.4.6)$$

то есть для данного случая результат совпадает с утверждением теоремы Гаусса.

Если заряд  $q = q^-$  отрицательный ( $|q^-| = -q^-$ ), то, легко заметить, что необходимо всё повторить, только при этом учесть, что скалярное произведение под знаком интеграла в (8.4.5) равно произведению модулей этих векторов, умноженному на  $(-1)$ , так что в итоге имеем:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \oint_S \left( \frac{|q^-|}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) dS = - \frac{-q^-}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oint_S dS = \frac{q^-}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{q^-}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

То есть нет необходимости указывать знак заряда, поскольку этот знак «содержится» в величине  $q$ .

Таким образом, для данного случая теорема Гаусса проверена и, кроме того, видим, что поток  $\Phi_E$  не зависит от радиуса выбранной для его вычисления сферы, а зависит только от величины и знака заряда  $q$ .

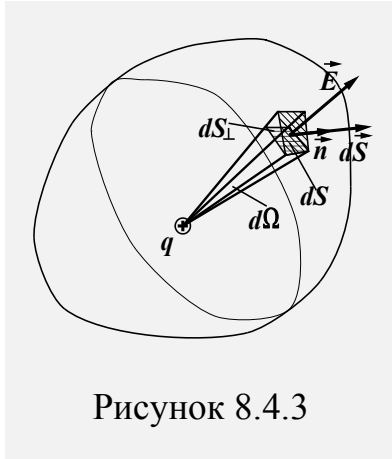


Рисунок 8.4.3

2. Теперь обобщим предыдущий случай, рассматривая одиночный точечный заряд внутри произвольной замкнутой поверхности. Начнём, как и в первом случае, с положительного заряда  $q = q^+$  ( $|q^+| = q^+$ ). Начало координат для удобства совместим с точечным зарядом (хотя это не обязательно), как это показано на рисунке 8.4.3. Для проведения вычислений в данном случае вычислим элементарный поток:

$$d\Phi_E = \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = E dS \cos(\vec{E} \wedge d\vec{S}) = E dS_{\perp}, \quad (8.4.7)$$

где величина  $dS_{\perp}$  – проекция площадки  $dS$  в плоскость, перпендикулярную к вектору  $\vec{E} \uparrow \vec{r}$ , то есть на касательную плоскость к сфере радиуса  $r$  в рассматриваемой точке поверхности.

Далее, с учётом формулы (8.3.3), для  $d\Phi_E$  получаем:

$$d\Phi_E = E dS_{\perp} = k_e \frac{q^+}{r^2} dS_{\perp} = k_e q^+ \frac{dS_{\perp}}{r^2} = k_e q^+ d\Omega, \quad (8.4.8)$$

где  $d\Omega$  – элемент телесного угла, под которым площадка  $dS$  видна из начала координат и который не зависит от радиуса  $r$ . Таким образом, для вычисления интеграла в левой части формулы (8.4.5) получаем:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S d\Phi_E = k_e q^+ \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q^+}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q^+}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (8.4.9)$$

вновь в соответствии с теоремой Гаусса. Если заряд внутри поверхности отрицательный, то, по аналогии с первой частью доказательства, с учётом знака заряда и соотношений  $q = q^-$ ,  $|q^-| = -q^-$ , получаем результат:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q^-}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (8.4.10)$$

Видим, что индекс, указывающий на знак заряда («+» или «-»), в полученных формулах можно опустить, поскольку этот знак «содержится» в величине  $q$ .

3. В последней части доказательства предположим, что внутри замкнутой поверхности находится система точечных зарядов  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Теперь воспользуемся уже полученными результатами и принципом суперпозиции электрических полей, а именно:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S (\sum_i \vec{E}_i) \cdot d\vec{S} = \sum_i (\oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S}) = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{q_\Sigma}{\epsilon_0}. \quad (8.4.11)$$

Таким образом, мы проверили все возможные ситуации и убедились в справедливости теоремы Гаусса в общем случае.

Как следствие, из общего утверждения находим, что поток напряжённости электрического поля  $\vec{E}$  через любую замкнутую поверхность, внутри которой полный заряд равен нулю, также равен нулю.

При применении теоремы Гаусса следует помнить, что в формуле (8.4.5)  $q_\Sigma$  – полный заряд внутри рассматриваемой замкнутой поверхности, то есть он равен сумме всех зарядов (с учётом их знаков) внутри поверхности, через которую вычисляется поток, в том числе зарядов, принадлежащих атомам и молекулам среды и которые называют *связанными* зарядами.

Другая форма теоремы Гаусса – дифференциальная – требует предварительного введения понятия дивергенции векторного поля. В данном случае будем говорить о дивергенции вектора напряжённости электрического поля.

Для введения этого понятия рассмотрим некоторую область пространства  $V$ , в которой имеется электростатическое поле. Это означает, что в каждой точке  $P(\vec{r}) \in \Delta V$  определён вектор напряжённости электростатического поля  $\vec{E}$ , то есть векторное поле  $\vec{E}$ . Рассмотрим небольшой участок (элемент) этой области объёмом  $\Delta V$  и произвольную точку внутри этого участка, то есть  $P(\vec{r}) \in \Delta V$  (кратко  $P \in \Delta V$ ).

Дивергенцией (или расходимостью) векторного поля  $\vec{E}$  в точке  $P(\vec{r})$  называется скалярная величина  $\text{div } \vec{E}$ , определяемая по правилу:

$$\text{div } \vec{E} = \lim_{D(\Delta V) \rightarrow 0} \frac{\oint_{S(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}, \quad (8.4.12)$$

где  $S(\Delta V)$  – замкнутая поверхность, ограничивающая  $\Delta V$ . При этом условие  $D(\Delta V) \rightarrow 0$  означает не просто стремление элемента объёма  $\Delta V$  к нулю, но и его «стягивание» при этом в точку  $P(\vec{r})$ .

Величина дивергенции векторного поля  $\vec{E}$  не зависит от выбора системы координат. Но вычисление этой величины в различных системах координат осуществляется по разным формулам. В частности, приведём без доказательства формулу для вычисления дивергенции векторного поля  $\vec{E}$  в декартовой прямоугольной системе координат:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z}; \\ \text{кратко: } \text{div } \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (8.4.13)$$

В формуле (8.4.13) использованы обычные обозначения для частных производных, а величины  $E_x(x, y, z)$ ,  $E_y(x, y, z)$ ,  $E_z(x, y, z)$  – проекции векторного поля  $\vec{E}(\vec{r})$  на координатные оси, то есть скалярные функции трёх переменных. Предполагается также, что все указанные функции  $E_x(x, y, z)$ ,  $E_y(x, y, z)$ ,  $E_z(x, y, z)$  дифференцируемы во всех точках области  $V$ , то есть обладают свойствами, необходимыми для осуществления всех операций, выполняемых с ними в выражении (8.4.13).

Для пояснения пути доказательства теоремы Гаусса в дифференциальной форме необходимо также привести формулировку понятия интеграла по объёму.

Оно вводится следующим образом. Рассматривается некоторая ограниченная скалярная функция  $f(P)$  точки  $P(\vec{r})$  в области  $V$ . Производится разбиение области  $V$  на  $N$  участков, не имеющих общих внутренних точек, каждый из которых имеет объём  $\Delta V_i, i = 1, 2, \dots N$ . Внутри каждого участка разбиения выбирается точка  $P_i$  и составляется интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^N f(P_i) \Delta V_i; \quad (8.4.14)$$

и рассматривается предел последовательности интегральных сумм (8.4.14) при условии, что мелкость разбиения стремится к нулю, то есть:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \sum_{i=1}^N f(P_i) \Delta V_i \right). \quad (8.4.15)$$

Предел (8.4.15), если он существует (то есть не зависит от разбиения области  $V$  на участки и от пунктуации участков  $\Delta V_i$ ), называется интегралом по объёму  $V$  от функции  $f(P)$  и обозначается  $\int_V f(P) dV$ .

Примем без доказательства теорему Остроградского – Гаусса:

$$\oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{V(S)} \text{div} \vec{E} dV. \quad (8.4.16)$$

В формуле (8.4.16)  $S(V)$  – замкнутая поверхность  $S$ , ограничивающая область  $V$ ;  $V(S)$  – область  $V$ , ограниченная замкнутой поверхностью  $S$ . Векторное поле  $\vec{E}$  может быть заменено любым другим векторным полем  $\vec{A}$ , обладающим надлежащими свойствами.

Теперь всё готово, чтобы пояснить путь перехода от теоремы Гаусса в интегральной форме к теореме Гаусса в дифференциальной форме.

Для этого левую часть формулы (8.4.5) (теорема Гаусса для электрического поля  $\vec{E}$ ) преобразуем с помощью формулы (8.4.16).

Учтём также, что полный заряд  $q_\Sigma$  в области  $V$  по заданной объёмной плотности заряда  $\rho(P)$  может быть найден по формуле:

$$q_\Sigma = \int_V \rho(P) dV. \quad (8.4.17)$$

С учётом (8.4.17) и (8.4.18) из формулы (8.4.5) получаем:

$$\oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{V(S)} \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{q_{\Sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V(S)} \rho(P) dV, \quad (8.4.18)$$

то есть

$$\int_{V(S)} \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_{V(S)} \frac{\rho(P)}{\varepsilon_0} dV. \quad (8.4.19)$$

Из последней формулы следует равенство:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (8.4.20)$$

которое называется теоремой Гаусса в дифференциальной форме.

## 8.5. Разность потенциалов. Электрический потенциал

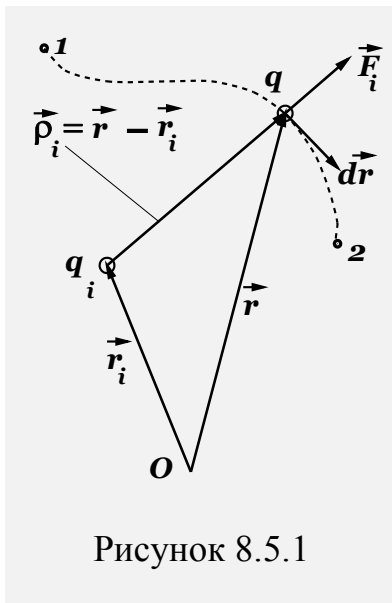


Рисунок 8.5.1

Пусть в некоторой области пространства  $V$  имеется электрическое поле, то есть в каждой точке  $P(\vec{r}) \in V$  определён вектор напряжённости электрического поля  $\vec{E}$ .

Рассмотрим две произвольные точки 1 и 2 из той области и вычислим работу  $A_{12}$  сил электростатического поля по перемещению пробного заряда  $q$  из точки 1 в 2.

По определению для работы находим:

$$A_{12} = \int_{l_{12}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{l_{12}} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{l_{12}} dA. \quad (8.5.1)$$

В соответствии с принципом суперпозиции напряжённость электрического поля  $\vec{E}$  в рассматриваемой области может в самом общем случае считаться созданной системой точечных зарядов  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  (рисунок 8.5.1). Элементарная работа  $dA_i$  в поле  $i$ -го заряда равна:

$$dA_i = k_e \frac{q_i q}{\rho_i^3} \vec{\rho}_i \cdot d\vec{r} = k_e \frac{q_i q}{\rho_i^3} \rho_i dr \cos \alpha_i = k_e \frac{q_i q}{\rho_i^3} \rho_i d\rho_i = k_e \frac{q_i q}{\rho_i^2} d\rho_i, \quad (8.5.2)$$

где для краткости введено обозначение  $\vec{\rho}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$ . Для полной работы  $A_{i,12}$  получим:

$$A_{i,12} = k_e q_i q \int_{\rho_{i,1}}^{\rho_{i,2}} \frac{d\rho_i}{\rho_i^2} = -k_e q_i q \left( \frac{1}{\rho_i} \right) \Big|_{\rho_{i,1}}^{\rho_{i,2}} = k_e q_i q \left( \frac{1}{\rho_{i1}} - \frac{1}{\rho_{i2}} \right) = q \left( \frac{k_e q_i}{\rho_{i1}} - \frac{k_e q_i}{\rho_{i2}} \right). \quad (8.5.3)$$

Из выражения (8.5.3) видим, что найденная работа зависит от:

- величины заряда-источника  $q_i$  электростатического поля;
- величины перемещаемого заряда  $q$ ;
- положения начальной и конечной точек;

но *не зависит от траектории*, по которой пробный заряд  $q$  перемещается из точки 1 в точку 2. Такое силовое поле, как известно из механики, называется *потенциальным* и обладает также тем свойством, что работа электрических сил по перемещению заряда по замкнутому контуру равна 0. Это утверждение легко следует из выражения (8.5.3), так как при совпадении точек 1 и 2 равны между собой и величины  $\rho_{i1}$  и  $\rho_{i2}$ .

Для работы в электрическом поле всей системы зарядов  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , имеем:

$$A_{12} = q \left( \sum_i \frac{k_e q_i}{\rho_{i(1)}} - \sum_i \frac{k_e q_i}{\rho_{i(2)}} \right), \quad (8.5.4)$$

где  $\rho_{i(1)}$  и  $\rho_{i(2)}$  – расстояния от заряда  $q_i$  до точек 1 и 2. Номера точек поставлены в скобки временно, чтобы не спутать эти номера со значениями индекса суммирования. Далее, где такой опасности нет, скобки у номеров точек опускаем.

Множитель в скобках выражения (8.5.4) зависит только от величин и мест расположения зарядов-источников электростатического поля – *конфигурации* системы зарядов-источников электростатического поля. Это позволяет ввести новую скалярную величину, характеризующую энергетические свойства системы электрических зарядов.

Эту величину называют *разностью потенциалов* электрического поля между точками 1 и 2, обозначают её  $\varphi_1 - \varphi_2$  и определяют как *отношение работы сил электрического поля по перемещению заряда  $q$  из начальной точки 1 в конечную точку 2 к величине перемещаемого заряда  $q$* , то есть:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q}. \quad (8.5.5)$$



Единица измерения разности потенциалов в СИ – Вольт (В). Разность потенциалов между двумя точками равна 1 В, если силы электрического поля совершают работу 1 Дж при перемещении заряда в 1 Кл между этими точками.

С учётом выражения (8.5.4) для разности потенциалов имеем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \left( \sum_i \frac{k_e q_i}{\rho_{i(1)}} - \sum_i \frac{k_e q_i}{\rho_{i(2)}} \right). \quad (8.5.6)$$

Сравнивая левую и правую стороны формулы (8.5.6), видим, что можно ввести *вспомогательное* понятие потенциала электрического поля, определяя эту скалярную величину выражением:

$$\varphi(r) = \sum_i \frac{k_e q_i}{\rho_i} + C = \sum_i \varphi_i + C, \quad (8.5.7)$$

где  $C$  – произвольная постоянная, а  $\varphi_i$  – потенциал электрического поля, создаваемого единичным точечным зарядом  $q_i$  в точке наблюдения, расположенной на расстоянии  $\rho_i$  от него:

$$\varphi_i(r) = \frac{k_e q_i}{\rho_i} + C_i. \quad (8.5.8)$$

Выбор конкретного значения произвольной постоянной совершенно не влияет на получаемые результаты, поскольку значение потенциала той или иной точки не имеет физического содержания. Содержательной величиной является разность потенциалов между какими-либо точками 1 и 2, то есть величина  $\varphi_1 - \varphi_2$ , которая, разумеется, однозначно определена.

Для придания физического содержания понятию потенциала электрического поля используют искусственный приём, заключающийся в «замаскированном» сведении понятия потенциала к разности потенциалов. Действительно, выберем потенциал бесконечно удалённой точки равным 0. Это означает, что должно выполняться условие:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = \varphi_\infty = 0, \quad (8.5.9)$$

которое, с учётом формул (8.5.7) и (8.5.8), требует выполнения условия  $C_i = 0$  и, соответственно,  $C = 0$ .

С учётом сказанного, для потенциала электрического поля имеем:

$$\varphi(r) = \sum_i \frac{k_e q_i}{\rho_i} = \sum_i \varphi_i. \quad (8.5.10)$$

Но нужно не забывать, что полученное выражение определяет потенциал электрического поля при выполнении условия (8.5.9), а это фактически означает, что (8.5.10) определяет потенциал электрического поля по отношению к  $\varphi_\infty = 0$ , то есть на самом деле формула (8.5.10) должна пониматься так:

$$\varphi(r) - 0 = \varphi(r) - \varphi_\infty = \sum_i \frac{k_e q_i}{\rho_i} = \sum_i \varphi_i, \quad (8.5.11)$$

а это и означает, что на самом деле формула (8.5.10) определяет разность потенциалов между данной точкой и бесконечно удалённой точкой при условии  $\varphi_\infty = 0$ .

Приём с подменой понятий разности потенциалов на понятие потенциала можно осуществить, не обязательно налагая условие (8.5.9). Действительно, если в (8.5.8) и (8.5.7) обозначить  $C_i = \varphi_{i\infty}$  или  $C = \varphi_\infty$ , то сразу имеем (8.5.11).

Несмотря на указанную условность, понятие потенциала (в указанном нами смысле) электрического поля широко используется, поскольку при таком его определении он (потенциал электрического поля) обладает важным свойством – свойством аддитивности.

## 8.6. Связь между напряжённостью и разностью потенциалов электрического поля

Разность потенциалов электрического поля определена выражением (8.5.5), которое после подстановки работы  $A_{12}$  из формулы (8.5.1) примет вид:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{l_{12}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (8.6.1)$$

и устанавливает искомую связь между напряжённостью и разностью потенциалов электрического поля.

Формула (8.6.1) устанавливает связь между напряжённостью и разностью потенциалов электрического поля в *интегральной* форме. Напомним, что величина  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  от траектории перемещения из точки 1 в точку 2 (то есть от вида линии  $l_{12}$ ) не зависит!

Наряду с интегральной формой существует связь между напряжённостью и разностью потенциалов электрического поля в *дифференциальной* форме, то есть в некоторой точке пространства.

Установим связь между напряжённостью и разностью потенциалов электрического поля в дифференциальной форме.

Для этого сначала отметим, что разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  и приращение потенциала  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  связаны соотношением  $\varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi$ . С учётом данного замечания имеем:

$$\Delta\varphi = - \int_{l_{12}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{l_{12}} (-\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}) = \int_{l_{12}} d\varphi. \quad (8.6.2)$$

Сравнивая последние формулы в (8.6.2), находим, что элементарное приращение потенциала (вновь отметим – это *разность*!) связано с напряжённостью электрического поля  $\vec{E}$  выражением:

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz). \quad (8.6.3)$$

Из курса математического анализа известно выражение для полного дифференциала функции трёх переменных  $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$ :

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz = \text{grad}\varphi \cdot d\vec{r}. \quad (8.6.4)$$

Сравнение (8.6.4) и (8.6.3) даёт нам искомую связь между напряжённостью и разностью потенциалов электрического поля в дифференциальной форме:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (8.6.5)$$

При этом в формулах (8.6.4) и (8.6.5) использовано понятие градиента скалярного поля. А именно, градиентом скалярной функции  $\varphi(x, y, z)$  в декартовой прямоугольной системе координат называется вектор  $\text{grad}\varphi$ :

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k}, \quad (8.6.6)$$

где, как обычно,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты координатных осей.

Введём понятие эквипотенциальных поверхностей. *Эквипотенциальной поверхностью* называется множество  $S$  точек  $P(x, y, z)$ , координаты которых удовлетворяют условию:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const} ; P(x, y, z) \in S . \quad (8.6.7)$$

Поскольку различных постоянных значений можно выбрать сколь угодно много, то и количество эквипотенциальных поверхностей ничем не ограничено.

Далее покажем, что вектор  $\text{grad}\varphi$  перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности. Действительно, пусть имеется эквипотенциальная поверхность. Рассмотрим скалярное произведение (8.6.4) вектора  $\text{grad}\varphi$  и вектора  $d\vec{r}(=d\vec{l})$ , соединяющего две произвольные точки  $P(x, y, z) \in S$  и  $P'(x + dx, y + dy, z + dz) \in S$  на эквипотенциальной поверхности, расположенные на элементарном расстоянии  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  друг от друга. Поскольку обе точки принадлежат одной и той же эквипотенциальной поверхности, то  $d\varphi = 0$ . Следовательно, имеем:

$$\text{grad}\varphi \cdot d\vec{r} = |\text{grad}\varphi| \cdot dr \cdot \cos(\text{grad}\varphi \wedge d\vec{r}) = 0 . \quad (8.6.8)$$

Поскольку  $|\text{grad}\varphi| \neq 0$  и  $dr \neq 0$ , то  $\cos(\text{grad}\varphi \wedge d\vec{r}) = 0$ , а это означает, что векторы  $\text{grad}\varphi$  и  $d\vec{r}$  взаимно перпендикулярны, то есть  $\text{grad}\varphi \perp d\vec{r}$ .

Отметим также, что вектор  $\text{grad}\varphi$  показывает направление наиболее быстрого изменения (более точно – убывания) потенциала электрического поля в рассматриваемой точке. Действительно, если отказаться от требования принадлежности точек одной и той же эквипотенциальной поверхности, то тогда

$$\text{grad}\varphi \cdot d\vec{r} = |\text{grad}\varphi| \cdot dr \cdot \cos(\text{grad}\varphi \wedge d\vec{r}) \neq 0 . \quad (8.6.9)$$

Поскольку  $|\text{grad}\varphi|$  зафиксирован (определяется видом электрического поля и выбором точки  $P(x, y, z)$ ), то при фиксированной длине вектора  $|d\vec{r}| = dr$  наибольшее по модулю значение скалярного произведения, равное  $|\text{grad}\varphi| \cdot dr$ , достигается при условии коллинеарности векторов  $\text{grad}\varphi$  и  $d\vec{r}$ , то есть если  $\text{grad}\varphi \uparrow\uparrow d\vec{r}$  или если  $\text{grad}\varphi \uparrow\downarrow d\vec{r}$ .

В заключение добавим, что написание формул векторного анализа значительно упрощается, если ввести *векторный оператор набла*, который в декартовой системе координат определяется выражением:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (8.6.10)$$

С учётом формулы (8.6.10) для вектора  $\text{grad}\varphi$  находим:

$$\text{grad}\varphi = \nabla \varphi. \quad (8.6.11)$$

Отметим без доказательства, что равенство (8.6.11) выполняется не только в декартовой прямоугольной системе координат, но и в других системах координат. Правда, вид оператора  $\nabla$  в других системах координат уже не будет определяться формулой (8.6.10).

Аналогично для введённого в п. 8.4 понятия дивергенции векторного поля  $\vec{E}$  с использованием оператора  $\nabla$  получим формулу:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{E}. \quad (8.6.12)$$

При этом замечание о независимости формулы (8.6.11) от выбора системы координат относится и к формуле  $\text{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}$ , которая справедлива в любой системе координат.

В дальнейшем увидим, что оператор  $\nabla$  делает запись формул векторного анализа значительно компактнее и изящнее и, кроме того, позволяет упростить их запоминание при помощи таких вспомогательных приёмов, как мнемонические правила.

В заключение отметим, что потенциальность электростатического поля приводит к важному утверждению, называемому *теоремой о циркуляции* вектора  $\vec{E}$ :

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (8.6.13)$$

которая формулируется следующим образом: *циркуляция вектора напряжённости электростатического поля по любому замкнутому контуру равна 0*.

Доказательство этого утверждения следует из (8.6.1). Действительно, если переместиться в электрическом поле вдоль произвольного замкнутого контура из некоторой точки 1 и возвратиться в эту же точку, то интеграл в левой части, обозначенный как  $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{r}$  и называемый циркуляцией

вектора  $\vec{E}$  вдоль замкнутого контура  $l$ , будет равен 0, поскольку  $\varphi_1 = \varphi_2$  и  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ , что и требовалось доказать.

## 8.7. Электрический диполь

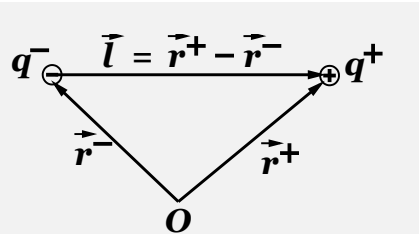


Рисунок 8.7.1

Электрическим диполем называется зарядовая система, состоящая из двух равных по абсолютной величине и противоположных по знаку точечных зарядов, расположенных друг от друга на расстоянии  $l$ . Прямая, на которой находятся заряды, образующие диполь, называется осью диполя, где  $q = q^+ = |q^-|$  – абсолютные величины зарядов, образующих диполь. Вектор  $\vec{l}$  начинается в точке, где располагается отрицательный заряд, а его конец находится в точке, где располагается положительный заряд, как это показано на рисунке 8.7.1.

**Дипольным моментом** диполя называют векторную величину:

$$\vec{p}_e = q\vec{l}. \quad (8.7.1)$$

В СИ дипольный момент измеряется в Кл·м.

Если обозначить радиус-векторы зарядов электрического диполя  $\vec{r}^+$  и  $\vec{r}^-$ , то, как это видно из рисунка 8.7.2, имеет место равенство:

$$\vec{l} = \vec{r}^+ - \vec{r}^-. \quad (8.7.2)$$

Введённое понятие электрического диполя оказывается очень полезным, особенно при описании электрически нейтральных зарядовых систем.

Действительно, рассмотрим систему зарядов  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , радиус-векторы которых обозначим  $\vec{r}_i$  (рисунок 8.7.2).

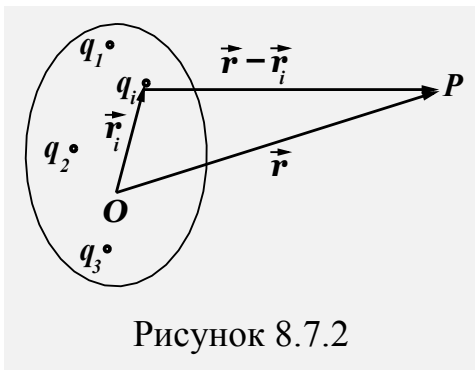


Рисунок 8.7.2

Выберем точку наблюдения  $P(\vec{r})$ , достаточно удалённую от рассматриваемой системы зарядов, то есть такую, что выполняется условие

$$r_i \ll r, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.7.3)$$

Потенциал точки  $P(\vec{r})$  можно, в соответствии с формулой (8.5.10), записать в виде:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (8.7.4)$$

С учётом (8.7.3) для модуля разности радиус-векторов в знаменателе (8.7.4) можно записать

$$|\vec{r} - \vec{r}_i| = r - \vec{r}_i \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = r(1 - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{e}_{\vec{r}}}{r}), \quad (8.7.5)$$

где  $\vec{e}_{\vec{r}}$  – орт вектора  $\vec{r}$ . Подстановка (8.7.5) в (8.7.4) даёт:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r} \cdot \frac{1}{\{1 - (\vec{r}_i \cdot \vec{e}_{\vec{r}} / r)\}}. \quad (8.7.6)$$

Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции  $1/(1-x)$  и, оставив только первые два члена ряда, ввиду того что  $x = (\vec{r}_i \cdot \vec{e}_{\vec{r}} / r) \ll 1$  (условие (8.7.3)), то есть:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x, \quad (8.7.7)$$

для потенциала системы зарядов получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r} (1 + \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{e}_{\vec{r}}}{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\sum_i q_i \vec{r}_i) \cdot \vec{e}_{\vec{r}}}{r^2}. \quad (8.7.8)$$

Первое слагаемое – потенциал поля точечных зарядов. Второй член полученного выражения определяет потенциал электростатического поля, создаваемого **электрическим (дипольным) моментом системы** зарядов, который определяется выражением

$$\vec{p}_e = \sum_i q_i \vec{r}_i \quad (8.7.9)$$

и играет для системы зарядов роль дипольного момента электрического диполя и обобщает понятия дипольного момента электрического диполя на случай системы зарядов. В этом легко убедиться, если ограничиться наличием в системе двух разноимённых равных по модулю зарядов, то есть электрическим диполем. В этом случае  $\sum_i q_i = 0$ , и первый член в (8.7.8) исчезает, а для вычисления второго сначала найдём сумму в числителе:  $\sum_i q_i \vec{r}_i = q^+ \vec{r}^+ + q^- \vec{r}^- = q(\vec{r}^+ - \vec{r}^-) = q\vec{l} = \vec{p}_e$ . Для потенциала электрического диполя, таким образом, имеем:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\sum_i q_i \vec{r}_i) \cdot \vec{e}_{\vec{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{e}_{\vec{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{r^3}. \quad (8.7.10)$$

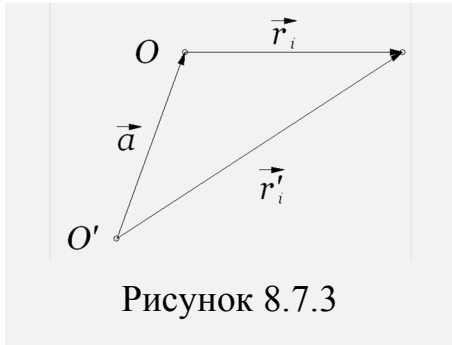


Рисунок 8.7.3

Можно отметить два важных момента. Если система электрически нейтральна ( $\sum_i q_i = 0$ ), то потенциал этой системы определяется полем электрического (дипольного) момента этой системы, то есть выражением (8.7.10). Кроме того, в этом случае значение дипольного момента системы не зависит от выбора начала координат. Действительно, при перемещении начала координат из точки  $O$  в точку  $O'$ , как это показано на рисунке 8.7.3, радиус-векторы зарядов будут изменяться на постоянный вектор  $\vec{a}$ , а именно:

$$\vec{r}'_i = \vec{a} + \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8.7.11)$$

и для электрического (дипольного) момента системы получим:

$$\vec{p}'_e = \sum_i q_i \vec{r}'_i = \sum_i q_i (\vec{a} + \vec{r}_i) = \vec{a} \sum_i q_i + \sum_i q_i \vec{r}_i = \vec{p}_e, \quad (8.7.12)$$

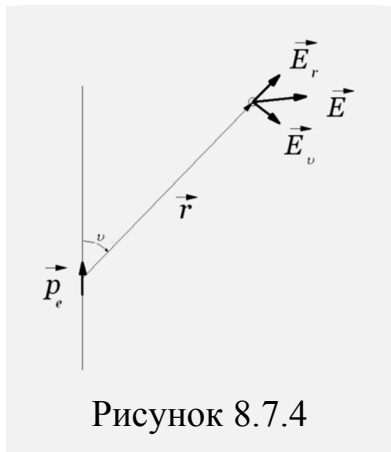


Рисунок 8.7.4

что и означает независимость дипольного момента системы от выбора начала координат для электрически нейтральной системы. Это утверждение играет важную роль при рассмотрении таких электрически нейтральных систем, как атомы и молекулы.

Для нахождения напряжённости электростатического поля диполя удобно исходить из выражения для потенциала диполя и использовать связь между напряжённостью и потенциалом электрического поля. Учтём цилиндрическую симметрию диполя, то есть тот факт, что любые плоскости, проходящие через ось диполя, эквивалентны с точки зрения свойств электрического поля. Выберем одну из таких плоскостей и найдём длину составляющей напряжённости электрического поля  $\vec{E}_r$  вдоль радиус-вектора точки наблюдения и найдём длину составляющей напряжённости электрического поля  $\vec{E}_\perp$  вдоль перпендикулярного ему направления (рисунок 8.7.4).



Результирующий вектор напряжённости электрического поля найдём как сумму указанных составляющих, то есть  $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_v$ , а его длину по теореме Пифагора  $E = \sqrt{E_r^2 + E_v^2}$ .

Для вычисления проекций  $E_r$  и  $E_v$  воспользуемся формулой, вытекающей из (8.6.3):

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_l dl \Rightarrow E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}. \quad (8.7.13)$$

При вычислении указанных величин используем выражение (8.7.10) для потенциала диполя, которое с учётом введённых переменных имеет вид:

$$\varphi(r, \nu) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e \cdot \cos \nu}{r^2}. \quad (8.7.14)$$

С учётом (8.7.13) находим:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p_e \cos \nu}{r^3}; \quad E_v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_e \sin \nu}{r^3}, \quad (8.7.15)$$

а для модуля вектора напряжённости электрического поля диполя имеем:

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_v^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_e}{r^3} \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2 \nu}. \quad (8.7.16)$$

В частности, при  $\nu = 0$  и  $\nu = \pi/2$  получаем выражения для напряжённости электрического поля диполя вдоль оси диполя  $E_{\parallel}$  и перпендикулярном ей направлении  $E_{\perp}$ :

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p_e}{r^3}; \quad E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_e}{r^3}, \quad (8.7.17)$$

то есть при одном и том же  $r$  значение  $E_{\parallel}$  вдвое больше  $E_{\perp}$ .

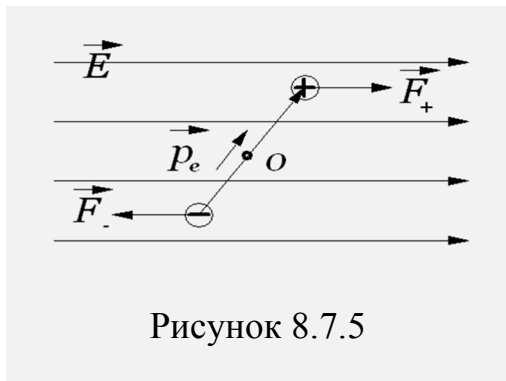


Рисунок 8.7.5

В дальнейшем нам понадобится выражение для момента сил, действующих на диполь во внешнем электрическом поле. Диполь будем считать достаточно малым, так что в пределах области, которую занимает диполь, будем считать внешнее электрическое поле однородным. С учётом обозначений на рисунке 8.7.5 для мо-

мента пары сил  $\vec{F}_+$  и  $\vec{F}_-$ , действующих на соответствующие заряды со

стороны внешнего однородного электрического поля напряжённостью  $\vec{E}$ , имеем по определению:

$$\vec{M}_o = \vec{r}^+ \times \vec{F}^+ + \vec{r}^- \times \vec{F}^- = q(\vec{r}^+ - \vec{r}^-) \times \vec{E} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p}_e \times \vec{E}. \quad (8.7.18)$$

Под действием момента пары сил  $\vec{F}^+$  и  $\vec{F}^-$  диполь ориентируется вдоль силовых линий электрического поля.

Теперь найдём энергию (потенциальную)  $W_p$  диполя во внешнем электрическом поле. По определению потенциальной энергии эта энергия равна работе, которую совершают электрические силы по перемещению зарядов  $q^+$  и  $q^-$ , образующих диполь, из бесконечно удалённой точки в точки, где они (заряды диполя) расположены во внешнем электрическом поле, то есть:

$$W_p = q^+ \varphi^+ + q^- \varphi^- = q(\varphi^+ - \varphi^-), \quad (8.7.19)$$

где  $\varphi^+ - \varphi^-$  – разность потенциалов внешнего электрического поля между точками пространства, где расположены заряды диполя. Если диполь достаточно мал, то напряжённость  $\vec{E}$  внешнего электрического поля в пределах диполя можно считать постоянной.

Величину  $\varphi^+ - \varphi^-$  можно вычислить с точностью до величин второго порядка малости, используя понятие градиента потенциала по формуле

$$(\varphi^+ - \varphi^-) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \vec{l} \cdot \text{grad} \varphi = -\vec{l} \cdot \vec{E}. \quad (8.7.20)$$

Подставляя (8.7.20) в (8.7.19), получим для потенциальной энергии диполя во внешнем электрическом поле:

$$W_p = q(\varphi^+ - \varphi^-) = -q\vec{l} \cdot \vec{E} = -\vec{p}_e \cdot \vec{E}. \quad (8.7.21)$$

Очевидно, что в неоднородном поле на диполь в целом действует сила  $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- \neq \vec{0}$ . Из механики известно, что вектор силы связан с потенциальной энергией выражением  $\vec{F} = -\nabla W_p$ . С учётом выражения (8.7.21) находим для силы, действующей на диполь во внешнем электрическом поле, формулу:

$$\vec{F} = \nabla(\vec{p}_e \cdot \vec{E}). \quad (8.7.22)$$

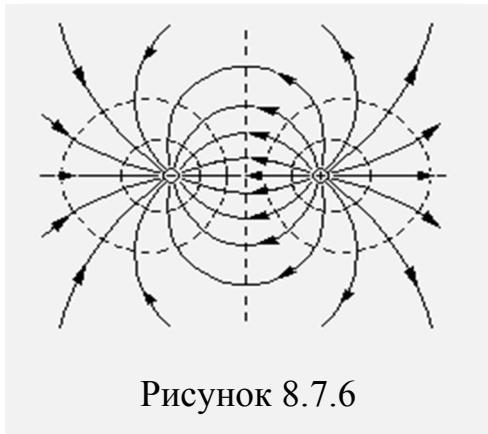


Рисунок 8.7.6

Подробный анализ формулы (8.7.22), который здесь опущен, показывает, что электрический диполь в неоднородном электростатическом поле втягивается в область более сильного поля.

В заключение отметим, что диполь не только реагирует на внешнее поле, но и создаёт своё собственное электрическое поле. На рисунке 8.7.6 показана структура сило-

вых линий (сплошные линии) и сечений эквипотенциальных поверхностей (пунктирные линии) вблизи диполя. Как уже было отмечено, силовые линии перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям.

## Глава 9. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### 9.1. Диэлектрик в электрическом поле

Все вещества по способности проводить электрический ток делятся на две большие группы:

- 1) *проводники*, которые имеют свободные носители заряда (см. п. 10.1). Удельное сопротивление (см. п. 10.2) проводников находится в диапазоне  $\rho = (10^{-8} - 10^{-6}) \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . К проводникам, например, относятся твёрдые и жидкие металлы, электролиты;
- 2) *диэлектрики* (изоляторы), у которых свободные носители заряда либо отсутствуют, либо их очень мало. Удельное сопротивление диэлектриков находится в диапазоне  $\rho = (10^6 - 10^{15}) \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . К диэлектрикам, например, относятся все газообразные вещества (не ионизированные), многочисленные жидкости (дистиллированная вода, бензол, масла различного происхождения) и огромное количество твёрдых тел (эбонит, янтарь, стекло, фарфор, многие пластмассы и прочие).

Такое деление носит очень условный характер, тем более что огромное количество веществ не попадает ни в группу проводников, ни в группу диэлектриков. Эту промежуточную группу веществ резонно назвать *полупроводниками*.

В настоящем разделе пособия будут рассматриваться вопросы, связанные с поведением диэлектриков в электрическом поле.

В зависимости от особенностей строения молекул или атомов (далее для краткости, при отсутствии необходимости уточнения, будем говорить о молекулах независимо от того, в атомарном или молекулярном виде находится вещество) все диэлектрики делят на *полярные*, *неполярные*, диэлектрики с *ионной* структурой кристаллов и *сегнетоэлектрики*.

Для объяснения такого разделения необходимо учесть, что диэлектрики состоят из электрически нейтральных атомов или молекул, которые в свою очередь состоят из положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов. При этом у всех диэлектриков, в отличие от проводников, заряды, входящие в состав молекул или атомов, принадлежат данным молекулам и перемещаются при наличии внешнего электрического поля, в пределах данной молекулы, а не по всему диэлектрику.

Чтобы пояснить особенности поведения системы зарядов в электрическом поле и применить полученные ранее результаты об электрическом диполе, введём дополнительные понятия *центров тяжести* положительных и отрицательных зарядов атома диэлектрика:

$$\vec{R}_+ = \frac{\sum_i q_{i+} \vec{r}_{i+}}{\sum_i q_{i+}}, i = 1, 2, \dots Z, \quad (9.1.1)$$

$$\vec{R}_- = \frac{\sum_i q_{i-} \vec{r}_{i-}}{\sum_i q_{i-}}, i = 1, 2, \dots Z. \quad (9.1.2)$$

Учтём также, что в электрически нейтральных системах (в том числе атомах и молекулах):

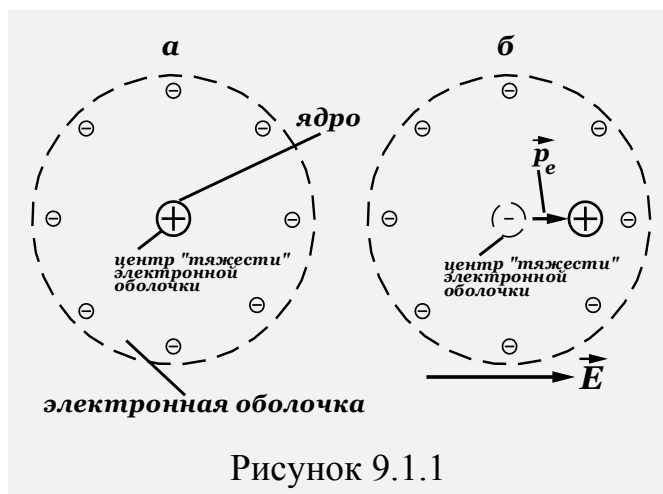
$$q_\Sigma = \sum_{i=1}^{2Z} q_i = \sum_{i=1}^Z q_{i+} + \sum_{i=1}^Z q_{i-} = 0, \quad q = q_+ = \sum_{i=1}^Z q_{i+}, \quad q_- = -q = \sum_{i=1}^Z q_{i-}. \quad (9.1.3)$$

Для дипольного момента  $\vec{p}_e$  рассматриваемой системы зарядов (атома или молекулы) по определению (8.7.9) и с учётом формул (9.1.2)–(9.1.3) имеем:

$$\vec{p}_e = \sum_i q_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{2Z} q_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^Z q_{i+} \vec{r}_{i+} + \sum_{i=1}^Z q_{i-} \vec{r}_{i-} = q \vec{R}_+ - q \vec{R}_- = q(\vec{R}_+ - \vec{R}_-) = q \vec{l}. \quad (9.1.2)$$

Диэлектрики, у атомов или молекул которых в отсутствии внешнего электрического поля центры тяжести положительных и отрицательных зарядов не совпадают, то есть  $\vec{R}_+ \neq \vec{R}_- \Rightarrow q(\vec{R}_+ - \vec{R}_-) = q \vec{l} \neq \vec{0}$ , называют полярными диэлектриками.

Вещества, у атомов или молекул которых в отсутствии внешнего электрического поля которых центры тяжести положительных и отрицательных зарядов атомов диэлектриков совпадают, называют неполярными диэлектриками. К неполярным относятся диэлектрики в атомарном состоянии. Следует отметить, что не только у веществ в атомарном состоянии, но и некоторых веществ в молекулярном состоянии, дипольный момент молекул в отсутствии внешнего электрического поля равен нулю. Такие вещества называются неполярными диэлектриками. К неполярным диэлектрикам относятся, например, следующие вещества:  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $H_2$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$  и другие.



Поведение реальных диэлектриков во внешнем электрическом поле будем пояснять с использованием приведённых выше понятий центров тяжести системы зарядов. Сначала обсудим поведение неполярных диэлектриков во внешнем электрическом поле (рисунок 9.1.1). Ядро атома можно рассматривать как точечный заряд  $q_{яд} = Ze$ , а

окружающие ядро  $Z$  электронов – как электронную оболочку с распределённым по её объёму зарядом электронов  $q_{об} = -Ze$ . Здесь  $Z$  – *зарядовое число* атома (оно равно порядковому номеру в периодической системе элементов Д. И. Менделеева). В отсутствие электрического поля распределение заряда в атоме сферически симметрично. Как следует из теоремы Гаусса, электрическое поле вне этого сферически симметричного заряженного шара, содержащего заряд  $q$ , эквивалентно полю точечного заряда  $q$ , расположенного в центре шара. И ядро, и электронная оболочка создают вне атома электрические поля, подобные, соответственно, положительно-му и отрицательному точечным зарядам  $q_{яд}$  и  $q_{об}$ , расположенным в центре атома. Дипольный момент атома в отсутствие внешнего электрического поля равен нулю ( $\vec{R}_+ = \vec{R}_- \Rightarrow q(\vec{R}_+ - \vec{R}_-) = q\vec{l} = \vec{0}$ ), а собственное электрическое поле симметричного (*неполяризованного*) атома вне его самого также равно нулю (поля зарядов  $q_{яд}$  и  $q_{об}$  взаимно компенсируют друг друга во всех точках вне атома). Внешнее электрическое поле напряжённостью  $\vec{E}$  (рисунок 9.1.1, б) смещает ядро и электронную оболочку в противоположные стороны до тех пор, пока сила притяжения ядра и электронов не уравнивает силу внешнего поля  $\vec{F} = Ze\vec{E}$ . Опыт показывает, что для большинства веществ, находящихся в атомарном состоянии, при не слишком больших полях длина вектора  $\vec{l}$  взаимного смещения ядра и электронной оболочки прямо пропорциональна напряжённости внешнего электрического поля.

Таким образом, при включении внешнего электрического поля центр тяжести заряда ядра оказывается смещённым относительно центра электронного облака на некоторый вектор  $\vec{l}$ . И ядро, и электронная оболочка,

ввиду их сферической симметрии, эквивалентны точечным зарядам в их центрах, поэтому такой (*поляризованный*) атом эквивалентен диполью, изображённому на рисунке 9.1.1 с дипольным моментом  $\vec{p}_e = q_{\text{яд}} \vec{l}$ .

Таким образом, видим, что электрически нейтральная система зарядов эквивалентна диполью с точечными зарядами  $q_+ = \sum_i^Z q_{i+}$  и  $q_- = \sum_i^Z q_{i-}$ , расположенными в центрах тяжести положительных зарядов  $\vec{R}_+$  и отрицательных зарядов  $\vec{R}_-$ , соответственно.

Физический процесс пространственного перераспределения зарядов под действием внешнего электрического поля называется *поляризацией*. В результате поляризации вещество из неполярных атомов и молекул (неполярный диэлектрик) оказывается состоящим из диполей, которые создают (в ответ на приложенное к ним внешнее поле) собственное поле – поле поляризации. Такой вид поляризации называется *электронной* поляризацией, которая присутствует у всех видов диэлектриков.

Размер атомного ядра приблизительно в  $10^5$  раз меньше размеров атома (размеров радиуса внешней электронной оболочки). Хотя величина смещения  $l$  для атома водорода в поле  $E = 30$  кВ/см оказывается примерно на 20% больше радиуса ядра, оно составляет всего тысячные доли процента от радиуса атома. Дипольные моменты молекул (атомов) неполярных веществ, поляризованных во внешнем поле, очень малы, и электрическое поле, возникающее из-за поляризации среды, заметно лишь в случае достаточно высокой концентрации атомов и молекул. Поляризация газов, т. е. сред со сравнительно малой концентрацией молекул, существенной роли не играет. Поэтому и диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  газов (это понятие объясняется далее) весьма мало отличается от единицы.

Как уже отмечалось выше, вещества, молекулы (или атомы) которых имеют отличный от нуля дипольный момент в отсутствии внешнего электрического поля, называются *полярными* диэлектриками. К полярным диэлектрикам относятся, например, следующие вещества:  $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $SO_2$ ,  $CO$ , спирты, поливинилхлорид и др. Дипольные моменты полярных молекул гораздо больше дипольных моментов поляризованных внешним полем молекул и атомов неполярных веществ. Кристаллические вещества, состоящие из положительных и отрицательных ионов, могут быть как полярными, так и неполярными.

Полярные диэлектрики в электрическом поле ведут себя иначе, нежели неполярные. Молекулы полярных диэлектриков под действием

момента сил со стороны внешнего электрического поля стремятся занять такое положение в пространстве, чтобы векторы дипольных моментов молекул стали одинаково направленными с вектором напряжённости внешнего электрического поля. Этому препятствует тепловое движение молекул, которое нарушает указанный процесс ориентации молекул полярного диэлектрика. Для данных значений температуры и напряжённости внешнего электрического поля устанавливается динамическое равновесие, в итоге которого преобладает определённая доля молекул полярных диэлектриков, ориентированных в пространстве так, что векторы дипольных моментов молекул либо одинаково направлены с вектором напряжённости внешнего электрического поля, либо угол между этими векторами является острым. Описанный вид поляризации называется *ориентационной* поляризацией. Отметим, что наряду с ориентационной поляризацией молекулы полярных диэлектриков участвуют и в электронной поляризации, которая присутствует у любых диэлектриков. Однако электронная поляризация полярных диэлектриков, по сравнению с ориентационной поляризацией, значительно слабее (сравниваются дипольные моменты молекул, обусловленные ориентационной и электронной поляризациями).

Для ионных диэлектриков ситуация аналогичная. Если центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в каждой ячейке ионной кристаллической решётки пространственно совпадают, такой диэлектрик – неполярный, если нет – полярный.

## 9.2. Поляризованность (вектор поляризации) диэлектрика

Для количественной оценки поляризации диэлектрика используют векторную величину, которую называют *поляризованность (вектор поляризации)* и определяют как отношение суммы дипольных моментов всех молекул, находящихся в элементарном объёме  $\Delta V$ , к этому объёму (см. замечание к формуле (8.3.1)):

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei} / \Delta V, \quad (9.2.1)$$

где  $N$  – количество молекул вещества в элементарном объёме.

Элементарный объём  $\Delta V$  должен быть достаточно мал, чтобы электрическое поле в его пределах можно было считать однородным, но, в то же время, должен содержать достаточно большое количество молекул ве-



щества, чтобы можно было применять методы статистики ( $N \gg 1$ ). В СИ поляризованность диэлектрика измеряется в Кл/м<sup>2</sup>.

Выражение (9.2.1) можно переписать в несколько ином виде:

$$\vec{P} = \frac{N}{\Delta V} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_{ei}}{N} = n \langle \vec{p}_e \rangle, \quad (9.2.2)$$

где  $\langle \vec{p}_e \rangle$  – средний дипольный момент молекулы диэлектрика, а  $n$  – концентрация молекул вещества в объёме  $\Delta V$ .

Прежде чем продолжить обсуждение поляризованности диэлектрика, отметим, что всюду далее под  $\vec{E}$  подразумевается напряжённость усреднённого (*макроскопического*) поля, изменением которого в пределах объёма  $\Delta V$  можно пренебречь. Истинное (*микроскопическое*) поле в диэлектрической среде определяется мгновенным расположением зарядов молекулы и существенно меняется во времени и в пространстве в связи с непрерывным и быстрым движением зарядов в пределах молекулы. Мелкомасштабные изменения микроскопического поля, таким образом, являются следствием пространственно неоднородной структуры вещества на молекулярном уровне.

Обозначим через  $\vec{E}_0$  напряжённость электрического поля, созданного зарядами, не входящими в молекулы диэлектрика. Эти заряды называют *сторонними* и могут располагаться как внутри, так и вне диэлектрика. Усреднённую по элементарному объёму  $\Delta V$  напряжённость электрического поля молекулярных диполей обозначим  $\vec{E}'$  (поле связанных зарядов).

*Макроскопическое* поле в диэлектрике есть сумма (суперпозиция) электрического поля сторонних и связанных зарядов:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (9.2.3)$$

Опыт показывает, что для большого числа изотропных диэлектриков в не слишком сильных электрических полях поляризованность линейно зависит от напряжённости электрического поля  $\vec{E}$ , то есть определяется выражением:

$$\vec{P} = k\vec{E} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \chi_e > 0, \quad (9.2.4)$$

в котором коэффициент пропорциональности должен быть выбран так, чтобы размерности слева и справа от знака равенства совпадали. Это имеет место, если  $k$  выбрать в виде произведения электрической постоянной  $\varepsilon_0$  и

некоторой безразмерной постоянной  $\chi_e$ , величина которой определяется видом диэлектрика и внешними условиями. Безразмерную постоянную  $\chi_e$  называют *диэлектрической* (иногда *электрической*) *восприимчивостью* диэлектрика.

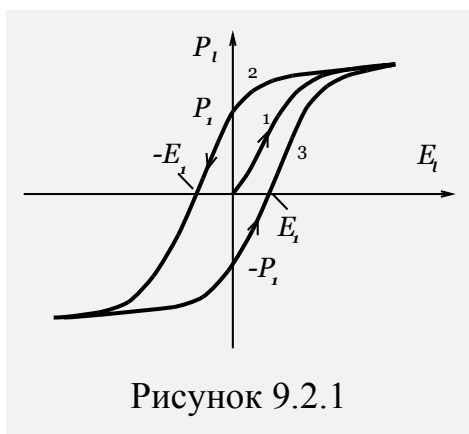
Линейная зависимость поляризованности неполярных диэлектриков от напряжённости электрического поля  $\vec{E}$  объясняется, как уже отмечалось при обсуждении механизма поляризации неполярных диэлектриков, тем, что смещение центров тяжести положительных и отрицательных зарядов друг относительно друга линейно зависит от  $\vec{E}$  и, соответственно, индуцированный дипольный момент неполярной молекулы диэлектрика линейно зависит от напряжённости электрического поля. Для изотропных полярных диэлектриков, несмотря на иной физический механизм поляризации, в не слишком сильных электрических полях также наблюдается линейная зависимость между векторами  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$ , но условие применимости такой зависимости достаточно жёсткое, а именно: должно выполняться условие  $E \ll kT / p_e$ .

Можно показать, что для полярных диэлектриков при выполнении только что упомянутого условия диэлектрическая восприимчивость определяется выражением:

$$\chi_e = \frac{n_0 p_e^2}{3\epsilon_0 kT}, \quad (9.2.5)$$

которое называется формулой Дебая – Ланжевена. Тот факт, что диэлектрическая восприимчивость полярных диэлектриков обратно пропорциональна температуре, называется законом Дебая, который надёжно подтверждён для ряда газов и паров. При низких температурах, когда  $E \approx kT / p_e$ , формула (9.2.5) не справедлива и уже нельзя говорить о том, что диэлектрическая восприимчивость полярных диэлектриков обратно пропорциональна температуре.

В очень сильных электрических полях при достаточно низких температурах может оказаться так, что все диполи полярного диэлектрика будут ориентированными вдоль вектора напряжённости электрического поля и дальнейшее увеличение напряжённости не вызывает роста поляризованности. Это явление называется насыщением поляризации. Для большинства полярных диэлектриков насыщение недостижимо, так как по мере увеличения напряжённости раньше него наступает разрушение диэлектрика.



Отметим, что кроме неполярных и полярных диэлектриков существует ещё один вид диэлектриков – *сегнетоэлектрики*, которые обладают в определённом интервале температур спонтанной (самопроизвольной) поляризованностью в отсутствие внешнего электрического поля. К сегнетоэлектрикам относятся, например, сегнетова соль  $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$  и титанат бария  $BaTiO_3$ .

Зависимость поляризованности от напряжённости электрического поля для сегнетоэлектриков носит сложный и неоднозначный характер. Неоднозначность приводит к появлению принципиально нового явления – диэлектрического гистерезиса (рисунок 9.2.1), сущность которого состоит в том, что значение поляризованности сегнетоэлектрика зависит не только от величины, но и от предшествующей истории (от предыдущих значений) напряжённости электрического поля. В результате, при изменении напряжённости электрического поля вдоль некоторой оси  $l$  по величине и направлению, зависимость величины проекции  $P_l$  на эту линию от величины проекции  $E_l$  на эту же линию представляет собой замкнутую кривую, называемую диэлектрической петлёй гистерезиса. При первоначальном увеличении напряжённости электрического поля зависимость величины проекции  $P_l$  вектора поляризованности  $\vec{P}$  от величины проекции  $E_l$  вектора  $\vec{E}$  описывается кривой 1, которая нелинейная и имеет насыщение. Если затем уменьшать величину проекции  $E_l$  вектора  $\vec{E}$  (не изменяя его направление по отношению к первоначальному), то уменьшение величины  $P_l$  проекции вектора  $\vec{P}$  будет происходить уже по линии 2. Когда  $E_l$  станет равной нулю, величина проекции вектора поляризованности остаётся отличной от нуля и равной  $P_1 > 0$ , то есть *остаточная поляризованность*  $P_1$  остаётся в отсутствии электрического поля. Чтобы уничтожить остаточную поляризованность  $P_1$ , надо приложить электрическое поле обратного направления, проекция которого на выбранное первоначальное направление будет равна  $-E_1 < 0$ . Величина  $E_1$  называется коэрцитивной силой. Если изменять величину проекции  $E_l$  вектора  $\vec{E}$  далее в направлении, противоположном первоначальному направлению, то вновь наступит насыщение. При последующем после наступления насыщения уменьшении

абсолютной величины проекции  $E_l$  вектора  $\vec{E}$  абсолютная величина проекции  $P_l$  вектора  $\vec{P}$  будет уменьшаться по кривой 3. В итоге, как это показано на рисунке 9.2.1, получается замкнутая кривая, называемая диэлектрической петлёй гистерезиса.

Причиной сегнетоэлектрических свойств является самопроизвольная (спонтанная) поляризация сегнетоэлектриков в пределах небольших областей (доменов), возникающая под действием особенно сильного взаимодействия между частицами. Такое взаимодействие возникает вследствие особенностей кристаллической структуры сегнетоэлектриков, состоящих в специфическом расположении положительных и отрицательных ионов в элементарной ячейке кристалла, что приводит к отличию от нуля их дипольного момента. При этом поляризованность в пределах одного домена направлена вдоль одной, характерной для данного кристалла, оси.

Из других свойств сегнетоэлектриков отметим, что при нагревании выше некоторой температуры (температуры Кюри) сегнетоэлектрические свойства скачком исчезают. Процесс превращения сегнетоэлектрика в обычный диэлектрик обратим – при понижении температуры сегнетоэлектрические свойства восстанавливаются.

Вновь вернёмся к обсуждению свойств вектора поляризации  $\vec{P}$  диэлектрика и рассмотрим *теорему Гаусса* для этого вектора. С этой целью выберем произвольную замкнутую поверхность  $S$ , часть которой может находиться внутри диэлектрика, а часть – вне диэлектрика (рисунок 9.2.2).

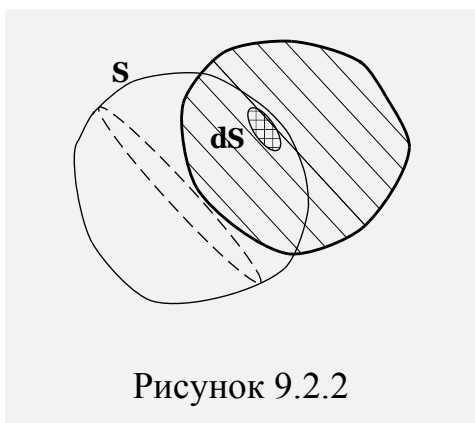


Рисунок 9.2.2

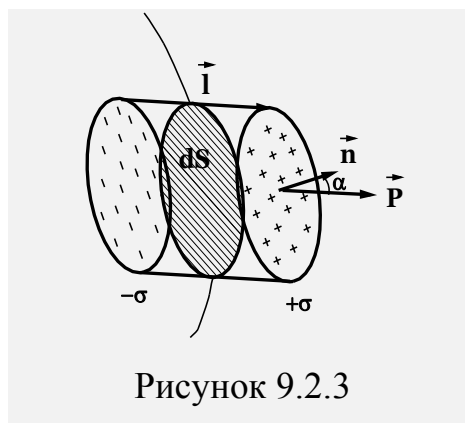


Рисунок 9.2.3

Если диэлектрик находится в электрическом поле, то  $\vec{P} \uparrow \uparrow \vec{E}$ . Выделим элемент поверхности  $dS$  и построим элементарный косой цилиндр с образующей, параллельной вектору поляризации, и основаниями, параллельными выбранному элементу поверхности  $dS$  (рисунок 9.2.3). На основаниях отмечены поверхностные поляризационные заряды, вышедшие за

пределы элементарного цилиндра. В пределах элементарного цилиндра диэлектрик считаем однородным, поэтому некомпенсированные поляризационные заряды появятся только на основаниях. Если обозначить абсолютную величину поверхностной плотности поляризационных зарядов  $\sigma_{пол}$ , то вектор поляризации в соответствии с рисунком 9.2.3 будет:

$$\vec{P} = \frac{dS\sigma_{пол}\vec{l}}{dV}. \quad (9.2.6)$$

Умножив скалярно обе части равенства (9.2.6) на орт нормали  $\vec{n}$  к элементу поверхности  $dS$ , получим выражение:

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = P_n = \frac{\sigma_{пол} dS \vec{n} \cdot \vec{l}}{d\vec{S} \cdot \vec{l}} = \frac{\sigma_{пол} d\vec{S} \cdot \vec{l}}{d\vec{S} \cdot \vec{l}} = \sigma_{пол}. \quad (9.2.7)$$

Таким образом, через элемент  $dS$  из рассматриваемой замкнутой поверхности выйдет поляризационный заряд  $dq_{пол}$ , равный:

$$dq_{пол} = \sigma_{пол} dS = P_n dS = \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (9.2.8)$$

Следовательно, проинтегрировав по поверхности  $S$ , найдём весь поляризационный заряд  $q_{пол}$ , вышедший из этой поверхности, то есть:

$$q_{\Sigma_{пол}} = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \oint_S P_n \cdot dS. \quad (9.2.9)$$

Далее учтём условие электронейтральности, которое в данном случае означает, что если область, ограниченную рассматриваемой замкнутой поверхностью  $S$ , покинул поляризационный заряд  $q_{\Sigma_{пол}}$ , то внутри области остался равный ему по модулю и противоположный по знаку некомпенсированный связанный заряд  $-q_{\Sigma_{связ}} = q_{\Sigma_{пол}}$ , который вычисляется, как и  $q_{\Sigma_{пол}}$ , по формуле (9.2.9):

$$q_{\Sigma_{связ}} = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\oint_S P_n \cdot dS. \quad (9.2.10)$$

Таким образом, мы получили, что *поток вектора поляризации через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен взятому с противоположным знаком полному связанному заряду в объёме диэлектрика, ограниченного поверхностью  $S$* . Это утверждение и называется теоремой Гаусса для вектора поляризации.

В дифференциальной форме теорема Гаусса для вектора поляризации выражается формулой:

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{\text{связ}}, \quad (9.2.11)$$

где  $\rho_{\text{связ}}$  – объёмная плотность связанных зарядов.

### 9.3. Вектор электрического смещения

Как уже отмечалось (см. формулу 9.2.3), *макроскопическое* электрическое поле в диэлектрике является суперпозицией электрических полей *сторонних*  $\vec{E}_0$  и *связанных*  $\vec{E}'$  зарядов:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (9.3.1)$$

Для потока вектора электрического поля (резльтирующего)  $\vec{E}$  в диэлектрике, разумеется, применима теорема Гаусса, которая с учётом формулы (9.3.1) примет вид:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S (\vec{E}_0 + \vec{E}') \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{E}' \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} (q_{\Sigma \text{стор}} + q_{\Sigma \text{связ}}). \quad (9.3.2)$$

Несмотря на простой вид, выражение (9.3.2) практически не может быть использовано для расчётов, так как величина  $q_{\Sigma \text{связ}}$  определяется входящей под знак интеграла напряжённостью *макроскопического* электрического поля, которое (поле) само зависит от  $q_{\Sigma \text{связ}}$ , как это следует из (9.3.1). Получается своего рода «порочный замкнутый круг». Для того чтобы выбраться из него, вводят вспомогательный вектор – вектор электрического смещения  $\vec{D}$ . Делается это следующим образом.

Обе части формулы (9.3.2) умножают на  $\varepsilon_0$  и в правой части  $q_{\Sigma \text{связ}}$  заменяют на поток вектора поляризации по формуле (9.2.10):

$$\varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\Sigma \text{стор}} - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (9.3.2)$$

С учётом линейности поверхностного интеграла получим:

$$\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = q_{\Sigma \text{стор}}. \quad (9.3.3)$$

Линейную комбинацию векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$  под знаком интеграла в левой части (9.3.3) называют вектором *электрического смещения (индукции)* и обозначают  $\vec{D}$ , то есть  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , и, следовательно:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\Sigma_{\text{стор}}} \quad (9.3.4)$$

Выражение (9.3.4) представляет собой теорему Гаусса для вектора электрического смещения в интегральной форме. В дифференциальной форме эта теорема определяется выражением:

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{стор}} \quad (9.3.5)$$

Выражение (9.3.5) показывает, что дивергенция вектора электрического смещения определяется только сторонними зарядами. Измеряется электрическое смещение, как и поляризованность, в Кл/м<sup>2</sup>.

Выражения (9.3.4) и (9.3.5) могут быть использованы для расчёта поля вектора  $\vec{D}$ , но найти интересующую нас в конечном итоге напряжённость электрического поля  $\vec{E}$  по рассчитанному полю вектора  $\vec{D}$  нет возможности до тех пор, пока не определена в общем случае неизвестная зависимость  $\vec{P}$  от  $\vec{E}$ . Иными словами, осуществить расчёт векторного поля  $\vec{E}$  на основе только формулы  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  без дополнительных условий невозможно.

Общего решения указанной проблемы не существует, но в некоторых случаях выход удаётся найти. В частности, в п. 9.2 было установлено, что для изотропных неполярных и полярных диэлектриков при не слишком сильных электрических полях справедлива формула:

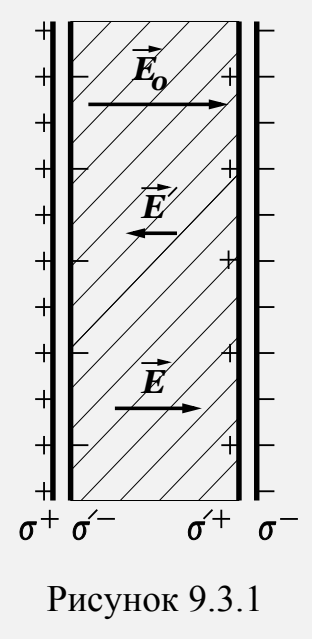
$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad (9.3.6)$$

Подставив выражение для вектора поляризации из (9.3.6) в (9.3.4), получим:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad (9.3.7)$$

В выражении (9.3.7) введена новая безразмерная величина  $\varepsilon = 1 + \chi_e \geq 1$ , называемая диэлектрической проницаемостью среды (диэлектрика). Знак равенства в выражении  $\varepsilon \geq 1$  относится к вакууму. При наличии изотропного диэлектрика величина диэлектрической проницаемости больше единицы, так как в этом случае  $\chi_e > 0$ .

Следует отметить, что расчёт электрического поля в диэлектриках является достаточно сложной задачей, зависящей от *геометрии* (формы и размеров) диэлектрика и даже в случае однородных изотропных диэлектриков имеет аналитическое решение только для достаточно простых ситуаций.



В качестве примера рассмотрим расчёт электрического поля для однородного изотропного диэлектрика в виде плоской пластины, находящейся между двумя пластинами, равномерно заряженными разноимёнными зарядами с одинаковыми по модулю поверхностными плотностями сторонних зарядов  $|\sigma| = \sigma_+ = -\sigma_-$  (рисунок 9.3.1).

Такие пластины создают в вакууме электрическое поле, модуль напряжённости которого равен  $E_0$  (в центральной части, вдали от краёв):

$$E_0 = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}. \quad (9.3.8)$$

Однако в нашем случае между пластинами находится однородный изотропный диэлектрик, и это приведёт к тому, что он под действием электрического поля поляризуется и вблизи ограничивающих его плоскостей с внутренней стороны появятся связанные заряды с одинаковыми по модулю и разными по знаку поверхностными плотностями (рисунок 9.3.1). Это приведёт к появлению поля связанных зарядов, модуль напряжённости которого определяется выражением  $E' = |\sigma'|/\varepsilon_0$  (где  $\sigma' = -\sigma_{связ}$  – модуль поверхностной плотности связанных зарядов), направленного в сторону, противоположную полю, создаваемому сторонними зарядами. Напряжённость результирующего электрического поля в диэлектрике, как это видно из рисунка 9.3.1, будет по модулю меньше, чем  $E_0$ .

Для количественной оценки найдём проекцию напряжённости результирующего макроскопического электрического поля  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$  на ось, параллельную  $\vec{E}$  и одинаково с этим вектором направленную:

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} - \frac{|\sigma'|}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(|\sigma| - |\sigma'|). \quad (9.3.9)$$

Поскольку все векторы напряжённости перпендикулярны ограничивающим диэлектрик плоскостям и с учётом того, что  $|\sigma'| = |P_n| = P = \chi_e \varepsilon_0 E$ , из (9.3.9) получаем:



$$E = E_0 - \chi_e E, \quad (9.3.10)$$

или, выражая из полученного равенства  $E$ , находим для искомого модуля напряжённости макроскопического поля в диэлектрике:

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi_e} = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (9.3.11)$$

Из полученной формулы видно, что модуль вектора напряжённости электрического поля, создаваемого сторонними зарядами, равномерно распределёнными на плоских проводящих пластинах, в однородном изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  в  $\varepsilon$  раз меньше, чем модуль вектора напряжённости электрического поля, создаваемого теми же сторонними зарядами в вакууме. Иными словами, диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  показывает, во сколько раз ослабляется электрическое поле в диэлектрике по сравнению с вакуумом.

Сравнивая формулы (9.3.9) и (9.3.11), легко найти ещё одну полезную на практике формулу:

$$|\sigma'| = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} |\sigma|, \quad (9.3.12)$$

позволяющую определить поверхностную плотность связанных зарядов по заданной поверхностной плотности сторонних зарядов.

#### 9.4. Граничные условия для поверхности раздела двух диэлектриков

При решении задач о расчёте электрического поля в диэлектриках часто встречается ситуация, когда рассматриваемая область заполнена двумя или более однородными изотропными диэлектриками. Возникает вопрос о поведении векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  на границах раздела различных диэлектриков. Векторы напряжённости электрического поля  $\vec{E}$  и электрического смещения  $\vec{D}$  всегда можно представить в виде сумм  $\vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_\tau$  и  $\vec{D} = \vec{D}_n + \vec{D}_\tau$  взаимно перпендикулярных векторов  $\vec{E}_n$  и  $\vec{E}_\tau$  ( $\vec{E}_n \perp \vec{E}_\tau$ ) и  $\vec{D}_n$  и  $\vec{D}_\tau$  ( $\vec{D}_n \perp \vec{D}_\tau$ ). Первые из этих векторов ( $\vec{E}_n$  и  $\vec{D}_n$ ) перпендикулярны к рассматриваемой поверхности в точке наблюдения и называются нормальными составляющими соответствующих векторов, а вторые ( $\vec{E}_\tau$  и  $\vec{D}_\tau$ ) направлены по касательной к поверхности в точке наблюдения и называются тангенциальными составляющим этих векторов.

Искомые соотношения нетрудно получить на основе теоремы о циркуляции вектора  $\vec{E}$  (8.6.13) и теоремы о потоке вектора  $\vec{D}$  (9.3.4).

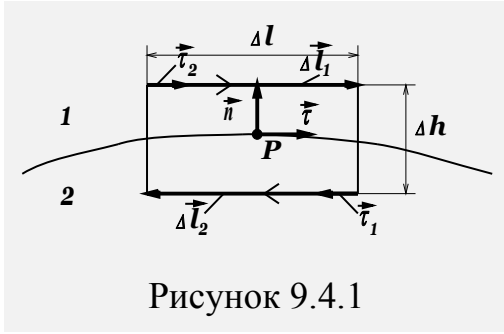


Рисунок 9.4.1

Сначала рассмотрим вопрос о векторе  $\vec{E}$  на границе раздела двух диэлектриков (рисунок 9.4.1). Возьмём некоторую точку  $P$  на границе раздела двух диэлектриков (диэлектрики отмечены индексами 1 и 2) и ограничим её замкнутым контуром  $l$ , в качестве которого выберем небольшой прямоугольный контур, ориентированный, как показано на рисунке 9.4.1. Контур выберем настолько малым, что во всех точках плоскости, ограниченных этим контуром, электрическое поле можно считать однородным. Векторы касательных сторон прямоугольника обозначим  $\Delta \vec{l}_1$ ,  $\Delta \vec{l}_2 = -\Delta \vec{l}_1$ ,  $\Delta l_2 = \Delta l_1 = \Delta l$ , а направление обхода контура выберем таким, чтобы  $\vec{E}_\tau \uparrow \Delta \vec{l}_1$ . Орт касательной к границе раздела в рассматриваемой точке обозначим  $\vec{\tau}$ . Тогда, с учётом сказанного, для циркуляции вектора  $\vec{E}$  вдоль этого малого контура имеем:

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} &= (\vec{E}_{1n} + \vec{E}_{1\tau}) \cdot \Delta \vec{l}_1 + (\vec{E}_{2n} + \vec{E}_{2\tau}) \cdot \Delta \vec{l}_2 = \begin{vmatrix} \vec{E}_{1n} \cdot \Delta \vec{l}_1 = 0 \\ \vec{E}_{2n} \cdot \Delta \vec{l}_2 = 0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{E}_{1\tau} \cdot \Delta \vec{l}_1 + \vec{E}_{2\tau} \cdot \Delta \vec{l}_2 = \vec{E}_{1\tau} \cdot \Delta \vec{l}_1 - \vec{E}_{2\tau} \cdot \Delta \vec{l}_1 = \\ &= E_{1\tau} \cdot \Delta l_1 - E_{2\tau} \cdot \Delta l_1 = (E_{1\tau} - E_{2\tau}) \Delta l = 0, \quad (\Delta l \neq 0). \end{aligned} \quad (9.4.1)$$

При вычислении циркуляции вектора  $\vec{E}$  в (9.4.1) учтено, что слагаемые по участкам, перпендикулярным к границе раздела диэлектриков, кроме того, что компенсируют друг друга, ещё могут быть сделаны сколь угодно малыми при сближении сторон прямоугольника, параллельных границе раздела. Учитывая, что  $\Delta l \neq 0$ , получим условие:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (9.4.2)$$

которое означает, что длины тангенциальных составляющих вектора  $\vec{E}$  на границе раздела двух диэлектриков одинаковы с обеих сторон диэлектрика, то есть тангенциальная составляющая вектора  $\vec{E}$  на границе раздела двух диэлектриков *непрерывна*.

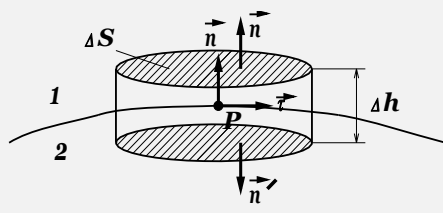


Рисунок 9.4.2

Для рассмотрения вопроса о поведении вектора электрического смещения  $\vec{D}$  при переходе границы раздела диэлектриков выберем на этой границе произвольную точку  $P$  и ограничим её малым прямым цилиндром, основания которого параллельны касательной плоскости к границе раздела в точке  $P$ , а образующая боковой поверхности перпендикулярна этой касательной плоскости (рисунок 9.4.2). Орт нормали к касательной плоскости обозначим  $\vec{n}$ . Область, ограниченную выбранной таким образом замкнутой поверхностью, можно сделать настолько малой, чтобы поле вектора  $\vec{D}$  было в этой области однородным. Применим теорему Гаусса для вектора  $\vec{D}$  и будем при этом считать, что сторонние заряды расположены на границе раздела двух диэлектриков с поверхностной плотностью  $\sigma$ . С учётом того, что основания выбранного цилиндра можно сделать сколь угодно близкими, и того, что орты плоскостей оснований связаны соотношением  $\vec{n} = -\vec{n}' \Rightarrow \Delta\vec{S}_1 = -\Delta\vec{S}_2$ ,  $|\Delta\vec{S}_1| = |\Delta\vec{S}_2| = \Delta S$ , для потока вектора  $\vec{D}$  ( $\vec{D}_n \uparrow \Delta\vec{S}_1$ ) через рассматриваемую цилиндрическую поверхность, в соответствии с (9.3.4), получим формулу:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (\vec{D}_{1n} + \vec{D}_{1\tau}) \cdot \Delta\vec{S}_1 + (\vec{D}_{2n} + \vec{D}_{2\tau}) \cdot \Delta\vec{S}_2 = \left| \begin{array}{l} \vec{D}_{1\tau} \cdot \Delta\vec{S}_1 = 0 \\ \vec{D}_{2\tau} \cdot \Delta\vec{S}_2 = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \vec{D}_{1n} \cdot \Delta\vec{S}_1 - \vec{D}_{2n} \cdot \Delta\vec{S}_1 = D_{1n}\Delta S - D_{2n}\Delta S = q_{\Sigma\text{стор}} = \sigma\Delta S,$$
(9.4.3)

из которой находим интересующую нас связь для нормальных составляющих вектора электрического смещения в рассматриваемой точке:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma. \quad (9.4.4)$$

Из соотношения (9.4.4) видим, что длина нормальной составляющей вектора электрического смещения в рассматриваемой точке  $D_n$  при переходе через границу раздела двух диэлектриков терпит разрыв, если на этой границе есть сторонние заряды. Если же сторонние заряды на границе раздела диэлектриков отсутствуют, то длина нормальной составляющей вектора электрического смещения  $D_n$  будет непрерывной, то есть при  $\sigma = 0$

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (9.4.5)$$

Из установленных соотношений (9.4.2) и (9.4.5) можно получить связь длин нормальных составляющих вектора напряжённости электрического поля  $E_n$  и тангенциальных составляющих вектора электрического смещения  $D_\tau$  при переходе через границу раздела двух диэлектриков.

Действительно, для однородных изотропных диэлектриков выражение (9.4.5) в отсутствии сторонних зарядов на границе раздела запишем в виде:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \quad (9.4.6)$$

откуда следует выражение:

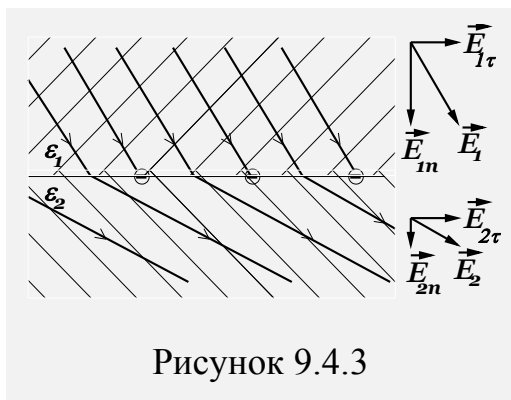
$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (9.4.7)$$

Далее из (9.4.2) имеем выражение:

$$\frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}, \quad (9.4.8)$$

которое можно переписать в виде:

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (9.4.9)$$



В заключение приведём графическое изображение силовых линий электрического поля при переходе границы раздела двух однородных изотропных диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  (рисунок 9.4.3). Поскольку тангенциальная составляющая вектора напряжённости электрического

поля  $\vec{E}$  не испытывает скачка на границе диэлектрика, а нормальная составляющая этого вектора терпит разрыв, обусловленный наличием связанных зарядов на границе раздела диэлектриков, то силовые линии вектора  $\vec{E}$  будут иметь разную густоту и разный наклон в диэлектриках. Причём углы наклона определяются из соотношения:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{1\tau} / E_{1n}}{E_{2\tau} / E_{2n}} = \frac{E_{1\tau} E_{2n}}{E_{1n} E_{2\tau}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad (9.4.10)$$

которое определяет закон «преломления» силовых линий при переходе через границу раздела двух диэлектриков.

### 9.5. Проводник в электрическом поле

В металлических проводниках имеются свободные носители заряда – электроны проводимости (*свободные электроны*), которые могут перемещаться под действием электрического поля в пределах всего проводника. Эти свободные электроны и определяют свойства проводников во внешнем электрическом поле. Под действием внешнего электрического поля свободные электроны перемещаются в направлении, противоположном направлению вектора напряжённости внешнего электрического поля  $\vec{E}_0$  до ограничивающей их перемещение границы, оставляя uncompensated положительно заряженные ионы. При этом перераспределившиеся заряды создают внутреннее электрическое поле  $\vec{E}'$ , направленное в сторону, противоположную вектору  $\vec{E}_0$ .

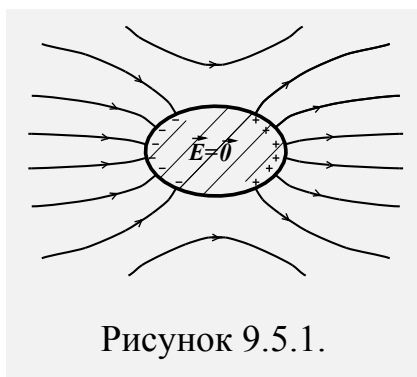


Рисунок 9.5.1.

Перемещение свободных электронов будет продолжаться до тех пор, пока поле  $\vec{E}'$  полностью не скомпенсирует  $\vec{E}_0$  и внутри проводника результирующее электрическое поле  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$  не станет равно  $\vec{0}$ . В этот момент сила, действующая на свободные электроны проводимости,  $\vec{F} = -e\vec{E} = \vec{0}$ , и процесс перемещения свободных зарядов прекращается (рисунок 9.5.1).

В установившемся режиме внутри проводника электрическое поле отсутствует и равна нулю объёмная плотность заряда. Избыточные заряды сосредоточены на поверхности проводника. На поверхности равна нулю  $\vec{E}_\tau$  – касательная к поверхности компонента вектора  $\vec{E}$  (иначе электроны продолжали бы перемещаться вдоль поверхности).

В итоге приходим к выводу, что для проводников во внешнем электрическом поле выполняются следующие условия:

- результирующее электрическое поле  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{0}$ , а у его поверхности  $\vec{E} = \vec{E}_n$ ;
- весь объём проводника эквипотенциален;
- поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью;

г) некомпенсированные заряды располагаются в проводнике только на поверхности.

На рисунке 9.5.1 показана картина силовых линий поля вблизи проводника в установившемся режиме. Длительность процесса установления стационарного состояния составляет величину в пределах одной микросекунды. Описанный выше процесс перераспределения зарядов в проводнике под действием внешнего электрического поля называется *электрической индукцией*, а возникшие при этом заряды называются *индуцированными* или *наведёнными*. Индуцированные заряды исчезают, как только проводник удаляется из электрического поля.

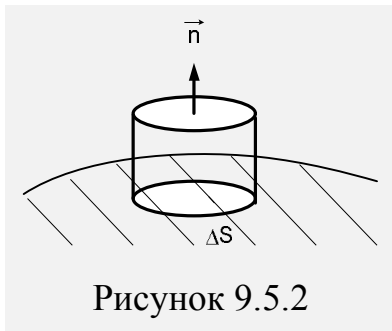


Рисунок 9.5.2

Найдём, чем определяется напряжённость электрического поля вблизи поверхности проводника. Предположим, что проводник граничит с вакуумом, как это показано на рисунке 9.5.2. Поскольку  $\vec{E}_n \perp \Delta S$ , то в качестве замкнутой поверхности выберем небольшой прямой цилиндр, расположенный, как это показано на рисунке

9.5.2. По теореме Гаусса поток вектора  $\vec{E}$  через выбранную замкнутую поверхность равен  $q_{\Sigma} / \varepsilon_0 = \sigma \Delta S / \varepsilon_0$ . С другой стороны, считая электрическое поле в пределах выбранного цилиндра однородным и учитывая, что боковую поверхность можно сделать сколь угодно малой путём сближения оснований, а также то, что внутри проводника  $\vec{E} = \vec{0}$ , прямым методом получим для потока вектора  $\vec{E}$  через рассматриваемую замкнутую поверхность  $E_n \Delta S$ . С учётом теоремы Гаусса получаем:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (9.5.1)$$

При всей простоте выражения (9.5.2) не следует забывать, что абсолютная величина и знак  $\sigma$ , а следовательно, и  $E_n$ , определяются всеми зарядами и их распределением по поверхности!

В заключение отметим, что внутри замкнутой проводящей оболочки электрическое поле равно нулю независимо от наличия или отсутствия электрического поля вне этой оболочки. Действительно, поскольку электрическое поле внутри сплошного проводника равно нулю и равна нулю объёмная плотность заряда, то удаление любой внутренней части проводника нигде и никак не изменит электрического поля. Именно на этом осно-

вана защита (экранирование) различных тел (приборов, организмов и пр.) от электрических полей.

## 9.6. Электроёмкость. Конденсаторы

Уединённым проводником будем называть такой проводник, который удалён от других проводников и электрических зарядов настолько далеко, что они не оказывают на него влияния. Разумеется, это идеализированное понятие.

Будем сообщать этому проводнику заряд некоторыми порциями  $\Delta q$ , а изменение потенциала проводника при этом обозначим  $\Delta \varphi$ . Опыт показывает, что отношение  $\Delta q$  к  $\Delta \varphi$  для данного проводника не зависит от величины  $\Delta q$ , а определяется только формой и размерами проводника и свойствами окружающей среды. Данный факт позволяет ввести новую физическую величину – *электроёмкость уединённого проводника* – при помощи формулы:

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta \varphi}. \quad (9.6.1)$$

Электроёмкость уединённого проводника можно определить несколько иначе. Пусть уединённому проводнику сообщён заряд  $q$ , а разность потенциалов проводника и бесконечно удалённой точки  $(\varphi - \varphi_\infty)$ . Величина  $(\varphi - \varphi_\infty)$  разумеется, зависит от сообщённого проводнику заряда  $q$ , но не зависит от выбора  $\varphi_\infty$ . Опыт показывает, что отношение заряда проводника к разности потенциалов проводника и бесконечно удалённой точки  $(\varphi - \varphi_\infty)$  для данного проводника есть величина постоянная и именно это отношение называют *электроёмкостью уединённого проводника*, то есть:

$$C = \frac{q}{\varphi - \varphi_\infty}. \quad (9.6.2)$$

Если наложить условия  $\varphi_\infty = 0$ , которое, как уже отмечено, не влияет на разность  $(\varphi - \varphi_\infty)$ , то получим формулу

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (9.6.3)$$

В дальнейшем, обращаясь к формуле (9.6.3), будем всегда без дополнительных комментариев подразумевать, что в знаменателе этой формулы

на самом деле находится разность потенциалов и бесконечно удалённой точки  $(\varphi - \varphi_\infty)$  при условии, что  $\varphi_\infty = 0$ .

Формулы (9.6.1) и (9.6.3) имеют различный смысл. Первая формула лежит в основе определения понятия дифференциальной ёмкости проводника и определяет дифференциальную ёмкость проводника, имеющего электрический заряд  $q$ , при условии  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ , тогда как формула (9.6.3) определяет среднюю ёмкость проводника. Отметим, что для проводников в большом диапазоне их электрических зарядов два варианта электроёмкости эквивалентны вследствие линейной зависимости  $(\varphi - \varphi_\infty)$  от величины сообщённого проводнику заряда.

Размерность электроёмкости равна отношению размерности заряда к размерности потенциала:  $[C] = [q] / [\varphi]$ . Единица измерения электроёмкости (или просто ёмкости) проводника в СИ – 1 Ф (фарад, но не фарада). Ёмкость 1 Ф имеет уединённый проводник в вакууме, потенциал которого изменяется на 1 В при изменении его заряда на 1 Кл. Фарад – очень крупная величина. Поэтому используют его доли:  $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ ,  $1 \text{ нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$ ,  $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ .

Для примера вычислим электроёмкость уединённого проводника сферической формы в вакууме.

Из теоремы Гаусса легко найти, что напряжённость электрического поля заряженной проводящей сферы радиуса  $R$  на расстояниях  $r \geq R$  определяется выражением:

$$E = k_e \frac{q}{r^2}. \quad (9.6.4)$$

Соответственно, потенциал поверхности сферы (бесконечно удалённая точка имеет нулевой потенциал) равна:

$$\varphi = -k_e \int_{\infty}^R \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (9.6.5)$$

и для электроёмкости уединённой проводящей сферы имеем:

$$C_{cf} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (9.6.6)$$

Если проводящая сфера находится в однородном изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , то для её ёмкости получим формулу:



$$C_{сф} = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (9.6.6a)$$

Как уже отмечено, уединённый проводник – это идеализация. В реальности в окружающем проводники пространстве находятся и другие проводники и, следовательно, при определении понятия ёмкости проводника необходимо учитывать это обстоятельство. Поэтому вводят понятие ёмкости системы проводников и говорят на самом деле об ёмкости системы проводников.

Сделать это обобщение оказывается несложно. Действительно, если к заряженному проводнику приближать другие проводящие тела, то на них возникнут индуцированные заряды, причём на ближайшей к данному заряженному проводнику стороне будут заряды противоположного знака. Это приведёт к уменьшению потенциала данного проводника (по отношению к потенциалу бесконечно удалённой точки) и, следовательно, к увеличению его ёмкости. Чем меньше расстояние между проводниками, тем больше будет ёмкость данной системы проводников. На близких друг к другу поверхностях будут сосредоточены заряды противоположного знака. Система из двух проводящих тел, имеющих достаточно большие обращённые друг к другу поверхности, разделённые узким зазором, заполненным диэлектриком, называется конденсатором (а эти проводящие тела называются его обкладками). Обычно обе обкладки конденсатора заряжают от одного источника напряжения, соединяя их с разноимёнными полюсами источника. В итоге на сторонах обкладок, обращённых друг к другу, оказываются заряды, одинаковые по модулю и противоположные по знаку. Взаимная ёмкость двух проводников всегда больше ёмкости уединённых проводников. Разность потенциалов между обкладками конденсатора обозначим  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

Отношение заряда  $q$  на одной из его обкладок к разности потенциалов  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  между данной обкладкой и другой обкладкой (но не наоборот!) называется *ёмкостью* конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (9.6.7)$$

Иногда, чтобы избавиться от необходимости уточнения в формуле (9.6.7) связи между зарядом и разностью потенциалов, в этой формуле можно подразумевать отношение абсолютной величины заряда на одной из обкладок (всё равно, какой) и абсолютную величину разности потенци-

алов  $|\varphi_1 - \varphi_2|$  между обкладками, то есть:  $C = |q| / |\varphi_1 - \varphi_2|$ . Величину  $|\varphi_1 - \varphi_2|$  обозначают  $U$  и называют *напряжением* между обкладками конденсатора. Далее будем понимать определение электроёмкости конденсатора именно в этом смысле.

Отметим также, что с практической точки зрения нужно стремиться к ситуации, когда практически всё электрическое поле конденсатора сосредоточено в пространстве между его обкладками. При этом третьи тела уже не будут влиять на распределение зарядов на обкладках конденсатора

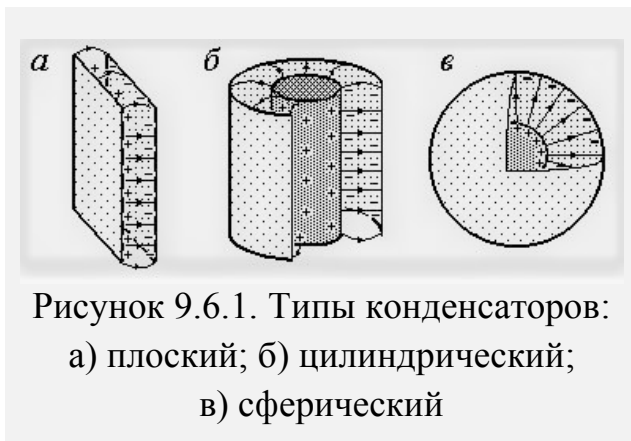


Рисунок 9.6.1. Типы конденсаторов:

а) плоский; б) цилиндрический;  
в) сферический

и на электрическое поле этих зарядов и, в итоге, на электроёмкость конденсатора. Именно это обстоятельство и позволяет широко использовать на практике конденсаторы – системы из двух близко расположенных проводящих тел. Идеальным, с точки зрения независимости электроёмкости от наличия и расположения других проводников, является

сферический конденсатор, показанный на рисунке 9.6.1, в. Близки к нему по этому свойству также цилиндрический и плоский конденсаторы (рисунки 9.6.1, б и 9.6.1, а).

В качестве примера расчёта найдём электроёмкость плоского конденсатора (рисунок 9.6.1, а). Электрическое поле между обкладками плоского конденсатора можно считать приблизительно однородным, и поэтому напряжение между этими обкладками  $U$  и модуль вектора напряжённости электрического поля  $\vec{E}$  внутри конденсатора связаны соотношением:

$$U = Ed, \quad (9.6.8)$$

где  $d$  – расстояние между обкладками конденсатора.

Модуль вектора напряжённости электрического поля внутри плоского конденсатора, выраженный через модуль поверхностной плотности заряда на его обкладке, легко найти по теореме Гаусса, он равен<sup>14</sup>:

<sup>14</sup> Для напряжённости электрического поля зарядов, равномерно распределённых по плоскости с поверхностной плотностью  $\sigma$ , можно использовать два варианта корректных выражений: 1)  $E_x = (\sigma / \varepsilon_0 \varepsilon) \cdot (x / |x|)$ ,  $x \neq 0$ , где ось  $x$  перпендикулярна

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (9.6.9)$$

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\varepsilon \geq 1$  – диэлектрическая проницаемость среды между обкладками конденсатора.

С учётом того, что  $|\sigma| = |q|/S$  ( $S$  – площадь одной из обкладок конденсатора), для  $U$  получим:

$$U = \frac{|\sigma|}{\varepsilon\varepsilon_0} d = \frac{|q| d}{\varepsilon\varepsilon_0 S}. \quad (9.6.10)$$

Выражая из последней формулы отношение  $|q|/U$ , для электроёмкости плоского конденсатора находим:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \quad (9.6.11)$$

Если использовать поверхностную плотность заряда  $\sigma$  без знака модуля, то корректным будет выражение  $E_x = \sigma / (\varepsilon_0 \varepsilon)$ , где  $E_x$  – проекция вектора напряжённости на ось  $x$ , перпендикулярную к обкладкам конденсатора с началом координат на одной из пластин. При этом из двух величин берётся поверхностная плотность заряда  $\sigma$  той пластины, на которой расположено начало координат. Если начало координат на положительно заряженной пластине, то:  $\vec{E} \uparrow\uparrow x \Rightarrow E_x > 0$ ,  $\sigma = \sigma^+ > 0$ , и поскольку  $\varphi_1 > \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 > 0$ , обе части равенства  $E_x = \sigma / (\varepsilon_0 \varepsilon)$  имеют одинаковые (положительные) знаки. Если же начало координат на отрицательно заряженной пластине, то:  $\vec{E} \uparrow\uparrow x \Rightarrow E_x > 0$ ,  $\sigma = \sigma^- < 0$ , и поскольку  $\varphi_1 < \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 < 0$ , то и в этом случае обе части указанного равенства имеют одинаковые (положительные) знаки, то есть со знаками всё в порядке.

Для однородного поля напряжённость связана с разностью потенциалов соотношением  $(\varphi_1 - \varphi_2) = E_x d$ . Подставив в эту формулу значение  $E_x$  и  $\sigma$  (соблюдая правило соответствия по выбору заряда обкладки и её по-

---

плоскости, начало координат находится на плоскости; 2)  $E_n = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon$ , где  $E_n$  – проекция вектора напряжённости на орт нормали  $\vec{n}$  к рассматриваемой плоскости, и этот орт направлен от поверхности (по обе стороны от неё). В приведённых выражениях  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость однородного диэлектрика, заполняющего всё пространство вокруг заряженной плоскости.

тенциала), получим  $(\varphi_1 - \varphi_2) = \sigma d / (\varepsilon_0 \varepsilon) = qd / (\varepsilon_0 \varepsilon S)$ . И для электроёмкости плоского конденсатора получается формула:  $C = q / (\varphi_1 - \varphi_2) = q \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon S) / (qd) = \varepsilon_0 \varepsilon S / d$ , в полном соответствии с полученным ранее выражением (9.6.11).

Плоские конденсаторы для уменьшения их габаритов и экономии места делают обычно с гибкими обкладками (обычно изготавливаемыми из тонкой фольги с промасленной бумагой в качестве изолятора) и сворачивают в рулон. Поэтому плоский конденсатор промышленного выпуска выглядит как цилиндрическая деталь.

Формулы для ёмкостей сферического и цилиндрического конденсаторов тоже легко получить, но для экономии времени и места мы приведём их без доказательства:

$$C_{сф} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{rR}{R-r}, \quad (9.6.12)$$

где  $R$  – радиус внешней обкладки,  $r$  – радиус внутренней обкладки;

$$C_{цил} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}{\ln(R/r)}, \quad (9.6.13)$$

где  $h$  – высота конденсатора,  $R$  – радиус внешней обкладки,  $r$  – радиус внутренней обкладки.

Каждый конденсатор характеризуется ёмкостью и максимальным рабочим напряжением. При превышении этого напряжения между обкладками проскакивает искра, в результате чего диэлектрик разрушается и конденсатор выходит из строя.

## 9.7. Энергия системы точечных зарядов. Энергия конденсатора. Энергия электрического поля

Рассмотрим систему из двух зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , которые находятся в точках 1 и 2, соответственно, на расстоянии  $r$  друг от друга. Данная система зарядов обладает потенциальной энергией  $W$ , которую можно определить как энергию одного из этих зарядов в электрическом поле другого:

$$W_{12} = A_{\infty 1} = q_1 \varphi_1(2); \quad W_{21} = A_{\infty 2} = q_2 \varphi_2(1), \quad (9.7.1)$$

где  $A_{\infty 1}$  – работа электростатических сил по перемещению заряда  $q_1$  из бесконечно удалённой точки в точку 1,  $A_{\infty 2}$  – работа электростатических сил по

перемещению заряда  $q_2$  из бесконечно удалённой точки в точку 2,  $\varphi_1(2)$  – потенциал, создаваемый зарядом  $q_2$  в точке 1,  $\varphi_2(1)$  – потенциал, создаваемый зарядом  $q_1$  в точке 2.

Потенциалы  $\varphi_2(1)$  и  $\varphi_1(2)$  (аргументы далее опустим) определяются формулой (8.5.10):

$$\varphi_1 = k_e \frac{q_2}{\rho}, \quad \varphi_2 = k_e \frac{q_1}{\rho}, \quad \rho = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|. \quad (9.7.2)$$

Следовательно, получаем совершенно очевидный результат, вне зависимости от того, об энергии какого заряда идёт речь, то есть:  $W_{12} = W_{21} = W$  и

$$W = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2 = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i\varphi_i. \quad (9.7.3)$$

Потенциальная энергия системы из трёх зарядов  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  определяется суммой парных энергий взаимодействия зарядов между собой:

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{23}. \quad (9.7.4)$$

При этом, разумеется, выполняются условия  $W_{ik} = W_{ki}$ ,  $i \neq k$ ;  $i, k = 1, 2, 3$ . С учётом этого замечания последнее выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21} + W_{13} + W_{31} + W_{23} + W_{32}) = \\ &= \frac{1}{2}\{(W_{12} + W_{13}) + (W_{21} + W_{23}) + (W_{32} + W_{31})\}. \end{aligned} \quad (9.7.5)$$

Если ввести обозначения  $W_i = \sum_{k=1}^3 W_{ik}, i \neq k$ , причём величины  $W_i, i = 1, 2, 3$ , имеют смысл энергии взаимодействия  $i$ -го заряда со всеми другими, то можно записать

$$W = \frac{1}{2}(W_1 + W_2 + W_3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 W_i. \quad (9.7.6)$$

Учтём также выражение (9.7.3) и получим:

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 W_i, \quad (9.7.7)$$

где  $\varphi_i = \sum_{k=1}^3 \varphi_{ik}$ ,  $i \neq k$ , причём величины  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  имеют смысл потенциала  $i$ -го заряда в поле всех других зарядов.

Аналогичное рассуждение для системы из  $n$  зарядов проводит нас к формуле:

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + \dots + q_n\varphi_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i\varphi_i. \quad (9.7.8)$$

Если заряды распределены непрерывно в некотором объёме  $V$ , то формула (9.7.8) примет вид:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (9.7.9)$$

Теперь найдём энергию уединённого проводника, имеющего заряд  $q$ , потенциал  $\varphi$  и ёмкость  $C$ . Поскольку потенциал проводника одинаков во всех точках, где имеется заряд, то из (9.7.9) получаем для энергии заряженного уединённого проводника следующее выражение:

$$W = \frac{1}{2} \varphi \int_V \rho dV = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}, \quad (9.7.10)$$

где учтена связь  $C = q / \varphi$ .

Найдём энергию конденсатора. Пусть  $q = q_+$  и  $\varphi_+$  – заряд и потенциал положительно заряженной обкладки конденсатора,  $(-q) = q_-$  и  $\varphi_-$  – заряд и потенциал отрицательно заряженной обкладки конденсатора, а  $U = (\varphi_+ - \varphi_-)$  – разность потенциалов (напряжение) на его обкладках. Вычисление энергии по формуле (9.7.8) по двум обкладкам даёт:

$$W = \frac{1}{2}(q_+\varphi_+ + q_-\varphi_-) = \frac{1}{2}(q\varphi_+ - q\varphi_-) = \frac{1}{2}q(\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{1}{2}qU, \quad (9.7.11)$$

где, как это следует из принятых обозначений,  $q = |q_i| = q_+ = -q_-$ .

Принимая во внимание, что для конденсатора  $C = q / U$ , из (9.7.11) находим:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (9.7.12)$$

Эти формулы определяют полную энергию конденсатора.

Легко убедиться, что при наличии диэлектрика формулы (9.7.10) и (9.7.12) не изменяют своего вида, поскольку величина диэлектрической проницаемости будет включаться в потенциал (разность потенциалов) и в электроёмкость проводника (конденсатора).

Полученные нами формулы (9.7.10) и (9.7.12) имеют общее свойство, состоящее в том, что выражают энергию рассматриваемой системы через заряды и потенциалы и связывающие эти величины ёмкости.

Для решения вопроса о локализации энергии системы заряженных тел необходимо указать, что является носителем этой энергии. Оказывается, энергию системы зарядов легко выразить через напряжённость электрического поля  $\vec{E}$ , создаваемого этими системами, тем самым показывая, что носителем энергии системы заряженных тел является созданное этими зарядами электрическое поле.

Действительно, рассмотрим сначала самый простой пример – плоский конденсатор с достаточно большими по площади пластинами. Причём будем вести речь об электрическом поле в центральной части конденсатора так, что искажениями поля у краёв этих пластин можно пренебречь. Подставляя выражение (9.6.11) для ёмкости плоского конденсатора  $C = \epsilon_0 \epsilon S / d$  в формулу (9.7.12) для энергии плоского конденсатора, получаем:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon SU^2}{2d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon U^2}{2d^2} Sd = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} \left[ \frac{U}{d} \right]^2 V = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V, \quad (9.7.13)$$

где учтено, что объём между обкладками определяется выражением  $V = Sd$  и что для модуля вектора напряжённости однородного электрического поля справедливо выражение  $E = U / d$ . Поделим обе части выражения (9.7.13) на объём  $V$  пространства, занятого электрическим полем, получаем величину  $w = W / V$ , называемую *объёмной плотностью энергии* электрического поля, определяемую формулой:

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{P}}{2}. \quad (9.7.14)$$

Причём последние два равенства в формуле (9.7.14) справедливы только для однородного изотропного диэлектрика, для которого имеет место равенство  $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$  и, как следствие,  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ . Первое слагаемое в последнем равенстве формулы (9.7.14) равно отношению работы по созда-

нию электрического поля с напряжённостью  $\vec{E}$  в элементе объёма  $dV$  к объёму  $dV$ , а второе – отношению работы по поляризации диэлектрика до поляризованности  $\vec{P}$  в элементе объёма  $dV$  к объёму  $dV$ . Указанные работы (по созданию электрического поля и по поляризации диэлектрика в объёме  $dV$ ) производят источники электрического поля – заряженные тела.

Теперь посмотрим, как используется введённое нами понятие *объёмной плотности энергии* электрического поля для вычисления энергии произвольного (неоднородного) электрического поля. Для этого всю область, занятую электрическим полем некоторой системы заряженных тел, разобьём на  $N$  малых участков объёмом  $\Delta V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , в пределах которых электрическое поле можно считать практически однородным, применим выражение (9.7.14) для каждого из этих участков, просуммируем по всем участкам и найдём предел последовательности полученных таким образом интегральных сумм при условии стремления мелкости разбиения к нулю, то есть:

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i w_i \Delta V_i = \int_V \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} dV = \int_V \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} dV. \quad (9.7.15)$$

Найденная нами формула для системы покоящихся зарядов даёт тот же результат, что и (9.7.10). При этом в рамках электростатики оба способа вычисления потенциальной энергии электрического поля – через взаимодействие зарядов (9.7.10) и через объёмную плотность энергии электрического поля (9.5.15), – *эквивалентны*. Однако в электродинамике верной остаётся только формула (9.7.15), и именно эту формулу мы будем использовать при вычислении энергии электромагнитных волн.



## Глава 10. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### 10.1. Сила тока. Плотность электрического тока

В настоящем разделе мы будем рассматривать поведение проводников электрического тока (называемых далее кратко – проводники) при наличии в них электрического поля. Мы уже отмечали, что в проводниках имеются *свободные* носители заряда, способные перемещаться по всему объёму проводника. Именно это обстоятельство приводит к появлению новых физических явлений, обусловленных перемещением свободных носителей заряда в проводниках под действием каким-либо образом созданного электрического поля. Носителями заряда в проводящей среде могут быть свободные электроны в металлах, ионы в электролитах или ионизированных газах либо другие частицы. Практически всегда мы будем рассматривать металлические проводники, если специально не оговорена другая ситуация. Отметим, что далее часто, если нет опасности возникновения недоразумения, мы будем для краткости говорить «носители заряда» вместо «*свободные* носители заряда».

При отсутствии электрического поля в проводниках свободные носители заряда совершают хаотическое тепловое движение, характеризующееся тем, что через любую воображаемую поверхность  $S$  за некоторый промежуток времени  $\Delta t$  (значительно превышающий среднее время между двумя соседними столкновениями электронов с узлами кристаллической решётки) проходит в обе стороны (по отношению к выделенной поверхности) в среднем одинаковое число носителей заряда. Иными словами, в отсутствие электрического поля в проводниках нет переноса носителей заряда.

Наличие электрического поля в проводниках приводит к возникновению *направленных потоков носителей заряда*, называемых *электрическим током*. За направление электрического тока принимают направление движения положительно заряженных носителей. Количественной мерой электрического тока в проводнике является *сила тока*. Различают среднюю силу тока и (мгновенную) силу тока, которые определяются аналогично соответствующим понятиям для скорости в механике, а именно:

средней силой тока  $\langle I \rangle$  в проводнике с площадью поперечного сечения  $S$  за время от  $t$  до  $(t + \Delta t)$  называют *отношение* заряда  $\Delta q$ , пере-

несённого за указанный промежуток времени через поперечное сечение проводника, к промежутку времени  $\Delta t$ , то есть:

$$\langle I \rangle = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (10.1.1)$$

Мгновенной, или просто *силой тока*  $I(t)$  в проводнике в момент времени  $t$ , называют предел средней силы тока в проводнике за время от  $t$  до  $(t + \Delta t)$  при условии  $\Delta t \rightarrow 0$ , то есть:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle I \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (10.1.2)$$

Если сила тока в проводнике от времени не зависит, то электрический ток называется *постоянным*, в противном случае электрический ток называется *переменным*.

Из определения силы тока  $I(t)$  следует формула для вычисления заряда, перенесённого через поперечное сечение проводника за время от  $t_1$  до  $t_2$ :

$$\Delta q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt. \quad (10.1.3)$$

В частности, для постоянного тока силой  $I_0$  имеем из (10.1.3):

$$\Delta q = I_0 \int_{t_1}^{t_2} dt = I_0 (t_2 - t_1) = I_0 \Delta t. \quad (10.1.4)$$

Единицей силы тока в СИ является А (ампер). Под силой тока 1 А понимают постоянный электрический ток, при прохождении которого по проводнику через его (проводника) поперечное сечение за 1 с переносится заряд 1 Кл.

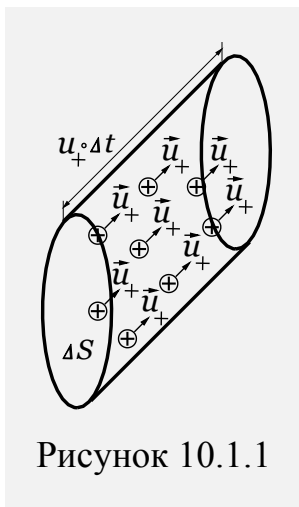


Рисунок 10.1.1

Для описания распределения электрического тока по объёму проводника вводится понятие вектора плотности тока  $\vec{j}$ .

Сначала рассмотрим случай носителей заряда одного типа, которые имеют положительный (для определённости) заряд  $q_+$ . Выделим внутри проводника элементарный объём, в пределах которого будем считать все носители заряда движущимися с одинаковой скоростью направленного движения  $\vec{u}_+$  (скорость хаотического теплового движения  $\vec{v}$  здесь не учитываем) (рисунок 10.1.1). Как видно из этого рисунка, выделенный объём имеет вид

косого цилиндра с образующей, параллельной вектору скорости  $\vec{u}_+$ . Введём обычным образом вектор площадки  $\Delta\vec{S} = \Delta S \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  – орт нормали к площадке  $\Delta S$ , образующий с вектором  $\vec{u}_+$  острый угол. Концентрацию носителей заряда обозначим  $n_{0+}$ . За время  $\Delta t$  через площадку  $\Delta S$  пройдут все носители заряда из объёма  $\Delta V = \Delta\vec{S} \cdot \vec{u}_+ \Delta t$ . Эти носители перенесут суммарный заряд

$$\Delta q_+ = q_+ n_{0+} \Delta V = q_+ n_{0+} \vec{u}_+ \cdot \Delta\vec{S} \Delta t. \quad (10.1.5)$$

Поделив на  $\Delta t$  и перейдя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , для силы тока через площадку  $\Delta S$  получим:

$$\Delta I_+ = q_+ n_{0+} \vec{u}_+ \cdot \Delta\vec{S} = \vec{j}_+ \cdot \Delta\vec{S}. \quad (10.1.6)$$

Введённая в (10.1.6) величина  $\vec{j}_+$  называется плотностью тока:

$$\vec{j}_+ = q_+ n_{0+} \vec{u}_+, \quad \vec{j}_+ \uparrow\uparrow \vec{u}_+, \text{ т. к. } q_+ n_{0+} > 0. \quad (10.1.7)$$

Из (10.1.7) видим, что плотность тока измеряется в СИ в А/м<sup>2</sup>.

Для определения силы тока через произвольную поверхность  $S$  поступаем, как обычно: разбиваем (мысленно) эту поверхность на малые участки площадью  $\Delta S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , для каждого из участков применяем (10.1.6), суммируем по всем участкам, получая интегральную сумму, и находим предел последовательности этих интегральных сумм при мелко-сти разбиения  $\lambda \rightarrow 0$ , который называют интегралом по поверхности 2-го рода (типа потока), то есть:

$$I_+ = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \vec{j}_{i+} \cdot \Delta\vec{S}_i = \int_S \vec{j}_+ \cdot d\vec{S}. \quad (10.1.8)$$

Повторяя аналогичные рассуждения для отрицательных носителей заряда, получим тот же самый результат:

$$I_- = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \vec{j}_{i-} \cdot \Delta\vec{S}_i = \int_S \vec{j}_- \cdot d\vec{S}. \quad (10.1.9)$$

Разница будет только в том, что в формуле для плотности тока направления векторов  $\vec{j}_-$  и  $\vec{u}_-$  будут противоположными:

$$\vec{j}_- = q_- n_{0-} \vec{u}_-, \quad \vec{j}_- \uparrow \downarrow \vec{u}_-, \quad \text{т. к. } q_- n_{0-} < 0. \quad (10.1.10)$$

Можно обобщить полученные результаты на ситуацию, когда в проводнике присутствуют носители заряда различных сортов (в том числе и знаков)  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ . Тогда, очевидно, что

$$I = I_\Sigma = \sum_\alpha I_\alpha = \sum_\alpha \int_S \vec{j}_\alpha \cdot d\vec{S} = \int_S (\sum_\alpha \vec{j}_\alpha) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (10.1.11)$$

где символом  $\vec{j}$  обозначена общая плотность тока, создаваемого носителями заряда всех сортов, то есть:

$$\vec{j} = \sum_\alpha \vec{j}_\alpha = \vec{j}_\alpha + \vec{j}_\beta + \dots + \vec{j}_\gamma = \sum_\alpha q_\alpha n_{0\alpha} \vec{u}_\alpha. \quad (10.1.12)$$

Отметим, что в том случае, когда существует разброс носителей тока по скоростям, под  $\vec{u}_\alpha$  следует понимать среднюю скорость направленного движения носителей заряда сорта  $\alpha$ .

Если поверхность  $S$  ориентирована перпендикулярно вектору плотности тока и плотность тока во всех точках поверхности одинакова, то из (10.1.11) получаем формулу:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS. \quad (10.1.13)$$

Из этой формулы можно найти модуль вектора плотности тока по известной силе тока в проводнике и площади его поперечного сечения:

$$j = \frac{I}{S}. \quad (10.1.14)$$

Разумеется, что формула (10.1.14) справедлива *только* при выполнении упомянутых выше условий, то есть: поверхность  $S$  ориентирована перпендикулярно вектору плотности тока и плотность тока во всех точках поверхности одинакова.

## 10.2. Классическая теория электропроводности.

### Закон Ома для однородного участка цепи

Рассмотрим однородный изотропный металлический проводник, внутри которого существует однородное электрическое поле с напряжённостью  $\vec{E}$ . Проводимость металлов будем объяснять в соответствии с

классической теорией электропроводности П. Друде (Пауль Карл Людвиг, нем., 1863–1906) на основе простой модели об идеальном электронном газе, состоящем из электронов проводимости и заполняющем пространство между узлами кристаллической решётки и находящемся в состоянии непрерывного теплового движения. Электрическое поле с напряжённостью  $\vec{E}$  приводит к появлению направленного медленного потока носителей заряда в сторону действия силы  $\vec{F} = -e\vec{E}$  ( $q = -e$ ,  $e$  – элементарный заряд) на фоне их быстрого хаотического теплового движения.

За время свободного пробега  $\langle \tau \rangle$  (среднее время движения свободного электрона между двумя последовательными столкновениями с узлами кристаллической решётки) свободный электрон, двигаясь с ускорением  $\vec{a} = q\vec{E} / m_e$  ( $m_e$  – масса электрона, ( $q = -e$ )), набирает максимальную скорость  $\vec{v}_{\text{макс}} = q\vec{E} \langle \tau \rangle / m_e$ . Согласно классической теории электропроводности металлов Друде, электрон в конце свободного пробега, сталкиваясь с узлом кристаллической решётки, отдаёт накопленную им кинетическую энергию, так что его скорость направленного движения станет равной нулю. Таким образом, средний модуль скорости направленного движения (дрейфа в электрическом поле) свободного электрона будет равен:

$$\langle v \rangle = (v_{\text{макс}} + 0) / 2 = \frac{eE \langle \tau \rangle}{2m_e}. \quad (10.2.1)$$

В теории Друде не учитывается распределение электронов по скоростям, поэтому среднее время свободного пробега  $\langle \tau \rangle$  определяется средней длиной свободного пробега  $\langle l \rangle$  и средним модулем скорости движения, равным  $\langle u \rangle + \langle v \rangle$ , где  $\langle u \rangle$  – средний модуль скорости теплового движения, причём  $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$ , поэтому

$$\langle \tau \rangle = \langle l \rangle / \langle u \rangle. \quad (10.2.2)$$

С учётом (10.2.2) для  $\langle v \rangle$  находим:

$$\langle v \rangle = \frac{eE \langle l \rangle}{2m_e \langle u \rangle}. \quad (10.2.3)$$

Следовательно, модуль вектора плотности тока, обусловленного дрейфом свободных электронов в электрическом поле, будет определяться выражением:

$$\vec{j} = en_0 \langle \vec{v} \rangle = \frac{e^2 n_0 \langle l \rangle}{2m_e \langle u \rangle} \vec{E}. \quad (10.2.4)$$

Поскольку проводник считается изотропным, то  $\vec{j} \parallel \vec{E}$ , и выражение для вектора плотности тока можно записать в виде:

$$\vec{j} = \frac{e^2 n_0 \langle l \rangle}{2m_e \langle u \rangle} \vec{E} = \sigma \vec{E}. \quad (10.2.5)$$

Формула (10.2.4) носит название закона Ома в дифференциальной форме. Слово «дифференциальная» здесь используется в смысле локальности, то есть в таких дифференциальных законах связываются некоторые физические величины *в некоторой точке пространства*. В последней формуле локально (в точке) связаны вектор плотности тока  $\vec{j}$  и вектор напряжённости электрического поля  $\vec{E}$ , а именно  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . В (10.2.5) введена новая величина  $\sigma$  – *удельная электропроводность* проводника, равная:

$$\sigma = \frac{e^2 n_0 \langle l \rangle}{2m_e \langle u \rangle}. \quad (10.2.6)$$

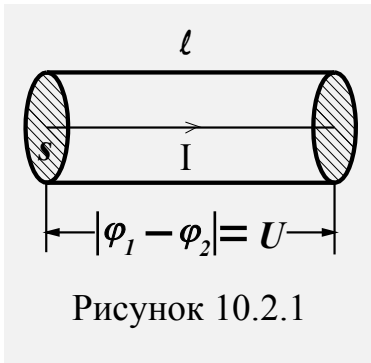


Рисунок 10.2.1

В СИ удельная электропроводность измеряется в  $1/(\text{Ом} \cdot \text{м}) = \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ , где *Ом* – единица измерения сопротивления, будет определена ниже.

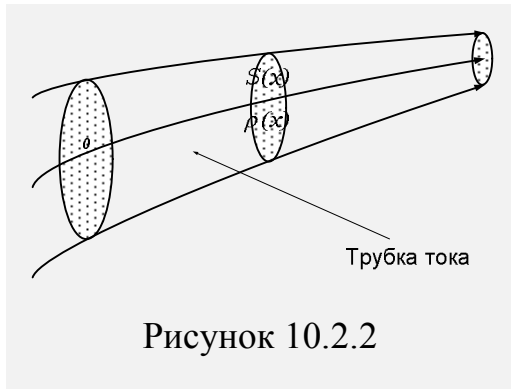
Теперь рассмотрим закон Ома в интегральной форме. Слово «интегральный» здесь используется в смысле связи интересующих нас физических величин, относящихся к некоторой *области*, а не *точке*.

Рассмотрим однородный изотропный проводник цилиндрической формы длиной  $l$  с постоянной площадью поперечного сечения  $S$ , к торцам которого приложено напряжение (модуль разности потенциалов)  $|\varphi_1 - \varphi_2| = U$ , за счёт чего вдоль этого проводника протекает постоянный электрический ток силой  $I$ . На рисунке 10.2.1 показан такой проводник, причём в данном случае ось цилиндра является силовой линией электрического тока. Под силовой линией электрического тока (как и для силовых линий других векторных полей) понимают такую линию, проходящую через рассматриваемую точку (точку наблюдения), что вектор плотности электрического тока находится на касательной к этой линии в точке

наблюдения. Электрическое поле внутри проводника будем считать однородным. Следовательно, в любой точке рассматриваемого проводника справедлива формула (10.2.5), то есть:

$$j = \sigma E. \quad (10.2.7)$$

С учётом однородности электрического поля из (10.2.7) получим:



$$I = jS = \sigma ES = \sigma US / l = U / R. \quad (10.2.8)$$

Выражение (10.2.8)  $I = U / R$  называется законом Ома в *интегральной форме для однородного участка цепи*. Слово «однородность» здесь используется в смысле *отсутствия* на данном участке цепи *источников тока* (о них ниже).

В (10.2.8) введена величина  $R$  – сопротивление проводника, определяемая для проводника цилиндрической формы соотношением:

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{S}. \quad (10.2.9)$$

Единица измерения сопротивления проводника в СИ – Ом. Проводник имеет сопротивление 1 Ом, если при разности потенциалов 1 В на его концах по нему протекает постоянный электрический ток силой 1 А.

Величина  $\rho = 1 / \sigma$  называется *удельным сопротивлением* проводника и измеряется в Ом·м.

Если сечение проводника  $S(l)$  и удельное сопротивление  $\rho(l)$  проводника изменяются с координатой  $l$  (рисунок 10.2.2), отсчитываемой вдоль проводника, вместо (10.2.9) используют другую формулу, которая получается следующим образом.

Проводник разбивают на малые участки  $\Delta l_i$ , в пределах которых проводник можно считать однородным с удельным сопротивлением  $\rho_i$  и имеющим форму прямого цилиндра с площадью сечения  $S_i$ , а модуль разности потенциалов на этом участке  $|\Delta \varphi_i|$ . Для каждого из участков имеет место равенство:

$$|\Delta \varphi_i| = U_i = I \rho_i \Delta l_i / S_i. \quad (10.2.10)$$

Учитывая, что на рассматриваемом участке цепи нет источников тока, на каждом из участков разбиения знаки  $\Delta\varphi_i$  будут одинаковыми, так что:

$$U = |\Delta\varphi| \approx \sum_i |\Delta\varphi_i| \stackrel{\text{следствие равенства знаков } \Delta\varphi_i}{=} \left| \sum \Delta\varphi_i \right|. \quad (10.2.11)$$

Совершая, как обычно, предельный переход в (10.2.11) при мелкости разбиения, стремящейся к нулю, получим:

$$U = I \int_0^l \frac{\rho(x)dx}{S(x)} = IR, \text{ где } R - \text{сопротивление проводника;} \quad (10.2.12)$$

$$R = \int_0^l \frac{\rho(x)dx}{S(x)}.$$

Последняя формула позволяет вычислять сопротивление проводников сложной геометрической формы. При этом переменная  $x$  – это расстояние от одного из концов проводника, отсчитываемое вдоль силовой линии электрического тока. Для прямого цилиндра из (10.1.12) находим  $R = (\rho / S) \int_0^l dx = \rho l / S$ , в полном соответствии с выражением (10.2.9).

### 10.3. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Электродвижущая сила

Для создания внутри проводника постоянно существующего электрического поля необходимо, чтобы на некотором участке цепи имелись силы не электростатического характера, осуществляющие разделение разноимённых электрических зарядов, в отличие от электростатических сил, которые стремятся соединить разноимённые электрические заряды. Силы, осуществляющие на некотором участке цепи разделение разноимённых электрических зарядов и поддерживающие таким образом наличие электрического поля в проводнике и, как следствие, наличие электрического тока в цепи, называются *сторонними силами*  $\vec{F}_{\text{стор}} \equiv \vec{F}^*$ , а участок цепи, на котором они действуют, называется источником тока. Сторонние силы могут иметь различную природу. Сторонние силы возникают, например, за счёт энергии химических реакций, энергии вращения ротора электрогенератора и т. д. Общее свойство сторонних сил в приведённых примерах состоит в том, что эти силы (сторонние) осуществляют пространственное



разделение разноимённых электрических зарядов и, таким образом, совершают работу против *электростатических* сил.

Проводящий элемент источника тока, на котором оказываются положительные заряды, называется положительным электродом (или положительным полюсом) источника, а элемент, на котором оказываются отрицательные заряды, – отрицательным электродом (полюсом). Если электроды источника тока соединены проводником или системой соединённых между собой проводников, в образовавшейся таким образом замкнутой цепи протекает ток, который поддерживается за счёт наличия в цепи источника тока (участка со сторонними силами). Участок электрической цепи, содержащий источник тока, называется *неоднородным*.

Обозначается источник тока на электрических схемах, как это показано на рисунке 10.3.1.

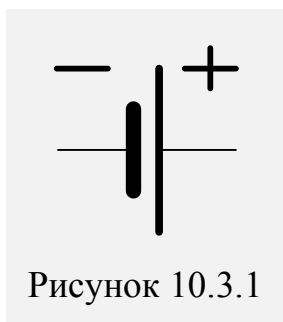


Рисунок 10.3.1

Как в случае электростатических (кулоновских) сил, вводят понятие напряжённости поля сторонних сил  $\vec{E}_{стор} \equiv \vec{E}^*$  как произведение вектора  $\vec{F}^*$  сторонней силы, действующей на заряд  $q$ , и скаляра  $(1/q)$ , или, с учётом замечания об операции деления вектора на скаляр, как отношение вектора  $\vec{F}^*$  к  $q$ , то есть:

$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}^*}{q}. \quad (10.3.1)$$

Для проводящей среды, в которой действуют и сторонние силы, и электростатические силы, *принимает как постулат (вполне резонный) – результирующая сила, действующая на заряды, равна сумме кулоновских и сторонних сил*.  $\vec{F}_\Sigma = \vec{F} + \vec{F}^*$ . Вследствие этого результирующее электрическое поле (уже не электростатическое!) будет иметь напряжённость  $\vec{E}_\Sigma = (\vec{F} + \vec{F}^*) / q = \vec{E} + \vec{E}^*$  (главное отличие  $\vec{E}_\Sigma$  от напряжённости электростатического поля в том, что циркуляция вектора  $\vec{E}_\Sigma$  вдоль замкнутого контура уже не равна 0!, то есть  $\oint_l \vec{E}_\Sigma \cdot d\vec{l} \neq 0$ ). Полагая, что вектор плотности тока, обусловленного действием всех сил, как и в случае однородного участка цепи, прямо пропорционален суммарной напряжённости кулоновских и сторонних сил  $\vec{E}_\Sigma$ , вместо (10.2.5) имеем:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*). \quad (10.3.2)$$

Это соотношение называется *законом Ома в дифференциальной форме для неоднородного участка цепи*. При отсутствии сторонних сил на некотором участке (10.3.2) переходит в уже известный закон Ома в дифференциальной форме для однородного участка цепи (10.2.5)

Вводят понятие электродвижущей силы (кратко – ЭДС) на участке цепи  $\mathcal{E}_{12}$  как отношение работы сторонних сил  $A_{12}^*$  на этом участке по перемещению на данном участке заряда  $q$  к величине перемещаемого заряда, то есть:

$$\mathcal{E}_{12} = A_{12}^* / q = \frac{1}{q} \int_{l_{12}} \vec{F}^* \cdot d\vec{l} = \frac{q}{q} \int_{l_{12}} \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = \int_{l_{12}} \vec{E}^* \cdot d\vec{l}. \quad (10.3.3)$$

Единица измерения ЭДС, как и разности потенциалов, 1 В (Вольт). То есть на участке 1–2 действует источник тока с ЭДС, равной 1 В, если при перемещении на данном участке заряда  $q$  величиной 1 Кл сторонние силы совершают работу 1 Дж. Поскольку работа сторонних сил на данном участке может быть и положительной, и отрицательной величиной, и перемещаемый заряд может иметь положительный, и отрицательный знак, то ЭДС так же может быть и положительной и отрицательной, причём её знак зависит ещё и от выбора направления движения по участку. Правило знаков для ЭДС такое: ЭДС на рассматриваемом участке цепи положительна, если направление обхода участка (выбор *условный!*) совпадает с направлением напряжённости поля сторонних сил в источнике тока (от катода к аноду, или от (–) к (+)), в противном случае ЭДС считается отрицательной.

Вводят также понятие *напряжения*  $U_{12}$  на рассматриваемом участке цепи как отношение суммарной работы и кулоновских сил и сторонних сил на этом участке по перемещению на данном участке заряда  $q$  к величине перемещаемого заряда, то есть:

$$\begin{aligned} U_{12} = A_{\Sigma} / q &= \frac{1}{q} \int_{l_{12}} (\vec{F}_k + \vec{F}^*) \cdot d\vec{l} = \int_{l_{12}} (\vec{E} + \vec{E}^*) \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{l_{12}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{l_{12}} \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}. \end{aligned} \quad (10.3.4)$$

Относительно понятия напряжения на участке цепи  $U_{12}$  следует сделать следующее замечание. Как следует из определения, в общем случае напряжение на участке цепи  $U_{12}$  не равно модулю разности потенциалов. Однако на однородном участке цепи ЭДС отсутствует и напряжение  $U_{12}$

на рассматриваемом участке цепи равно разности потенциалов на этом участке. Именно поэтому при формулировке закона Ома в интегральной форме для однородного участка цепи (10.2.8) разность потенциалов заменена напряжением, и это не является ошибкой.

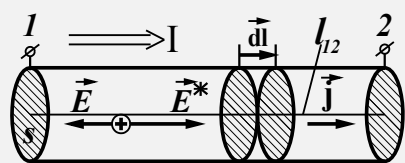


Рисунок 10.3.2

Для того чтобы установить связь введенных величин с силой тока на участке цепи, то есть чтобы записать закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме, обратимся сначала к формуле (10.3.2). Умножим скалярно обе части равенства (10.3.2) на

$d\vec{l}$  и проинтегрируем по силовой линии тока  $l_{12}$  на рассматриваемом участке (рисунок 10.3.2) и учтём соотношения  $j = I / S$ ,  $\rho = 1 / \sigma$  и  $d\vec{l} \parallel \vec{j}$ , так как по определению силовой линии тока вектор  $\vec{j}$  направлен касательной к силовой линии в точке наблюдения:

$$\frac{1}{\sigma} \vec{j} \cdot d\vec{l} = (\vec{E} \cdot d\vec{l} + \vec{E}^* \cdot d\vec{l}) \Rightarrow \int_{l_{12}} \frac{1}{\sigma} \vec{j} \cdot d\vec{l} = \int_{l_{12}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{l_{12}} \vec{E}^* \cdot d\vec{l}. \quad (10.3.5)$$

После несложных преобразований имеем:

$$I \int_{l_{12}} \frac{dl}{S\sigma} = \int_{l_{12}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{l_{12}} \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}, \quad (10.3.6)$$

или

$$I \int_{l_{12}} \frac{\rho dl}{S} = \int_{l_{12}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{l_{12}} \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}. \quad (10.3.7)$$

Учитывая определение сопротивления проводника (10.2.12), получаем окончательное выражение закона Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме:

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}, \text{ или } IR_{12} = U_{12}. \quad (10.3.8)$$

Иногда записывают последние формулы в несколько ином виде, которые также называют законом Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}}{R_{12}}, \text{ или } I = \frac{U_{12}}{R_{12}}. \quad (10.3.9)$$

Если начальная и конечная точки электрической цепи совпадают, то эта цепь называется *замкнутой*.

*Закон Ома для замкнутой цепи* получается из (10.3.9) с учётом того, что разность потенциалов между совпадающими точками равна нулю; кроме того, теряет смысл указывать индексы у ЭДС, так что имеем для данного случая:

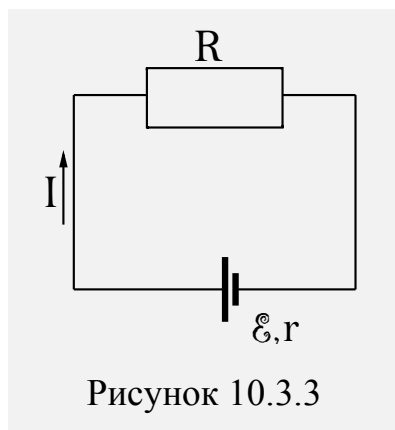


Рисунок 10.3.3

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (10.3.10)$$

В выражении для закона Ома для замкнутой цепи (10.3.10) введены также два новых обозначения для сопротивлений. Сделано это следующим образом. Замкнутую электрическую цепь делят (мысленно) на две части: *электрическую цепь внешнюю по отношению к источнику тока* и *сам источник тока*. Электрическое сопротивление внешней цепи обозначают  $R$ , а электрическое сопротивление источника тока обозначают  $r$ . Введённые величины и понятие замкнутой электрической цепи поясняются рисунком 10.3.3.

#### 10.4. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца

Прохождение электрического тока в проводнике связано с передачей кинетической энергии носителей заряда, полученной за счёт энергии источника тока, кристаллической решётке при неупругих столкновениях носителей заряда с этими узлами и переходом в энергию теплового движения узлов кристаллической решётки проводника, что проявляется в повышении температуры проводника. Это явление, называемое *рассеянием (диссипацией)* энергии носителей заряда, подтверждается опытом и находит практическое применение, например, в электронагревательных приборах.

Для того чтобы установить количественные соотношения, связанные с процессами преобразования энергии электрического тока в энергию теплового движения, рассмотрим проводник, к которому приложено напряжение  $U$  и по которому протекает постоянный электрический ток силой  $I$ . За время  $\Delta t$  через поперечное сечение проводника переносится заряд  $\Delta q = I\Delta t$  и, следовательно, электрическое поле (электрический ток) совершает работу  $\Delta A$ , равную увеличению кинетической энергии носителей заряда:

$$\Delta A = (IU)\Delta t = (I^2 R)\Delta t = (U^2 / R)\Delta t. \quad (10.4.1)$$

Как было отмечено выше, эта работа сил электрического поля передаётся узлам кристаллической решётки в виде энергии их теплового движения, то есть  $\Delta A = \Delta Q$ . Следовательно, мощность, рассеиваемая в проводнике при прохождении по нему электрического тока, равна:

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (10.4.2)$$

Формулы (10.4.2), выражающие мощность, рассеиваемую в проводнике при прохождении по нему постоянного электрического тока, через характеристики проводника и параметры электрического тока, называются *законом Джоуля – Ленца в интегральной форме*.

Кстати, эти формулы легко преобразовать и сделать применимыми для случая переменного тока.

Действительно, если электрический ток, протекающий в проводнике, изменяется во времени, то нужно сделать промежуток  $\Delta t$  настолько малым, чтобы в пределах этого промежутка электрический ток можно было считать постоянным. Сделав это, назовём соответствующий промежуток времени элементарным и, обозначив такой промежуток времени  $dt$ , для мощности, рассеиваемой в проводнике при прохождении по нему переменного электрического тока, получим:

$$P(t) = \frac{dQ}{dt} = I(t)U(t) = I^2(t)R = \frac{U^2(t)}{R}, \quad (10.4.3)$$

а формула (10.4.1) примет вид:

$$dA = (IU)dt = (I^2 R)dt = (U^2 / R)dt. \quad (10.4.4)$$

Следовательно, для нахождения количества тепла, выделяющегося в проводнике при прохождении по нему переменного электрического тока за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , получим формулы:

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} I(t)U(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} I^2(t)Rdt = \int_{t_1}^{t_2} (U^2(t) / R)dt. \quad (10.4.5)$$

Теперь перейдём к локальным (дифференциальным) энергетическим соотношениям при рассеивании энергии электрического тока в проводящей среде.

Для этого выберем в окрестности некоторой точки (точки наблюдения) элементарный объём в виде прямого цилиндра, образующая которого имеет длину  $dl$  и параллельна вектору плотности тока в рассматриваемой точке, а площадь поперечного сечения (оснований) равна  $dS$ , и рассмотрим промежуток времени  $dt$ , в течение которого по проводнику течёт электрический ток.

Для выбранного участка в этом случае закон Джоуля – Ленца (10.4.1) (с учётом того, что  $dA = dQ$ ) имеет вид:

$$dQ = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} (jdS)^2 dt = \rho j^2 dV dt, \quad (10.4.6)$$

где  $dV = dS dl$  – объём элементарного цилиндра.

Если назвать величину  $\dot{Q}_{y\partial} = \frac{(dQ / dt)}{dV}$  удельной тепловой мощностью электрического тока, то для неё из формулы (10.4.5) имеем выражение:

$$\dot{Q}_{y\partial} = \rho j^2, \quad (10.4.7)$$

которое называется *законом Джоуля – Ленца в дифференциальной форме*.

В случае, когда участок цепи однородный  $j = \sigma E$ , где  $E$  – модуль вектора напряжённости электростатического поля, из (10.4.7) имеем:

$$\dot{Q}_{y\partial} = \rho j^2 = \sigma E^2. \quad (10.4.8)$$

Необходимо также рассмотреть вопрос о рассеивании энергии электрического тока на неоднородных участках цепи, содержащих источники тока. В этом случае на носители заряда кроме электростатических сил действуют и сторонние силы. Энергия, приобретённая носителями заряда за счёт действия указанных сил, будет рассеиваться в неподвижном проводнике в энергию теплового движения узлов кристаллической решётки. Количественное соотношение находим из формулы (10.3.8) ( $IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}$ ), умножив обе стороны на силу постоянного тока  $I$ :

$$I^2 R_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}_{12}I. \quad (10.4.9)$$

Первое слагаемое в формуле (10.4.9) – мощность, рассеиваемая в проводнике на данном участке электростатическими силами, а второе – мощность, рассеиваемая в проводнике на данном участке сторонними силами. В

сумме оба этих слагаемых дают мощность постоянного электрического тока, выделяемую на неподвижном неоднородном участке проводника.

Если цепь замкнутая,  $\varphi_1 = \varphi_2$ , и мощность выделяемого в замкнутой электрической цепи джоулева тепла определяется выражением:

$$\dot{Q} = \mathcal{E}I, \quad (10.4.10)$$

то есть мощность выделяемого в цепи джоулева тепла равна мощности только сторонних сил. Роль же электростатического поля в этом случае сводится к перераспределению выделяющейся теплоты между различными участками замкнутой цепи.

В дифференциальной форме закон Джоуля – Ленца для неоднородной электрической цепи получим из закона Ома (3.3.2) для неоднородной электрической цепи  $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*)$ , скалярным умножением обеих частей на  $\vec{j}$  и, учитывая, что  $\rho = 1 / \sigma$  и  $\dot{Q} = \rho j^2$ :

$$\dot{Q} = \rho j^2 = \vec{j} \cdot (\vec{E} + \vec{E}^*). \quad (10.4.11)$$

## Глава 11. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВ

### 11.1. Магнитное поле. Вектор индукции магнитного поля

Опыт показывает, что сила взаимодействия носителей электрического заряда зависит не только от величин и знаков зарядов и их взаимного расположения, но и от того, покоятся эти носители заряда или движутся. Взаимодействие неподвижных носителей заряда описывается законом Кулона и называется электростатическим. Взаимодействие, обусловленное движением носителей заряда, и поле, передающее это взаимодействие, называется магнитным. Опыты, которые провели с 1819 года по 1832 год Ганс Христиан Эрстед (дат., 1777–1851), Жан-Батист Би́о (фр., 1774–1862), Феликс Савар (фр., 1791–1841), Андре́-Мари́ Ампе́р (фр., 1775–1836) и Майкл Фараде́й (англ., 1791–1867), установили связь магнитных явлений с электрическим током и подтвердили, что магнитное поле порождается движущимися зарядами и действует только на движущиеся заряды.

До проведения указанных опытов под магнетизмом подразумевали совокупность явлений, связанных со свойствами природных магнитов (железорудных минералов) и земного магнитного поля, действие которого на магниты было обнаружено еще в древности и позволило создать компас. В опытах названных ученых было установлено, что точно такое же силовое поле (магнитное поле), как поле природных магнитов или земное, создается электрическими токами. В этих же опытах было установлено, что это поле действует не только на природные магниты, но и на электрические токи, например, разворачивает рамку с протекающим по ней электрическим током.

В настоящем разделе мы будем рассматривать стационарные магнитные поля, то есть магнитные поля, создаваемые стационарными электрическими токами, протекающими по проводникам. В этом случае магнитное и электрическое поля можно считать не связанными друг с другом и изучать их свойства отдельно. В ситуациях, когда нет опасности неправильного понимания, слово *стационарное* будем опускать и говорить просто *магнитное поле*. Кроме того, будем считать, что средой, в которой находятся проводники с электрическим током, является вакуум, если специально не оговорено иное условие.

Отметим также, что по современным представлениям электрическое и магнитное поля являются компонентами единого физического объекта —



электромагнитного поля. При этом деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное поля имеет относительный характер и зависит от выбора системы отсчёта.

Это означает, что сила  $\vec{F}$ , действующая на точечный заряд  $q$ , находящийся в некоторой точке пространства из области, где имеется электромагнитное поле, состоит из электрической силы  $\vec{F}_e$ , зависящей только от положения и от величины данного заряда, и магнитной силы  $\vec{F}_m$ , которая зависит ещё и от скорости движения заряда. Причём, как отмечено выше, это разделение силы на две составляющие зависит от выбора системы отсчёта. Далее мы будем предполагать, что выбор системы отсчёта сделан и соотношение между указанными компонентами силы, действующей на заряд, зафиксировано.

Пусть в некоторой области пространства имеется магнитное поле, созданное стационарными токами. Поскольку магнитное поле силовое, то описывающая это поле характеристика должна быть вектором и должна определять абсолютную величину и направление вектора силы  $\vec{F}_m$ , действующей со стороны магнитного поля на движущийся электрический заряд  $q$ . Вектор, описывающий магнитное поле, называют **вектором индукции магнитного поля** или **вектором магнитной индукции** и обозначают  $\vec{B}$ . Однако ввести вектор  $\vec{B}$  по аналогии с вектором напряжённости электрического поля не удастся, поскольку сила, действующая со стороны магнитного поля на движущийся электрический заряд  $q$ , зависит не только от абсолютной величины и знака этого заряда, но и абсолютной величины и направления вектора скорости  $\vec{v}$  его движения.

Представим себе, что мы можем из некоторого устройства (нечто вроде электронной пушки) в рассматриваемых точках пространства «выпускать» различные электрические заряды с различными скоростями движения. Опыт показывает, что сила  $\vec{F}_m$ , действующая со стороны магнитного поля на движущийся электрический заряд  $q$ , обладает следующими свойствами:

1) в любой точке пространства, где создано магнитное поле, сила  $\vec{F}_m$  пропорциональна абсолютным величинам заряда  $|q|$  и скорости его движения  $\vec{v}$ . Изменение знака заряда  $q$  или направления  $\vec{v}$  (но не модулей этих величин) приводит к изменению направления силы  $\vec{F}_m$ ;

2) в любой точке пространства, где создано магнитное поле, сила  $\vec{F}_m$  перпендикулярна вектору скорости движения  $\vec{v}$  заряда  $q$ ;

3) в любой точке пространства, где создано магнитное поле, имеется единственная прямая линия  $l$ , определяемая расположением и величинами токов – источников магнитного поля, такая, что если вектор скорости  $\vec{v}$  заряда  $q$  ей параллелен (то есть если  $\vec{v} || l$ ), сила  $\vec{F}_m$  будет равна  $\vec{0}$ . Скорость заряда, параллельную указанной прямой (она *разная в разных точках пространства!*), обозначим  $\vec{v}_{||}$ . Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  в рассматриваемой точке пространства считают *параллельным* указанной прямой  $l$  (выбор одного из двух возможных направлений вектора  $\vec{B}$ , уточняется ниже);

4) если вектор скорости  $\vec{v}$  заряда  $q$  перпендикулярен вектору магнитной индукции  $\vec{B}$  (прямой  $l$ ), то его обозначают  $\vec{v}_{\perp}$ , а модуль силы  $F_m$  при этом оказывается максимальным (при фиксированных модулях  $|q|$  и  $v$ ). Обозначим максимальный модуль силы  $F_{m,max}$ .

Единственной комбинацией из перечисленных выше параметров, характеризующих магнитное поле и движущуюся в этом поле заряженную частицу, является формула:

$$\vec{F}_m = k \cdot q(\vec{v} \times \vec{B}), \quad (11.1.1)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности. В СИ этот коэффициент выбирается безразмерным и равным 1.

Легко убедиться, что все свойства силы  $\vec{F}_m$ , перечисленные в четырёх перечисленных выше пунктах, вытекают из формулы (11.1.1).

Формула (11.1.1) позволяет вычислить силу  $\vec{F}_m$  по заданным характеристикам движущегося заряда и магнитного поля. Важно и то, что эта формула может быть использована в качестве определения вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  (по найденным из опыта характеристикам движущегося заряда и силы  $\vec{F}_m$ ).

Действительно, путём варьирования направления вектора скорости  $\vec{v}$  заряда  $q$  в рассматриваемой точке пространства из опыта определяем положение линии  $l$ , а следовательно, и направление вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ . Кроме того, из (11.1.1) следует, что для положительного заряда ( $q > 0$ ) векторы  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{F}_m$  образуют правую тройку, что поз-

воляет окончательно уточнить направление вектора  $\vec{B}$  из двух возможных направлений вдоль линии  $l$ . Для упрощения запоминания взаимного расположения векторов  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{F}_m$  используют известное из школьного курса физики правило «левой руки» (для случая  $q > 0$ ). После определения направления вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  находим длину этого вектора. Для этого выбираем направление вектора скорости  $\vec{v}$  заряда  $q$  перпендикулярным направлением найденной линии  $l$  и обозначим этот вектор скорости  $\vec{v}_\perp$ . Таким образом, имеем:

$$\vec{v}_\perp \perp l \Rightarrow \vec{v}_\perp \perp \vec{B}. \quad (11.1.2)$$

Формула (11.1.1) с учётом выбора вектора скорости примет вид:

$$\vec{F}_{m,\max} = q(\vec{v}_\perp \times \vec{B}). \quad (11.1.3)$$

Направление и модуль вектора  $\vec{F}_{m,\max}$  определяются экспериментально.

Поскольку в выражении (11.1.3) определены все величины, кроме вектора  $\vec{B}$ , то её теперь можно использовать для нахождения этого вектора.

Действительно, после векторного умножения слева обеих частей равенства (11.1.3) на вектор  $\vec{v}_\perp$  получаем формулу:

$$\vec{v}_\perp \times \vec{F}_{m,\max} = q\vec{v}_\perp \times (\vec{v}_\perp \times \vec{B}). \quad (11.1.4)$$

Из векторной алгебры известно равенство:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (11.1.5)$$

С учётом равенства (11.1.5) из (11.1.4) получаем:

$$\vec{v}_\perp \times \vec{F}_{m,\max} = q[\vec{v}_\perp (\vec{B} \cdot \vec{v}_\perp) - \vec{B}v_\perp^2] = -qv_\perp^2 \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_{m,\max} \times \vec{v}_\perp = qv_\perp^2 \vec{B}. \quad (11.1.6)$$

В формуле (11.1.6) учтено, что скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно 0, то есть  $(\vec{B} \cdot \vec{v}_\perp) = 0$ .

После деления обеих частей равенства (11.1.6) на  $(qv_\perp^2)$  находим выражение, которое определяет вектор индукции магнитного поля:

$$\vec{B} = (\vec{F}_{m,\max} \times \vec{v}_\perp) / (qv_\perp^2). \quad (11.1.7)$$

Легко убедиться, что полученное выражение однозначно определяет вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  и удовлетворяет всем экспериментальным фактам, упомянутым в приведённых выше четырёх пунктах.

Единица измерения вектора индукции магнитного поля в СИ – 1 Тл (Тесла). Из формулы (11.1.1) следует, что вектор индукции магнитного поля имеет модуль, равный 1 Тл, если на точечный заряд величиной 1 Кл, движущийся со скоростью 1 м/с перпендикулярно вектору индукции магнитного поля, действует сила 1 Н.

Для векторного поля  $\vec{B}$ , как и для всех других векторных полей, применимо понятие силовой линии. Под силовой линией вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  (как и для силовых линий других векторных полей) понимают такую линию, проходящую через рассматриваемую точку (точку наблюдения), что вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  находится на касательной к этой линии в точке наблюдения. При этом начало вектора  $\vec{B}$  находится в точке наблюдения, а его направление указывается при помощи стрелки на силовой линии. Длина вектора  $\vec{B}$  изображается пропорциональной густоте силовых линий в рассматриваемой точке.

Магнитное поле называется однородным в рассматриваемой области пространства, если во всех точках этой области пространства вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  имеет одинаковую длину и одинаковое направление.

Опыт показывает, что силовые линии магнитного поля всегда замкнуты. Это означает, что отсутствуют «магнитные заряды», на которых могли бы начинаться и заканчиваться силовые линии. Это важнейшее свойство не только стационарного магнитного поля, но и переменных во времени магнитных полей.

Вернёмся теперь к вопросу о полной силе, действующей на движущийся заряд.

Согласно принципу относительности все инерциальные системы равноправны и результирующая сила, действующая на заряд со стороны поля, не должна зависеть от выбора инерциальной системы отсчёта. Однако в формуле (11.1.1) переход из одной инерциальной системы отсчёта к другой инерциальной системе отсчёта приведёт к изменению вектора  $\vec{v}$  и, следовательно, к изменению силы, действующей на движущийся заряд. Это означает, что указанная формула не может служить определением полной силы, действующей на движущийся заряд.

Для того чтобы разрешить указанное противоречие, вспомним, что полная сила, действующая на движущийся заряд, должна содержать две составляющих: электрическую  $\vec{F}_э = q\vec{E}$  и магнитную  $\vec{F}_м = q(\vec{v} \times \vec{B})$ , которая зависит от скорости движения заряда. Таким образом, вместо выражения (11.1.1) для полной силы, действующей на движущийся заряд, называемой **силой Лоренца**  $\vec{F}_л$ , имеем:

$$\vec{F}_л = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (11.1.8)$$

Эта формула была введена Лóренцем (Хéндрик Áнтон Лóренц, нидерл., 1853–1928) и называется формулой **Лóренца**.

При переходе из одной инерциальной системы отсчёта к другой инерциальной системе отсчёта изменение магнитной составляющей силы Лоренца  $\vec{F}_м = q(\vec{v} \times \vec{B})$  компенсируется появлением дополнительного электрического поля  $\vec{E}'$ , приводящего к неизменности полной силы, действующей на движущийся заряд. В частности, в системе отсчёта, связанной с зарядом, движущимся со скоростью  $\vec{v}$ , появляется дополнительное электрическое поле  $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}$ , так что в целом сила Лоренца остаётся неизменной при указанной смене системы отсчёта. Как и было отмечено ранее, разделение силы Лоренца на электрическую и магнитную составляющие зависит от выбора системы отсчёта. Без указания системы отсчёта такое разделение не имеет смысла. Мы уже отмечали, что при обсуждении магнитной силы  $\vec{F}_м = q(\vec{v} \times \vec{B})$  система отсчёта зафиксирована.

В заключение отметим, что поскольку магнитная составляющая силы Лоренца всегда перпендикулярна вектору скорости заряда, то и работы по перемещению заряда в магнитном поле эта сила не совершает ( $dA = \vec{F}_м \cdot d\vec{l} = \vec{F}_м \cdot \vec{v}dt = 0$ ). Отсюда следует вывод о том, что в постоянном магнитном поле кинетическая энергия движущейся частицы не изменяется, несмотря на изменение (по направлению) вектора скорости этой частицы.

## 11.2. Магнитное поле равномерно движущегося заряда

Как уже было отмечено, опыты Эрстеда, Био и Савара показали, что движущиеся заряды (электрические токи) создают в окружающем пространстве магнитное поле.

Пьер Симон Лаплас (фр., 1749–1827) обобщил и сформулировал количественные закономерности этих опытов в виде формулы, называемой законом Био – Савара – Лапласа, которая определяет магнитную индукцию, создаваемую элементом тока  $Id\vec{l}$ , в точке наблюдения.

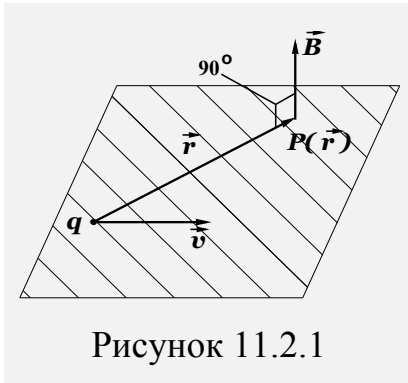


Рисунок 11.2.1

К вопросу о магнитном поле, создаваемом проводником с электрическим током, мы ещё вернёмся, а сейчас посмотрим на результаты данных опыта с точки зрения магнитного поля, создаваемого отдельным движущимся зарядом. С этой точки зрения, результаты отмеченных и проведённых позднее другими учёными опытов позволяют сделать вывод о том, что заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$ , создаёт в точке наблюдения  $P(\vec{r})$  (см. рисунок 11.2.1) магнитную индукцию  $\vec{B}$ , определяемую выражением:

$$\vec{B} = k \frac{q(\vec{v} \times \vec{r})}{r^3}. \quad (11.2.1)$$

Радиус-вектор  $\vec{r}$  точки наблюдения, как это видно из рисунка 11.2.1, начинается в точке нахождения заряда и перемещается вместе с ним, а заканчивается в точке наблюдения  $P(\vec{r})$ .

Коэффициент пропорциональности в формуле (11.2.1) должен выбираться так, чтобы размерности левой и правой её частей совпадали, а его количественное значение определяется из опыта. С учётом данного замечания и опытных данных найдено, что в СИ:

$$k = 10^{-7} \text{ Гн/м}. \quad (11.2.2)$$

В формуле (11.2.2) Гн – единица индуктивности, определение которой будет дано позднее. Чаще всего рассматриваемый коэффициент пропорциональности записывают в *нормализованной* форме, а именно:

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Гн/м}, \quad (11.2.3)$$

где величина  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  называется магнитной постоянной.

Запишем формулу (11.2.1) в несколько ином виде, с учётом, что движущийся заряд  $q$  кроме магнитного поля создаёт в точке наблюдения также и электрическое поле, вектор напряжённости которого определяется формулой:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3}. \quad (11.2.4)$$

Следовательно, для магнитной индукции из формул (11.2.1), (11.2.3) и (11.2.4) получаем:

$$\vec{B} = \epsilon_0\mu_0(\vec{v} \times \vec{E}) = (1/c^2)(\vec{v} \times \vec{E}). \quad (11.2.5)$$

В формуле (11.2.5) введена величина  $c = \sqrt{(1/\epsilon_0\mu_0)}$ , которая имеет размерность скорости, причём её вычисление, исходя из значений  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$ , даёт результат:

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (11.2.6)$$

Видим, что введённая нами постоянная  $c = \sqrt{(1/\epsilon_0\mu_0)}$  равна скорости света в вакууме. Дальнейшее изучение электромагнитных волн покажет, что это совпадение не случайное и имеет конкретное физическое содержание.

### 11.3. Закон Био – Савара – Лапласа

Мы уже отметили, что впервые опыты Эрстеда, Био́ и Савара экспериментально подтвердили факт создания магнитного поля электрическими токами.

Покажем, что результаты этих опытов и количественная формулировка Лапласа закономерностей этих опытов легко получаются, как следствие из введённой нами формулы для вектора индукции магнитного поля, создаваемого зарядом  $q$ , движущимся со скоростью  $\vec{v}$ .

Сначала сформулируем **принцип суперпозиции магнитных полей**. Пусть имеется  $N$  носителей заряда  $q_i$ ,  $i=1,2,...,N$ , движущихся со скоростями  $\vec{v}_i$ ,  $i=1,2,...,N$ , каждый из которых создаёт в точке наблюдения поле с магнитной индукцией  $\vec{B}_i$ ,  $i=1,2,...,N$ . Тогда *вектор индукции результирующего магнитного поля равен сумме векторов индукции магнитных полей, создаваемых каждым из указанных носителей заряда в отсутствие других*, то есть

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i(\vec{v}_i \times \vec{r}_i)}{r_i^3}. \quad (11.3.1)$$

Как и в случае электрических полей, принцип суперпозиции магнитных полей является очень мощным расчётным инструментом.

Теперь рассмотрим проводник, по которому протекает электрический ток.

Выделим внутри этого проводника элементарный объём  $\Delta V$ , содержащий  $N$  носителей заряда, в виде прямого кругового цилиндра длиной  $\Delta l$ , образующая которого параллельна векторам скорости  $\vec{v}_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , носителей заряда  $q_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . Скорости этих носителей заряда и величины зарядов в пределах элементарного объёма будем считать одинаковыми, то есть  $q_i = q$ ,  $i=1,2,\dots,N$ ;  $\vec{v}_i = \vec{v}$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . Будем **рассматривать точки наблюдения, находящиеся достаточно далеко** от выделенного элемента объёма, так, чтобы его длину  $\Delta l$  и диаметр основания  $d$  можно считать ма-

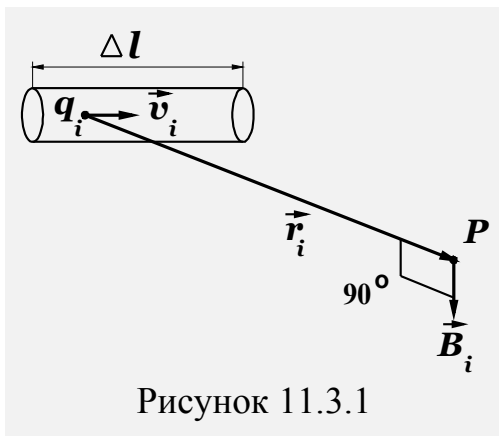


Рисунок 11.3.1

лыми по сравнению с расстоянием до точки наблюдения (рисунок 11.3.1), то есть будем считать  $\Delta l / r_i \ll 1$ ;  $d / r_i \ll 1$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . В этом случае радиус-векторы  $\vec{r}_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , зарядов внутри элементарного объёма можно считать одинаковыми, то есть  $\vec{r}_i = \vec{r}$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . С учётом отмеченных условий находим, что векторы индукции магнитных полей, создаваемых

каждым из носителей заряда, находящихся внутри данного объёма, будут также одинаковыми и равными одной и той же величине, то есть  $\vec{B}_i = \vec{B}_1$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , определяемой выражением:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q (\vec{v} \times \vec{r})}{r^3}. \quad (11.3.2)$$

В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей для вектора индукции результирующего магнитного поля, создаваемого всеми движущимися зарядами внутри объёма  $\Delta V$ , получим:

$$\Delta \vec{B} = N \vec{B}_1 = n \Delta V \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(qn\vec{v} \times \vec{r})}{r^3} \Delta V = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\vec{j} \Delta V) \times \vec{r}}{r^3}, \quad (11.3.3)$$

где произведение  $(\vec{j} \Delta V)$  называется *элементом тока*.

Полученное выражение называется **законом Био – Савара – Лапласа** и определяет индукцию магнитного поля, создаваемого элементом тока



$(\vec{j}\Delta V)$ . Для нахождения вектора индукции магнитного поля, создаваемого направленно движущимися носителями заряда во всём объёме проводника, необходимо разделить (мысленно) объём проводника на элементарные объёмы, для каждого из них воспользоваться формулой (11.3.3), сложить векторы индукции магнитных полей от всех элементарных объёмов и выполнить предельный переход при мелкости разбиения, стремящейся к нулю. В итоге получим выражение для искомого вектора индукции магнитного поля:

$$\vec{B} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_k \Delta \vec{B}_k = \int_V d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV; \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\vec{j}dV) \times \vec{r}}{r^3}. \quad (11.3.4)$$

Подынтегральное выражение формулы (11.3.4) выписано отдельно, чтобы показать в явном виде магнитную индукцию  $d\vec{B}$ , создаваемую элементом тока  $(\vec{j}dV)$ .

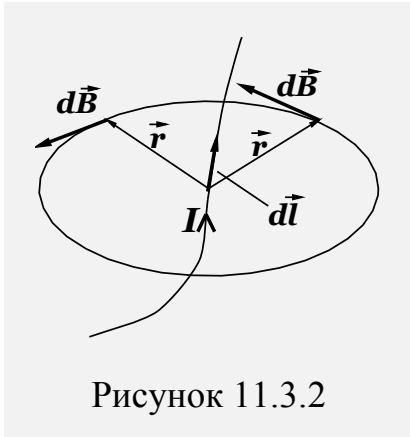


Рисунок 11.3.2

Если рассматривается магнитное поле, создаваемое длинным и тонким проводником ( $D/l \ll 1$ ,  $D$  – диаметр проводника,  $l$  – длина проводника), по которому протекает постоянный электрический ток силой  $I$ , то элемент тока можно записать в ином, более удобном для данного случая виде (рисунок 11.3.2). В рассматриваемой ситуации элементы объёма выбирают в виде цилиндрического участка проводника длиной  $dl$ . При этом для элемента тока получается следующее выражение:

$$\vec{j}dV = ((I/S_{\perp})\vec{\tau}) \cdot (S_{\perp}dl) = I(\vec{\tau}dl) = Id\vec{l}, \quad (11.3.5)$$

в котором через  $\vec{\tau}$  обозначен орт касательной к силовой линии тока (ввиду тонкости проводника можно его считать ортом касательной к проводнику),  $S_{\perp}$  – площадь поперечного сечения проводника.

С учётом полученного вида элемента тока для вектора индукции магнитного поля, создаваемого элементом тока  $(Id\vec{l})$ , имеем выражение:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (11.3.6)$$

которое называется *законом Био – Савара – Лапласа* для тонкого проводника с током.

Для вектора индукции магнитного поля, создаваемого длинным и тонким проводником, по которому протекает постоянный электрический ток силой  $I$ , вместо формулы (11.3.4) используем принцип суперпозиции магнитных полей и получим:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (11.3.7)$$

Полученные выражения используют для расчётов магнитных полей, создаваемых проводниками с электрическим током.

#### 11.4. Магнитное поле прямолинейного проводника и кругового витка с током

В качестве примеров применения закона Био – Савара – Лапласа для расчётов магнитного поля рассмотрим два простых, но очень важных с практической точки зрения, случая.

1. Магнитное поле тонкого прямолинейного проводника с постоянным электрическим током силой  $I$ .

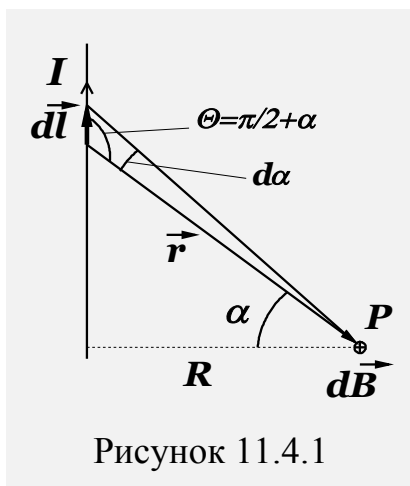


Рисунок 11.4.1

В данном случае для расчётов магнитного поля воспользуемся формулой (11.3.6) и соображениями симметрии. В частности, очевидно, что магнитное поле будет обладать круговой симметрией. Рассмотрим произвольную плоскость, проходящую через проводник. Во всех таких плоскостях картина должна быть одинаковой из соображений симметрии. Поэтому ограничимся расчётом только для одной такой плоскости. Выделим произвольный элемент длины проводника  $d\vec{l}$ , как

это показано на рисунке 11.4.1. Из определения векторного произведения векторов следует, что вектор индукции магнитного поля  $d\vec{B}$ , создаваемый элементом тока  $I d\vec{l}$ , будет перпендикулярен плоскости, в которой находятся векторы  $I d\vec{l}$  и радиус-вектор точки наблюдения  $\vec{r}$ , то есть вектор  $d\vec{B}$  перпендикулярен плоскости, которую мы выбрали выше и направлен за плоскость (правило правого винта). Легко заметить, что все другие элементы тока создают в рассматриваемой точке наблюдения векторы индукции магнитного поля одинакового направления.

В этом случае длина результирующего вектора индукции магнитного поля может быть найдена по формуле:

$$B = |\vec{B}| = \int_l dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left| \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{|d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^3}. \quad (11.4.1)$$

Для вычисления интеграла в формуле (11.4.1) преобразуем подынтегральное выражение.

$$|d\vec{l} \times \vec{r}| = dl \cdot r \cdot \sin\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad |d\vec{l} \times \vec{r}| = dl \cdot r \cdot \cos\alpha, \quad dl \cdot \cos\alpha = r \cdot d\alpha; \quad (11.4.2)$$

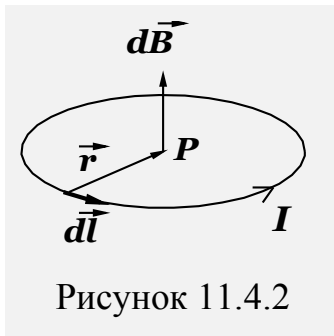
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r^2 \cdot d\alpha}{r^3}, \quad \frac{R}{r} = \cos\alpha, \quad \frac{1}{r} = \frac{\cos\alpha}{R}, \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos\alpha \cdot d\alpha. \quad (11.4.3)$$

Подставляем (11.4.2) и (11.4.3) в (11.4.1) и находим окончательный результат:

$$B = \int_l dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin\alpha \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}. \quad (11.4.4)$$

2. Магнитное поле в центре кругового витка с постоянным электрическим током силой  $I$ .

Определение направления и вычисление длины вектора индукции магнитного поля, создаваемого круговым витком с постоянным электрическим током силой  $I$ , в произвольной точке наталкивается на значительные технические сложности (не принципиального характера), и поэтому мы рассмотрим самую простую ситуацию для данного случая, а именно: найдём направление и вычислим длину вектора индукции магнитного поля в центре кругового витка.



Для придания наглядности процессу определения направления и вычислений длины вектора индукции магнитного поля в центре кругового витка радиусом  $R$  с постоянным электрическим током изобразим рассматриваемый проводник на рисунке 11.4.2. Вектор индукции магнитного поля в центре кругового витка  $d\vec{B}$ , создаваемый произвольным элементом тока  $I d\vec{l}$ , будет перпендикулярен плоскости витка и направлен вверх (правило правого винта).

Учтём также простые соотношения между величинами, указанными на рисунке 11.4.2, а именно:  $|\vec{r}| = r = R$ ,  $d\vec{l} \perp \vec{r}$ ,  $dl = R d\alpha$ . С учётом этих соотношений для длины вектора индукции магнитного поля в центре кругового витка  $dB$  находим:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\vec{l} \times \vec{r}|}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\alpha}{R}. \quad (11.4.5)$$

Интегрируем по всему витку ( $\alpha$  изменяется от 0 до  $2\pi$ ) и находим:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{R}. \quad (11.4.6)$$

Приведённые примеры определения направления и вычислений длины вектора индукции магнитного поля показывают, что, несмотря на отсутствие принципиальных сложностей при применении закона Био – Савара – Лапласа, получить аналитические выражения (в виде формул) для конкретных геометрий проводников, особенно несимметричных, не удаётся из-за возникающих технических сложностей. Однако, как уже отмечалось выше, эти сложности не принципиальные, и в таких ситуациях проводят расчёты численными методами на современных электронно-вычислительных машинах (компьютерах), то есть определяют длины векторов  $\vec{B}$  в различных точках и по полученным данным строят таблицы и графики.

### 11.5. Закон Ампера. Сила Ампера

Пусть в некоторой области пространства  $V$  имеется магнитное поле, то есть в каждой точке  $P(\vec{r}) \in V$  определён вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$ . Поместим в эту область проводник, по которому протекает постоянный электрический ток силой  $I$ . Поскольку электрический ток в проводнике обусловлен направленным движением носителей заряда в нём, то на каждый из этих носителей заряда, в соответствии с формулой Лоренца, будет действовать магнитная сила  $\vec{F}_m$ . Действие этой силы передаётся проводнику, в результате чего магнитное поле действует на проводник с током с некоторой силой, которую называют **силой Ампера**.

Для нахождения силы Ампера выделим элемент объёма  $dV$  проводника, в котором находится  $N$  носителей заряда. Концентрация носителей заряда  $n$  и их число в элементе проводника связаны простым соотношением  $N = n \cdot dV$ . Скорости носителей заряда считаем одинаковыми у всех носителей заряда, то есть  $\vec{v}_i = \vec{v}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Силы  $\vec{F}_m$ , действующие на каждый из носителей заряда, будут одинаковыми и, следовательно, результирующая сила  $d\vec{F}_A$  – сила Ампера, действующая на рассматриваемый элемент проводника, определяется выражением:

$$d\vec{F}_A = N\vec{F}_m = ndV \cdot q(\vec{v} \times \vec{B}) = (\vec{j} \times \vec{B})dV. \quad (11.5.1)$$

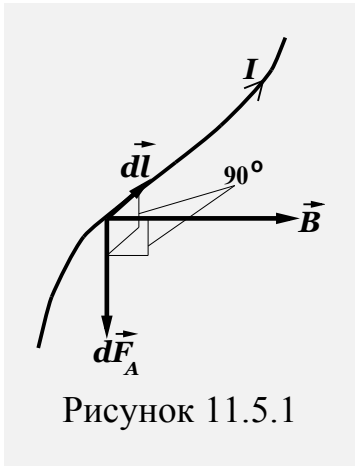


Рисунок 11.5.1

Если проводник тонкий, то элемент объёма  $dV$  связан с элементом длины  $dl$  проводника соотношением  $dV = S_{\perp} \cdot dl$ , где  $S_{\perp}$  – площадь поперечного сечения проводника. Тогда для силы Ампера, действующей на элемент длины тонкого проводника с электрическим током, находим формулу:

$$d\vec{F}_A = ((\vec{j}dV) \times \vec{B}) = (I d\vec{l} \times \vec{B}) = I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B}). \quad (11.5.2)$$

Для вычисления силы, действующей на весь проводник, по которому протекает электрический ток, нужно, в зависимости от вида проводника, воспользоваться формулами:

а) для «толстого» проводника:

$$\vec{F}_A = \int_V (\vec{j} \times \vec{B})dV; \quad (11.5.3)$$

б) для «тонкого» проводника:

$$\vec{F}_A = I \int_l (d\vec{l} \times \vec{B}). \quad (11.5.4)$$

Направление силы Ампера в формулах (11.5.1) и (11.5.2) в соответствии определением векторного произведения (рисунок 11.5.1). Для облегчения запоминания иногда используют правило левой руки.

## 11.6. Взаимодействие двух прямолинейных проводников

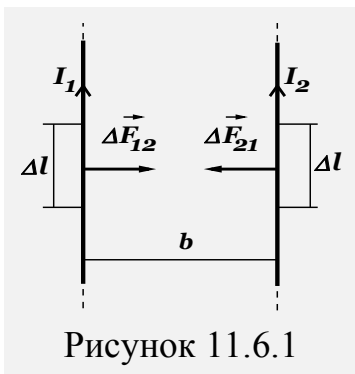


Рисунок 11.6.1

В качестве примера рассмотрим задачу о взаимодействии двух прямолинейных и параллельных друг другу проводников (проводник 1 и проводник 2), по которым протекают постоянные электрические токи с силами  $I_1$  и  $I_2$ , соответственно (рисунок 11.6.1). Проводники будем считать очень тонкими. Расстояние между ними обозначим  $b$ .

Найдем силу, действующую со стороны одного проводника на участок другого проводника длиной  $\Delta l$ . Причина появления рассматриваемого взаимодействия проста. Первый проводник с электрическим током

создаёт в окружающем пространстве магнитное поле, которое действует на носители заряда, движущиеся во втором проводнике и, следовательно, на этот проводник.

Длина вектора индукции магнитного поля, создаваемого проводником 1 в точках, где находится проводник 2, определяется выражением (11.4.4) и равна:

$$B_1 = (\mu_0 / 4\pi) \cdot (2I_1 / b). \quad (11.6.1)$$

Сила Ампера  $\Delta \vec{F}_{21}$ , действующая на участок проводника 2 длиной  $\Delta l$  со стороны магнитного поля, создаваемого проводником 1, определяется выражением (11.5.2) и равна:

$$\Delta \vec{F}_{21} = I_2 (\Delta \vec{l} \times \vec{B}_1), \quad \Delta \vec{l} \perp \vec{B}_1. \quad (11.6.2)$$

Следовательно, для модуля силы  $\Delta \vec{F}_{21}$  находим:

$$\Delta F_{21} = I_2 \Delta l B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{b} \cdot \Delta l. \quad (11.6.3)$$

Для силы Ампера, отнесённой к длине рассматриваемого участка, таким образом, имеем:

$$\frac{\Delta F_{21}}{\Delta l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{b}. \quad (11.6.4)$$

Очевидно, что на проводник 1 со стороны магнитного поля, созданного проводником 2, действует сила  $\Delta \vec{F}_{12}$ , которая вычисляется аналогично:

$$\Delta F_{12} = I_1 \Delta l B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{b} \cdot \Delta l. \quad (11.6.5)$$

Формулы (11.6.3) и (11.6.5), позволяющие вычислять силу взаимодействия проводников с электрическим током, лежали в основе определения единицы силы тока в СИ.

Как отмечено в разделе 1.2, на 26-й Генеральной конференции по мерам и весам, проходившей с 13 по 16 ноября 2018 года в Версале (Версаль – город во Франции, расположенный в 17,1 километра к юго-западу от центра французской столицы; является административным центром департамента Ивелин), принято решение о переходе с 20 мая 2019 года на новые эталоны обновлённой Международной системы единиц СИ (SI).

Тем не менее, новые эталоны не противоречат в пределах точности практических применений принятым ранее единицам, в частности единицы силы тока, которая вводилась следующим образом:

**1 А** – сила постоянного электрического тока, который, протекая по двум бесконечно длинным и параллельным друг другу прямолинейным проводникам ничтожно малого сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, вызывает силу взаимодействия между ними  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины проводника.

Это определение, с учётом формул (11.6.3) или (11.6.5), даёт значение коэффициента пропорциональности, имеющегося в этих формулах. Действительно:

$$2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{м}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \cdot (1 \text{ А})^2}{1 \text{ м}} \Rightarrow k(= \frac{\mu_0}{4\pi}) = 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} = 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}. \quad (11.6.6)$$

Таким образом, мы вычислили значение коэффициента пропорциональности  $\mu_0 / (4\pi)$ , введённого ранее в формуле для вектора индукции магнитного поля со ссылкой на то, что приведённое значение этого коэффициента будет обосновано позднее.

## 11.7. Основные законы магнитного поля стационарных токов

Магнитное поле обладает двумя важнейшими свойствами, которые определяются теоремой Гаусса поля и законом полного тока, соответственно. При формулировке указанных закономерностей используются понятия потока вектора индукции магнитного поля и его циркуляции вдоль замкнутого контура, которые вводятся аналогично соответствующим величинам для любого векторного поля, а именно:

поток вектора индукции магнитного поля  $\Phi_B$  через некоторую поверхность  $S$  называется скалярная величина, определяемая выражением:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (11.7.1)$$

В СИ поток вектора индукции магнитного поля  $\Phi_B$  измеряется в Вб.  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$ .

Циркуляцией вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  вдоль замкнутой линии  $\Gamma$ , называется скалярная величина, определяемая выражением:

$$\Gamma_l = \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} . \quad (11.7.2)$$

С учётом этих определений приведём формулировки указанных выше теорем.

1. **Теорема Гаусса** для вектора индукции магнитного поля. Сначала приведём формулировку этой теоремы в *интегральной форме*. **Поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю**, то есть:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 . \quad (11.7.3)$$

В справедливости свойства магнитного поля, выражаемого формулой (11.7.3), можно убедиться, используя аналогию с теоремой Гаусса для вектора напряжённости электрического поля  $\vec{E}$ . Последняя утверждает, что поток вектора  $\vec{E}$  через произвольную замкнутую поверхность равен отношению суммарного электрического заряда, находящегося внутри этой поверхности, к электрической постоянной  $\varepsilon_0$ . В силу того, что магнитные заряды не существуют, то есть внутри любой замкнутой поверхности нет магнитных зарядов, поток вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  через эту замкнутую поверхность будет равен нулю.

Для формулировки теоремы Гаусса для вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  в *дифференциальной форме* напомним математическую теорему *Остроградского – Гаусса*, выражаемую равенством:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV , \quad (11.7.4)$$

где  $V$  – объём, ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ .

С учётом равенства (11.7.4) из теоремы Гаусса для вектора  $\vec{B}$  (11.7.3) находим формулу:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \forall P \in V , \quad (11.7.5)$$

которая и является выражением **теоремы Гаусса** для вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  в *дифференциальной форме*.

Отметим, что векторные поля, обладающие свойством (11.7.3.) или (11.7.5), называются *соленоидальными*.

2. **Закон полного тока** (теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля). **Циркуляция вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  вдоль произвольной замкнутой линии (контура) равна произведению**



магнитной постоянной  $\mu_0$  на силу суммарного электрического тока  $I_{\text{сум}}$ , протекающего по проводникам, охватываемым этой линией:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{сум}}. \quad (11.7.6)$$

В формуле (11.7.6)  $I_{\text{сум}}$  – сила суммарного электрического тока, охватываемого рассматриваемой замкнутой линией, определяется формулой:

$$I_{\text{сум}} = \sum_k I_k, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (11.7.7)$$

Отметим, что проводник считается охваченным контуром  $l$ , если он проходит через поверхность, «натянутую» на этот контур. В формуле (11.7.7)  $I_k$  – сила электрического тока, протекающего по проводнику с номером  $k$ , который считается положительным, если направление тока в этом проводнике согласовано с направлением обхода рассматриваемого контура  $l$ , и отрицательной в противном случае (см. рисунок 11.7.1). Факт прохождения проводника через «натянутую» на контур поверхность отмечен кольцом вокруг этого проводника.

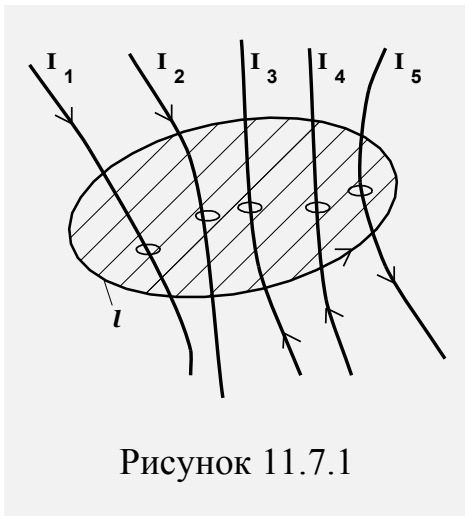


Рисунок 11.7.1

Для пояснения выражения (11.7.7) для силы суммарного электрического тока на рисунке 11.7.1 приведена конкретная ситуация – контур  $l$  охватывает пять проводников, по которым протекают постоянные электрические токи силами  $I_i, i=1,2,\dots,5$ , а направления токов и обхода контура указаны стрелками. В изображённой на рисунке 11.7.1 ситуации токи  $I_3$  и  $I_4$  согласованы с направлением обхода контура  $l$ , а токи  $I_1, I_2$  и  $I_5$  не

согласованы с направлением обхода контура  $l$ . Следовательно, в данной ситуации формула (11.7.7) для силы суммарного электрического тока  $I_{\text{сум}}$  принимает вид:

$$I_{\text{сум}} = -I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5. \quad (11.7.8)$$

Следует отметить, что выбор направления обхода контура произволен и определяется некоторыми вспомогательными соображениями, такими, например, как связь со стороной поверхности, «натянутой» на контур и т. п.

Вместо строго доказательства теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля (закона полного тока), которое выходит за рамки

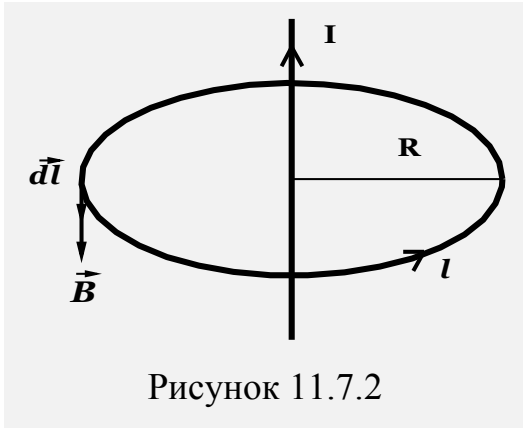


Рисунок 11.7.2

курса общей физики, приведём несколько примеров, подтверждающих справедливость этой теоремы.

Сначала рассмотрим простую и симметричную ситуацию – прямолинейный проводник неограниченной длины с постоянным электрическим током силы  $I$ . В качестве контура, охватывающего указанный проводник, выберем окружность

радиуса  $R$ . Контур расположим так, что проводник проходит через центр окружности и перпендикулярно плоскости, в которой она (окружность) расположена (рисунок 11.7.2).

Для определённости положим сначала, что направление электрического тока в проводнике и направление обхода контура  $l$  согласованы.

Очевидно, что контур  $l$  в нашем случае является силовой линией вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , создаваемого током в проводнике, и поэтому в любой точке контура векторы  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  будут одинаково направлены ( $d\vec{l} \uparrow \vec{B}$ ), так, что скалярное произведение этих векторов будет равно произведению их длин, то есть  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = Bdl$ . Кроме того, длина вектора  $\vec{B}$  во всех точках, расположенных на контуре  $l$ , будет одинаковой, как это следует из формулы (11.4.4), и равной  $(\mu_0 / 4\pi) \cdot (2I / R)$ . С учётом отмеченных фактов, а также значения для циркуляции вектора  $\vec{B}$  вдоль выбранного контура, находим:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l Bdl = B \oint_l dl = (\mu_0 / 4\pi) \cdot (2I / R) \cdot 2\pi R = \mu_0 \cdot I, \quad (11.7.9)$$

что полностью соответствует формуле (11.7.6), то есть закону полного тока.

В случае, когда направление электрического тока в проводнике и направление обхода контура  $l$  не согласованы, в любой точке контура векторы  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  будут иметь противоположные направления ( $d\vec{l} \updownarrow \vec{B}$ ), так, что  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = -Bdl$  и вместо (11.7.9) получим формулу:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\oint_l Bdl = -B \oint_l dl = -\mu_0 \cdot I, \quad (11.7.10)$$

в полном соответствии с законом полного тока (с учётом комментария к формуле (11.7.7) о знаке тока, охватываемого контуром).

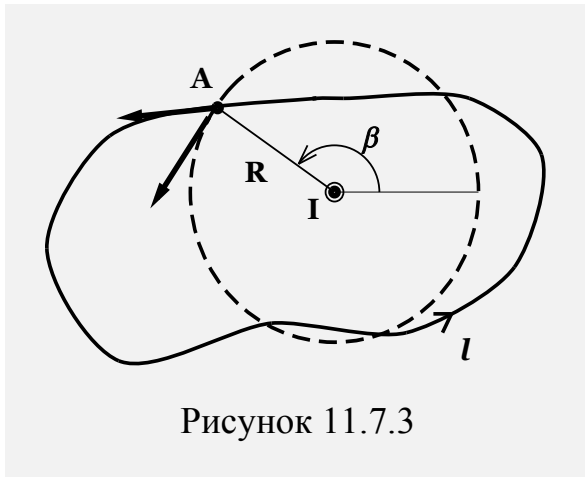


Рисунок 11.7.3

Теперь рассмотрим прямолинейный проводник неограниченной длины с постоянным электрическим током силы  $I$ , охваченный произвольным плоским контуром, лежащим в плоскости, перпендикулярной к рассматриваемому проводнику (рисунок 11.7.3). Направление электрического тока в проводнике и направление обхода контура  $l$  будем

считать согласованными. След от пересечения проводника и плоскости контура изображён на рисунке 11.7.3 в виде маленькой окружности, а точка внутри этой окружности отражает тот факт, что электрический ток в проводнике направлен к наблюдателю. В данном случае контур уже не является силовой линией вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , создаваемого током в проводнике, так что векторы  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  не будут одинаково направлены в точках рассматриваемого контура. Кроме того, длина вектора  $\vec{B}$  во всех точках, расположенных на контуре  $l$ , уже не будет одинаковой.

Однако интегрирование по рассматриваемому контуру так же легко выполнить, если учесть, что в подынтегральном выражении  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos(\vec{B} \wedge d\vec{l})$  произведение  $dl \cos(\vec{B} \wedge d\vec{l})$  может быть вычислено через радиус  $R$  вспомогательной окружности, изображённой пунктиром на рисунке 11.7.3, и приращение  $d\beta$  центрального угла  $\beta$ , а именно —  $dl \cos(\vec{B} \wedge d\vec{l}) = R d\beta$ . Учтём так же, что длина вектора индукции магнитного поля в рассматриваемой точке определяется выражением (11.4.4) и равна  $(\mu_0 / 4\pi) \cdot (2I / R)$ . Следовательно, подынтегральное выражение в интеграле по контуру примет вид:

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B dl \cos(\vec{B} \wedge d\vec{l}) = BR d\beta = \\ &= (\mu_0 / 4\pi) \cdot (2I / R) R d\beta = (\mu_0 / 2\pi) I d\beta. \end{aligned} \quad (11.7.11)$$

Угол  $\beta$  изменяется при вычислении интеграла от 0 до  $2\pi$ . Таким образом, для интеграла по рассматриваемому контуру получим:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l B dl \cos(\vec{B} \wedge d\vec{l}) = (\mu_0 I / 2\pi) \int_0^{2\pi} d\beta = \mu_0 I, \quad (11.7.12)$$

опять в полном соответствии с законом полного тока (11.7.6).

В случае, когда направление электрического тока в проводнике и направление обхода контура  $l$  не согласованы, знаки скалярных произведений изменятся на противоположные по сравнению с предыдущим случаем, и вместо (11.7.12) получим формулу:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I. \quad (11.7.13)$$

Знак «минус» в последней формуле отражает факт несогласованности направления электрического тока в проводнике и направления обхода контура  $l$ .

Примем без доказательства, что те же самые результаты получатся, если проводник с постоянным электрическим током силой  $I$  не будет прямолинейным, а охватывающий его контур  $l$  будет произвольной пространственной замкнутой линией, то есть, независимо от геометрии проводника и формы контура, получаем:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \pm \mu_0 I, \quad (11.7.14)$$

где знаки «+» и «-» берутся в зависимости от согласованности направлений электрического тока в проводнике и обхода контура.

Обобщим полученный результат на случай, когда контур охватывает « $n$ » проводников с произвольными направлениями электрических токов, силы которых равны  $I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  результирующего магнитного поля во всех точках наблюдения (на контуре интегрирования) находим при помощи принципа суперпозиции (раздел 11.3):

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (11.7.15)$$

Подставляя (11.7.15) в (11.7.6), получим в результате формулу:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l (\sum_k \vec{B}_k) \cdot d\vec{l} = \sum_k (\oint_l \vec{B}_k \cdot d\vec{l}) = \sum_k \mu_0 I_k = \mu_0 \sum_k I_k = \mu_0 I_{\text{сум}}, \quad (11.7.16)$$

в полном соответствии с законом полного тока (11.7.6). Отметим, что, с точки зрения практического применения для расчётов магнитных полей, закон полного тока в магнитостатике заменяет теорему Гаусса в электростатике.

Можно обобщить полученный результат на случай, когда контур  $N$  охватывает токи, распределённые по поверхности  $S$ , «натянутой» на этот контур. Действительно, если обозначить через  $\vec{j}$  плотность тока в различных точках указанной поверхности, то можно считать, что через элемент поверхности  $d\vec{S} = \vec{n}dS$  (орт нормали согласован с направлением обхода контура  $l$ ) в цилиндрической трубке площадью поперечного сечения  $dS$ , образуемая которой параллельна силовой линии тока (воображаемый – «виртуальный» проводник), будет проходить электрический ток силой  $dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$ , а через всю поверхность будет проходить электрический ток силой  $I_{\text{сум}} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ . Таким образом, для ситуации распределённого по поверхности тока получаем формулу:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{сум}} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (11.7.17)$$

Полученная нами формула (11.7.16) для закона полного тока понадобится в дальнейшем при изучении уравнений Ма́ксвелла.

## 11.8. Магнитное поле соленоида и тороида

В качестве иллюстрации использования закона полного тока для расчётов магнитных полей приведем два конкретных примера.

### 1. Магнитное поле соленоида.

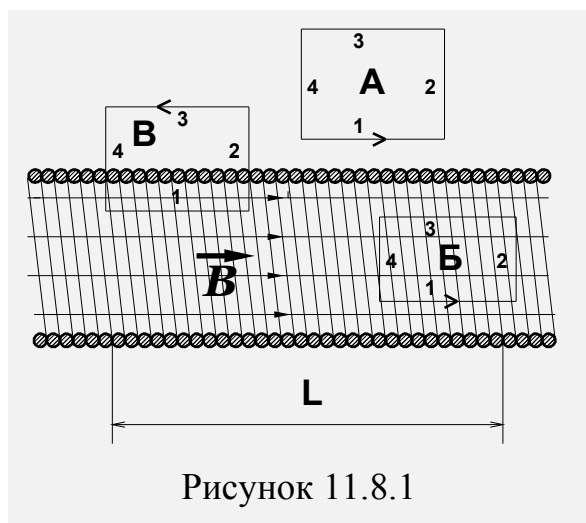


Рисунок 11.8.1

*Соленоидом* называют проводящую катушку с током, витки которой в виде винтовой линии намотаны на сердечник, имеющий форму прямого цилиндра (на рисунке 11.8.1 изображено сечение соленоида плоскостью, проходящей через ось симметрии соленоида). Витки считаются расположенными вплотную друг к другу. Будем считать, что по проводящей катушке проходит постоянный

электрический ток силой  $I$ . Для упрощения рассуждений и расчётов будем считать, что соленоид имеет неограниченную длину. Обозначим через  $N$  число витков, уложенных на длине  $L$  соленоида, а через  $n$  – отношение  $N$  к  $L$ , то есть  $n = N / L$ , которое будем называть числом витков на единице длины соленоида. Будем считать, что соленоид располагается в вакууме.

На рисунке 11.8.1 показаны три контура (**А**, **Б** и **В**), которые будут использоваться для выяснения свойств магнитного поля соленоида.

Сначала рассмотрим контур **А**. В соответствии с законом полного тока циркуляция вектора индукции магнитного поля вдоль этого контура равна нулю, так как нет проводников с электрическим током, охваченных этим контуром. Но этот факт ещё не позволяет ничего сказать о самом магнитном поле. Чтобы выяснить некоторые свойства магнитного поля, проведём непосредственное вычисление циркуляции вектора индукции магнитного поля вдоль этого контура:

$$\oint_{l_A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{l_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{l_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{l_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (11.8.1)$$

Из соображений симметрии ясно, что если магнитное поле вне соленоида отлично от нуля, то оно не может зависеть от положения при перемещении вдоль любой линии, параллельной оси симметрии. Следовательно, вклады интегралов по участкам 2 и 4 будут друг друга взаимно компенсировать, то есть  $\int_{l_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\int_{l_4} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ . Таким образом, получаем:

$$\oint_{l_A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{l_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (11.8.2)$$

При отсутствии внутри контура проводников с электрическим током размеры контура **А** не влияют на результат. Следовательно, при перемещении участка 3 контура **А** в бесконечно удалённую точку циркуляция вектора индукции магнитного поля вдоль этого контура (в силу независимости от размеров и формы контура) остаётся равной нулю. Но магнитное поле в бесконечно удалённой точке должно отсутствовать, и вклад в циркуляции вектора индукции магнитного поля по рассматриваемому контуру будет вносить только участок 1. Если вектор индукции магнитного поля на этом участке отличен от нуля, то и весь интеграл по контуру **А** будет не равен нулю, что противоречит закону полного тока. Следовательно, вектор индукции магнитного поля на этом участке должен быть равен нулю.

В силу произвольности выбора контура **A** вне соленоида делаем заключение, что вектор индукции магнитного поля будет равен нулю всюду вне бесконечно длинного соленоида с электрическим током.

При наличии электрического тока в катушке магнитное поле не может отсутствовать всюду. Поскольку снаружи от объёма, ограниченного соленоидом, магнитного поля нет, то остаётся, что *вектор индукции магнитного поля должен быть отличным от нуля внутри соленоида.*

Рассмотрим теперь произвольный замкнутый контур **B** внутри соленоида. Так как и этот контур не охватывает проводников с электрическим током, то, в соответствии с законом полного тока, циркуляция вектора индукции магнитного поля вдоль этого контура равна нулю. В силу симметрии задачи для контура **B** также имеем  $\int_{l_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\int_{l_4} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ . Заметим, что независимость магнитного поля от положения вдоль любой линии, параллельной оси симметрии соленоида, позволяет упростить вычисления, а именно:  $\int_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1 l_1$ ;  $\int_{l_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_3 l_3 = B_3 l_1$ . Произвольность контура **B** позволяет также сделать вывод, что для получения нулевого результата при вычислении циркуляции вектора магнитного поля вдоль этого контура, остаётся заключить, что

$$\int_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\int_{l_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} \Rightarrow B_1 = B_3 = B. \quad (11.8.3)$$

Формула (11.8.3) показывает, что внутри соленоида магнитное поле однородное и направлено вдоль его оси симметрии. Направление вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  внутри соленоида определяется правилом правого винта.

Теперь, используя контур **B**, вычислим длину вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  внутри бесконечно длинного соленоида с электрическим током. Относительно участков 2 и 4 этого контура справедливо всё, что использовано для контуров **A** и **B**. Учтём также, что длины участков 1 и 3 контура **B** равны. Контур охватывает  $N = nl$  витков, по каждому из которых протекает постоянный электрический ток силой  $I$ . Следовательно, на основании закона полного тока имеем:

$$\oint_{l_B} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{l_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + 0 = \mu_0 NI. \quad (11.8.4)$$

Из формулы (11.8.4) находим искомую величину – длину вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ :

$$\int_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl = \mu_0 NI \Rightarrow B = \mu_0 (N / l) I = \mu_0 n I . \quad (11.8.5)$$

Полученный результат можно обобщить на случай, когда сердечник соленоида изготовлен из однородного изотропного материала, который не является магнитоупорядоченным (смысл этого понятия будет разъяснён далее в разделе, посвящённом изучению магнитного поля в веществе). В том случае для длины вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  получается результат:

$$B = \mu \mu_0 n I , \quad (11.8.6)$$

где  $\mu$  – безразмерный положительный коэффициент, который определяется свойствами материала сердечника и называется магнитной проницаемостью этого материала.

## 2. Магнитное поле тороида.

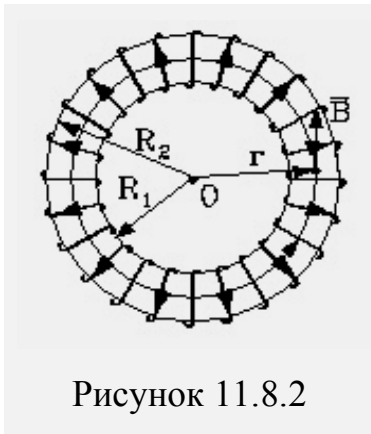


Рисунок 11.8.2

*Тороидом* называют проводящую катушку с током, витки которой в виде винтовой линии намотаны на сердечник, имеющий форму тора (на рисунке 11.8.2 изображено сечение тороида плоскостью, перпендикулярной оси симметрии тора и проходящей через центр симметрии тора). Витки считаются расположенными вплотную друг к другу. Будем считать, что по проводящей катушке проходит постоянный электрический ток силой  $I$ .

Для упрощения рассуждений и расчётов будем считать, тороид достаточно большой, то есть:

$$| R_2 - R_1 | \ll R_2 . \quad (11.8.7)$$

Обозначим через  $N$  число витков, уложенных на длине  $L_{cp}$  тороида ( $L_{cp} = 2\pi R_{cp}$ ,  $R_{cp} = (R_1 + R_2) / 2$ ), а через  $n$  – отношение  $N$  к  $L_{cp}$ , то есть  $n = N / L_{cp}$ , которое будем называть числом витков на единице длины тороида. Как и в предыдущем случае, будем считать, что внутри и вне тороида находится вакуум.

В качестве контура интегрирования при вычислении циркуляции вектора индукции магнитного поля выберем окружность радиуса  $r$  (рисунок 11.8.2,  $R_1 < r < R_2$ ), центр которой находится в центре симметрии тора, а плоскость этой окружности перпендикулярна оси симметрии тора. Исходя из симметрии задачи, заключаем, что вектор индукции магнитного поля



во всех точках выбранного контура будет иметь постоянную длину, а его направление будет, в зависимости от направления обхода контура, либо совпадать (в случае согласованного обхода), либо будет противоположным (в случае несогласованного обхода) с направлением вектора  $d\vec{l}$ . В дальнейших рассуждениях будем считать направление обхода контура  $l$  согласованным. Выбранным контуром охвачено  $N$  витков с электрическим током  $I$ , следовательно, в правой части формулы (11.7.6) для закона полного тока имеем величину  $\mu_0 NI$ . С учётом сказанного о контуре интегрирования, для циркуляции вектора индукции магнитного поля получаем формулу:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l B \cdot dl = B \oint_l dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI, \quad (11.8.8)$$

откуда находим искомую длину вектора индукции магнитного поля внутри тороида:

$$B = \mu_0 (N / 2\pi r) I. \quad (11.8.9)$$

Поскольку тороид считается достаточно большим (условие (11.8.6)), то можно считать  $r \cong R_{cp}$ , так что (11.8.9) примет вид:

$$B = \mu_0 (N / 2\pi R_{cp}) I = \mu_0 n I. \quad (11.8.10)$$

Выражение (11.8.10) для длины вектора индукции магнитного поля внутри тороида совпадает с выражением (11.8.5) для соленоида. Такое совпадение является следствием условия (11.8.6). Если сердечник тороида изготовлен из однородного изотропного материала, который не является магнитоупорядоченным, для длины вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  получается результат:

$$B = \mu \mu_0 n I. \quad (11.8.11)$$

## 11.9. Контур с током в магнитном поле

Очень важным как с практической стороны, так и с теоретической точки зрения, является вопрос о поведении замкнутого контура (витка) с электрическим током в магнитном поле. В общем случае расчёты такого взаимодействия достаточно утомительны (хотя и не очень сложны) и зависят от свойств магнитного поля и конфигурации витка (форма и ориентация витка, направление и сила тока). Для упрощения контур с электрическим током далее будет считаться плоским, если не оговорено противное.

Введём понятие магнитного момента витка с током. Магнитным моментом плоского замкнутого контура  $I$  с постоянным электрическим током называют вектор  $\vec{p}_m$ , определяемый выражением:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} = I\vec{S}, \quad \vec{S} = S\vec{n}, \quad (11.9.1)$$

где  $I$  – сила электрического тока в рассматриваемом контуре,  $S$  – площадь, ограниченная контуром (далее для краткости будем использовать термин «площадь контура»),  $\vec{n}$  – орт нормали к плоскости, в которой расположен контур (кратко – плоскость контура),  $\vec{S}$  – вектор площади  $S$ . Измеряется магнитный момент в СИ в  $\text{А} \cdot \text{м}^2$ .

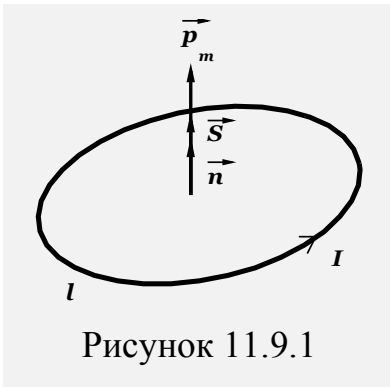


Рисунок 11.9.1

Из двух возможных направлений орта  $\vec{n}$  и, соответственно, вектора площади  $\vec{S}$ , выбираем то, которое согласовано с направлением обхода контура  $I$  (рисунок 11.9.1).

Понятие магнитного момента легко обобщается на случай неплоского контура с электрическим током. А именно, если контур  $I$  неплоский, то его мысленно разделяем на  $N$  малых участков, которые приближённо можно считать плоскими, так что для каждого из этих участков справедливо выражение (11.9.1). Затем просуммируем по всем участкам и совершим предельный переход при мелкости разбиения  $\lambda \rightarrow 0$  и в итоге получим искомый результат:

$$\vec{p}_m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i I \Delta \vec{S}_i = I \int_S d\vec{S}. \quad (11.9.2)$$

Теперь рассмотрим вопрос о взаимодействии контура с электрическим током и магнитного поля, созданного другими проводниками.

На каждый элемент длины контура с электрическим током в магнитном поле будет действовать сила Ампера:

$$d\vec{F}_A = I(d\vec{l} \times \vec{B}), \quad (11.9.3)$$

а на контур в целом будет действовать равнодействующая всех сил Ампера, приложенных ко всем элементам длины этого контура, то есть:

$$\vec{F}_A = I \oint_I d\vec{l} \times \vec{B} = -I \oint_I \vec{B} \times d\vec{l}. \quad (11.9.4)$$

Из полученной формулы (11.9.4) следует, что если магнитное поле однородное, то результирующая сила будет равна нулю:

$$\vec{F}_A = -I \oint_l \vec{B} \times d\vec{l} = -I \vec{B} \times (\oint_l d\vec{l}) = \vec{0}, \quad (11.9.5)$$

так как по определению суммы векторов  $\oint_l d\vec{l} = \vec{0}$ .

В случае неоднородного магнитного поля результирующая сила, действующая на маленький (точечный) контур с током, не равна нулю и определяется, в отсутствие объёмной плотности токов  $\vec{j}$ , текущих в точке расположения диполя  $\vec{p}_m$ , выражением:

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \nabla) \vec{B} = p_{mx} \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}. \quad (11.9.6)$$

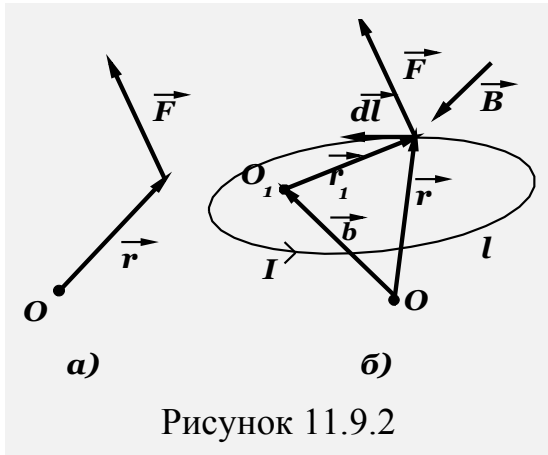
Можно показать, что в неоднородном магнитном поле результирующая сила, действующая на незакреплённый контур с электрическим током, перемещает этот контур в область с более сильным магнитным полем.

Обратимся теперь к вычислению момента сил, действующих на контур с током в однородном магнитном поле.

Сначала напомним, что моментом силы  $\vec{F}$ , приложенной к точке  $P$  относительно некоторого центра (точки)  $O$  называют вектор  $\vec{M}_O$ , определяемый выражением:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (11.9.7)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы (рисунок 11.9.2, а).



Ясно, что  $\vec{M}_O$  зависит как от длины и направления силы, так и от выбора центра  $O$ . Однако момент сил, действующих на рассматриваемый контур с током в магнитном поле, от выбора центра  $O$  уже не зависит (рисунок 11.9.2, б). Действительно, если обозначить через  $d\vec{F}_A = I(d\vec{l} \times \vec{B})$  силу Ампера, действующую на элемент длины  $d\vec{l}$  рассматри-

ваемого контура, то для искомого момента сил  $\vec{M}$  (обратите внимание: здесь опущено «относительно центра  $O$ »), производя интегрирование по всему контуру, находим:

$$\vec{M} = \oint_l \vec{r} \times d\vec{F}_A = \oint_l \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B}). \quad (11.9.8)$$

Если выбрать новый центр  $O_1$ , то, как это видно из рисунка 11.9.2, новые радиус-векторы  $\vec{r}_1$  элементов контура  $l$  будут связаны с прежними радиус-векторами  $\vec{r}$  соотношением  $\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{b}$ , где  $\vec{b}$  – постоянный вектор. Следовательно, в новой системе координат получаем:

$$\begin{aligned}\vec{M}_1 &= \oint_l (\vec{r} - \vec{b}) \times (I d\vec{l} \times \vec{B}) = \oint_l \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B}) - \oint_l \vec{b} \times (I d\vec{l} \times \vec{B}) = \\ &= \vec{M} - \{(\vec{b} \cdot \vec{B}) I \oint_l d\vec{l} - I \oint_l \vec{B} (\vec{b} \cdot d\vec{l})\} = \\ &= \vec{M} - \{(\vec{b} \cdot \vec{B}) I \oint_l d\vec{l} - I \vec{B} (\vec{b} \cdot \oint_l d\vec{l})\} = \vec{M}.\end{aligned}\quad (11.9.9)$$

В (11.9.9) использовано тождество для двойного векторного произведения  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ , а также уже использованное ранее равенство  $\oint_l d\vec{l} = \vec{0}$ .

Вычисление момента сил, действующих на рассматриваемый контур с током в магнитном поле сил, выходит за рамки курса общей физики. Поэтому результат этих вычислений приведём без доказательства:

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (11.9.10)$$

Проверим справедливость формулы (11.9.10) для специального, но очень важного случая, когда контур имеет форму прямоугольника, а ось симметрии этого контура перпендикулярна силовым линиям магнитного поля (рисунок 11.9.3).

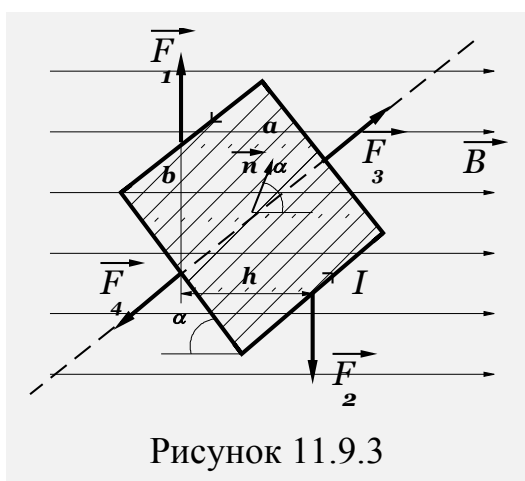


Рисунок 11.9.3

В данной ситуации легко вычислить силы, действующие на каждую из четырёх сторон контура и определить моменты этих сил.

Силы  $\vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$  расположены на одной прямой и направлены в противоположные стороны, а их модули равны, поскольку  $F_3 = IaB \sin \alpha = F_4$ . Модуль момента этих сил равен нулю, так как плечо

этих сил равно нулю. Таким образом, силы  $\vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$  контур не вращают, а только растягивают и, в случае жёсткого контура, компенсируются силами упругости.

Силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  расположены на параллельных прямых, расстояние между которыми (плечо сил) равно  $h = a \sin \alpha$ , и направлены в противоположные стороны, а их модули равны, поскольку  $F_1 = IbB = F_2$ . Поскольку плечо сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  отлично от нуля, модуль момента этой пары сил будет тоже отличен от нуля и равен:

$$M = F_1 \cdot h = B I a b \sin \alpha = B I S \sin \alpha = B p_m \sin \alpha = | \vec{p}_m \times \vec{B} |. \quad (11.9.11)$$

Видим, что модуль момента рассматриваемой пары сил равен модулю векторного произведения векторов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ . Следовательно, для вектора момента сил, действующих на рассматриваемый контур, получим формулу:

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}, \quad (11.9.12)$$

совпадающую, как и предполагалось, с (11.9.10).

Видим, что контур с электрическим током находится в равновесии в магнитном поле, когда длина вектора момента сил, действующих со стороны магнитного поля на этот контур, равна нулю, то есть если векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  параллельны друг другу. При этом, когда  $\vec{p}_m \uparrow \uparrow \vec{B}$ , равновесие будет устойчивым, а в случае, когда  $\vec{p}_m \uparrow \downarrow \vec{B}$ , равновесие неустойчивое.

Наличие силового взаимодействия контура с электрическим током с внешним магнитным полем приводит к изменению энергетического состояния этого контура, в зависимости от его расположения по отношению к вектору индукции магнитного поля.

Рассчитаем потенциальную энергию контура с электрическим током во внешнем магнитном поле. Будем исходить из того факта, что работа внешних сил по изменению положения контура с электрическим током во внешнем магнитном поле, равная изменению потенциальной энергии этого контура, идёт на совершение работы против сил Ампера, и поэтому равна работе сил Ампера, но с противоположным знаком.

Поскольку в однородном магнитном поле силовое взаимодействие осуществляется через момент сил, действующих на контур, то работа, совершаемая при изменении угла между вектором магнитного момента контура  $\vec{p}_m$  и вектором индукции магнитного поля  $\vec{B}$  (рисунок 11.9.4), определяется выражением:

$$\begin{aligned} dW_n &= dA_{\text{внешн}} = M d\alpha = (p_m B \sin \alpha) d\alpha = \\ &= d(-p_m B \cos \alpha) = d(-\vec{p}_m \cdot \vec{B}). \end{aligned} \quad (11.9.13)$$

Из последней формулы для потенциальной энергии  $W_n$  контура с током в магнитном поле находим:

$$W_n = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} + C, \quad (11.9.14)$$

где произвольную постоянную  $C$  выбирают из соображений удобств. Часто выбирают  $C = 0$ , а (11.9.14) при таком выборе принимает вид:

$$W_n = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}. \quad (11.9.15)$$

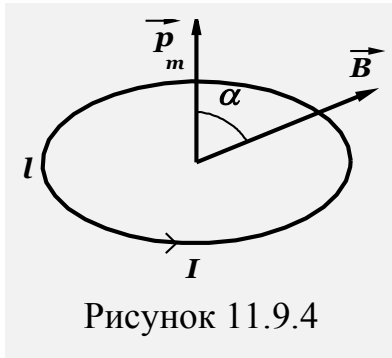


Рисунок 11.9.4

Из полученного выражения находим, что минимальную потенциальную энергию  $W_{n,\min} = -p_m B$  контур имеет при  $\alpha = 0$ , а максимальную  $W_{n,\max} = p_m B$ , при  $\alpha = \pi$ . Разница между максимальным и минимальным значениями потенциальной энергии:  $\Delta W_n^{\max} = (W_{n,\max} - W_{n,\min}) = 2p_m B$ .

Полученные результаты показывают, что при повороте контура с электрическим током из положения, когда  $\alpha = 0$ , в положение, когда  $\alpha = \pi$ , внешние силы совершают работу  $A_{\text{внешн}} = \Delta W_n^{\max} = 2p_m B$ .

### 11.10. Работа по перемещению контура с током в магнитном поле

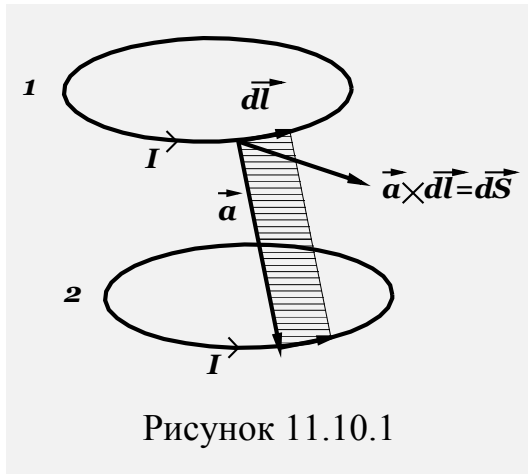


Рисунок 11.10.1

Найдем, какую работу необходимо совершить, чтобы переместить контур с электрическим током, находящийся в однородном внешнем магнитном поле при перемещении контура из одного положения в другое (рисунок 11.10.1). Перемещение контура считаем произвольным, так что кроме своего положения он может деформироваться. Однородность магнитного поля не обязательное условие и используется только ради упрощения вычислений, а полученные далее результаты на самом деле применимы и для случая неоднородного магнитного поля.

Для решения этой задачи выделим элемент контура  $d\vec{l}$ . Перемещение этого элемента при указанной операции с контуром описывается вектором  $\vec{a}$ , а элементарная работа по его перемещению вычисляется по формуле:

$$dA = \vec{a} \cdot d\vec{F}_A = I\vec{a} \cdot (\vec{dl} \times \vec{B}) = I\vec{B} \cdot (\vec{a} \times \vec{dl}) = I\vec{B} \cdot d\vec{S} = Id\Phi_{B,бок}, \quad (11.10.1)$$

где  $d\vec{S}$  – вектор площадки поверхности, связанной с перемещаемым элементом контура  $d\vec{l}$ , а  $d\Phi_{B,бок}$  – поток вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  через эту поверхность.

Полная работа по перемещению контура с током во внешнем магнитном поле получается путём интегрирования по боковой поверхности тела (условно назовём его «кривым цилиндром»), которое получается при перемещении этого контура:

$$A_{12} = I \int_{S_{бок}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = I\Phi_{B,бок}. \quad (11.10.2)$$

Отметим, что контур может произвольно деформироваться при перемещении, поэтому вид и форма боковой поверхности «кривого цилиндра», будучи произвольными, не должны влиять на результат.

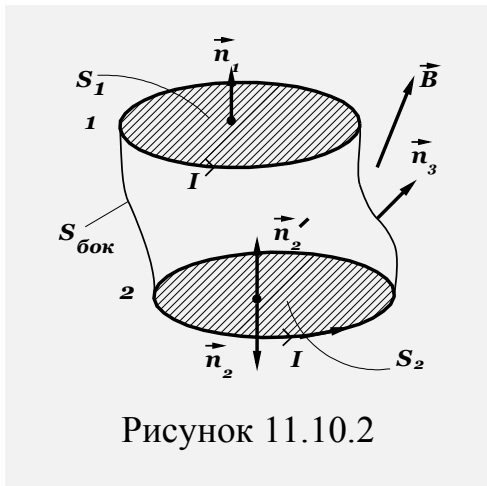


Рисунок 11.10.2

Это обстоятельство значительно усложняет дело, если действовать напрямую, то есть при попытке вычисления искомой работы по формуле (11.10.2). Но использование теоремы Гаусса для вектора индукции магнитного поля (11.7.3) в интегральной форме помогает обойти возникшие сложности. В качестве замкнутой поверхности выберем поверхность, получаемую путём объединения боковой поверхности «кривого цилиндра» и поверхностей  $S_1$  и  $S_2$ , «натянутых» на контур в начальном и конечном положениях (см. рисунок 11.10.2).

Применяя теорему Гаусса для вектора индукции магнитного поля для описанной поверхности, получим:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{бок}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (11.10.3)$$

Отметим, что интегрирование в (11.10.3) осуществляется по внешней стороне поверхности. Этот факт отмечен ортами нормали в некоторых точках на соответствующих поверхностях.

В формуле (11.10.3):

- интеграл по  $S_1$  – поток  $\Phi_{B,1}$  вектора  $\vec{B}$  через поверхность  $S_1$ ;
- интеграл по  $S_{\text{бок}}$  – поток  $\Phi_{B,\text{бок}}$  вектора  $\vec{B}$  через поверхность  $S_{\text{бок}}$ ;
- интеграл по  $S_2$  – «минус» поток  $\Phi_{B,2}$  вектора  $\vec{B}$  через поверхность  $S_2$ , поскольку при вычислении потока через поверхность, ограниченную контуром, нужно оставаться на одной и той же стороне поверхности, то есть для вычисления потока  $\Phi_{B,2}$  нужно интегрировать по стороне поверхности  $S_2$ , отмеченной ортом  $\vec{n}'_2$ .

Следовательно, для потока вектора индукции магнитного поля через поверхность  $S_{\text{бок}}$  получаем из формулы (11.10.3):

$$\Phi_{B,\text{бок}} = \Phi_{B,2} - \Phi_{B,1} = \Delta\Phi_B. \quad (11.10.4)$$

Подставляя полученный результат в формулу (11.10.2), для искомой работы по перемещению контура с током во внешнем магнитном поле получаем:

$$A_{12} = I\Phi_{B,\text{бок}} = I(\Phi_{B,2} - \Phi_{B,1}) = I\Delta\Phi_B. \quad (11.10.5)$$

Формула показывает, что работа по перемещению контура с электрическим током во внешнем магнитном поле не зависит от способа перемещения контура и вида его деформации и равна произведению разности между потоками вектора индукции магнитного поля через поверхности контура в начальном и конечном положениях на силу электрического тока в рассматриваемом контуре.



## Глава 12. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### 12.1. Намагничивание вещества. Намагниченность

До сих пор мы изучали магнитное поле в вакууме. Магнитное поле в рассматриваемых областях пространства создавалось токами в проводниках, которые далее мы будем называть токами проводимости. Обозначим через  $\vec{B}_0$  вектор индукции магнитного поля, создаваемого токами проводимости.

Если теперь в магнитное поле, создаваемое токами проводимости, внести какое либо вещество, то результирующее магнитное поле в областях, занятых веществом, изменится. Дело в том, что все вещества состоят из атомов и молекул, в состав которых входят движущиеся электрически заряженные частицы. Поскольку покинуть пределы молекул эти движущиеся частицы не могут, то им (движущимся заряженным частицам в молекулах) можно поставить в соответствие замкнутые молекулярные токи  $I_m$ , которые создают своё магнитное поле, вектор индукции которого обозначим  $\vec{B}'$ . Отметим, что под  $\vec{B}'$  подразумевается вектор индукции магнитного поля, усреднённого по элементарному объёму в окрестности точки наблюдения (такое поле называют макроскопическим полем, или кратко – макрополем). Это следует всегда помнить, поскольку «мгновенное» (микроскопическое) поле  $\vec{B}'$  является быстро изменяющейся вектор-функцией пространственных координат и времени.

С учётом сказанного, для вектора индукции результирующего макроскопического магнитного поля в точке наблюдения имеем:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (12.1.1)$$

Магнитное поле  $\vec{B}'$ , как и магнитное поле токов проводимости  $\vec{B}_0$  (см. формулы (11.7.3) и (11.7.5)), является *соленоидальным* полем, то есть:

$$\oint_S \vec{B}' \cdot d\vec{S} = 0, \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \vec{B}' = \text{div} \vec{B}' = 0, \quad \forall P \in V(S). \quad (12.1.2)$$

Это означает на языке геометрических образов, что *силовые линии* поля  $\vec{B}'$  *замкнуты*. Относительно поля  $\vec{B}'$  следует отметить ещё одно обстоятельство. Это магнитное поле  $\vec{B}'$  создаётся замкнутыми молекулярными токами  $I_m$  с соответствующими молекулярными магнитными мо-

ментами  $\vec{p}_m$ . Внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$  оказывает ориентирующее действие на эти молекулярные токи, называемое намагничиванием вещества, причём механизмы и результаты этого процесса зависят от вида вещества и будут обсуждаться дальше. В силу этого обстоятельства (способности намагничиваться во внешнем магнитном поле) все вещества называются *магнетиками*.

Возвращаясь к обсуждению свойств результирующего магнитного поля в веществе  $\vec{B}$  (12.1.1), с учётом сказанного о полях  $\vec{B}_0$  и  $\vec{B}'$ , находим, что и поле  $\vec{B}$  является соленоидальным.

Из формулы (12.1.1) вытекает, что, как в случае с электрическим полем в веществе, магнитное поле в веществе  $\vec{B}$  рассчитать только на основании этой формулы нельзя, поскольку результирующее магнитное поле  $\vec{B}$  зависит от магнитного поля молекулярных токов  $\vec{B}'$ , которое само определяется полем  $\vec{B}$ .

Чтобы преодолеть возникшее затруднение, вновь, как для электрического поля в веществе, введём вспомогательную характеристику магнитного поля, определяемую только токами проводимости.

Для этого сначала введём намагниченность вещества как вектор  $\vec{J}$ , определяемый равенством:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_k \vec{p}_{m,k}, \quad (12.1.3)$$

где  $\Delta V$  – элементарный объём, достаточно малый, чтобы все рассматриваемые характеристики были однородными в этом объёме, но, с другой стороны, достаточно большой, чтобы число частиц (молекул) внутри этого объёма позволяло производить процедуру статистического усреднения;  $\vec{p}_{m,k}$  – магнитный момент  $k$ -ой молекулы в элементарном объёме. В СИ намагниченность вещества измеряется в А/м.

Если через  $N$  обозначить число молекул внутри элементарного объёма  $\Delta V$ , то формулу (12.1.3) можно записать в ином виде:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_k \vec{p}_{m,k} = \frac{N}{\Delta V} (\sum_k \vec{p}_{m,k} / N) = n < \vec{p}_m >, \quad (12.1.4)$$

где  $< \vec{p}_m >$  – средний магнитный момент молекулы,  $n$  – концентрация молекул в рассматриваемой области. Из формул (12.1.3) и (12.1.4) вытекает, что в СИ намагниченность измеряется в А/м.

## 12.2. Циркуляция вектора намагниченности

Для поиска вспомогательной характеристики магнитного поля, зависящей только от токов проводимости, сначала рассмотрим самые общие свойства вектора намагниченности  $\vec{J}$ .

Выберем внутри магнетика произвольный замкнутый контур  $l$  (часть этого контура изображена на рисунке 12.2.1, а) и вычислим циркуляцию вектора намагниченности  $\vec{J}$  вдоль этого контура. Все молекулярные токи по отношению к выбранному контуру можно разделить на 2 части: токи  $I'_m$ , которые «нанизаны» на контур  $l$ , и токи  $I''_m$ , которые не «нанизаны» на контур  $l$ . Причём, как это видно из рисунка 12.2.1, токи  $I'_m$  пересекают поверхность  $S$ , натянутую на контур  $l$ , один раз, а токи  $I''_m$  либо не пересекают эту поверхность ни разу, либо два раза. В результате видим, что токи  $I''_m$  не вносят вклада в интеграл при вычислении циркуляции намагниченности по рассматриваемому контуру.

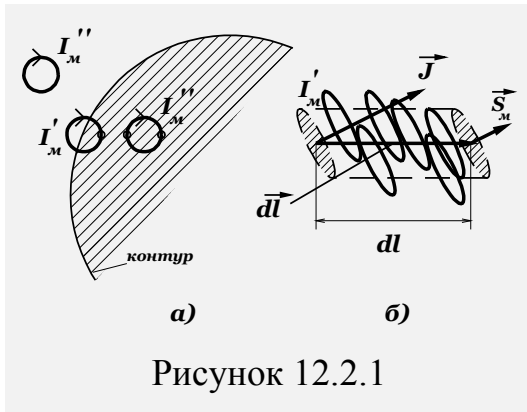


Рисунок 12.2.1

Выделим элемент длины контура  $d\vec{l}$  и определим намагниченность элементарного косого цилиндра, с площадью сечения, равной площади молекулярного тока  $S_m$  (рисунок 12.2.1, б). Будем также считать, что для всех молекул величины  $S_m$  одинаковы, а также то, что магнитные моменты всех этих токов одинаково ориентированы в магнитном поле. Тогда с учётом этих фактов для силы электрического тока  $dI'$ , обусловленного молекулярными токами  $I'_m$ , охватываемыми элементом контура  $dl$ , находим:

$$dI' = I'_m dN = I'_m n dV = n I'_m (\vec{S}_m \cdot d\vec{l}) = n (I'_m \vec{S}_m \cdot d\vec{l}) = n \vec{p}_m \cdot d\vec{l} = \vec{J} \cdot d\vec{l}. \quad (12.2.1)$$

Следовательно, для суммарного тока  $I'$ , обусловленного всеми молекулярными токами  $I'_m$ , охватываемыми контуром  $l$ , получаем путём интегрирования по всему контуру:

$$\oint_l \vec{J} \cdot d\vec{l} = I'. \quad (12.2.2)$$

Ток  $I'$ , сопоставляемый молекулярным токам, называется током намагничивания. Если ток намагничивания  $I'$  неравномерно распределён

по некоторой поверхности, то для его нахождения вводят плотность тока намагничивания  $\vec{j}'$ , так что:

$$\int_S \vec{j}' \cdot d\vec{S} = I' \quad (12.2.3)$$

Следовательно, для циркуляции намагниченности получаем:

$$\oint_l \vec{J} \cdot d\vec{l} = I' = \int_S \vec{j}' \cdot d\vec{S}, \quad (12.2.4)$$

которая выражает смысл теоремы о циркуляции намагниченности в интегральной форме.

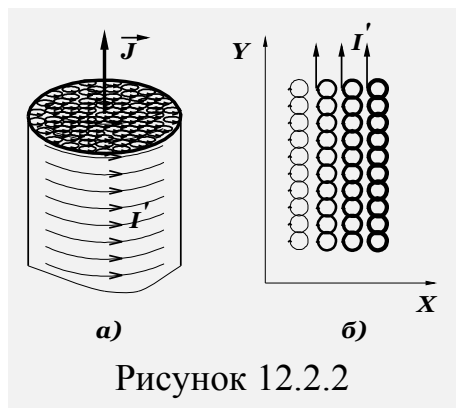
В дифференциальной форме эта теорема легко формулируется после применения теоремы Стокса к интегралу по замкнутому контуру  $l$ :

$$\oint_l \vec{J} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (12.2.5)$$

Сравнивая (12.2.4) и (12.2.5), находим выражение

$$\text{rot} \vec{J} = \vec{j}', \quad (12.2.6)$$

которое и называется теоремой о циркуляции намагниченности в дифференциальной форме.



По поводу введенных токов намагничивания  $I'$  следует сделать некоторые пояснения. Прежде всего токи намагничивания  $I'$  — это макроскопические токи, обусловленные ориентацией во внешнем магнитном поле замкнутых молекулярных токов  $I_m$ . Фактически происходит «подмена» истинных источников (молекулярных токов  $I_m$ ) магнитного поля  $\vec{B}'$

на виртуальные (фиктивные) источники (токи намагничивания  $I'$ ), которые дают тот же самый результат (подсчитанный с помощью закона Био — Савара — Лапласа), то есть создают то же самое магнитное поле  $\vec{B}'$ . Таким образом, это, хотя и связанные между собой, но всё-таки разные объекты. Далее, молекулярные токи  $I_m$  — это микротоки (область их локализации соответствует размерам молекул), тогда как токи намагничивания  $I'$  — это макротоки (область их локализации соответствует размерам изучаемых тел (магнетиков)). На рисунке 12.2.2 приведены ситуации, поясняющие ска-

занное о токах  $I_m$  и  $I'$ . В первом случае (рисунок 12.2.2, а) показан однородный цилиндрический магнетик, у которого микротоки  $I_m$  ориентированы внешним магнитным полем в плоскости, перпендикулярной оси симметрии цилиндра. В точках соприкосновения микротоки компенсируют друг друга. Некомпенсированные микротоки, выходящие на боковую поверхность, образуют поверхностный макроток намагничивания  $I'$ . Этот ток  $I'$  создаёт такое же магнитное поле  $\vec{B}'$ , как и микротоки  $I_m$ . Во втором случае (рисунок 12.2.2, б) магнетик имеет неоднородность (увеличивается) в направлении оси  $X$ , что отмечено толщиной окружностей, изображающих микротоки  $I_m$ . В точках соприкосновения микротоки уже не компенсируют друг друга и этому можно сопоставить макротоки  $I'$ , направленные вдоль оси  $Y$ . Вектор намагниченности  $\vec{J}$  в данном случае направлен за плоскость рисунка, а его длина растёт с увеличением координаты  $X$ .

Как уже отмечено выше, токи намагничивания  $I'$  создают то же самое магнитное поле  $\vec{B}'$ , что и реальные молекулярные токи  $I_m$ . К сожалению, следует отметить, что введение токов намагничивания  $I'$  не решает проблему с расчётом результирующего магнитного поля  $\vec{B}$ , поскольку эти токи, определяя магнитное поле  $\vec{B}'$ , и тем самым результирующее магнитное поле  $\vec{B}$ , сами зависят от результирующего магнитного поля  $\vec{B}$ . Введение вектора намагниченности  $\vec{J}$ , как мы увидим в следующем параграфе, является одним из шагов в направлении решения проблемы.

В дополнение отметим, что к обсуждаемой проблеме определения результирующего магнитного поля  $\vec{B}$  в магнетике следует добавить и то, что входящее в его состав магнитное поле  $\vec{B}'$  зависит от конфигурации токов намагничивания, которая в свою очередь зависит не только от природы магнетика, но и его конфигурации (формы и величины). Поэтому имеется лишь несколько исключительных (с точки зрения симметрии и формы магнетика), когда удаётся рассчитать магнитное поле  $\vec{B}'$  и, следовательно, магнитное поле  $\vec{B}$ . Ввиду отмеченных сложностей расчёты магнитного поля в магнетиках в конкретных конфигурациях в общем курсе физики не осуществляются, а выносятся в специальные курсы.

### 12.3. Вектор напряжённости магнитного поля

Мы показали, что результирующее магнитное поле  $\vec{B}$  в магнетике создаётся токами проводимости и токами намагничивания. При этом век-

тор индукции результирующего магнитного поля  $\vec{B}$  подчиняется закону полного тока:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{сум}} . \quad (12.3.1)$$

Здесь мы должны учесть, что суммарный ток  $I_{\text{сум}}$ , охватываемый контуром интегрирования  $l$ , равен сумме токов проводимости  $I$  и токов намагничивания  $I'$ , охватываемый этим контуром, то есть:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I') . \quad (12.3.2)$$

Как показано в п. 1.12, циркуляция токов намагниченности  $\vec{J}$  по произвольному контуру равна суммарному току намагничивания  $I'$  (12.2.2). Следовательно, подставляя (12.2.2) в (12.3.2), получаем выражение:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 I' , \quad (12.3.3)$$

из которого находим формулу:

$$\oint_l \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) \cdot d\vec{l} = I , \quad (12.3.4)$$

в правой стороне которой находится суммарный ток проводимости  $I$ , охваченный рассматриваемым контуром.

Введём новый вспомогательный вектор  $\vec{H}$  при помощи выражения:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) , \quad (12.3.5)$$

который называют **вектором напряжённости** магнитного поля. Как следует из приведённого определения, в СИ напряжённость магнитного поля измеряется, как и намагниченность, в А/м.

С учётом введённого понятия напряжённости магнитного поля получаем соотношение, которое называют *теоремой о циркуляции* вектора  $\vec{H}$ :

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I . \quad (12.3.6)$$

Видим, что циркуляция вектора напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$  определяется только токами проводимости, величины которых и расположение в пространстве известны.

Однако для определения поля  $\vec{B}$  этого ещё недостаточно, поскольку, как это видно из формулы (12.3.5), для определения вектора индукции магнитного, кроме вектора напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$ , необходимо знание вектора намагниченности  $\vec{J}$ . Видим также, что если указать связь между векторами  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$ , то по известному полю  $\vec{H}$  уже можно найти и вектор  $\vec{B}$ .

Опыт показывает, что для многих изотропных и немагнитоупорядоченных магнетиков в области не очень сильных магнитных полей векторы  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$  связаны линейной зависимостью, то есть:

$$\vec{J} = \chi_m \vec{H}, \quad (12.3.7)$$

где постоянный и безразмерный скаляр  $\chi_m$  называется магнитной восприимчивостью вещества, и который, в отличие от диэлектрической восприимчивости  $\chi_e$ , может быть как положительным, так и отрицательным.

Для каждого магнетика характерно своё значение магнитной восприимчивости, определяемое свойствами данного магнетика. Этот вопрос будет обсуждён далее при рассмотрении механизмов намагничивания вещества и видов магнетиков. С учётом (12.3.7) получаем формулу, связывающую только векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  и уже действительно пригодную для определения вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  по известному вектору напряжённости магнитного поля:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (12.3.8)$$

В формуле (12.3.8) введён новый безразмерный коэффициент  $\mu = 1 + \chi_m > 0$ , который называется магнитной проницаемостью вещества и является положительной величиной. Формула (12.3.8) показывает также, что, при выполнении сформулированных ранее условий, векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  одинаково направлены.

#### 12.4. Условия для магнитного поля на границе раздела двух сред

Рассмотрим вопрос о поведении векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела двух однородных изотропных магнетиков. Ответ на поставленный вопрос

можно получить при помощи теоремы Гаусса для вектора индукции магнитного поля.

Векторы индукции и напряжённости магнитного поля представим (как в разделе 9.4) в виде сумм  $\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_\tau$  и  $\vec{H} = \vec{H}_n + \vec{H}_\tau$  взаимно перпендикулярных векторов  $\vec{B}_n$  и  $\vec{B}_\tau$  ( $\vec{B}_n \perp \vec{B}_\tau$ ) и  $\vec{H}_n$  и  $\vec{H}_\tau$  ( $\vec{H}_n \perp \vec{H}_\tau$ ), которые называются нормальными и тангенциальными составляющими соответствующих векторов.

Нормальные составляющие соответствующих векторов перпендикулярны к рассматриваемым поверхностям в точках наблюдения, а тангенциальные составляющие этих векторов направлены по касательным к поверхностям в точках наблюдения.

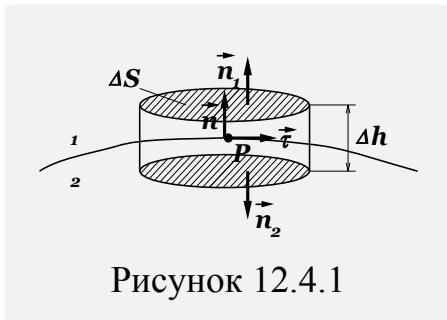


Рисунок 12.4.1

Сначала рассмотрим вопрос о векторе  $\vec{B}$ . Для этого выберем некоторую точку  $P$  (точку наблюдения) на границе раздела двух однородных изотропных магнетиков и проведём вспомогательные построения. Проведём в точке  $P$  единичные векторы:  $\vec{\tau}$  — орт касательной плоскости к границе раздела сред и  $\vec{n}$  — орт нормали к касательной плоскости к границе раздела сред (см. рисунок 12.4.1). Построим вблизи точки  $P$  элементарный объём в виде прямого цилиндра, основания которого параллельны к упомянутой касательной плоскости, а образующая параллельна вектору  $\vec{n}$ . Площадь основания цилиндра обозначим  $\Delta S$ , а его высоту  $\Delta h$ . Напомним, что условие элементарности объёма требует однородности рассматриваемых характеристик магнитного поля, в данном случае вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  в соответствующих его частях, заполненных магнетиками 1 и 2. В качестве поверхности интегрирования  $S$  в теореме Гаусса для вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  выберем замкнутую поверхность, ограничивающую описанный элементарный объём.

При  $\Delta h \rightarrow 0$  потоком вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь, так что теорема Гаусса даёт:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_{1n_1} \Delta S + B_{2n_2} \Delta S = (B_{1n} - B_{2n}) \Delta S = 0. \quad (12.4.1)$$

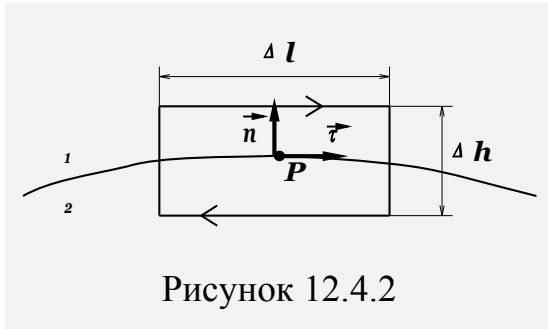
В (12.4.1) учтено, что при интегрировании по внешней стороне поверхности  $S$  орт  $\vec{n}_1 = \vec{n}$ , а орт  $\vec{n}_2 = -\vec{n}$ . Следовательно, для нормальной со-



составляющей вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  при переходе через границу раздела рассматриваемых магнетиков выполняется условие:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (12.4.2)$$

которое означает непрерывность нормальной составляющей вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  при упомянутом переходе границы раздела сред.



Для выяснения вопроса о поведении вектора  $\vec{H}$  вновь выберем точку наблюдения  $P$  на границе раздела двух однородных изотропных магнетиков и проведём вспомогательные построения, аналогичные предыдущему случаю, то есть проведём в точке  $P$  орт  $\vec{\tau}$  касательной плоскости к границе раздела сред и орт нормали  $\vec{n}$  к этой касательной плоскости. Построим вблизи точки  $P$  малый замкнутый контур в виде прямоугольника, лежащего в плоскости, в которой расположены орты  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$ , а стороны прямоугольника параллельны указанным ортам (см. рисунок 12.4.2). Длины сторон прямоугольника обозначим через  $\Delta l$  и  $\Delta h$ .

Будем полагать, что контур интегрирования  $l$  достаточно мал, так что напряжённости магнитного поля постоянны на горизонтальных участках контура в соответствующих его частях, находящихся в средах 1 и 2. При  $\Delta h \rightarrow 0$  вкладом интегралов по вертикальным сторонам прямоугольника в циркуляцию вектора напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$  по рассматриваемому контуру можно пренебречь, так что теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$  даёт:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1\tau} \Delta l - H_{2\tau} \Delta l = I, \quad (12.4.3)$$

где  $I$  – суммарный электрический ток проводимости, охваченный контуром  $l$ . В формуле (12.4.3) учтено, что при интегрировании по контуру  $l$  орт  $\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}$ , а орт  $\vec{\tau}_2 = -\vec{\tau}$ .

Следовательно, для тангенциальной составляющей вектора напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$  при переходе через границу раздела рассматриваемых магнетиков выполняется условие:

$$H_{1\tau} \Delta l - H_{2\tau} \Delta l = I. \quad (12.4.4)$$

Если учесть, что при получении (12.4.4) использовано условие  $\Delta h \rightarrow 0$  (контур стягивается в линию) и ввести линейную плотность токов проводимости вблизи точки наблюдения на границе раздела сред соотношением  $i = I / \Delta l$ , то вместо (12.4.4) получаем выражение:

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = i. \quad (12.4.5)$$

Формула (12.4.5) означает, что тангенциальная составляющая вектора напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$  на границе раздела сред в общем случае терпит разрыв, связанный с наличием поверхностных токов проводимости.

Если же на границе раздела сред поверхностные токи проводимости отсутствуют ( $i = 0$ ), то тангенциальная составляющая вектора напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$  на границе раздела сред будет непрерывной, то есть:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (12.4.6)$$

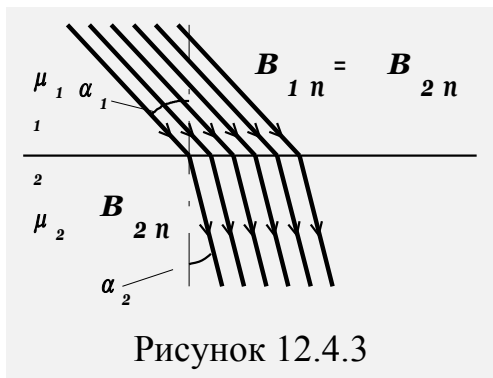
С учётом связи векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  (12.3.8) в ситуации, когда справедлива формула (12.4.6), находим для тангенциальных составляющих вектора  $\vec{B}$ :

$$B_{1\tau} / \mu_1 = B_{2\tau} / \mu_2, \quad \Rightarrow \quad B_{1\tau} / B_{2\tau} = \mu_1 / \mu_2. \quad (12.4.7)$$

Аналогично, используя указанную связь векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ , из формулы (12.4.2) получаем:

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}, \quad \Rightarrow \quad H_{1n} / H_{2n} = \mu_2 / \mu_1. \quad (12.4.8)$$

Как и в случае диэлектриков, силовые линии векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  на границе раздела двух магнетиков испытывают преломление.



Найдём соотношения, определяющие это преломление. Для наглядности изобразим силовые линии вектора  $\vec{B}$  на границе раздела двух однородных и изотропных диэлектриков (рисунок 12.4.3) в случае отсутствия токов проводимости на этой границе. Из рисунка 12.4.3 следует, что:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{B_{1\tau} / B_{1n}}{B_{2\tau} / B_{2n}} = \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1 H_{1\tau}}{\mu_2 H_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (12.4.9)$$

Видим, что тангенс угла наклона силовых линий вектора  $\vec{B}$  пропорционален магнитной проницаемости среды. Следовательно, силовые линии вектора  $\vec{B}$  в среде 1 будут гуще, чем в среде 2, то есть магнитное поле в среде 1 сильнее, нежели в среде 2.

## 12.5. Атом в магнитном поле

Для понимания механизмов намагничивания вещества необходимо знать поведение отдельных атомов и молекул во внешнем магнитном поле и уметь количественно описывать и рассчитывать результаты воздействия этого поля. В настоящее время известно, что адекватное описание указанных явлений основывается на квантово-механических представлениях о строении и свойствах атомов и молекул. В частности, в точном (квантово-механическом) описании бессмысленно говорить о траектории движения электронов в атомах. Однако основные особенности механизмов намагничивания вполне удовлетворительно (по крайней мере, качественно, а иногда и количественно) могут быть описаны на языке классической физики, без привлечения квантово-механических представлений. Именно такой подход к описанию явлений намагничивания, основанный на законах классической физики, используется в настоящем разделе.

С учётом приведённых выше замечаний качественное описание рассматриваемых магнитных явлений будем основывать на предположении о классическом движении электронов в атомах по замкнутым траекториям (круговым или эллиптическим).

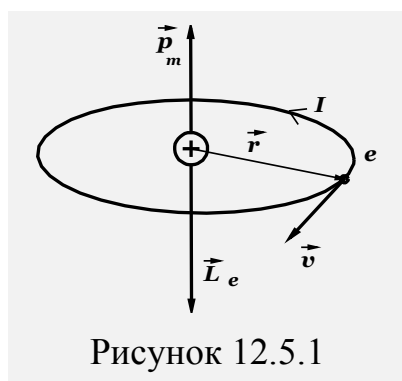


Рисунок 12.5.1

Рассмотрим простейшую классическую модель атома водорода (рисунок 12.5.1). В центре атома находится положительно заряженное тяжёлое неподвижное ядро, вокруг которого по круговой орбите радиуса  $r$  с постоянной по модулю скоростью  $\vec{v}$  вращается отрицательно заряженный электрон, абсолютная величина заряда которого равна  $e$ , а масса  $m$ . Связанные с таким движением характеристики определяются формулами:

1) частота  $\nu$  и период обращения  $T$ :

$$T = 2\pi r / v, \quad \nu = 1/T = v / 2\pi r; \quad (12.5.1)$$

2) момент импульса электрона  $\vec{L}_e$ :

$$\vec{L}_e = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad L_e = mvr = 2m\nu S, \quad S = \pi r^2; \quad (12.5.2)$$

3) сила тока и магнитный момент:

$$I = e / T = ev, \quad \vec{p}_m = I\vec{S}, \quad p_m = IS = evS = (e / 2m)L_e. \quad (12.5.3)$$

С учётом направлений векторов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}_e$ , находим:

$$\vec{p}_m = -(e / 2m)\vec{L}_e = g\vec{L}_e, \text{ а для их длин } p_m = (e / 2m)L_e = |g|L_e, \quad (12.5.4)$$

где отрицательный скаляр  $g = -(e / 2m)$  называется гиромагнитным отношением орбитальных моментов. Можно доказать, что соотношение (12.5.4), полученное для круговой орбиты, на самом является универсальным и справедливо для любых орбит, в том числе и эллиптических.

При помещении атома в магнитное поле на круговой ток, созданный движущимся электроном по замкнутой орбите, действует момент сил  $\vec{M}$  (см. формулу (11.9.10)):

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} = g\vec{L}_e \times \vec{B} = -g\vec{B} \times \vec{L}_e. \quad (12.5.5)$$

Из механики известно (закон изменения момента импульса), что скорость изменения момента импульса системы равна суммарному моменту сил, действующих на систему, то есть в нашем случае:

$$d\vec{L}_e / dt = -g\vec{B} \times \vec{L}_e = \vec{\omega}_L \times \vec{L}_e, \quad \vec{\omega}_L = -g\vec{B} = (e / 2m)\vec{B}. \quad (12.5.6)$$

Легко заметить, что в (12.5.6) произведение  $(-g\vec{B} = (e / 2m)\vec{B})$  – вектор, имеющий размерность  $[T^{-1}]$ , то есть размерность частоты, и поэтому обозначен  $\vec{\omega}_L$ . Вектор  $\vec{\omega}_L$ , одинаково направленный с вектором  $\vec{B}$ , называется вектором угловой скорости прецессии Лармора (1900 г., Джозеф Лармор, англ., 1857–1942) и определяется только вектором  $\vec{B}$ .

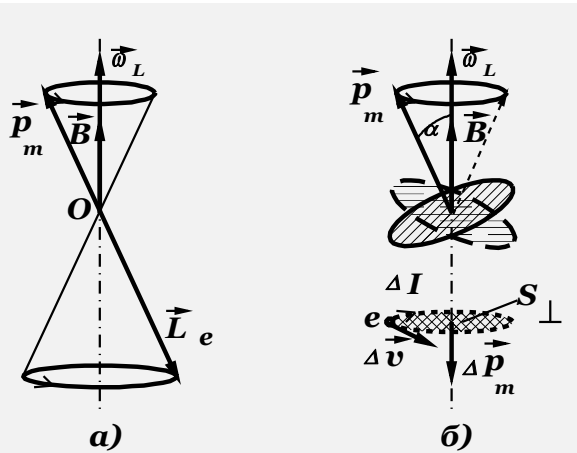


Рисунок 12.5.2

Взаимное расположение рассматриваемых векторов поясняется рисунком 12.5.2, а. При включении магнитного поля вектор  $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ , направленный перпендикулярно плоскости, в которой в данный момент времени находятся векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ , поворачивает плоскость орбиты вращения электрона (и обусловленного этим вращением орбитального тока  $I = e / T = ev$ ). При этом концы век-

торов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}_e$  вращаются вокруг вектора  $\vec{B}$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}_L$  и описывают в пространстве окружности, плоскости которых перпендикулярны вектору  $\vec{B}$ , а центры находятся на линии действия вектора  $\vec{B}$ . Сами векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}_e$  совершают движение, называемое прецессией Лармора, и описывают в пространстве конические поверхности, изображённые на рисунке 12.5.2, а.

Прецессия Лармора вектора  $\vec{p}_m$  (и орбиты вращения электрона) приводит к появлению дополнительного вращательного движения электрона, изображённого пунктиром на рисунке 12.5.2, б. Этому прецессионному движению соответствуют дополнительный электрический ток силой

$$\Delta I = e(\omega_L / 2\pi) = \frac{e^2 B}{4\pi m} \quad (12.5.7)$$

и дополнительный магнитный момент  $\Delta\vec{p}_m$ , модуль которого определяется выражением

$$\Delta p_m = \Delta I S_{\perp} = \frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m} B. \quad (12.5.8)$$

Очень важно отметить, что вектор дополнительного (обусловленного прецессией Лармора) магнитного момента  $\Delta\vec{p}_m$  противоположно направлен вектору индукции внешнего магнитного поля  $\vec{B}$  ( $\Delta\vec{p}_m \uparrow\downarrow \vec{B}$ ), то есть:

$$\Delta\vec{p}_m = -\frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m} \vec{B}. \quad (12.5.9)$$

Кроме того, очень существенным является тот факт, что, в случае многоэлектронного атома, каждый из электронов во внешнем магнитном поле будет совершать прецессионное движение, которое приведёт к появлению дополнительных прецессионных токов и магнитных моментов. При этом *все дополнительные магнитные моменты направлены одинаково – противоположно вектору индукции внешнего магнитного поля  $\vec{B}$*  – независимо от направления орбитального вращательного движения электронов. Следовательно, если в атоме  $Z$  электронов, то каждому из них во внешнем магнитном поле соответствует дополнительный магнитный момент  $\Delta\vec{p}_{m,i}$ :

$$\Delta\vec{p}_{m,i} = -\frac{e^2 S_{\perp,i}}{4\pi m} \vec{B}, \quad i = 1, 2, \dots, Z, \quad (12.5.10)$$

а всему атому  $\Delta\vec{p}_m$ :

$$\Delta\vec{p}_m = -\sum_{i=1}^Z \frac{e^2 S_{\perp,i}}{4\pi m} \vec{B} = -\frac{e^2}{4\pi m} \vec{B} \cdot \sum_{i=1}^Z S_{\perp,i} = -\frac{e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m} \vec{B}, \quad \langle S_{\perp} \rangle = \frac{1}{Z} \left( \sum_{i=1}^Z S_{\perp,i} \right). \quad (12.5.11)$$

Полученные здесь результаты будут использованы при обсуждении видов магнетиков, и, в частности, диамагнетиков.

Отметим, что в приведённых расчётах магнитных моментов атомов не учтён магнитный момент ядер этих атомов. Это можно сделать по той причине, что теория и опыт дают магнитный момент ядра примерно в 2000 раз меньший магнитного момента электрона в атоме.

## 12.6. Диамагнетизм. Диамагнетики

Обсудим свойства магнетиков, у атомов (молекул) которых при отсутствии внешнего магнитного поля суммарный магнитный момент, связанный с орбитальным движением электронов в атоме (молекуле), равен нулю. Во внешнем магнитном поле эти магнетики намагничиваются таким образом, что вектор индукции магнитного поля, обусловленного ориентацией во внешнем магнитном поле замкнутых молекулярных токов  $I_m$ , направлен в сторону, противоположную, чем у вызвавшего это намагничивание внешнего магнитного поля. Суммарное магнитное поле внутри магнетика будет слабее, нежели внешнее магнитное поле. Такое поведение веществ в магнитном поле называется **диамагнетизмом**, а сами эти вещества называются **диамагнетиками**. Диамагнетики выталкиваются из области с сильным магнитным полем в область с более слабым магнитным полем. К диамагнетикам относятся инертные газы, молекулярные водород и азот, висмут, цинк, медь, золото, серебро, углерод, кремний, германий, вода (в жидком состоянии), глицерин, ацетон, нафталин,  $NaCl$  и многие другие вещества.

Причины таких свойств диамагнетиков легко объяснить на основе результатов, полученных в п. 12.5.

Действительно, рассмотрим диамагнетик, атомы которого имеют  $Z$  электронов, магнитные моменты которых в отсутствии внешнего магнитного поля в сумме дают нулевой магнитный момент. При появлении внешнего магнитного поля вследствие прецессии Лармора атомы приобретают одинаковые наведённые магнитные моменты, определяемые выражением

(12.5.11), а вектор намагниченности диамагнетика, в соответствии с (12.1.4), будет определяться выражением:

$$\vec{J} = n \langle \vec{p}_m \rangle = n \Delta \vec{p}_m = - \frac{e^2 n Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m} \vec{B} = - \frac{e^2 n Z \langle S_{\perp} \rangle \mu_0}{4\pi m} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \chi'_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad (12.6.1)$$

где введён безразмерный отрицательный скаляр  $\chi'_m$ :

$$\chi'_m = - \frac{e^2 n Z \langle S_{\perp} \rangle \mu_0}{4\pi m}. \quad (12.6.2)$$

Из сравнения с (12.3.7) ( $\vec{J} = \chi_m \vec{H}$ ) видим, что этот скаляр  $\chi'_m$  не является магнитной восприимчивостью. Однако легко установить связь  $\chi'_m$  и  $\chi_m$ . Действительно, если учесть, что для однородных изотропных магнетиков в несильных магнитных полях  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$ , то из (12.6.1) находим  $\vec{J} = \chi'_m \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} / \mu_0 = \chi'_m (1 + \chi_m) \vec{H}$ , то есть имеем:

$$\begin{aligned} \chi_m &= \chi'_m (1 + \chi_m), \Rightarrow \chi'_m - 1 = \chi_m / (1 + \chi_m) - 1, \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 - \chi'_m = 1 / (1 + \chi_m), \end{aligned} \quad (12.6.3)$$

или, выражая  $\chi_m$  через  $\chi'_m$ , находим:

$$\chi_m = \chi'_m / (1 - \chi'_m). \quad (12.6.4)$$

Оценки для конкретных диамагнетиков дают величины  $|\chi'_m| \sim (10^{-9} - 10^{-5})$ . Например, принимая для атома гелия  $\langle S_{\perp} \rangle \approx 5 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2$ ,  $n \approx 3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$  и используя табличные значения других констант, находим  $|\chi'_m| \approx 10^{-9}$ , то есть  $|\chi'_m| \ll 1$  и, с учётом приближения  $1 / (1 + x) \cong 1 - x$ , находим  $\chi_m \cong \chi'_m (1 + \chi'_m) \cong \chi'_m$ . Следовательно, для определения магнитной восприимчивости диамагнетиков можно пользоваться формулой (12.6.2). Кстати, опыт даёт для гелия  $|\chi_m| \approx 2,25 \cdot 10^{-9}$ , так что количественные результаты, полученные на основе рассмотренной выше классической модели, следует признать вполне удовлетворительными, а применение приближения  $\chi_m \cong \chi'_m$  — вполне обоснованным. Опыт показывает, что диамагнетики (во всех агрегатных состояниях) имеют магнитную восприимчивость, модуль которой изменяется в диапазоне от  $10^{-9}$  до  $10^{-5}$ .

Если учесть, что  $\chi_m < 0$  и  $|\chi_m| \ll 1$ , то для магнитной проницаемости диамагнетиков получаем  $0 < \mu < 1$ .

Так как радиусы электронных орбит у атомов различных веществ не отличаются значительно, то и магнитные восприимчивости различных диамагнетиков в одном агрегатном состоянии и при одинаковых условиях должны быть близки. Действительно, опыт показывает, что магнитная восприимчивость азота равна  $-6,2 \cdot 10^{-9}$ , аргона  $-10,9 \cdot 10^{-9}$ , водорода  $-2,25 \cdot 10^{-9}$  и т. п. У диамагнетиков жидкостей и твёрдых тел концентрации атомов примерно в 1000 раз больше, чем у газов, поэтому выше (по модулю) и их магнитная восприимчивость. Так, у воды магнитная восприимчивость  $-9 \cdot 10^{-6}$ , у серебра  $-25 \cdot 10^{-6}$  и т. д.

### 12.7. Парамагнетизм. Парамагнетики

Если магнитные моменты электронов в атомах вещества не компенсируют друг друга и суммарный магнитный момент атомов в отсутствии внешнего магнитного поля отличен от нуля, то поведение таких магнетиков во внешнем магнитном поле отличается от описанного в предыдущем параграфе. Прежде чем обсудить поведение таких веществ во внешнем магнитном поле, отметим, что без внешнего магнитного поля образцы из таких веществ ненамагничены. Это объясняется тем, что магнитные моменты атомов этих веществ при отсутствии внешнего магнитного поля ориентированы в пространстве хаотично вследствие их (атомов) теплового движения. Под хаотичной ориентацией магнитных моментов атомов понимается ситуация, когда нет какого-либо выделенного направления, вдоль которого ориентировано больше молекул, нежели вдоль любого другого направления. Совместное действие внешнего магнитного поля и тепловое движение атомов приводит к преимущественной ориентации магнитных моментов атомов «по полю», что означает, что доля атомов, магнитные моменты которых имеют острые углы с вектором индукции внешнего магнитного поля, будет преобладать над долей атомов, магнитные моменты которых имеют тупые углы с вектором индукции внешнего магнитного поля. С ростом магнитного поля доля первых молекул возрастает, а доля вторых уменьшается. Такое поведение веществ в магнитном поле называется *парамагнетизмом*, а сами эти вещества называются *парамагнетиками*. К парамагнетикам относятся кислород  $O_2$ , оксид азота  $NO$ , оксид марганца  $MnO$ , щелочные и щелочно-земельные металлы и другие вещества.



Здесь необходимо отметить, что прецессия Лармора электронных орбит, приводящая к диамагнетизму, имеет место и у парамагнетиков, а также и всех других веществ, что позволяет назвать его универсальным явлением. Но поскольку парамагнетизм существенно более сильный эффект, чем диамагнетизм (при комнатной температуре  $|\chi_m^{\text{парамагн}} / \chi_m^{\text{диамагн}}| \geq (10^2 - 10^3) \gg 1$ ), то результирующий магнитный момент атомов и молекул определяется только парамагнетизмом. Следовательно, наблюдать диамагнетизм можно только в том случае, если атомы магнетика имеют нулевой магнитный момент.

Вновь, как и для диамагнетиков, ограничимся простой классической моделью, позволяющей качественно описать явление парамагнетизма газов и оценить их магнитную восприимчивость.

Рассмотрим однородный изотропный газообразный парамагнетик. Суммарный магнитный момент атомов парамагнетика обозначим  $\vec{p}_m$ . Потенциальная энергия атомов во внешнем магнитном поле определяется выражением (11.9.15), а именно  $W_n = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$ . Аналогично характеру распределения молекул газа в поле тяжести Земли воспользуемся распределением Больцмана:

$$n = n_0 \cdot e^{-W_n/kT} = n_0 \cdot e^{(\vec{p}_m \cdot \vec{B})/kT}, \quad (12.7.1)$$

где  $n$  и  $n_0$  – концентрации молекул парамагнетика, имеющих потенциальные энергии  $W_n = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$  и 0, соответственно,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – термодинамическая температура.

Выделим некоторый объём магнетика  $\Delta V$  и будем считать, что в отсутствие внешнего магнитного поля дипольные моменты атомов распределены совершенно беспорядочно (хаотически) и равномерно по всем координатным осям, так что в направлении любой оси направлена одна треть магнитных моментов атомов:  $N_x = N_y = N_z = N/3$ , где  $N$  – число атомов в выделенном объёме. При этом будем полагать, что в среднем половина магнитных моментов атомов ориентирована в направлении данной оси, а вторая половина – против.

При включении внешнего магнитного поля вдоль какой либо оси, например оси абсцисс, число молекул  $N_1$  с магнитными моментами вдоль вектора  $\vec{B}$  увеличится, а число молекул  $N_2$  с магнитными моментами против вектора  $\vec{B}$  – уменьшится, так что для намагниченности получим:

$$J = \frac{N_1 p_m - N_2 p_m}{\Delta V}. \quad (12.7.2)$$

В соответствии с (12.7.1) имеем:

$$N_1 = C e^{-W_{n,1}/kT}, \quad N_2 = C e^{-W_{n,2}/kT}, \quad (12.7.3)$$

где  $C$  – некоторая константа,  $W_{n,1} = -p_m \cdot B$ ,  $W_{n,2} = p_m \cdot B$ .

Магнитные моменты атомов парамагнетиков весьма малы и составляют, как увидим далее, величины около  $10^{-23}$  А·м<sup>2</sup>, а магнитное поле индукцией около 1 Тл – очень сильное магнитное поле, так что при комнатных температурах ( $kT \approx 4 \cdot 10^{-21}$  Дж) отношение  $p_m B / kT \ll 1$ . Следовательно, если воспользоваться приближением  $e^x \cong 1 + x$ , то для намагниченности  $J$  из (12.7.2) с учётом (12.7.3) получим:

$$J = \frac{C p_m \{(1 + p_m B / kT) - (1 - p_m B / kT)\}}{\Delta V} = \frac{2C p_m^2 B / kT}{\Delta V}. \quad (12.7.4)$$

Поскольку в слабых магнитных полях  $N_x = N_1 + N_2 = C(1 + x + 1 - x) = 2C = N / 3$ , то для константы  $C$  имеем  $C = N / 6$  и, подставляя это значение в формулу (12.7.4), получим:

$$J = \frac{(N / \Delta V) p_m^2 B}{3kT} = \frac{n p_m^2 \mu_0}{3kT} \frac{B}{\mu_0} = \chi'_m \frac{B}{\mu_0}. \quad (12.7.5)$$

Следовательно, для магнитной восприимчивости парамагнетика при  $\chi'_m \ll 1$  (что будет ниже подтверждено для парамагнетиков) имеем  $\chi_m \cong \chi'_m$ , то есть:

$$\chi_m = \frac{n p_m^2 \mu_0}{3kT}. \quad (12.7.6)$$

Видим, что магнитная восприимчивость парамагнетиков – положительная величина, то есть во внешнем магнитном поле эти магнетики намагничиваются таким образом, что вектор индукции магнитного поля, обусловленного ориентацией во внешнем магнитном поле замкнутых молекулярных токов  $I_m$ , направлен в ту же сторону, что и у вызвавшего это намагничивание внешнего магнитного поля. В результате суммарное магнитное поле внутри магнетика будет сильнее, чем внешнее магнитное поле.

Оценим магнитную восприимчивость газообразных магнетиков при нормальных условиях. Концентрация молекул для газов в этом случае порядка  $10^{25} \text{ м}^{-3}$ , магнитные моменты молекул (атомов) парамагнетиков составляют величины около  $10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , индукция магнитного поля около 1 Тл,  $kT \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ , так что имеем  $\chi_m \approx 10^{-7}$ . Следовательно, действительно можно пользоваться заменой  $\chi'_m$  на  $\chi_m$ , поскольку выполняется условие  $\chi'_m \ll 1$ . Опыт показывает, что парамагнетики (во всех агрегатных состояниях) имеют магнитную восприимчивость в диапазоне от  $10^{-7}$  до  $10^{-3}$ . Таким образом, видим, что парамагнетизм существенно более сильное магнитное явление, нежели диамагнетизм. Например, магнитная восприимчивость кислорода при комнатной температуре имеет значение  $\chi_m = 18,6 \cdot 10^{-7}$ . У твёрдых парамагнетиков концентрации атомов выше примерно в 1000 и более раз. Опыт даёт: для платины  $\chi_m = 2,58 \cdot 10^{-4}$ , для натрия  $\chi_m = 8,3 \cdot 10^{-6}$ , для лития  $\chi_m = 2,3 \cdot 10^{-5}$ .

Если учесть, что у парамагнетиков  $0 < \chi_m \ll 1$ , то для их магнитной проницаемости получаем  $\mu > 1$ .

Последовательная классическая теория парамагнетизма, построенная в 1905 г. Полем Ланжевеном (фр., 1872–1946), даёт для магнитной восприимчивости точно такой же результат, как и полученный нами. Точное совпадение этих формул, конечно, случайное, но оно подтверждает, что выбранная нами модель достаточно хорошо отражает основные черты парамагнетизма.

## 12.8. Ферромагнетики и их свойства

Прежде всего отметим, что и у диамагнетиков, и у парамагнетиков  $|\chi_m| \ll 1$ , и оба эти типа магнетиков называются слабомагнитными веществами, а диамагнетизм и парамагнетизм относятся к слабым магнитным явлениям, причём и диамагнетизм, и парамагнетизм могут наблюдаться в веществах в любом агрегатном состоянии. Сильные магнитные явления имеют место только в кристаллических веществах, которые обладают определённой упорядоченностью магнитных моментов узлов кристаллической решётки, и поэтому называются магнитоупорядоченным.

Основными видами магнитоупорядоченных веществ являются **ферромагнетики**, **антиферромагнетики** и **ферримагнетики**. Мы в основном будем рассматривать ферромагнетики и лишь упомянем о некоторых свой-

ствах остальных магнитоупорядоченных веществ. Типичными представителями ферромагнетиков являются железо, кобальт, никель и их сплавы.

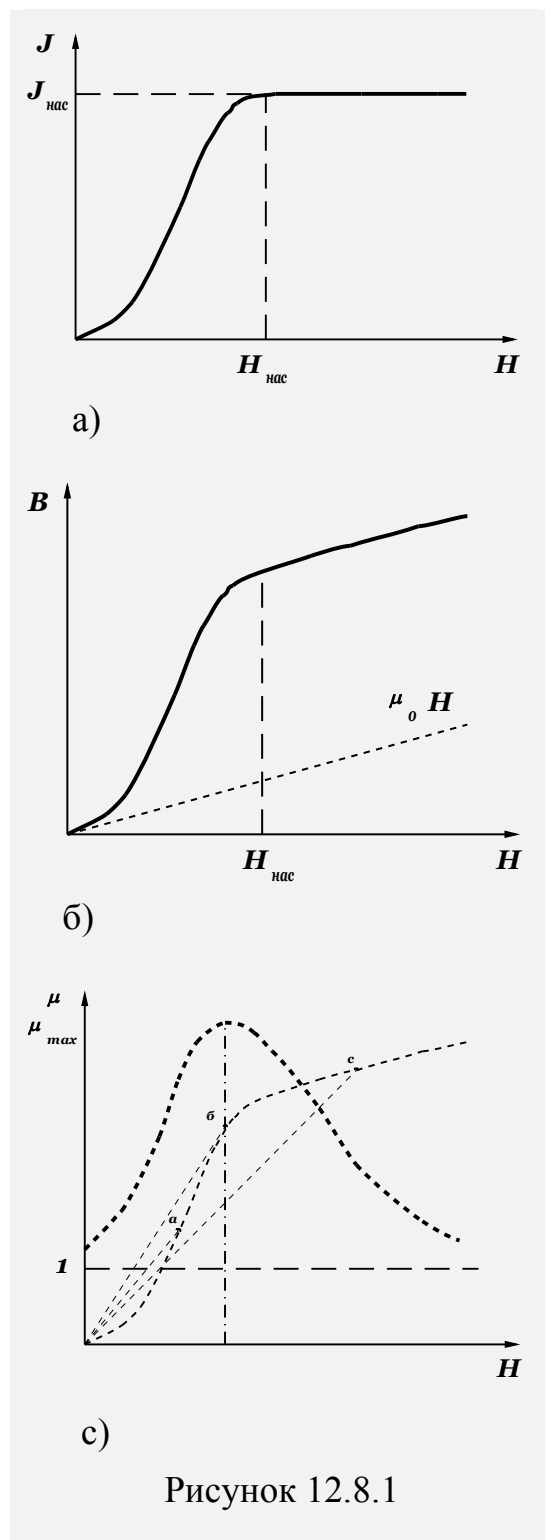


Рисунок 12.8.1

Приведём экспериментальные результаты для пояснения свойств ферромагнетиков. На рисунке 12.8.1, а, приведена основная кривая намагничивания ферромагнетика, то есть зависимость намагниченности от напряжённости внешнего магнитного поля такого ферромагнетика, у которого в первоначальном состоянии при  $H = 0$  намагниченность  $J$  тоже равна нулю. Видно, что зависимость  $J(H)$  существенно нелинейная, причём, начиная с некоторого значения  $H_{\text{нас}}$ , намагниченность ферромагнетика остаётся постоянной величиной, называемой намагниченностью насыщения. На рисунке 12.8.1, б, соответствующая этой кривой зависимость  $B = B(H)$ . В отличие от описанной выше основной кривой намагниченности изображённая на рисунке 12.8.1, б, кривая не имеет участка насыщения, поскольку  $B = B(H)$  является суммой кривой  $J = \mu_0 \chi_m(H) \cdot H$  на рисунке 12.8.1, а, с прямой линией  $B_0 = \mu_0 H$ .

Поскольку намагниченность ферромагнетика не прямо пропорциональна напряжённости магнитного поля, выражения типа (12.3.7) теряют смысл. Однако формально можно записать связь между  $B$  и  $H$  в виде формулы  $B = \mu_0 \mu(H) \cdot H$ , где  $\mu = 1 + \chi_m(H)$ , но в

ней магнитная проницаемость уже не константа, а достаточно сложная функция напряжённости магнитного поля. Графически эта зависимость  $\mu = \mu(H)$  изображена на рисунке 12.8.1, в.

Вид изображённой на этом рисунке кривой  $\mu = \mu(H)$  легко понять, если учесть, что значения магнитной проницаемости можно получить из рисунка 12.8.1, б, по формуле  $\mu = B / (\mu_0 H)$ . Отсюда следует, что магнитная проницаемость пропорциональна тангенсу угла наклона прямой, проходящей через начало координат и точку с координатами  $\{H, B(H)\}$  (точки «а», «б» и «с» на рисунке 12.8.1, с). Видим также, что максимального значения  $\mu_{\max}$  магнитная проницаемость достигает при том значении напряжённости магнитного поля, при котором указанная выше прямая касается кривой  $B(H)$  (точка «б» на рисунке 12.8.1, с).

Магнитная проницаемость  $\mu_{\max}$  для ферромагнетиков может достигать очень больших значений  $\mu_{\max} \sim (10^3 - 10^6)$ . Например, для чистого железа  $\mu_{\max} \sim 5000$ , для сплава супермаллой  $\mu_{\max} \sim 800\,000$ .

Заметим, что понятие магнитной проницаемости применяют только к основной кривой намагничивания, поскольку зависимость  $B(H)$ , кроме нелинейности, ещё и неоднозначна, то есть значение намагниченности зависит от предшествующей истории намагничивания. Такое явление, называемое магнитным *гистерезисом*, поясняется рисунком 12.8.2. По осям координат на этом рисунке откладывают проекции векторов напряжённости  $H_l$  и индукции магнитного поля  $B_l$  вдоль некоторой оси  $l$  по величине и направлению.

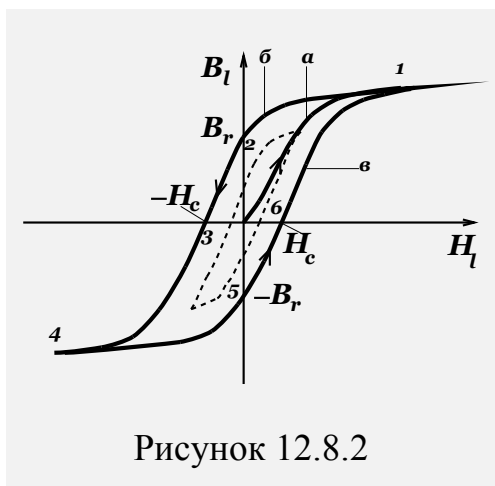


Рисунок 12.8.2

Если начать намагничивание из основного состояния (при  $H = 0$  намагниченность тоже равна нулю), то намагничивание будет осуществляться по кривой «а», пока не наступит насыщение ( $J = J_{\text{нас}}$ , точка 1 на рисунке 12.8.2). Уменьшение длины вектора напряжённости магнитного поля  $H$  приводит к изменению индукции магнитного поля  $B$  уже по другой кривой «б», которая расположена выше кривой «а».

При этом, когда напряжённость магнитного поля  $H$  станет равной нулю, ферромагнетик будет обладать остаточной индукцией  $B_r$  и соответствующей остаточной намагниченностью  $J_r$  (точка 2 на рисунке 12.8.2). Для того чтобы полностью размагнитить образец, необходимо приложить магнитное поле, вектор напряжённости которого имеет длину  $H_c$  (называется

коэрцитивная сила, точка 3 на рисунке 12.8.2) и направлен в сторону, противоположную первоначальному направлению на кривой «а». Дальнейшее увеличение длины вектора напряжённости магнитного поля, направленное в сторону, противоположную первоначальному, приведёт к намагничиванию ферромагнетика и достижению насыщения ( $J = -J_{нас}$ , точка 4 на рисунке 12.8.2), при этом вектор индукции также будет направлен в сторону, противоположную первоначальному направлению на кривой «а». Если после достижения насыщения начать уменьшение длины вектора напряжённости магнитного поля, то изменение длины вектора индукции магнитного поля будет вновь происходить по другой кривой (кривая «в» на рисунке 12.8.2) последовательно через точки 5 и 6, которые имеют те же названия и тот же смысл, что и точки 2 и 3 на кривой «б», только знаки у проекций векторов в этих точках будут противоположны знакам в точках 2 и 3 на кривой «б». Получаемая в итоге замкнутая кривая называется *петлёй гистерезиса*.

Значения  $B_r$  и  $H_c$  для различных ферромагнетиков меняются в широких пределах. Для трансформаторов с целью уменьшения потерь на перемагничивание сердечника необходимо использовать ферромагнетики с узкими петлями гистерезиса, то есть с малыми коэрцитивными силами и остаточными индукциями, а для постоянных магнитов, наоборот, с широкими петлями гистерезиса и большими коэрцитивными силами и остаточными индукциями. Например, у сплава алнико для постоянных магнитов  $B_r = 0,9$  Тл и  $H_c = 50\,000$  А/м.

Опыт показывает, что при перемагничивании ферромагнетики нагреваются, причём выделяемая при этом в единице объёма теплота  $Q_{перемагн}$  определяется выражением:

$$Q_{перемагн} = \oint H dB = S_{петли}, \quad (12.8.1)$$

то есть равна площади петли гистерезиса. Отсюда следует, что уменьшение площади петли гистерезиса в сердечниках трансформаторов, кроме уменьшения потерь на перемагничивание, приводит и к уменьшению нагрева этих сердечников и трансформаторов в целом.

Необходимо упомянуть о выводе ферромагнетика в основное состояние (при  $H = 0$  намагниченность тоже равна нулю). Для достижения этой цели намагниченный образец помещают внутрь катушки соленоида, по которой пропускают переменный электрический ток с постепенно убываю-

щей до нуля амплитудой этого тока. При этом ферромагнетик проходит многократные перемагничивания по сужающимся и сжимающимся в точку петлям гистерезиса (на рисунке 12.8.2 одна из промежуточных петель показана пунктиром). Похожий способ применяется и для размагничивания электронно-лучевых кинескопов телевизоров и мониторов компьютеров (с электронно-лучевой трубкой). Для этого перед экраном электронно-лучевой трубки помещают тороид, по катушке которого проходит переменный электрический ток с уменьшающейся до нуля амплитудой этого тока.

Кроме описанных свойств, все ферромагнетики обладают ещё одной особенностью: если повышать температуру ферромагнетика, то при температурах выше некоторой критической температуры  $T_K$  ферромагнитные свойства данного образца исчезают и он становится парамагнетиком. Указанная критическая температура  $T_K$  называется *температурой Кюри* (Пьер Кюри, фр., 1859–1906), которая для каждого ферромагнетика имеет своё значение. Например, для железа  $T_K = 1043$  К, для никеля  $T_K = 633$  К а для пермаллоя (сплав 70% *Fe* и 30% *Ni*)  $T_K = 343$  К.

Физическая природа ферромагнетизма не связана с орбитальными магнитными моментами электронов в атоме и поэтому на основе классической физики не может быть объяснена. В 1925 году Сэмюэл Абрахам Гаудсмит (амер., 1902–1979) и Джордж Юджин Уленбек (амер., 1900–1988), изучая поведение атомов в магнитных полях, пришли к выводу, что ряд опытов (например, опыт Штерна и Герлаха) невозможно объяснить, если исходить из наличия у электронов в атомах только орбитальных магнитных моментов. Анализируя имеющиеся в атомной физике трудности, они пришли к выводу о наличии у электрона также собственного магнитного момента и собственного момента импульса, которые первоначально связывали с вращательным движением электрона вокруг собственной оси и называли поэтому **спин** (от англ. *spin* – верчение, вращение, кружение). В дальнейшем была установлена ошибочность предположения о том, что собственный момент импульса (спин) и собственный (спиновый) магнитный момент электрона обусловлены вращательным движением электрона вокруг собственной оси, но название осталось. В настоящее время считается, что наличие у электрона и ряда других частиц спина и спинового магнитного момента является неотъемлемым свойством этих частиц, таким же, как наличие заряда, массы покоя и т. п. Основное отличие спина и спинового магнитного момента от аналогичных орбитальных величин состоит

в том, что коэффициент пропорциональности  $g_s$ , связывающий спиновый магнитный момент и спин, и называемый **гиромагнитным отношением спиновых моментов**, имеет тот же знак, что и **гиромагнитное отношение орбитальных моментов**  $g$ , но вдвое больше по модулю, то есть  $g_s = 2g = -2(e / 2m) = -e / m$ .

Понять природу ферромагнетизма удалось только с помощью введённого понятия спиновых моментов. У некоторых кристаллических переходных металлов (железо, никель и др.), имеющих незаполненные внутренние электронные оболочки, при определённых условиях в кристаллах между спиновыми магнитными моментами электронов различных узлов кристаллической решётки возникает имеющее чисто квантовомеханическую природу **обменное взаимодействие**. Такое обменное взаимодействие зависит от спиновых магнитных моментов электронов. Оказывается, что энергия такого обменного взаимодействия описывается выражением:

$$W_{обм} = -Is_1s_2, \quad (12.8.2)$$

где  $s_1$  и  $s_2$  – суммарные спины (собственные моменты импульса) электронов недостроенных оболочек взаимодействующих атомов, а  $I$  – так называемый **обменный интеграл**.

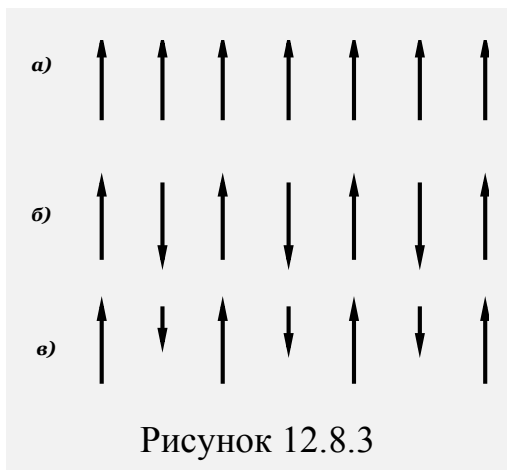


Рисунок 12.8.3

Для **ферромагнетиков**  $I > 0$ , и электронам соседних взаимодействующих атомов энергетически выгоднее **параллельная** ориентация спинов и спиновых магнитных моментов электронов в указанных оболочках (рисунок 12.8.3, а), а энергия этого обменного взаимодействия отрицательна, что соответствует силам **притяжения** и устойчивому состоянию. У ферромагнетиков, в отличие от парамагнетиков,

при температурах ниже температуры Кюри **энергия обменного взаимодействия** электронов значительно **больше энергии их теплового движения**, в результате чего спиновые магнитные моменты электронов большой группы атомов ориентируются вдоль некоторого выделенного в кристалле направления (направления лёгкого намагничивания) и тем самым образуют области самопроизвольного намагничивания, которые называются **доменами**. Расчёты и опыт показывают, что размеры доменов поряд-



ка 1–10 мкм, откуда следует, что это *макроскопические* объекты. В пределах каждого домена ферромагнетик намагничен до насыщения и домен имеет определённый магнитный момент. Направления этих магнитных моментов для разных доменов различны, поэтому при отсутствии внешнего магнитного поля суммарная намагниченность образца равна нулю. При включении внешнего магнитного поля домены, ориентированные по полю (их магнитные моменты имеют острый угол с вектором напряжённости внешнего магнитного поля), растут за счёт доменов, ориентированных против поля (их магнитные моменты имеют тупой угол с вектором напряжённости внешнего магнитного поля). В слабых внешних магнитных полях такой рост носит обратимый характер. В более сильных внешних магнитных полях происходит одновременная переориентация магнитных моментов целиком в пределах некоторых доменов. Такой процесс является необратимым, что и служит причиной магнитного гистерезиса.

Если в формуле для энергии обменного взаимодействия (12.8.2) оказывается, что  $I < 0$ , то электронам соседних взаимодействующих атомов энергетически выгоднее *антипараллельная* ориентация спиновых магнитных моментов электронов в незаполненных внутренних слоях (рисунок 12.8.3, б). Это значит, что при температурах ниже некоторой критической температуры – *температуры Нееля*  $T_N$  (Луи Неель, фр., 1904–2005), когда тепловое разупорядочение незначительно, спины соседних узлов кристаллической решётки будут чередоваться. Вещества с таким типом магнитного упорядочения называются *антиферромагнетиками*. Совокупности узлов кристаллической решётки с одинаковым направлением спинов называют магнитными подрешётками, которых может быть и более двух. Суммарный магнитный момент всех магнитных подрешёток равен нулю. Самыми известными антиферромагнетиками являются  $Cr$ ,  $Mn$ ,  $Vn$ , ряд окислов и солей переходных металлов, например  $MnO$ ,  $FeO$  и  $CuCl$ . Из рисунка 12.8.3, б, видно, что намагниченность антиферромагнетика близка к нулю.

Если в формуле для энергии обменного взаимодействия (12.8.2)  $I < 0$ , а у электронов соседних взаимодействующих атомов с антипараллельно ориентированными спиновыми магнитными моментами электронов суммарные спиновые магнитные моменты в незаполненных внутренних слоях различны по абсолютной величине (рисунок 12.8.3, в), то такая ситуация соответствует случаю *ферримагнетизма*. В ферримагнетиках возможно появление спонтанного намагничивания и их поведение, за исклю-

чением некоторых особенностей, аналогично поведению ферромагнетиков. К ферромагнетикам относятся, в частности, **ферриты** – вещества типа  $MeO \cdot Fe_2O_3$ , где  $Me$  – двухвалентный металл. Ферриты нашли широкое применение в технике, поскольку, обладая хорошими магнитными свойствами, они в то же время имеют большое электрическое сопротивление (до  $10^7$  Ом·м) и могут использоваться в технике СВЧ ввиду малых потерь на вихревые токи. Ферриты широко применяют также при изготовлении постоянных магнитов, а раньше широко применяли в ячейках памяти ЭВМ. Изготовленные из порошков высокотемпературным спеканием ферриты типа  $MnO_4 \cdot Mg_4 \cdot Fe_2O_3$  имеют прямоугольную петлю гистерезиса и обладают большим остаточным магнетизмом.

Для некоторых химических соединений возможно сложное, например спиралеобразное взаимное расположение спиновых магнитных моментов. Такие и более сложные структуры подробно рассматриваются в специальной литературе.

## 12.9. Явление электромагнитной индукции

В 1824 г. Доминик Франсуа Араго (фр., 1786–1853) обнаружил, что колебания свободно подвешенной магнитной стрелки затухают значительно быстрее, если под этой стрелкой или над ней находится медная пластина. Он же в 1825 г. обнаружил, что при быстром вращении указанной медной пластины расположенная над ней магнитная стрелка начинает вращаться в том же направлении.

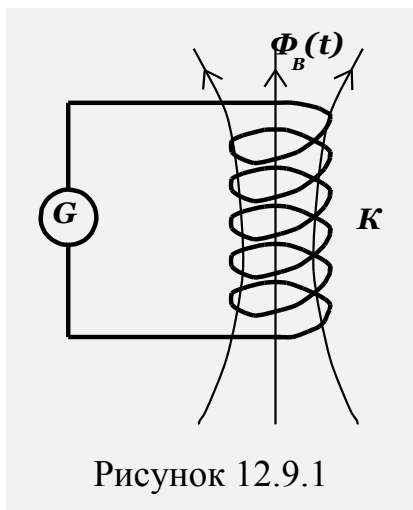


Рисунок 12.9.1

Правильное объяснение опытов Араго было дано позднее Майклом Фарадеем (англ., 1791–1867) на основе открытого им явления электромагнитной индукции. Зная, что электрический ток приводит к появлению магнитного поля в окружающем пространстве, М. Фарадэй поставил и в 1831 г. успешно решил обратную задачу – обнаружил электрическое действие магнитного поля.

Основные результаты опытов М. Фарадея можно прокомментировать при помощи рисунка 12.9.1. Их суть сводилась к следующему. Если поместить замкнутый контур, состоящий из проводящей катушки  $K$  и гальванометра  $G$ , в магнит-

ное поле, поток вектора индукции  $\Phi_B(t)$  которого через рассматриваемый контур (катушка + внешние проводники с гальванометром) изменяется во времени, то в этом контуре возникает электрический ток, называемый индукционным. Опыты показали, что сила индукционного электрического тока зависит от быстроты изменения магнитного потока  $\Phi_B(t)$ , а направление – от того, увеличивается или уменьшается этот магнитный поток. Это означает, что переменный магнитный поток  $\Phi_B(t)$  приводит к возникновению в рассматриваемом контуре сторонних сил, ЭДС которых называется ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$  и вызывает появление индукционного тока в контуре. Количественный анализ опытов показал, что ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$  пропорциональна скорости изменения магнитного потока  $\Phi_B(t)$ , то есть:

$$\mathcal{E}_i = k \frac{d\Phi_B(t)}{dt}. \quad (12.9.1)$$

Выражение (12.9.1) называется **законом Фарадея**. Коэффициент пропорциональности в (12.9.1) в СИ равен  $(-1)$ , и закон Фарадея в СИ имеет вид:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_B(t)}{dt}. \quad (12.9.2)$$

Отрицательный знак в формуле (12.9.2) означает, что знак ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$  таков, что вызванный ею индукционный ток в контуре создаёт магнитное поле, противодействующее изменению магнитного потока  $\Phi_B(t)$ . Это утверждение называется **правилом Ленца** (Эмилий Христианович Ленц, рус., 1804–1865).

К формуле (12.9.2) можно прийти, как это впервые сделал Гельмгольц (Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольц, нем., 1821–1894), на основании закона сохранения энергии в замкнутом контуре, состоящем из источника тока с ЭДС  $\mathcal{E}$ , имеющем внутреннее сопротивление  $r$  и нагруженного на сопротивление внешней цепи  $R$ . Силу электрического тока в этой цепи обозначим  $I$ . Пусть рассматриваемый контур находится в магнитном поле, поток вектора индукции  $\Phi_B(t)$  которого через рассматриваемый контур изменяется. Если за промежуток времени  $dt$  источник тока совершит работу  $\mathcal{E}Idt$ , то эта работа должна быть равна сумме джоулева

тепла  $I^2(R+r)dt$  и работе амперовых сил  $Id\Phi_B$ , где  $d\Phi_B$  – изменение потока вектора индукции за указанный промежуток, то есть:

$$Id\Phi_B + I^2(R+r)dt = \mathcal{E}Idt. \quad (12.9.3)$$

Уравнение (12.9.3) имеет *два корня*. Первый из них  $I=0$  отбрасываем, поскольку он не имеет физического содержания (потери на тепловое рассеяние не могут быть равными нулю), а для второго имеем:

$$I = \frac{\mathcal{E} - (d\Phi_B / dt)}{R+r}, \quad (12.9.4)$$

откуда следует, что суммарная ЭДС в рассматриваемой ситуации определяется не только ЭДС источника тока, но и дополнительной ЭДС  $[-d\Phi_B / dt]$ , которая и есть ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$ .

Действительно, поскольку ЭДС электромагнитной индукции должна возникать в замкнутом проводнике и без источника тока, то при его отсутствии вместо (12.9.4) получаем:

$$I = \frac{-(d\Phi_B / dt)}{R} = \frac{\mathcal{E}_i}{R}. \quad (12.9.5)$$

Отметим, что выбор направления обхода контура, в котором индуцируется ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$  и стороны поверхности, по которой ведётся интегрирование при вычислении потока вектора индукции магнитного поля, должны быть *согласованы по правилу правого винта*. Это означает, что с конца нормального вектора в некоторой точке на рассматриваемой стороне поверхности, натянутой на контур, обход контура должен быть виден против часовой стрелки. Именно это направление обхода контура выбирается для определения направления индукционного тока и знака ЭДС  $\mathcal{E}_i$ .

Из закона Фарадея следует, что ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$  равна 1 В, если скорость изменения потока вектора магнитной индукции равна 1 Вб/с.

Если замкнутый контур состоит не из одного витка, а из нескольких, например катушка  $N$  витков, то ЭДС  $\mathcal{E}_i$  будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом из этих витков. Следовательно, если поток вектора индукции магнитного поля, связанный с одним витком, равен  $\Phi_{B1}$ , то сум-

марный поток, связанный со всей катушкой, равен  $N\Phi_{B1}$ . Эту величину называют **потокосцеплением** катушки и обозначают  $\Psi_B$ , то есть  $\Psi_B = N\Phi_{B1}$ .

Теперь обсудим причины возникновения ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$ . Для простоты контур будем считать плоским, а магнитное поле однородным. По определению, поток вектора индукции магнитного поля через поверхность контура  $S$  есть:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\vec{B} \wedge \vec{S}), \quad (12.9.6)$$

и  $\Phi_B$  может изменяться за счёт любого из трёх множителей в (12.9.6).

Изменение  $S$  и  $\cos(\vec{B} \wedge \vec{S})$  сводится к движению контура по отношению к магнитному полю, и ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$  в этих случаях появляется в рассматриваемом контуре за счёт сил Лоренца  $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$ , действующих со стороны магнитного поля на движущиеся электрически заряженные частицы. Однако при изменении вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  в неподвижном контуре такие силы появиться не могут. Здесь остаётся только одно – при наличии изменяющегося во времени вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  ЭДС электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$  появляется за счёт возникновения в пространстве вихревого электрического (не электростатического!) поля  $\vec{E}^*$ , циркуляция которого по рассматриваемому контуру равна ЭДС  $\mathcal{E}_i$ , то есть:

$$\mathcal{E}_i = \oint_l \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (12.9.7)$$

В полученной формуле можно вместо вихревого электрического поля  $\vec{E}^*$  использовать полное электрическое поле  $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}^*$ , поскольку для электростатического поля  $\oint_l \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0$ :

$$\mathcal{E}_i = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (12.9.7a)$$

Идею о возникновении вихревого электрического поля  $\vec{E}^*$  при наличии изменяющегося магнитного поля впервые высказал Джеймс Клерк Ма́ксвелл (англ., 1831–1879). При этом проводящий контур, в котором наблюдается индукционный ток, обусловленный ЭДС  $\mathcal{E}_i$ , совершенно не

обязателен. Этот контур является лишь средством для обнаружения наличия (индикатором) указанного вихревого электрического поля  $\vec{E}^*$ .

В формуле (12.9.7) вместо символа полной производной по времени от функции многих переменных использован символ частной производной по времени, поскольку для неподвижных контура и натянутой на него поверхности (их пространственные координаты не зависят от времени) полная производная по времени будет равна частной производной по времени, так как производные по времени от пространственных координат будут равны нулю в силу их постоянства во времени.

Если воспользоваться **теоремой Стокса** для циркуляции векторного поля:

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}, \quad (12.9.8)$$

то получим дифференциальную форму соотношения (12.9.7):

$$\text{rot} \vec{E}^* = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \nabla \times \vec{E}^* = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (12.9.9)$$

Результирующее электрическое поле является суммой потенциального электростатического поля  $\vec{E}_s$ , обладающего свойством  $\text{rot} \vec{E}_s = 0$ , или  $\nabla \times \vec{E}_s = 0$ , и вихревого поля  $\vec{E}^*$ , то есть  $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}^*$ , так что в выражении (12.9.9) можно заменить поле  $\vec{E}^*$  на полное электрическое поле  $\vec{E}$ , так что получим:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (12.9.10)$$

Выражение (12.9.9) называется **законом электромагнитной индукции Фарадея в дифференциальной форме**.

Индукционные токи возникают не только в замкнутых проводниках, поперечными размерами которых можно пренебречь по сравнению с их длиной, но и в массивных проводниках. При этом замкнутые цепи для индукционного тока возникают в толще самого проводника. Такие индукционные токи в массивных проводниках, возникающие либо при их движении в магнитном поле, либо в переменном магнитном поле, называются вихревыми токами, или токами Фуко (Жан Бернар Леон Фуко, фр., 1819–1868). Наличие таких токов необходимо учитывать при проектировании электрических приборов, поскольку они могут приводить к значительному

нагреванию проводящих образцов в переменных магнитных полях. Эти токи можно также использовать для разогрева и плавления металлов, что делается в индукционных печах.

## 12.10. Явление самоиндукции. Индуктивность

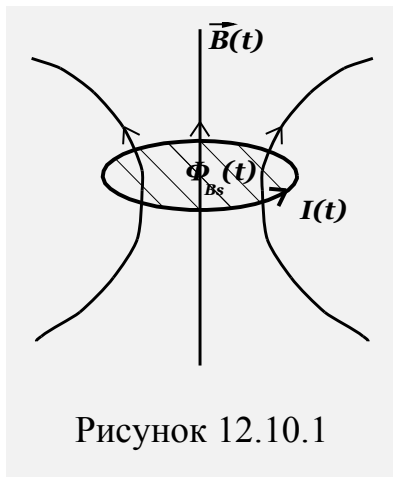


Рисунок 12.10.1

Частным случаем явления электромагнитной индукции является **самоиндукция**, которая состоит в том, что при изменении электрического тока  $I$  в замкнутой электрической цепи возникает ЭДС электромагнитной индукции, обусловленная изменением потока вектора магнитной индукции магнитного поля, создаваемого самим изменяющимся электрическим током, через поверхность, натянутую на этот контур (рисунок 12.10.1).

Контур и натянутую на него поверхность будем считать неподвижными, то есть пространственные координаты этих объектов во времени неизменны. Вследствие неоднородности магнитного поля, создаваемого электрическим током  $I(t)$  в контуре, магнитный поток  $\Phi_{Bs}(t)$ , пронизывающий поверхность, натянутую на этот контур, вычисляется по самому общему правилу (11.7.1):  $\Phi_{Bs}(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ , и поэтому сказать что-либо о пропорциональности магнитного потока и вектора магнитной индукции невозможно. Тем не менее установить такую связь очень просто, если воспользоваться теоремой о среднем для поверхностного интеграла при вычислении магнитного потока. Действительно, используя указанную теорему, для магнитного потока можем записать:

$$\Phi_{Bs}(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B}(t, P_0) \cdot \int_S d\vec{S} = \vec{B}(t, P_0) \cdot \vec{S}_{нов}, \quad (12.10.1)$$

где  $\vec{B}(t, P_0)$  – вектор магнитной индукции в некоторой точке  $P_0$  на поверхности,  $\vec{S}_{нов}$  – суммарный вектор, соответствующий интегралу  $\int_S d\vec{S}$ .

Если контур с изменяющимся электрическим током  $I(t)$  находится в однородной изотропной немагнитоупорядоченной среде, то очевидно, что переменный магнитный поток  $\Phi_{Bs}(t)$ , пронизывающий поверхность, натянутую на этот контур, пропорционален длине вектора индукции магнитного поля, создаваемого этим током, в некоторой точке на указанной поверх-

ности. В свою очередь, в соответствии с законом Био – Савара – Лапласа, длина вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}(t, P_0)$  пропорциональна силе тока  $I(t)$ . Таким образом, имеем:

$$\Phi_{Bs}(t) \sim B(t) \sim I(t). \quad (12.10.2)$$

Следовательно, на основании (12.10.2) можем сделать заключение о пропорциональности магнитного потока, пронизывающего контур с током  $\Phi_{Bs}(t)$  и силы тока  $I(t)$  в этом контуре, то есть:

$$\Phi_{Bs}(t) = LI(t). \quad (12.10.3)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  в формуле (12.10.3) при выполнении упомянутых выше условий есть положительная постоянная величина, называемая **индуктивностью** контура. В СИ индуктивность измеряется в Гн (генри). Из (12.10.3) видим, что контур имеет индуктивность 1 Гн, если при протекании по нему электрического тока силой 1 А пронизывающий его магнитный поток равен 1 Вб.

Если контур имеет более одного витка, например катушка из  $N$  витков, то всё сказанное остаётся в силе, только магнитный поток  $\Phi_{Bs}(t)$  следует заменить на потокосцепление катушки  $\Psi_{Bs}(t)$ .

Как уже отмечено выше, самоиндукция – частный случай явления электромагнитной индукции, поэтому здесь справедлив закон Фарадея для ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Psi_{Bs}(t)}{dt} = -L \frac{dI(t)}{dt}. \quad (12.10.4)$$

Разумеется, остаётся справедливым и правило Ленца. В данном случае оно утверждает, что индукционный ток в контуре  $I_i$  будет препятствовать причине, вызвавшей его появление. То есть если ток  $I(t)$  в контуре убывает, то индукционный ток  $I_i$  будет иметь такое же направление, как и ток  $I(t)$ , и наоборот, если ток  $I(t)$  в контуре увеличивается, то индукционный ток  $I_i$  будет иметь противоположное ему направление.

Величина индуктивности контура зависит только от геометрии контура и свойств среды.

Поясним это утверждение на примере длинного соленоида, состоящего из  $N$  витков проводника, намотанного в виде спирали на сердечник из немагнитоупорядоченного магнетика длиной  $l$ . Для длины вектора ин-



дукции магнитного поля внутри соленоида, пренебрегая краевыми эффектами, имеем (см. формулу (11.8.6)):

$$B = \mu\mu_0 nI. \quad (12.10.5)$$

Учитывая однородность магнитного поля внутри соленоида и одинаковую направленность вектора индукции магнитного поля и вектора площади одного витка, для потокосцепления получим:

$$\Psi = \mu_0\mu(N/l)INS = \mu_0\mu(N/l)^2 SI = \mu_0\mu n^2 VI, \quad (12.10.6)$$

где  $n = N/l$  – число витков на единицу длины,  $S$  – площадь поперечного сечения соленоида, а  $V = Sl$  – его объём.

Сравнивая выражения (12.10.3) и (12.10.6), для индуктивности соленоида находим:

$$L = \mu_0\mu n^2 V. \quad (12.10.7)$$

Видим, что действительно индуктивность соленоида определяется его геометрией (через объём  $V$ ) и свойствами среды (через магнитную проницаемость  $\mu$ ). Кстати, из (12.10.7) видим, что магнитная постоянная  $\mu_0$  измеряется в Гн/м.

Отметим, что формулу (12.10.7) можно использовать также для расчёта индуктивности тонкого тороида с немагнитоупорядоченным сердечником, если под числом витков на единицу длины понимать величину  $n = N/(2\pi R_{cp})$ , где  $R_{cp}$  – радиус средней линии тороида, а  $V = 2\pi R_{cp} S$ .

Если сердечник тороида или длинного соленоида сделан из магнитоупорядоченного материала, то формально (12.10.7) использовать можно. Однако в этом случае магнитную проницаемость нужно брать как функцию напряжённости магнитного поля, которая, в свою очередь, есть функция силы тока в катушке. А вот формулой (12.10.4) для ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s$  в этом случае пользоваться уже нельзя, поскольку индуктивность будет зависеть от времени через силу тока в контуре и, следовательно, вместо (12.10.4) имеем:

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Psi_{Bs}(t)}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -I\frac{dL}{dt} - L\frac{dI}{dt} = -\left(L + I\frac{dL}{dI}\right) \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (12.10.8)$$

Из последней формулы следует, что в данном случае коэффициент пропорциональности между  $\mathcal{E}_s$  и  $dI/dt$  уже не является индуктивностью, как в формуле (12.10.4).

## 12.11. Явление взаимной индукции

Явлением взаимной индукции называется возникновение ЭДС электромагнитной индукции во всех проводниках, находящихся вблизи цепи переменного тока или при изменении взаимного расположения указанных объектов. Для количественного описания данного явления рассмотрим два недеформируемых и неподвижных контура 1 и 2 (рисунок 12.11.1), расположенных не слишком далеко друг от друга в немагнитоупорядоченной среде.

Если в контуре 1 протекает переменный электрический ток  $I_1(t)$ , то в окружающем пространстве создаётся переменное магнитное поле  $\vec{B}(t)$ , которое создаёт переменный магнитный поток  $\Phi_{B2}(t)$ , пронизывающий контур 2. Этот переменный магнитный поток создаёт в контуре 2 ЭДС взаимной индукции  $\mathcal{E}_{i2}$ , которая вызывает во втором контуре индукционный электрический ток.

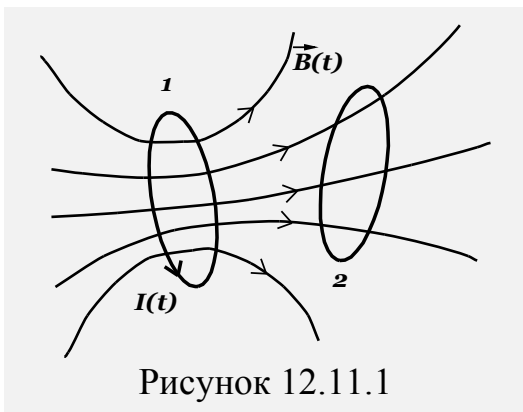
Если произвести анализ зависимости переменного магнитного потока  $\Phi_{B2}(t)$ , пронизывающего контур 2, совершенно так же, как это делалось при рассмотрении самоиндукции, легко обнаружить связь:

$$\Phi_{B2}(t) \sim B_1(t) \sim I_1(t) \Rightarrow \Phi_{B2} = L_{21}I_1. \quad (12.11.1)$$

Аналогично для магнитного потока  $\Phi_{B1}(t)$ , пронизывающего контур 1 при протекании переменного электрического тока  $I_2(t)$ , в контуре 2 имеем:

$$\Phi_{B1} = L_{12}I_2. \quad (12.11.2)$$

Коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называют взаимной индуктивностью контуров, которые, как и индуктивность отдельного контура, измеряются в генри (Гн).



Если контуры имеют более одного витка, то всё сказанное остаётся в силе, только магнитные потоки следует заменить потокосцеплениями катушек. Взаимная индуктивность контуров определяется их геометрией и свойствами окружающей среды, в которой создано магнитное поле.

Опыт и строгий расчёт показывают, что при отсутствии магнитоупорядоченных веществ коэффициенты взаимной индуктивности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  равны между собой, то есть:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (12.11.3)$$

Это означает, что одинаковый ток  $I$  в контурах создаст одинаковые магнитные потоки в соседних контурах.

В отличие от индуктивности, которая является положительной величиной, взаимная индуктивность может иметь различные знаки, в зависимости от выбора направления обхода контура (и, соответственно, нормали к поверхности, натянутой на контур), в котором индуцируется ЭДС за счёт изменяющегося электрического тока в соседнем контуре. Поэтому необходимо заранее установить направление обхода контуров, чтобы иметь желаемый знак взаимной индукции.

ЭДС взаимной индукции в контурах будет вычисляться по формулам:

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_{B1}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (12.11.4)$$

С учётом явления самоиндукции для электрического тока, например в контуре 1, можно записать по закону Ома:

$$R_1 I_1 = \mathcal{E}_1 - L_1 (dI_1 / dt) - L_{12} (dI_2 / dt), \quad (12.11.5)$$

где  $\mathcal{E}_1$  – ЭДС источника тока в контуре 1,  $R_1$  – сопротивление этого контура. Видим, что полная ЭДС, действующая в рассматриваемом контуре, равна сумме ЭДС источника тока (если он есть), ЭДС самоиндукции и ЭДС взаимной индукции.

В качестве примера рассчитаем взаимную индуктивность двух обмоток, намотанных одна поверх другой на длинный цилиндр из немагнитоупорядоченного материала, имеющих соответственно  $N_1$  и  $N_2$  витков. Если по первой обмотке протекает электрический ток силой  $I_1$ , то, пренебрегая краевыми эффектами, длина вектора индукции магнитного поля внутри соленоида будет:

$$B_1 = \mu_0 \mu N_1 I_1 / l = \mu_0 \mu n_1 I_1, \quad (12.11.6)$$

а потокосцепление второй обмотки:

$$\Psi_{B21} = N_2 B_1 S = \mu_0 \mu (N_1 / l) (N_2 / l) S I_1 = \mu_0 \mu n_1 n_2 V I_1, \quad (12.11.7)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения соленоида, а  $l$  и  $V = Sl$  – его длина и объём, соответственно.

Сравнивая (12.11.7) с (12.11.2), для взаимной индуктивности находим:

$$L_{21} = \mu_0 \mu n_1 n_2 V. \quad (12.11.8)$$

Видим, что взаимная индуктивность обмоток соленоида определяется их геометрией и свойствами материала сердечника соленоида.

## 12.12. Энергия магнитного поля

Как и в случае с электрическим полем, необходимо решить вопрос об энергии магнитного поля, её локализации и вычислении в различных ситуациях.

Для ответа на эти вопросы рассмотрим электрический контур с полным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$ , сила электрического тока в котором возрастает от 0 до  $I$  за счёт наличия источника тока с ЭДС, равной  $\mathcal{E}$ . Будем считать контур недеформируемым, а окружающую его среду немагнитоупорядоченной.

С учётом явления самоиндукции для электрического тока в контуре по закону Ома можно записать (см. 12.11.5):

$$I = (\mathcal{E} - L(dI / dt)) / R, \quad (12.12.1)$$

откуда находим связь ЭДС источника тока  $\mathcal{E}$  с ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E} = IR + L(dI / dt). \quad (12.12.2)$$

Из этого выражения находим работу, совершаемую источником тока за время  $dt$ :

$$\mathcal{E} I dt = I^2 R dt + L I dI. \quad (12.12.3)$$

Первое слагаемое в (12.12.3) – потери на нагревание проводника, а второе слагаемое – дополнительная работа, обусловленная индукционными явлениями.

За всё время, необходимое для увеличения силы электрического тока от 0 до  $I$ , источник тока в контуре совершит работу

$$A = \int_0^I LI' dI' = \frac{LI^2}{2} = W_m, \quad (12.12.4)$$

которая запасается в виде энергии (потенциальной) контура.

С учётом определения индуктивности  $\Psi_{Bs} = LI$  для энергии магнитного поля можно записать ещё одну полезную формулу:

$$W_m = \frac{(LI) \cdot I}{2} = \frac{\Psi_{Bs} I}{2}. \quad (12.12.5)$$

Чтобы понять, где локализована эта энергия, в качестве контура выберем длинный соленоид. Его индуктивность, в соответствии с (12.10.7), есть:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (12.12.6)$$

Магнитное поле в длинном соленоиде в пренебрежении краевыми эффектами можно считать однородным, длину вектора индукции магнитного поля определяем по формуле (11.8.6):

$$B = \mu \mu_0 n I, \quad (12.12.7)$$

а длину вектора напряжённости магнитного поля выражением:

$$H = B / \mu \mu_0 = n I. \quad (12.12.8)$$

С учётом выражений (12.12.5)–(12.12.8) для энергии соленоида имеем:

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu \mu_0 n^2 I^2}{2} V = \frac{B^2}{2 \mu \mu_0} V = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} V. \quad (12.12.9)$$

Из (12.12.9) следует, что энергия соленоида определяется характеристиками МП (векторы индукции и напряжённости магнитного поля), возникающего в нём при протекании электрического тока и объёмом, где сосредоточено МП. Это указывает на то, что энергия соленоида запасается в виде энергии МП и локализована в области, где это поле сосредоточено.

Если ввести величину объёмной плотности энергии магнитного поля  $w_m = W_m / V$ , то из выражения (12.12.9) для неё находим:

$$w_m = \frac{B^2}{2 \mu \mu_0} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (12.12.10)$$

В случае неоднородного магнитного поля энергию магнитного поля определяют через введённое понятие объёмной плотности энергии следующим образом. Рассматриваемую область разбивают на  $N$  элементарных объёмов  $\Delta V_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , в каждом из которых выбирается произвольным образом точка пунктуации, в которой вычисляются векторы индукции и напряжённости магнитного поля и приближённое значение энергии магнитного поля по одной из формул (12.12.9). Энергию магнитного поля во всей рассматриваемой области находим путём суммирования по всем участкам разбиения и последующим предельным переходом при мелкости разбиения, стремящейся к нулю, то есть:

$$W_m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \frac{\vec{B}_i \cdot \vec{H}_i}{2} \Delta V_i = \int_V \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0\mu} dV = \int_V \frac{\mu_0\mu H^2}{2} dV. \quad (12.12.11)$$

Формула (12.12.10), кроме самостоятельной ценности, позволяет также по-новому определить индуктивность контура (катушки) с током. Действительно, сравнивая (12.12.9) и (12.12.11), получаем:

$$\frac{LI^2}{2} = \int_V \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} dV, \quad (12.12.12)$$

откуда для индуктивности имеем:

$$L = \frac{1}{I^2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{I^2} \int_V \frac{B^2}{\mu_0\mu} dV = \frac{1}{I^2} \int_V \mu_0\mu H^2 dV = \frac{2W_m}{I^2}. \quad (12.12.13)$$

В общем случае магнитное поле создаётся произвольной системой из  $N$  контуров с токами  $I_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . Энергия магнитного поля, создаваемого этой системой контуров, будет состоять из энергии магнитного поля этих контуров

$$W_m = \sum_{i=1}^N \frac{\Psi_{Bi} I_i}{2}, \quad (12.12.14)$$

где  $\Psi_{Bi}$  – потокосцепление  $i$ -того контура, равное сумме потокосцепления самоиндукции рассматриваемого контура  $\Psi_{Bsi} = L_i I_i$  и потокосцепления

взаимной индукции этого контура со всеми остальными  $\Psi_{Bi, \text{вз}} = \sum_{k=1; k \neq i}^N L_{ik} I_k$ ,

то есть  $\Psi_{Bi} = L_i I_i + \sum_{k=1; k \neq i}^N L_{ik} I_k$ , и для энергии магнитного поля находим:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N L_{ik} I_i I_k . \quad (12.12.15)$$

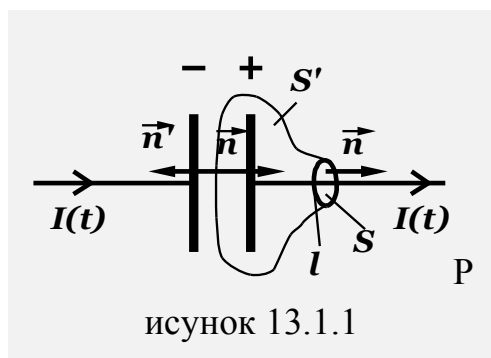
Первое слагаемое в (12.12.15) есть сумма собственных энергий контуров, а второе – сумма энергий взаимодействия этих контуров.

# ГЛАВА 13. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

### 13.1. Ток смещения

Важнейшим открытием Максвелла была идея о едином электромагнитном поле. Максвелл сумел обобщить все известные ему факты об электрических и магнитных полях и понять, что взаимосвязь электрического и



магнитного поля носит симметричный характер. А именно, поскольку меняющееся во времени магнитное поле создаёт в окружающем пространстве электрическое поле, то следует ожидать, что и переменное электрическое поле порождает в окружающем пространстве магнитное поле.

Однако здесь встретилась одна трудность, смысл которой поясним при помощи ситуации, изображённой на рисунке 13.1.1. Рассмотрим электрическую цепь, содержащую конденсатор, по которой протекает переменный электрический ток  $I(t)$ . В качестве среды, заполняющей пространство между обкладками конденсатора, выберем воздух, для которого магнитную проницаемость можно считать равной единице.

Рассмотрим произвольный замкнутый контур  $l$ , охватывающий проводник с электрическим током  $I(t)$ . В соответствии с теоремой о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$  (12.3.6) имеем:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (13.1.1)$$

где  $\vec{j}$  – плотность электрического тока в проводнике (тока проводимости).

Результат не должен зависеть от выбора поверхности. При интегрировании по поверхности  $S$  (проводник пересекает эту поверхность) результат получается равным  $I(t)$  и вопросов не возникает. Но при интегрировании по поверхности  $S'$  возникает проблема  $\int_{S'} \vec{j} \cdot d\vec{S}$  (в конденсаторе нет тока проводимости!). Получается, что результат зависит от выбора поверхности, чего не должно быть. Решить эту проблему Максвелл предло-



жил путём введения дополнительного тока, который он назвал током смещения  $I_{см}$ , возникающего в тех областях, где имеется переменное электрическое поле. В нашем примере в конденсаторе возникает переменное электрическое поле за счёт изменения суммарного стороннего заряда на каждой из обкладок конденсатора. Причём если выбрать замкнутую поверхность, состоящую из двух указанных поверхностей  $S$  и  $S''$  (т. е.  $S_{сум} = S \cup S''$ ), где  $S'$  и  $S''$  – две стороны одной поверхности, то, в соответствии с теоремой Гаусса для вектора электрического смещения  $\vec{D}$ , имеем:

$$\oint_{S_{сум}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q(t), \quad (13.1.2)$$

где  $q(t)$  – суммарный сторонний заряд на обкладке конденсатора, находящейся внутри замкнутой поверхности  $S_{сум}$ .

Если зафиксировать положение поверхности  $S_{сум}$  во времени, то дифференцирование (13.1.2) даёт:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{S_{сум}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{сум}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (13.1.3)$$

Поскольку все части (13.1.3) имеют размерность силы электрического тока, то величина  $\partial \vec{D} / \partial t$  имеет размерность плотности электрического тока, которую Максвелл предложил назвать плотностью **тока смещения**  $\vec{j}_{см}$ . Таким образом, имеем:

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad I_{см} = \frac{dq(t)}{dt} = \oint_{S_{сум}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (13.1.4)$$

Максвелл не только ввёл понятие тока смещения, но и предположил, что этот ток, как и электрический ток проводимости, создаёт в окружающем пространстве вихревое магнитное поле, то есть магнитное поле, циркуляция вектора индукции которого вдоль замкнутого контура, охватывающего ток смещения, равна силе тока смещения, проходящего через поверхность, ограниченную указанным контуром. Далее Максвелл предложил назвать сумму тока проводимости и тока смещения **полным** электри-

ческим током  $I_{полн}$ , так что электрический ток через любую поверхность определяется исходя из плотности полного тока  $\vec{j}_{полн}$ , то есть:

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \vec{j}_{см} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad I_{полн} = I + I_{см} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (13.1.5)$$

Если потребовать, чтобы полный электрический ток был стационарен, то есть удовлетворял условию непрерывности (в замкнутой цепи переменного тока иначе быть не может), то есть

$$\oint_S \vec{j}_{полн} \cdot d\vec{S} = 0, \text{ или } \oint_S \left( \vec{j} + (\partial \vec{D} / \partial t) \right) \cdot d\vec{S} = 0, \quad (13.1.5)$$

то при выборе в качестве замкнутой поверхности  $S_{сум} = S \cup S''$  на рисунке 13.1.1 получаем:

$$\oint_{S_{сум}} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0; \quad \oint_{S_{сум}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \oint_{S_{сум}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = I \Rightarrow \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \int_{S''} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = I. \quad (13.1.6)$$

В (13.1.6) учтено, что на  $S''$  (и на  $S'$ )  $\vec{j} = \vec{0}$ , а на  $S$   $\vec{j}_{см} = \vec{0}$ . С учётом сказанного формула (13.1.1) при замене  $\vec{j}$  на  $\vec{j}_{полн}$  примет вид:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{полн} = \int_S \vec{j}_{полн} \cdot d\vec{S} = \int_S \left( \vec{j} + (\partial \vec{D} / \partial t) \right) \cdot d\vec{S}, \quad (13.1.7)$$

независимо от выбора поверхности, так как:

$$\begin{aligned} \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} &= \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I; \\ \int_{S'} \vec{j}_{полн} \cdot d\vec{S} &= - \int_{S''} \vec{j}_{полн} \cdot d\vec{S} = - \int_{S''} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = I. \end{aligned} \quad (13.1.8)$$

Ведение полного электрического тока позволило снять противоречия при использовании теоремы о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля (её правильный вид определён уравнением (13.1.7)) и восстановило симметрию магнитных и электрических явлений.

**Дифференциальная форма** теоремы о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля получается из соотношения (13.1.7) при помощи **теоремы Стокса** (12.2.5):

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S}, \quad (13.1.9)$$

так что сравнение (13.1.7) с (13.1.9) даёт:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (13.1.10)$$

По поводу тока смещения можно добавить следующее. Поскольку вектор электрического смещения определяется выражением  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , то

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (13.1.11)$$

Видим, плотность тока смещения складывается из величины  $\varepsilon_0(\partial \vec{E} / \partial t)$  (плотность «истинного» тока смещения) и плотности тока поляризации  $(\partial \vec{P} / \partial t)$ , обусловленного движением связанных зарядов. Второе (поляризационное) слагаемое, которое в вакууме обращается в ноль, ничем принципиальным от тока проводимости не отличается – это тоже направленное движение зарядов, правда, связанных. А вот первое слагаемое описывает совершенно новое явление – возбуждение вихревого магнитного поля за счёт изменяющегося во времени электрического поля.

## 13.2. Уравнения Максвелла

Как уже отмечено ранее, с введением тока смещения Максвеллу удалось установить взаимосвязь электрического и магнитного полей и ввести объединяющий оба этих поля объект – электромагнитное поле. Известные ему законы Максвелл объединил в виде **системы уравнений**, которые называют **уравнениями Максвелла**. Для этого он ввёл новые дополнительные понятия и обобщил формулировки известных законов (для придания этой системе уравнений непротиворечивого характера), сделал их пригодными как для постоянных, так и для переменных полей, и на основе этой системы уравнений предсказал важнейшие свойства электромагнитного поля.

Возможны две формы уравнений Максвелла – интегральная и дифференциальная. Сначала приведём интегральную форму этих уравнений:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{Закон Фарадея электромагнитной индукции.} \quad (13.2.1)$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad \text{Теорема о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля.} \quad (13.2.2)$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\Sigma_{\text{своб}}} = \int_V \rho dV \quad \text{Теорема Гаусса для вектора электрического смещения.} \quad (13.2.3)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{Теорема Гаусса для вектора индукции магнитного поля.} \quad (13.2.4)$$

В дифференциальной форме эта система уравнений имеет вид:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (13.2.5)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (13.2.6)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho; \quad (13.2.7)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (13.2.8)$$

Уравнения Максвелла в интегральной форме обладают большей общностью по сравнению с этими же уравнениями в дифференциальной форме, поскольку они справедливы даже в тех случаях, когда имеются поверхности разрыва непрерывности полевых величин (векторов, определяющих электрическое и магнитное поля). Однако если дополнить уравнения Максвелла граничными условиями на поверхностях разрыва (эти условия обсуждались в соответствующих разделах данного пособия), например:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (13.2.9)$$

то обе формулировки будут эквивалентны в математическом смысле.

Однако, с точки зрения практического использования, более полезными являются уравнения Максвелла в дифференциальной форме, поскольку путём их решения (интегрирования) могут быть найдены векторные поля, определяющие электрическое и магнитное поля (векторы  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ ).

Следует отметить, что система уравнений Максвелла не является полной системой уравнений электромагнитного поля, так как входящих в эти уравнения величин больше, чем переменных, что не позволяет найти решения такой системы уравнений. Действительно, если записать уравнения Максвелла в координатном представлении, то получится всего 8 урав-

нений, связывающих координаты полей (по три уравнения из (13.2.5) и (13.2.6) плюс два уравнения – (13.2.7) и (13.2.8)). Эти восемь величин связывают шестнадцать переменных (пятнадцать проекций векторов  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{j}$  плюс один скаляр  $\rho$ ). Для получения полной системы уравнения Максвелла необходимо дополнить уравнениями, связывающими перечисленные выше векторы, исходя из свойств среды, в которой рассматривается электромагнитное поле. Ясно, что уравнения зависят от этой среды, и поэтому называются материальными уравнениями. Такие уравнения получают на основе каких-либо моделей изучаемых сред (обычно упрощенных и идеализированных), как это делалось при рассмотрении классической теории электропроводности, явлений диамагнетизма и парамагнетизма. В частности, в однородной и изотропной среде, не содержащей сегнетоэлектрики и магнитоупорядоченные вещества, при не слишком сильных электрических и магнитных полях, в качестве этих уравнений выступают следующие, уже известные нам, соотношения:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad \text{Связь между векторами } \vec{D} \text{ и } \vec{E}. \quad (13.2.10)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \quad \text{Связь между векторами } \vec{B} \text{ и } \vec{H}. \quad (13.2.11)$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}_s + \vec{E}^*) \quad \text{Обобщённый закон Ома.} \quad (13.2.12)$$

И теперь уравнений уже достаточно, чтобы заняться поиском полевых величин.

Среди многих важнейших свойств уравнений Максвелла отметим лишь то, что эти уравнения *линейны и выполняются во всех инерциальных системах отсчёта*.

Одним из важнейших выводов, вытекающим из уравнений Максвелла, является то, что электромагнитное поле может существовать самостоятельно – без электрических зарядов и токов. А именно, из уравнения (13.2.5) вытекает, что переменное магнитное поле порождает переменное электрическое поле, которое в свою очередь, в соответствии с уравнением (13.2.6), создаёт переменное магнитное поле. Начавшись где-то в окрестности одной точки, такой процесс захватывает все новые и новые области пространства. Такое явление, называемое электромагнитной волной, и приводит к передаче энергии в пространстве, в том числе и лишённом электрических зарядов и токов. Подробному изучению волновых процессов, в том числе и электромагнитных волн, посвящён следующий раздел курса.

## Глава 14. КОЛЕБАНИЯ

### 14.1. Колебания и их описание

Колебаниями в физике называют процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. В качестве примеров можно привести колебания маятника часов или колебания напряжения в бытовой электрической сети. Система, в которой наблюдаются колебания, будем называть колебательной системой.

Колебания называются *собственными* (или *свободными*), если они совершаются в системе за счёт внутренних сил, возникших после выведения рассматриваемой системы из равновесия. Если же колебания в системе происходят за счёт внешних сил, изменяющихся во времени с той или иной степенью повторяемости, то такие колебания называются *вынужденными*.

В зависимости от физической природы различают механические колебания, электрические и т. п. Однако, как увидим далее, описание колебаний различной природы осуществляется одними и теми же уравнениями, что позволяет изучать их свойства независимо от природы колебаний.

Если физическая величина  $s(t)$  в колебательной системе изменяется периодически, то есть:

$$s(t + T) = s(t), \quad \forall t, \quad T > 0, \quad (14.1.1)$$

то колебания называются *периодическими*.

Наименьшая положительная величина  $T$  в (14.1.1) называется *периодом* колебаний, которая в СИ измеряется в секундах. Положительная величина, обратная периоду, называется *частотой* колебаний:

$$\nu = 1 / T. \quad (14.1.2)$$

В СИ за единицу частоты выбран  $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$ . Вводится также понятие циклической частоты  $\omega$ , связанной с частотой формулой:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi / T, \quad (14.1.3)$$

которая измеряется в рад/с.

Важнейшим видом периодических колебаний являются *гармонические колебания*, в которых рассматриваемая физическая величина изменяется по закону косинуса:

$$s_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi_{01}), \quad A > 0; \quad (14.1.4)$$

или синуса:

$$s_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi_{02}), \quad A > 0. \quad (14.1.4a)$$

В этих формулах положительный множитель перед косинусом или синусом называется *амплитудой* колебаний, их аргументы  $\omega t + \varphi_{01}$  и  $\omega t + \varphi_{02}$  – *фазами* колебаний, а  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02}$  – *начальными фазами* колебаний.

Сами функции (14.1.4) и (14.1.4a) называются **гармоническими** (или **гармониками**).

На самом деле нет разницы, какую из формул выбирать, так как при помощи формул приведения можно перейти от одной формулы к другой. Здесь мы выбираем для описания гармонических колебаний закон косинуса, то есть формулу (14.1.4). Из свойств функций  $s_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi_{01})$  (или  $s_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi_{02})$ ) отметим, что они в области определения являются ограниченными, то есть в любой момент времени  $t$   $|s_1(t)| \leq A$ , или  $-A \leq s_1(t) \leq A$ .

## 14.2. Дифференциальное уравнение колебаний

Найдём уравнение, решением которого является гармоническая функция времени (14.1.4). Для этого вычислим первую и вторую производные по времени от этой функции:

$$s_1'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \quad s_1''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (14.2.1)$$

и с учётом (14.2.1) получим тождество:

$$s_1'' + \omega^2 s_1 = 0., \quad (14.2.2)$$

которое называется *дифференциальным уравнением* (ДУ) свободных (собственных) гармонических колебаний.

Наличие в названии полученного уравнения слова «*дифференциальное*» вызвано присутствием в нём производных искомой функции. В математике изучением свойств и методов решения таких уравнений занимаются в специальном разделе – теории дифференциальных уравнений. Все ДУ можно разделить на два больших класса – *обыкновенные* ДУ и ДУ в *частных производных*. В обыкновенных ДУ искомая функция зависит от одной переменной, а в ДУ в частных производных – от двух и более независимых

переменных. Поскольку нам пока понадобятся сведения только о обыкновенных ДУ, ниже приведена краткая сводка основных понятий из теории таких ДУ. Далее для краткости чаще всего будем говорить ДУ без слова «обыкновенное».

Пусть на некотором интервале  $(a, b)$  переменной  $t$  определены функция этой переменной  $s(t)$  и её производные (по этой переменной)  $s'(t), s''(t), \dots, s^{(n)}(t)$ .

*Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется уравнение вида:

$$f(t, s(t), s'(t), s''(t), \dots, s^{(n)}(t)) = 0. \quad (14.2.3)$$

*Наивысший порядок* производной искомой функции, входящей в рассматриваемое ДУ, называется *порядком* ДУ. В нашем случае (14.2.3) – ДУ  $n$ -го порядка. *Решением (частным) ДУ* (14.2.3) называют любую функцию  $u(t)$ , которая при подстановке её в рассматриваемое ДУ обращает это ДУ в тождество (относительно переменной  $t$ ), то есть:

$$f(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(n)}(t)) = 0. \quad (14.2.4)$$

Частных решений рассматриваемого ДУ может быть сколько угодно много (увидим далее). Разные частные решения могут быть определены на разных интервалах переменной  $t$ . Процесс поиска решений ДУ называют *интегрированием* ДУ.

*Общим решением* ДУ  $n$ -го порядка называют функцию  $z(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$  от независимой  $t$  и  $n$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , которая удовлетворяет двум условиям:

- 1) при любых значениях произвольных постоянных из общего решения получаются частные решения рассматриваемого ДУ;
- 2) любое частное решение рассматриваемого ДУ может быть получено из общего решения этого ДУ соответствующим выбором (подбором) произвольных постоянных.

Из огромного числа всевозможных ДУ в физике и её приложениях важнейшую роль играет особый класс ДУ – линейные дифференциальные уравнения.

*Линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ)  $n$ -го порядка* называют ДУ вида:



$$a_0(t)s^{(n)}(t) + a_1(t)s^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)s'(t) + a_n(t)s(t) = f(t), \quad (14.2.5)$$

где  $a_i(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , и  $f(t)$  – некоторые заданные функции независимой переменной  $t$ .

Если  $f(t) = 0$ ,  $\forall t$ , рассматриваемое ЛДУ называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением (ЛОДУ). Если  $f(t) \neq 0$  хотя бы в одной точке, рассматриваемое ЛДУ называется *линейным неоднородным* дифференциальным уравнением (ЛНДУ).

В случае, когда коэффициенты перед производными и искомой функцией в ЛДУ (14.2.5) являются *константами* ( $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ), то эти уравнения называются ЛДУ с *постоянными коэффициентами*:

$$a_0s^{(n)}(t) + a_1s^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}s'(t) + a_ns(t) = f(t). \quad (14.2.6)$$

Если в ЛНДУ с постоянными коэффициентами (14.2.6) взять  $f(t) \equiv 0$ , то полученное ЛОДУ называется ЛОДУ, *соответствующим* данному ЛНДУ:

$$a_0s^{(n)}(t) + a_1s^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}s'(t) + a_ns(t) = 0, \quad (14.2.7)$$

а для его решения имеются общие методы, сводящиеся к поиску решения характеристического (алгебраического) уравнения, соответствующего рассматриваемому ЛОДУ.

*Характеристическим уравнением*, соответствующим ЛОДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами, называют алгебраическое уравнение  $n$ -ой степени:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (14.2.8)$$

которое получается из ЛОДУ с постоянными коэффициентами путём замены искомой функции и её производных переменной  $\lambda$  в соответствующих степенях по правилу:

$$s^{(k)}(t) \rightarrow \lambda^k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (14.2.9)$$

Если известны все решения характеристического уравнения, а именно:  $\alpha$  – кратности  $q$ ,  $\beta$  – кратности  $r$ , ...,  $\eta$  – кратности  $u$  ( $q + r + \dots + u = n$ ), то общее решение ЛОДУ  $z(t)$  имеет вид:

$$z(t) = e^{\alpha t} M_{q-1}(t) + e^{\beta t} N_{r-1}(t) + \dots + e^{\eta t} P_{u-1}(t), \quad (14.2.10)$$

где  $M_{q-1}(t)$ ,  $N_{r-1}(t)$ ,  $\dots$ ,  $P_{u-1}(t)$  – многочлены, соответственно, степеней  $(q-1)$ ,  $(r-1)$ ,  $\dots$ ,  $(u-1)$  с произвольными постоянными коэффициентами.

В частности, для очень важного в физических приложениях ЛОДУ 2-го порядка с постоянными вещественными коэффициентами

$$a_0 s''(t) + a_1 s'(t) + a_2 s(t) = 0 \quad (14.2.11)$$

характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda^1 + a_2 = 0. \quad (14.2.12)$$

Квадратное уравнение (14.2.12) имеет, в зависимости от знака дискриминанта  $D = a_1^2 - 4a_0 a_2$ , следующие корни и, соответственно, общее решение ЛОДУ (14.2.11):

1) если  $D > 0$ , то (14.2.12) имеет различные вещественные корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а решение ЛОДУ (14.2.12) имеет вид:

$$z(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}; \quad (14.2.13)$$

2) если  $D < 0$ , то (14.2.12) имеет комплексно-сопряжённые (различные) корни  $\alpha = \sigma + i\omega$  и  $\bar{\alpha} = \sigma - i\omega$ , а решение ЛОДУ (14.2.12) имеет вид:

$$z(t) = C_1 e^{(\sigma + i\omega)t} + C_2 e^{(\sigma - i\omega)t}; \quad (14.2.14)$$

3) если  $D = 0$ , то (14.2.12) имеет один вещественный корень  $\lambda$  кратности 2, а решение ЛОДУ (14.2.12) имеет вид:

$$z(t) = e^{\lambda t} (C_1 t + C_2). \quad (14.2.15)$$

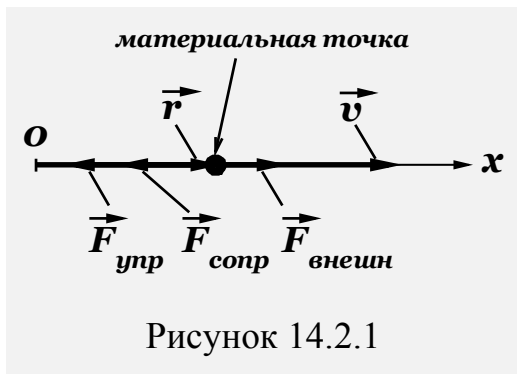
Поиск общего решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами (14.2.6) осуществляется по правилу:

$$s(t) = z(t) + F(t), \quad (14.2.16)$$

где  $z(t)$  – общее решение ЛОДУ, соответствующего ЛНДУ (14.2.6), а  $F(t)$  – любое решение (частное) рассматриваемого ЛНДУ.

Теперь вновь возвратимся к физическим процессам в колебательных системах, которые приводят к необходимости решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим две конкретные физические системы.



**I. Механические колебания.** Пусть материальная точка совершает движение вдоль некоторой оси (например, оси  $x$ ) под действием направленных вдоль этой оси упругой силы  $\vec{F}_{упр}$  (см. раздел 3.2), силы сопротивления  $\vec{F}_{сопр}$  и внешней (вынуждающей) периодической силы, определяемых выражениями (рисунок 14.2.1):

$$\vec{F}_{упр} = -k\vec{r}, \quad k > 0, \quad (14.2.17)$$

$\vec{r}$  – радиус-вектор материальной точки,  $k > 0$  – постоянная, называемая коэффициентом упругости;

$$\vec{F}_{сопр} = -\mu\vec{v}, \quad \mu > 0, \quad (14.2.18)$$

$\vec{v}$  – вектор скорости материальной точки,  $\mu > 0$  – постоянная, называемая коэффициентом сопротивления среды.

Направление вектора силы сопротивления и вектора скорости материальной точки противоположны друг другу, а модуль вектора силы сопротивления часто можно считать пропорциональным модулю вектора скорости.

Внешнюю вынуждающую силу пока не будем конкретизировать, отметим лишь, что её модуль есть некоторая заданная функция времени.

Уравнение движения материальной точки массой  $m$  для данного случая будет иметь вид:

$$\vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр} + \vec{F}_{внешн} = m\vec{a}. \quad (14.2.19)$$

Проектируем (14.2.19) на ось  $x$ , делим на  $m$  и получим ЛНДУ 2-го порядка:

$$x''(t) + 2\delta \cdot x'(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = f(t), \quad (14.2.20)$$

в котором введены обозначения:  $\delta = \mu / 2m$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k / m}$ ,  $f(t) = F_{x, \text{внешн}} / m$ .

Если вынуждающая сила равна 0 и отсутствует сопротивление среды (сила сопротивления тоже равна 0), то из (14.2.20) получим уравнение:

$$x''(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0, \quad (14.2.21)$$

которое совпадает с (14.2.2) и, следовательно, является ДУ свободных (собственных) гармонических колебаний, а величина  $\omega_0 = \sqrt{k / m}$  поэтому называется циклической частотой собственных колебаний.

Видим, что циклическая частота собственных колебаний увеличивается с ростом коэффициента упругости  $k$  и уменьшается с ростом массы материальной точки. Как уже отмечено при обсуждении ДУ (14.2.2) свободных (собственных) гармонических колебаний, решениями этого уравнения являются гармонические функции. Убедимся в том, что эти решения получаются из общего решения (14.2.10) или (14.2.14). Характеристическое уравнение ЛОДУ свободных гармонических колебаний имеет вид:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \quad (14.2.22)$$

откуда следует, что  $D = -4\omega_0^2 < 0$ , а корни (14.2.22) – комплексно сопряжённые числа  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$  и, следовательно, общее решение ЛОДУ (14.2.21) определяется формулой (14.2.14), то есть:

$$z(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (14.2.23)$$

На первый взгляд, выражение (14.2.23) не описывает гармонические колебания, так как в нём отсутствуют гармоники. Но это на самом деле не так. С помощью показательной формы комплексных чисел можно произвольные постоянные записать, например, в виде:

$$C_1 = (C / 2) e^{i\varphi}, \quad C_2 = (C / 2) e^{-i\varphi}, \quad (14.2.24)$$

где  $C$  и  $\varphi$  – новые произвольные постоянные.

Так что выражение (14.2.23) примет вид:

$$z(t) = C(e^{i(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi)}) / 2 \quad (14.2.25)$$

или, с учётом и формулы Эйлера,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \quad (14.2.26)$$

Для общего решения имеем:

$$z(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (14.2.27)$$

в полном соответствии с утверждением о том, что (14.2.21) – ЛОДУ свободных гармонических колебаний.

При наличии силы сопротивления вместо (14.2.21) имеем ЛОДУ

$$x''(t) + 2\delta \cdot x'(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0, \quad (14.2.28)$$

общее решение которого определяется выражениями (14.2.13)–(14.2.15). Характеристическое уравнение ЛОДУ (14.2.28) есть квадратное уравнение:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (14.2.29)$$

с дискриминантом  $D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$ .

Если сила сопротивления большая, так что  $\delta^2 - \omega_0^2 \geq 0 \Rightarrow D \geq 0$ , то общее решение определяется либо выражением (14.2.13), где  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  – различные вещественные корни, то есть:

$$z(t) = e^{-\delta \cdot t} (C_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t}), \quad (14.2.30)$$

либо выражением (14.2.15), где  $\lambda = -\delta$  – вещественный корень кратности 2, то есть:

$$z(t) = e^{-\delta \cdot t} (C_1 t + C_2). \quad (14.2.31)$$

В обоих случаях решениями являются непериодические функции и о колебаниях в системе говорить нельзя.

Поэтому далее будем рассматривать только случай малых затуханий, когда выполняется условие  $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$  (дискриминант характеристического уравнения (14.2.29)  $D < 0$ ) и корни  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  – комплексно сопряжённые корни. С учётом обозначения  $\omega_3^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$  и приёма (14.2.24) общее решение ЛОДУ (14.2.28) в этом случае имеет вид:

$$z(t) = e^{-\delta \cdot t} (C_1 e^{i\omega_3 t} + C_2 e^{-i\omega_3 t}) = C e^{-\delta \cdot t} \cos(\omega_3 t + \varphi). \quad (14.2.32)$$

Видим, что и здесь решение не является периодической функцией времени. Но с учётом наличия в выражении (14.2.32) гармонического множителя  $\cos(\omega_3 t + \varphi)$  в данном случае можно говорить о колебаниях,

амплитуда которых уменьшается по экспоненциальному закону  $A(t) = Ce^{-\delta t}$ . В данной ситуации говорят о *затухающих свободных колебаниях*, а ЛОДУ (14.2.28) называют ДУ затухающих свободных колебаний. Введённую частоту  $\omega_z^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ , соответственно, называют *частотой затухающих свободных колебаний*.

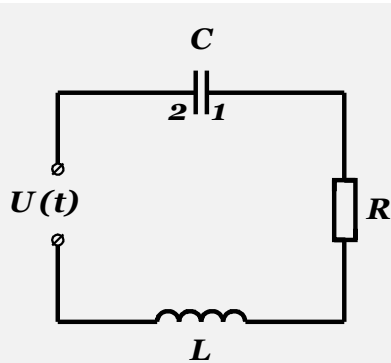


Рисунок 14.2.2

**II. Колебательный контур.** Колебательным контуром называют электрическую цепь, состоящую из включённых последовательно катушки с индуктивностью  $L$ , конденсатора ёмкостью  $C$  и сопротивления  $R$  и, возможно, источника переменного питания  $U(t)$  (рисунок 14.2.2).

В соответствии с законом Ома для участка цепи 1–2 можем записать:

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_i + U(t) = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} + U(t) \quad (14.2.33)$$

или, с учётом связи  $I = dq / dt$ :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U(t)}{L}. \quad (14.2.34)$$

Если ввести обозначения  $2\delta = R / L$ ,  $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$  и  $\Theta(t) = U(t) / L$ , то получим ДУ, полностью совпадающее по внешнему виду с ДУ механических колебаний (14.2.20), а именно:

$$q''(t) + 2\delta \cdot q'(t) + \omega_0^2 \cdot q(t) = \Theta(t). \quad (14.2.35)$$

Отметим, что, кроме приведённых примеров, можно указать и другие физические системы, описываемые ДУ вида (14.2.35). Совпадение вида ДУ, описывающих движение различных систем, позволяет с единой точки зрения производить изучение общих свойств и закономерностей в поведении этих систем.

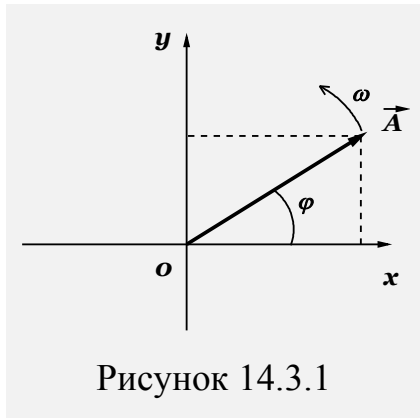
### 14.3. Векторные диаграммы. Сложение гармонических колебаний

Любому гармоническому колебанию можно поставить в соответствие очень наглядный геометрический образ – вектор  $\vec{A}$  постоянной дли-

ны  $A$ , вращающийся вокруг неподвижной точки с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в некоторой плоскости (рисунок 14.3.1).

Действительно, если найти проекцию указанного вектора, например, на ось абсцисс, то получим:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (14.3.1)$$



где  $\varphi_0$  – угол между вектором  $\vec{A}$  и осью абсцисс в начальный момент времени  $t = 0$ .

Видим, что проекция вектора  $\vec{A}$  изменяется во времени по закону косинуса, то есть описывает гармоническое колебание.

Совершенно аналогично, для проекции рассматриваемого вектора на ось ординат получим, что эта проекция определяется выражением:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (14.3.2)$$

которое тоже описывает гармоническое колебание.

Таким образом, любую из проекций вектора  $\vec{A}$ , вращающегося с постоянной угловой скоростью, можно взять за геометрический образ гармонических колебаний. Как и ранее, мы здесь выберем для дальнейшего рассмотрения вариант с косинусом, то есть формулу (14.3.1). Приведённый метод представления гармонических колебаний вращающимися векторами называется методом *векторных диаграмм*.

С помощью векторных диаграмм очень удобно выполнять сложение гармонических колебаний вдоль одного направления с одинаковой частотой (фактически можно говорить о сложении колебания скалярных величин, например сил электрических токов, напряжений, давлений воздуха и т. п.). Рассмотрим два таких гармонических колебания с одинаковой частотой:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}); \quad (14.3.3)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}), \quad (14.3.4)$$

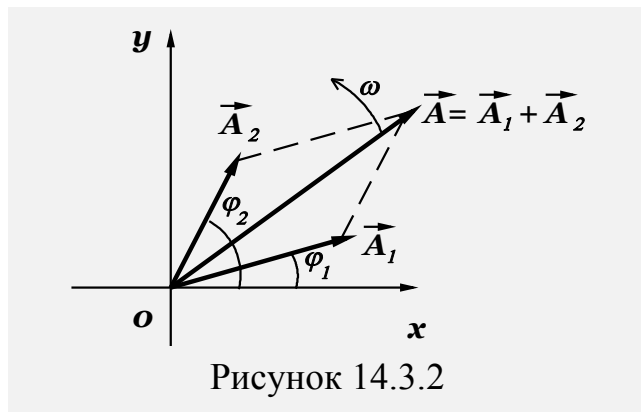
которым на векторной диаграмме сопоставлены два вектора  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$ , вращающихся с одинаковой частотой  $\omega$  (рисунок 14.3.2).

Результирующему колебанию соответствует вектор  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ , вращающийся с той же частотой  $\omega$ . Из рисунка 14.3.2 следует, что:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (14.3.5)$$

причём амплитуду и начальную фазу результирующих колебаний легко найти из этой же диаграммы из геометрических соображений:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (14.3.6)$$



Формулу (14.3.6) можно было, конечно, получить и путём тригонометрических преобразований. Однако этот способ гораздо более трудоёмкий, нежели метод векторных диаграмм.

#### 14.4. Энергия гармонических колебаний

Колебательная система, как и любая другая физическая система, имеет полную механическую энергию  $W$ , равную сумме кинетической энергии  $W_k$  и потенциальной энергии  $W_n$ .

Для количественного определения этих энергий обратимся к примеру с материальной точкой, совершающей движение под действием упругой силы. Как уже установлено в п. 14.2, проекция радиус-вектора этой материальной точки на ось, вдоль которой совершаются колебания, удовлетворяет ЛОДУ гармонических колебаний (14.2.21), общее решение которого имеет вид:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (14.4.1)$$

где величина  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  является циклической частотой собственных колебаний.

По определению, кинетическую энергию рассматриваемой системы находим по формуле:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} \{1 - \cos[2(\omega_0 t + \varphi)]\}. \quad (14.4.2)$$

Потенциальную энергию найдем, используя известную из механики формулу:



$$dW_n = -dA = -\vec{F}_{\text{упр}} \cdot d\vec{r} = k\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}kd(r^2), \quad (14.4.3)$$

откуда

$$W_n = \frac{k}{2} \int_0^x d(r^2) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (14.4.4)$$

и

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= \frac{mA^2\omega_0^2}{4} \{1 + \cos[2(\omega_0 t + \varphi)]\}. \end{aligned} \quad (14.4.5)$$

Для полной механической энергии рассматриваемой системы находим:

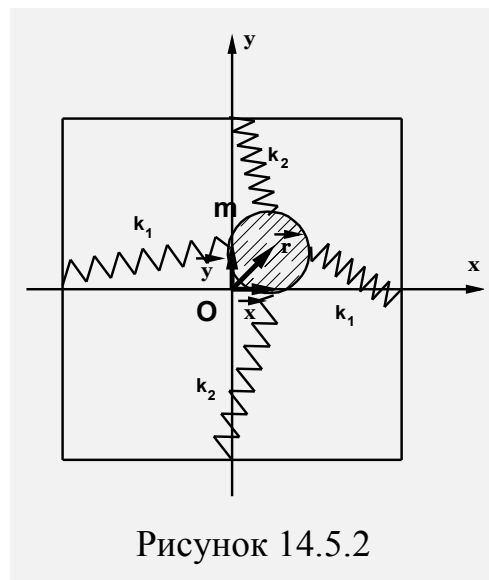
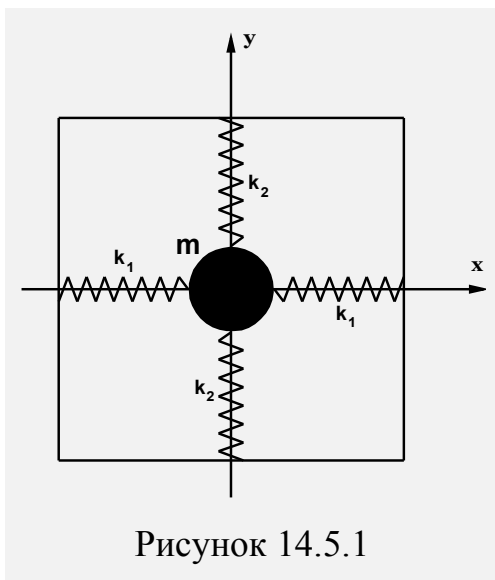
$$W = W_n + W_n = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} (\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \quad (14.4.6)$$

Из полученных выражений для полной механической энергии системы, её кинетической энергии и потенциальной энергии видим, что энергии пропорциональны квадрату амплитуды колебаний. Из выражения (14.4.6) видим, что полная механическая энергия системы – величина постоянная, и это является следствием замкнутости рассматриваемой системы и консервативности внутренних сил (упругой силы). При этом составляющие полной механической энергии – кинетическая и потенциальная энергии – являются периодическими функциями времени, которые совершают колебания в противофазе друг другу с частотой, удвоенной по сравнению с частотой собственных колебаний  $\omega_0$ .

## 14.5. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

На практике может иметь место ситуация, когда некоторая система участвует одновременно в двух колебательных процессах, совершающихся во взаимно перпендикулярных направлениях.

В качестве простейшего примера можно привести ситуацию с движением материальной точки массой  $m$  под действием двух взаимно перпендикулярных упругих сил  $\vec{F}_1 = -2k_1\vec{x}$  и  $\vec{F}_2 = -2k_2\vec{y}$ , как это показано на рисунках 14.5.1 и 14.5.2.



На этих же рисунках пояснены все обозначения.

Результирующее движение даже в этом простейшем случае может иметь достаточно сложный вид в зависимости от параметров рассматриваемой системы и начальных условий.

При описании рассматриваемой ситуации мы будем предполагать, что имеет место принцип суперпозиции колебаний, а именно: результирующее движение есть результат наложения двух независимых движений вдоль осей  $x$  и  $y$ , соответственно.

В приведённом примере материальная точка участвует в двух гармонических колебаниях:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_{01}t + \varphi_{01}) \quad (14.5.1)$$

и

$$y(t) = A_2 \cos(\omega_{02}t + \varphi_{02}), \quad (14.5.2)$$

где частоты собственных колебаний определяются из выражений:

$$\omega_{01} = \sqrt{2k_1 / m}, \quad \omega_{02} = \sqrt{2k_2 / m}. \quad (14.5.3)$$

Из аналитической геометрии известно, что выражения (14.5.1) и (14.5.2) параметрически задают некоторую кривую на плоскости. Для облегчения наших рассуждений мы рассмотрим не общий случай, а несколько простейших ситуаций.

1. Частоты колебаний совпадают, начальные фазы колебаний сдвинуты на  $\phi_0$ .

В данном случае вместо выражений (14.5.1) и (14.5.2) имеем:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t \quad (14.5.4)$$

и

$$y(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (14.5.5)$$

Для определения траектории движения необходимо исключить из (14.5.4) и (14.5.5) параметр – время  $t$ . Сделаем это путём несложных тригонометрических преобразований:

$$x / A = \cos \omega_0 t, \quad (14.5.6)$$

$$\begin{aligned} y / B = \cos(\omega_0 t + \varphi_0) &= \cos \omega_0 t \cdot \cos \varphi_0 - \sin \omega_0 t \cdot \sin \varphi_0 = \\ &= x / A \cos \varphi_0 - (\pm \sqrt{1 - (x / A)^2}) \cdot \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (14.5.7)$$

Из последнего равенства после возведения в квадрат находим:

$$(y / B - (x / A) \cos \varphi_0)^2 = (1 - (x / A)^2) \cdot \sin^2 \varphi_0 \quad (14.5.8)$$

и, после несложных преобразований, получим:

$$(y / B)^2 + (x / A)^2 \cos^2 \varphi_0 - 2(xy / AB) \cos \varphi_0 = (1 - (x / A)^2) \cdot \sin^2 \varphi_0, \quad (14.5.9)$$

или

$$(y / B)^2 + (x / A)^2 (\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0) - 2(xy / AB) \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0, \quad (14.5.10)$$

и, наконец:

$$(y / B)^2 + (x / A)^2 - 2(xy / AB) \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0. \quad (14.5.11)$$

Выражение (14.5.11) задаёт кривую второго порядка, которая, как несложно установить, является эллипсом.

Действительно, рассмотрим различные частные случаи:

а) если  $\varphi_0 = 0$ , то имеем:

$$\left( \frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{B}{A} x, \quad (14.5.12)$$

то есть материальная точка движется вдоль прямой линии, заданной уравнением (14.5.12), причём абсцисса при этом изменяется в промежутке  $[-A, A]$ , а ордината – в промежутке  $[-B, B]$  (см. рисунок 14.5.3 – сплошная линия). Такое движение называется *финитным*;

б) аналогично при  $\varphi_0 = \pi$  имеем:

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{B}{A}x, \quad (14.5.13)$$

то есть вновь материальная точка движется вдоль прямой линии, заданной уравнением (14.5.13), причём движение вновь финитное и абсцисса при этом изменяется в промежутке  $[-A, A]$ , а ордината – в промежутке  $[-B, B]$  (рисунок 14.5.3 – пунктирная линия);

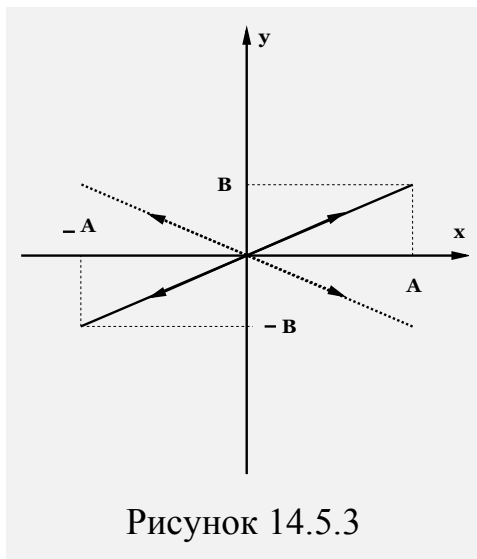


Рисунок 14.5.3

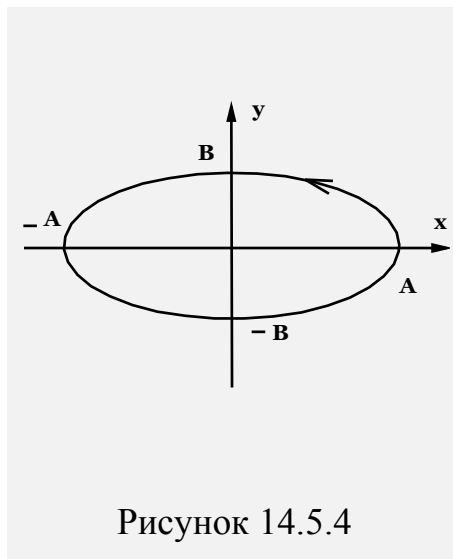


Рисунок 14.5.4

в) и, наконец, пусть  $\varphi_0 = \pm\pi/2$ . В этом случае имеем уравнение

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1, \quad (14.5.14)$$

которое является *каноническим* уравнением эллипса.

В данном случае материальная точка движется по эллиптической траектории, заданной уравнением (14.5.14), и вновь движение финитное (абсцисса изменяется в промежутке  $[-A, A]$ , а ордината – в промежутке  $[-B, B]$ ). При  $\varphi_0 = \pi/2$  движение материальной точки осуществляется против часовой стрелки (как это показано на рисунке 14.5.4), а при  $\varphi_0 = -\pi/2$  материальная точка движется по часовой стрелке.

В случае разности фаз, отличающейся от рассмотренных ситуаций, движение будет также финитным и будет осуществляться по траектории, являющейся эллипсом, повернутым на некоторый угол относительно координатных осей.

Отметим, что описанная ситуация сложения взаимно перпендикулярных колебаний имеет место и при описании электромагнитных явлений, о чём подробно будет сказано при рассмотрении явления поляризации света.

2. Частоты колебаний различны. В этом случае вновь ограничимся простейшими ситуациями, а затем обобщим полученные результаты.

Рассмотрим вначале случай, когда частота колебаний вдоль оси ординат вдвое больше частоты колебаний вдоль оси абсцисс и колебания вдоль этих осей определяются выражениями:

$$\begin{aligned} a) \quad x(t) &= A \cos \omega_0 t = A \cos \omega_0 t ; \\ б) \quad y(t) &= B \cos \omega_0 t = B \cos 2\omega_0 t . \end{aligned} \quad (14.5.15)$$

В данном случае легко исключить время из уравнений (14.5.15а) и (14.5.15б) и получить выражение:

$$y / B = \cos^2 \omega_0 t - \sin^2 \omega_0 t = 2 \cos^2 \omega_0 t - 1 \Rightarrow y / B = 2(x / A)^2 - 1, \quad (14.5.16)$$

которое является уравнением параболы, изображённой на рисунке 14.5.5.

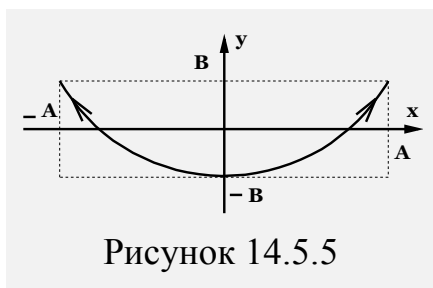


Рисунок 14.5.5

Как видно из уже приведённых примеров, вид траектории, по которой материальная точка, участвующая в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, существенно зависит не только от частот этих колебаний, но и от начального сдвига фаз между ними.

В рассматриваемом примере это также ярко проявляется.

Действительно, если в колебаниях, описываемых выражениями (14.5.15), сделать начальный сдвиг фаз не нулевым, а равным, например,  $\varphi_0 = \pi / 2$ , то есть:

$$\begin{aligned} a) \quad x(t) &= A \cos \omega_0 t; \\ б) \quad y(t) &= B \cos(2\omega_0 t + \pi / 2), \end{aligned} \quad (14.5.17)$$

то картина наложения колебаний значительно изменится (см. рисунок 14.5.6).

Результирующая кривая в итоге может иметь очень сложный вид, причём она может оказаться и не замкнутой, так что точка, участвующая в

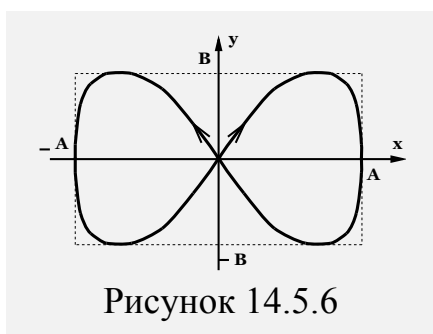


Рисунок 14.5.6

двух взаимно перпендикулярных колебаниях, постепенно заполняет весь прямоугольник.

Более тщательный анализ показывает, что траектории движения материальной точки при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний получаются замкнутыми и называются фигурами *Лиссажу* (рисунок 14.5.7), если частоты этих колебаний не совпадают, но являются кратными, то есть:  $\omega_{02} / \omega_{01} = n / m$ , где  $m$  и  $n$  – целые числа.

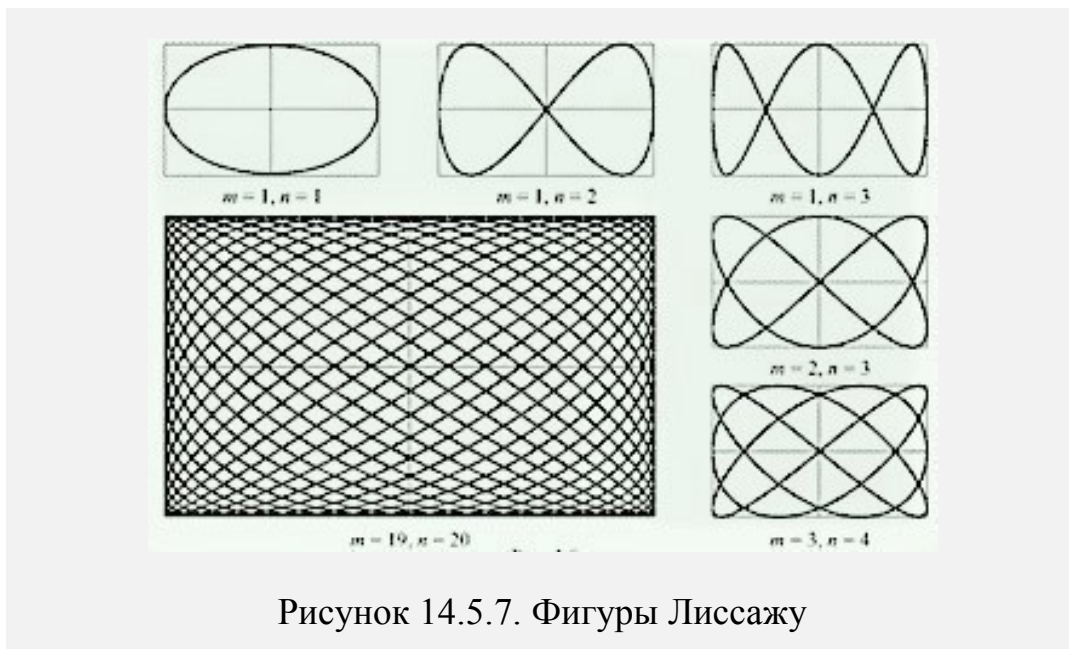


Рисунок 14.5.7. Фигуры Лиссажу

Из приведённых на рисунке 14.5.7 фигур легко заметить, что отношение частот колебаний равно отношению чисел точек касания фигуры Лиссажу к сторонам прямоугольника, в который она вписана.

К описанному случаю сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний материальной точки сводятся задачи наложения двух колеблющихся векторных величин, например напряжённостей электрического или магнитного поля в некоторой точке пространства.

## 14.6. Затухающие колебания

В п. 14.2 уже отмечалось, что при наличии в колебательной системе кроме упругих (или квазиупругих) сил присутствуют силы сопротивления (трения), её поведение описывается ЛОДУ 2-го порядка (14.2.28), называемым ДУ *затухающих колебаний*:

$$x''(t) + 2\delta \cdot x'(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0, \quad (14.6.1)$$

где:  $\delta = \mu / 2m$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k / m}$ ,  $k > 0$  – коэффициент упругости,  $\mu > 0$  – коэффициент сопротивления среды.

Аналогичное уравнение (см. (14.2.34) или (14.2.35)) получается и при описании колебаний в электрической цепи с отличным от нуля сопротивлением, содержащей катушку индуктивности  $L$  и конденсатор (электрическую ёмкость)  $C$ , где коэффициенты в ДУ (14.6.1) определяются выражениями  $2\delta = R / L$ ,  $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$ .

Здесь мы подробнее обсудим поведение колебательных систем с наличием сил сопротивления.

Напомним, что общее решение ДУ (14.6.1) определяется выражениями (14.2.13)–(14.2.15) в зависимости от величины и знака дискриминанта  $D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$  характеристического уравнения ЛОДУ (14.6.1):

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (14.6.2)$$

При сильном затухании (сила сопротивления или электрическое сопротивление велики), так что  $\delta^2 - \omega_0^2 \geq 0 \Rightarrow D \geq 0$ , общее решение определяется либо выражением:

$$z(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (14.6.3)$$

где  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  – различные вещественные корни, либо, в случае  $\delta^2 = \omega_0^2 \Rightarrow D = 0$ , выражением:

$$z(t) = e^{-\delta t} (C_1 t + C_2), \quad (14.6.4)$$

где  $\lambda = -\delta$  – вещественный корень кратности 2.

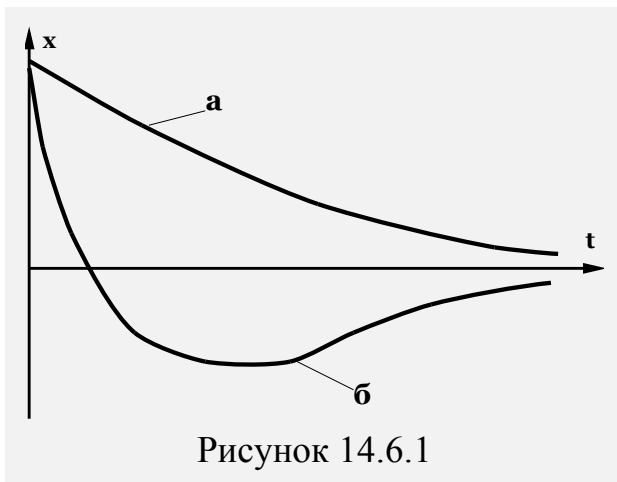


Рисунок 14.6.1

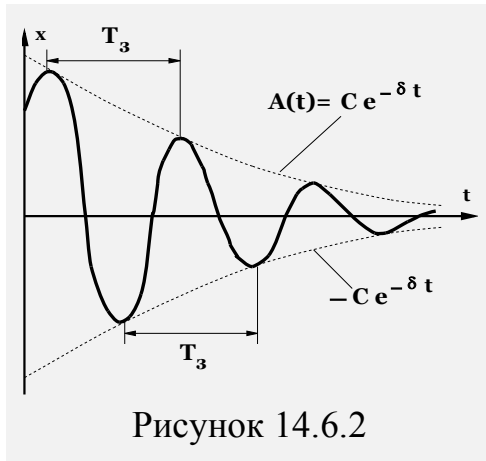
В обоих случаях о колебаниях в системе говорить нельзя, и такое движение называется *апериодическим*. Возможны различные варианты результирующих апериодических движений, два варианта из которых приведены на рисунке 14.6.1 (линии *а* и *б*).

В случае малых затуханий, когда выполняется условие  $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$  (дискриминант характеристического уравнения (14.6.2)  $D < 0$ ) и корни

$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  – комплексно сопряжённые корни. С учётом обозначения  $\omega_3^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$ , общее решение ЛОДУ (14.2.28) в этом случае имеет вид:

$$z(t) = e^{-\delta t} (C_1 e^{i\omega_3 t} + C_2 e^{-i\omega_3 t}) = C e^{-\delta t} \cos(\omega_3 t + \varphi). \quad (14.6.5)$$

Графическое изображение полученного общего решения приведено на рисунке 14.6.2.



Видим, что и здесь решение не является периодической функцией времени.

Но с учётом наличия в выражении (14.6.5) гармонического множителя  $\cos(\omega_3 t + \varphi)$  в данном случае можно говорить о колебаниях, множитель  $A(t) = C e^{-\delta t}$  которых называется *амплитудой затухающих колебаний*, которая, в отличие от гармонических колебаний, уже не есть постоянная величина, а уменьшается по экспоненциальному закону. Как уже отмечалось в п. 14.2, в данном случае говорят о **затухающих свободных колебаниях**, а ЛОДУ (14.6.1) называют *ДУ затухающих свободных колебаний*. Величину  $\omega_3^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ , соответственно, называют **частотой затухающих свободных колебаний**, а величину  $\delta$  называют **коэффициентом затухания**.

Применяют и другие величины, удобные для описания затухающих колебаний, а именно:

$$T_3 = 2\pi / \omega_3 \quad (14.6.6)$$

– **период** затухающих колебаний, который даёт промежуток времени, через который колеблющаяся величина примет максимальное (или минимальное) значение;

$$\tau = 1 / \delta \quad (14.6.7)$$

– **время жизни** затухающих колебаний, которое даёт промежуток времени, за который амплитуда  $A(t) = C e^{-\delta t}$  уменьшится в  $e$  раз;

$$D \equiv \ln \frac{A(t)}{A(t + T_3)} = \delta T_3 = \frac{2\pi\delta}{\omega_3} = \frac{T_3}{\tau} \quad (14.6.8)$$



– **логарифмический декремент** затухающих колебаний, который даёт натуральный логарифм отношения амплитуд затухающих колебаний в моменты времени  $t$  и  $t + T_3$ . Необходимость логарифмирования отношения амплитуд затухающих колебаний вызвана тем, что само отношение амплитуд оказывается, как правило, очень большим числом.

Очень полезной, особенно для электрических колебаний, оказывается величина  $Q$ , называемая **добротностью колебательной системы**, определяемая выражением:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t + T_3)}, \quad (14.6.9)$$

где  $W(t)$  и  $W(t + T_3)$  – значения полной энергии системы в моменты времени  $t$  и  $t + T_3$ .

Поскольку энергия системы пропорциональна квадрату амплитуды колебаний системы, то вместо (14.6.9) для добротности  $Q$  можем записать:

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t + T_3)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T_3}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2D}}. \quad (14.6.10)$$

При малых затуханиях  $\delta^2 \ll \omega_0^2$ , когда логарифмический декремент затухания  $D \ll 1$ , можно воспользоваться только двумя членами разложения функции  $e^{-2D}$  в ряд Маклорена, то есть  $e^{-2D} \approx 1 - 2D$ , так что вместо (14.6.10) для добротности колебательной системы получим:

$$Q \approx \pi / D. \quad (14.6.11)$$

Поскольку  $\omega_s^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ , то в данном случае (малых затуханий) частота затухающих колебаний практически совпадает с собственной частотой, а период затухающих колебаний – с периодом собственных незатухающих колебаний системы, так что для добротности находим:

$$Q \approx \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}. \quad (14.6.12)$$

Полученное выражение для добротности применимо в любой колебательной системе в случае малых затуханий. В частности, в случае колебательного электрического контура  $2\delta = R / L$ ,  $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$ , и для добротности получим  $Q = (1 / R) \cdot \sqrt{L / C}$ , откуда следует, что повышению добротности контура, кроме очевидного уменьшения сопротивления этого контура, способствует также увеличение отношения  $L / C$ .

## 14.7. Вынужденные колебания. Резонанс

Если в колебательной системе, кроме внутренних сил (квазиупругих и сопротивления), присутствуют *внешние* («вынуждающие») силы, то при определённых условиях в этой системе могут возникнуть колебания, определяемые внешними вынуждающими силами.

ДУ вынужденных колебаний в механической системе, как мы уже знаем, определяется выражением (14.2.20) и имеет вид:

$$x''(t) + 2\delta \cdot x'(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = f(t), \quad (14.7.1)$$

в котором введены обозначения:  $\delta = \mu / 2m$ ,  $\omega_0 = \sqrt{k / m}$ ,  $f(t) = F_{x, \text{внешн}} / m$ .

Для электрического колебательного контура ДУ имеет такой же вид:

$$q''(t) + 2\delta \cdot q'(t) + \omega_0^2 \cdot q(t) = \Theta(t), \quad (14.7.2)$$

где используются обозначения  $2\delta = R / L$ ,  $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$  и  $\Theta(t) = U(t) / L$ .

Видим, что оба уравнения полностью совпадают, за исключением того, что искомые функции и вынуждающие члены обозначены разными буквами, что, разумеется, совершенно несущественно.

Ввиду полного совпадения ДУ (14.7.1) и (14.7.2) далее будем рассматривать только ДУ вынужденных колебаний (14.7.1), поясняя полученные результаты на обеих колебательных системах.

Из множества возможных вариантов возмущающего члена наиболее интересен, с физической точки зрения, случай, когда этот член носит колебательный характер. Простейшим и наиболее важным вариантом при этом будет гармонический вид вынуждающего члена:

$$f(t) \equiv F_{x, \text{внешн}}(t) / m = (F_0 / m) \cos \omega t = f_0 \cos \omega t, \quad (14.7.3)$$

где  $f_0$  – амплитуда вынуждающего члена, а  $\omega$  – его частота. Начальная фаза для удобства выбрана равной нулю.

Для упрощения математических выкладок удобнее рассматривать вынуждающий член в комплексной форме (отмечено знаком « $\sim$ »):

$$\tilde{f}(t) = f_0 e^{i\omega t}, \quad (14.7.4)$$

и после получения решения взять его вещественную часть, так как легко заметить, что  $\text{Re } \tilde{f}(t) = f(t)$ .

В п. 14.2 уже упоминалось, что общее решение ЛНДУ вынужденных колебаний (14.7.1) является суммой  $x(t) = z(t) + X(t)$  общего решения ЛОДУ  $z(t)$ , соответствующего данному ЛНДУ, и частного (любого) решения  $X(t)$  рассматриваемого ЛНДУ. Вид общего решения  $z(t)$  ЛОДУ, соответствующего ЛНДУ (14.7.1), уже найден в предыдущем параграфе, и поэтому остаётся найти частное решение  $X(t)$  ЛНДУ (14.7.2). Естественно предположить, что вид искомого частного решения похож на вынуждающий член, то есть:

$$\tilde{X}(t) = \tilde{A}e^{i\omega t}, \quad (14.7.5)$$

где **амплитуда вынужденных колебаний**  $\tilde{A}$  – искомая функция параметров рассматриваемой задачи (в отличие от  $f_0$ , величина  $\tilde{A}$  может быть – и окажется! – комплексной величиной).

Таким образом, для решения поставленной задачи нужно найти выражение для амплитуды вынужденных колебаний  $\tilde{A}$  такое, что при подстановке (14.7.5) с найденной функцией  $\tilde{A}$  получится тождество.

После подстановки (14.7.5) в ЛНДУ (14.7.1) для амплитуды вынужденных колебаний  $\tilde{A}$  получим:

$$\tilde{A}(\omega) = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\delta\omega} = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} - i \frac{2f_0\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}, \quad (14.7.6)$$

или в показательной форме:

$$\tilde{A}(\omega) = A e^{i\varphi}, \quad (14.7.7)$$

где через  $A$  и  $\varphi$  обозначены модуль и фаза (точнее – фазовый сдвиг по отношению к вынуждающему члену (14.7.5)) искомой комплексной амплитуды, соответственно, а именно:

$$A(\omega) = \sqrt{(\operatorname{Re} \tilde{A})^2 + (\operatorname{Im} \tilde{A})^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad (14.7.8)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)}, \quad (14.7.9)$$

причём последняя формула следует из того факта, что  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{Im} \tilde{A} / \operatorname{Re} \tilde{A} = -2\delta\omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$ .

С учётом полученных выражений для частного решения  $\tilde{X}$  ЛНДУ вынужденных колебаний (14.7.1) имеем:

$$\tilde{X}(t) = \tilde{A}e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t + \varphi)} = A\cos(\omega t + \varphi) + iA\sin(\omega t + \varphi), \quad (14.7.10)$$

а для его вещественной части, имеющей физический смысл, соответственно:

$$X(t) = \operatorname{Re} \tilde{X}(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi), \quad (14.7.11)$$

где  $A(\omega)$  – амплитуда, а  $\varphi$  – фаза вынужденных колебаний, возникших в рассматриваемой системе под действием вынуждающей силы  $f(t) = f_0 \cos \omega t$  (см. выражение (14.7.3)).

В соответствии со сказанным выше, общее решение ЛНДУ вынужденных колебаний (14.7.1) является суммой общего решения  $z(t)$  ЛОДУ, соответствующего данному ЛНДУ, и найденного частного решения  $X(t)$  (14.7.11) рассматриваемого ЛНДУ, то есть:

$$x(t) = z(t) + X(t), \quad (14.7.12)$$

где  $z(t)$  определяется выражением (14.6.5):  $z(t) = Ce^{-\delta t} \cos(\omega_3 t + \varphi)$ .

Исходя из формулы (14.6.5), можно заключить, что по истечении промежутка времени, превышающего время жизни затухающих колебаний  $\tau$ , определяемого выражением (14.6.7), слагаемым  $z(t)$  в формуле (14.7.12) можно пренебречь. Колебательный процесс в промежутке времени от начала действия вынуждающей силы до  $\tau$ , когда оба слагаемых необходимо учитывать, имеет, как правило, достаточно сложный вид и называется *переходным* процессом. Далее мы будем рассматривать времена  $t > \tau$ , когда можно пренебречь затухающими собственными колебаниями в системе, считать вынужденные колебания установившимися и ограничиться рассмотрением лишь второго слагаемого в (14.7.12).

Прежде всего отметим, что определяемая выражением (14.7.8) функция  $A(\omega)$  при отсутствии затухания ( $\delta = 0$ ) имеет в точке  $\omega = \omega_0$  разрыв, то есть при совпадении частоты вынужденных колебаний с частотой собственных (свободных) колебаний амплитуда вынужденных колебаний *неограниченно велика* (рисунок 14.7.1).

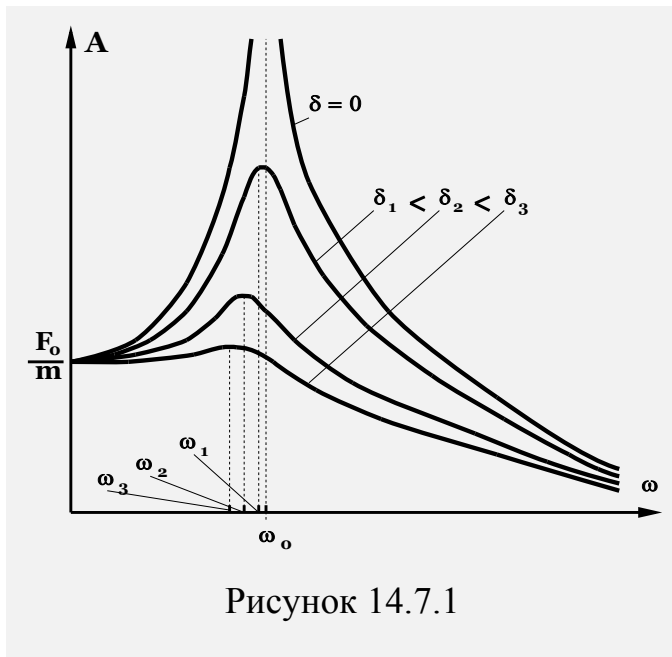


Рисунок 14.7.1

При отличном от нуля коэффициенте затухания  $\delta$  зависимость амплитуды вынужденных колебаний  $A(\omega) = |\tilde{A}(\omega)|$  как функции от частоты вынужденных колебаний имеет вид кривой с одной точкой максимума. Действительно, в соответствии с правилами исследования функций на экстремум, из (14.7.8) определяем, что для данной функции имеется всего одна точка, где возможен экстремум,

а именно – точка, где производная от функции  $A(\omega)$  по частоте равна нулю. Если обозначить значение частоты, где выполняется это условие, через  $\omega_p$ , то условие экстремума имеет вид:

$$\left. \frac{dA(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_p} = 0. \quad (14.7.13)$$

Выполняя дифференцирование  $A(\omega)$  по частоте, имеем:

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = f_0 \frac{\omega(4\delta^2 - 2(\omega_0^2 - \omega^2))}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (14.7.14)$$

и, налагая условие (14.7.13) (нулевое значение частоты отбрасываем, так как это граничная точка области определения), находим выражение:

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2, \quad (14.7.15)$$

которое является условием экстремума функции  $A(\omega)$ .

Поскольку при переходе через эту точку производная  $A'_\omega(\omega)$  меняет знак с «+» на «-», то заключаем, что найденная единственная точка экстремума является максимумом функции  $A(\omega)$  в области её определения (на промежутке  $[0, +\infty)$ ). Из (14.7.15) видим, что резонансная частота всегда меньше частоты собственных колебаний системы.

При уменьшении частоты вынуждающей силы до нуля все резонансные кривые приходят в одну и ту же точку с амплитудой, равной смещению системы из положения равновесия и определяемом выражением:

$$A_{cm} = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}. \quad (14.7.16)$$

При высоких частотах  $\omega \gg \omega_0$  все резонансные кривые стремятся к нулю, так как на этих частотах система просто не «успевает» отреагировать на изменение вынуждающей силы и практически не отклоняется от положения равновесия.

Исходя из сказанного о поведении функции, определяемой выражением (14.7.8), мы установили, что при отличном от нуля коэффициенте затухания амплитуда установившихся вынужденных колебаний имеет максимум на резонансной частоте  $\omega_p$ , определяемой выражением (14.7.15). Процесс возрастания амплитуды вынужденных колебаний по мере приближения частоты вынужденных колебаний к указанной частоте  $\omega_p$  называется **резонансом**.

Значение амплитуды вынужденных колебаний на резонансной частоте  $A_p = A(\omega)|_{\omega=\omega_p}$  легко найти подстановкой (14.7.15) в (14.7.8), что даёт:

$$A_p = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)}} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)}}. \quad (14.7.17)$$

Видим, что резонансная амплитуда установившихся вынужденных колебаний с уменьшением коэффициента затухания возрастает, причём максимумы при малых затуханиях становятся очень «острыми», а значения резонансных амплитуд – очень большими. Кроме того, при уменьшении коэффициента затухания настолько, что будет выполняться условие  $\delta \ll \omega_0$ , резонансная амплитуда становится равной:

$$A_p \approx \frac{F_0}{2m\delta\omega_0}. \quad (14.7.18)$$

Поделив  $A_p$  из (14.7.18) на  $A_{cm}$  из (14.7.16) и, с учётом (14.6.12) ( $Q \approx \pi / (\delta T_0) = \omega_0 / (2\delta)$ ) и (14.6.8) ( $D = \delta T_0$ ), получим:

$$\frac{A_p}{A_{cm}} \approx \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\pi}{\delta T_0} = Q, \quad (14.7.19)$$

что позволяет сделать заключение, что при малых затуханиях отношение резонансной амплитуды под действием вынуждающей силы с модулем некоторой величины к статическому отклонению под действием силы с таким же модулем (частоты у них, разумеется, не равны!) равно добротности рассматриваемой колебательной системы.

Для определения характера зависимости фазы установившихся вынужденных колебаний от частоты вынужденных колебаний полезно привести вид производной от функции, определяемой формулой (14.7.9), по частоте:

$$\varphi'_{\omega} = -\frac{2\delta(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\delta^2\omega^2}, \quad (14.7.20)$$

из которого видно, что при всех значениях частоты эта производная отрицательна, а значит, фаза установившихся вынужденных колебаний везде убывает с ростом частоты.

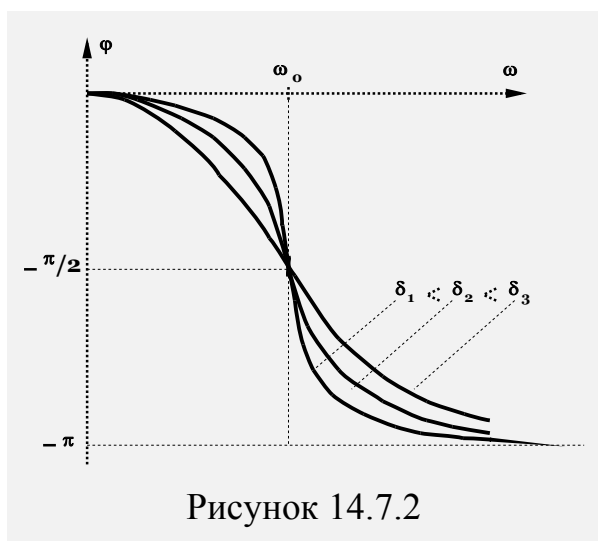


Рисунок 14.7.2

На рисунке 14.7.2 приведены графические зависимости фазы установившихся вынужденных колебаний, определяемой формулой (14.7.9), в зависимости от частоты при различных коэффициентах затухания. Из графиков и формул (14.7.9) и (14.7.20) следует, что только при отсутствии затухания ( $\delta = 0$ ) и при  $\omega < \omega_0$  установившиеся вынужденные колебания и вынуждающая сила

имеют одинаковые фазы. Во всех других случаях вынужденные колебания *отстают* по фазе от вынуждающей силы.

При  $\delta \neq 0$  с увеличением частоты сдвиг фаз по абсолютной величине возрастает (увеличивается отставание фазы вынужденных колебаний от вынуждающей силы), достигая (по модулю)  $\pi$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . На частоте, совпадающей с частотой собственных колебаний, сдвиг по фазе, независимо от затухания, равен  $\pi/2$ . Чем меньше затухание, тем круче меняется фаза около резонанса (при малых затуханиях  $\omega \approx \omega_p$ ), в пределе (при  $\delta = 0$ ) переходя к разрывной зависимости:  $\varphi = 0$  при  $\omega < \omega_0$ ;  $\varphi = -\pi$  при  $\omega > \omega_0$ .

В заключение рассмотрим особенности вынужденных колебаний в колебательном контуре. Гармоническое вынуждающее напряжение и вынуждающую силу запишем в виде:

$$U(t) = U_m \cos \omega t ; \quad \Theta(t) = U(t) / L = (U_m / L) \cos \omega t . \quad (14.7.21)$$

Тогда частное решение ЛНДУ (14.7.2) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(t) &= \tilde{q}(\omega) e^{i\omega t} = q(\omega) e^{i\varphi} e^{i\omega t} = q(\omega) e^{i(\omega t + \varphi)} ; \\ q(t) &= \operatorname{Re} \tilde{q}(t) = q(\omega) \cos(\omega t + \varphi) , \end{aligned} \quad (14.7.22)$$

где «амплитуда» вынужденных колебаний заряда  $q(\omega)$  определяется формулой (14.7.8), которая с учётом обозначений  $2\delta = R / L$ ,  $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$ , принимает вид:

$$q(\omega) = U_m / \left( \omega \sqrt{R^2 + (1 / (\omega C) - \omega L)^2} \right) , \quad (14.7.23)$$

а фаза этих колебаний определяется выражением:

$$\operatorname{tg} \varphi = R / (\omega L - (1 / \omega C)) . \quad (14.7.24)$$

Комплексная сила тока в цепи определяется выражением:

$$\tilde{I}(t) = \tilde{q}'_t(t) = i\omega \tilde{q}(t) = \omega q(\omega) e^{i(\omega t + (\varphi + \pi/2))} = I(\omega) e^{i(\omega t + (\varphi + \pi/2))} , \quad (14.7.25)$$

где использованы формула  $i = e^{i(\pi/2)}$  и выражение (14.7.22).

Так что для силы вынужденного тока как функции частоты получаем:

$$I(\omega) = \omega q(\omega) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (1 / (\omega C) - \omega L)^2}} , \quad (14.7.26)$$

а сдвиг по фазе между приложенным вынуждающим напряжением и силой тока увеличится, как это видно из (14.7.25), на  $\pi / 2$  и будет определяться выражением

$$\operatorname{tg}(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg} \varphi = \frac{(\omega L - 1 / (\omega C))}{R} , \quad (14.7.27)$$

откуда следует, что ток отстаёт по фазе от напряжения, если  $\omega L > 1 / (\omega C)$  и, наоборот, опережает напряжение, если  $\omega L < 1 / (\omega C)$ .



По внешнему виду формула (14.7.26) очень похожа на закон Ома для участка электрической цепи. По этой причине стоящая в знаменателе (14.7.26) величина, имеющая размерность сопротивления, называется *полным сопротивлением (импедансом)*  $Z$  рассматриваемой электрической цепи, модуль которого определяется выражением:

$$Z = \sqrt{R^2 + (1/(\omega C) - \omega L)^2}. \quad (14.7.28)$$

При этом величина  $R$  называется *активным сопротивлением*, а разность

$$X = \omega L - 1/(\omega C) = X_L - X_C \quad (14.7.29)$$

называется *реактивным сопротивлением* этой цепи, а входящие в (14.7.28) величины называются, соответственно, *индуктивным сопротивлением* ( $X_L = \omega L$ ) и *ёмкостным сопротивлением* ( $X_C = 1/(\omega C)$ ).

В заключение отметим, что в настоящей главе приведены лишь основные первоначальные сведения о колебаниях. Имеется обширный круг интереснейших вопросов о колебаниях, таких, например, как колебания в связанных системах, нелинейные колебания и их фазовые портреты и связанные с ними понятия, такие как бифуркации, фракталы, странные аттракторы и другие. Однако их рассмотрение, как правило, осуществляется в специальных курсах, поскольку временные рамки не позволяют обсудить эти вопросы в курсе общей физики.

## Глава 15. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 15.1. Волновые процессы и их характеристики

Колебательный процесс, возникший в какой-либо точке системы, может передаваться в другие точки за счёт различного рода связей между значениями физических величин, испытывающих колебания в указанных точках. При этом механизм передачи колебаний от одной точки пространства к другой зависит от особенностей строения среды, в которой возникли колебания и от вида физических величин, испытывающих изменения в рассматриваемом процессе. Отсюда следует вывод о необходимости разделения процессов передачи возникших где-либо колебаний (возмущений) по типу среды, где они распространяются (например, в твёрдых кристаллических телах, газах, вакууме и т. п.), и по типу величин, испытывающих изменения в рассматриваемых процессах (например, механические, электромагнитные). При этом сами процессы передачи возмущения в пространстве называются **волновыми процессами**, или кратко, **волнами**. Если волна распространяется в какой-либо среде, то перемещения частиц среды вместе с волной, как правило, не происходит, передаётся лишь колебательное движение и энергия, то есть волны не переносят вещество, но переносят энергию. При рассмотрении волновых процессов в различных средах особенности молекулярного строения тел, в которых происходят эти процессы, не учитываются и их считают сплошными средами. Учитывают лишь те особенности среды, которые определяют механизм распространения волн (например, в жидкостях и газах невозможны некоторые виды волн, которые имеются в твёрдых телах). Под частицей среды понимают элементарный объём, однородный по отношению к физическим величинам, описывающим волновой процесс, который, однако, существенно больше межмолекулярных расстояний и в котором содержится достаточно много молекул, чтобы имело смысл говорить о макропараметрах системы.

Исходя из механизма передачи возмущений, различают следующие *основные типы* волновых процессов:

- *волны на поверхности жидкости;*
- *упругие волны;*
- *электромагнитные волны.*

Из упомянутых волновых процессов особого пояснения требуют упругие волны. Тело и его деформации называют *упругими*, если деформа-

ции, возникшие под воздействием внешних сил, исчезают после прекращения этих воздействий. В данном случае силы взаимодействия между частицами вещества будут носить упругий характер.

В зависимости от того, является колеблющаяся физическая величина скаляром или вектором, волны также делят на *скалярные* волны и *векторные*.

По направлению колебаний физических величин по отношению к направлению распространения волны различают *поперечные* и *продольные* волны. Например, в связи с особенностями строения веществ, в твёрдых телах могут распространяться как продольные, так и поперечные упругие волны, а в жидкостях и газах – лишь продольные упругие волны. Или волны, обусловленные силами поверхностного натяжения, могут существовать лишь на поверхности раздела между жидкостями и газами.

Если физическая величина  $s$ , изменяющаяся в волновом процессе, определяется уравнением в любой точке в любой момент времени:

$$s = s(\vec{r}, t), \quad (15.1.1)$$

то данное уравнение называют уравнением волны.

Несмотря на то, что вид функции  $s(\vec{r}, t)$  зависит от множества факторов, определяемых особенностями рассматриваемой задачи, есть некоторые общие свойства для всех волновых процессов.

Прежде чем установить эти общие для всех волн свойства, введём другие важнейшие характеристики волновых процессов.

Всё пространство по отношению к волновому процессу в *данный момент времени* можно разделить на две части: первая часть, которая охвачена волновым процессом, и вторая, которая волновым процессом не охвачена. Множество точек (для волн в трёхмерном пространстве это будет поверхность), разделяющее в данный момент времени указанные части пространства, называется *волновым фронтом*. Ясно, что волновой фронт перемещается в пространстве, всё время удаляясь от источника колебаний, но всегда остаётся в единственном числе.

Поскольку всякий колебательный процесс описывается понятием фазы, то можно выделить множество точек, которые имеют одинаковые фазы (для волн в трёхмерном пространстве это будет поверхность). Такие множества точек называются *волновыми поверхностями*, причём таких поверхностей сколь угодно много. Из определения фазовой поверхности следует, что волновой фронт является частный случай волновой поверхно-

сти, то есть это особая и единственная по своим свойствам, но всё равно одна из бесконечного множества волновых поверхностей.

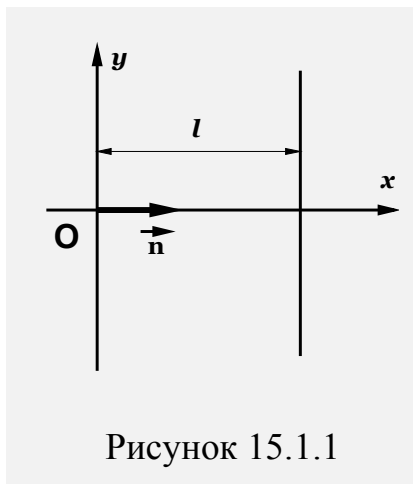


Рисунок 15.1.1

В зависимости от вида волновых поверхностей из всех возможных видов волн в силу особой симметрии выделяют наиболее важные:

- **плоские волны** – их волновые поверхности являются плоскостями;
- **сферические волны** – их волновые поверхности являются сферами с совпадающими центрами;
- **цилиндрические волны** – их волновые поверхности являются цилиндрами с совпадающими осями.

Важность приведённых выше вариантов волн состоит в том, что при описании из-за их особой симметрии от многомерной ситуации можно перейти к одномерной. В частности, для плоских волн все направления, перпендикулярные к волновым поверхностям, будут обладать одинаковыми свойствами, и поэтому можно задачу распространения плоской волны свести к рассмотрению движения этой волны вдоль оси, перпендикулярной к волновым поверхностям. Аналогично можно поступить и со сферическими и цилиндрическими волнами, выбрав в качестве направления некоторые из осей, перпендикулярных к соответствующим волновым поверхностям.

Для упрощения описания ситуации с видом волнового уравнения, сначала обратимся к случаю плоской незатухающей волны, волновая поверхность которой перпендикулярна оси  $x$ , то есть орт её нормали  $\vec{n}$  всегда параллелен этой оси (рисунок 15.1.1). Все точки, расположенные в плоскости, перпендикулярной оси  $x$  (то есть лежащие на одной волновой поверхности), описываются одним и тем же значением физической величины, изменяющейся в рассматриваемом волновом процессе, то есть уравнением:

$$s = s(x, t), \quad (15.1.2)$$

независимо от координат  $y$  и  $z$ .

Если в начальный момент времени  $t = 0$  некоторая волновая поверхность проходит через начало координат и перемещается в пространстве со скоростью  $\vec{v} \parallel \vec{n}$ , то за время  $t$  эта волновая поверхность сместится на расстояние  $l = vt$ . Это означает, что колебания физической величины, описы-

вающей рассматриваемый волновой процесс в момент времени  $t$ , отстают от колебаний точек в начальный момент времени  $t = 0$  на величину  $x / v$ , то есть:

$$s(x, t) = s(t - x / v). \quad (15.1.3)$$

Иными словами, независимо от особенностей волнового процесса, всякая плоская волна, фаза которой перемещается в пространстве с постоянной скоростью  $\vec{v} \parallel \vec{n}$  в направлении оси  $x$ , будет иметь уравнение волны, аргументы которой связаны между собой соотношением (15.1.3), то есть уравнение такой плоской волны имеет вид:

$$s = s(t - x / v). \quad (15.1.4)$$

Если волна движется в противоположном направлении, то знак « $-$ » в (15.1.4) нужно заменить на « $+$ », то есть записать уравнение волны в виде  $s = s(t + x / v)$ . Отметим, что рассматриваемые волны называются бегущими.

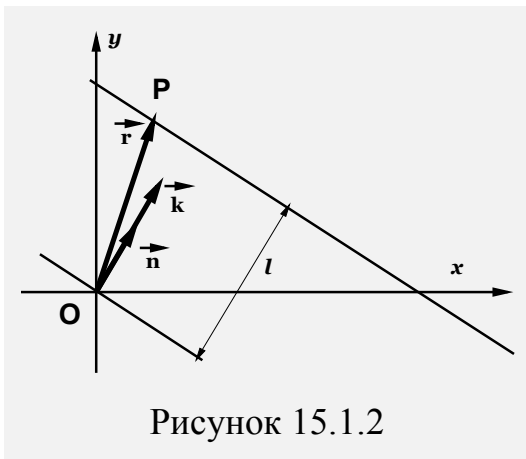


Рисунок 15.1.2

Полученные результаты легко обобщить на случай, когда плоская волна имеет волновую поверхность, произвольно ориентированную по отношению к координатным осям (на рисунке 15.1.2 для упрощения рисунка изображены следы двух волновых поверхностей, параллельных оси  $z$  на координатной плоскости  $Oxy$ ).

Действительно, в этом случае все рассуждения можно повторить с небольшими изменениями. Пусть в начальный момент времени некоторая волновая поверхность проходит через начало координат и имеет орт нормали  $\vec{n}$ . За время  $t$  эта волновая поверхность, перемещаясь в пространстве с постоянной скоростью  $\vec{v} \parallel \vec{n}$ , сместится на расстояние  $l = vt$ . Это означает, что колебания физической величины, описывающей рассматриваемый волновой процесс в момент времени  $t$ , независимо от радиус-вектора  $\vec{r}$  точек  $P$ , находящихся на рассматриваемой волновой поверхности, отстают от колебаний точек, находящихся на волновой поверхности в начальный момент времени  $t = 0$ , на величину  $l / v$ . Легко заметить, имеет место равенство:

$$l = \vec{r} \cdot \vec{n}, \quad (15.1.5)$$

откуда для времени запаздывания колебаний имеем:

$$t = \vec{r} \cdot \vec{n} / v, \quad (15.1.6)$$

а уравнение плоской волны в общем случае имеет вид:

$$s = s(t - \vec{r} \cdot \vec{n} / v). \quad (15.1.7)$$

Видим, что если  $\vec{n} \parallel \vec{i}$  ( $\vec{i}$  – орт оси  $x$ ), то  $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{i} = r_x \equiv x$  и (15.1.7) совпадает с (15.1.4).

Все сказанное можно применить к *плоским гармоническим* волнам.

Волна называется **плоской гармонической**, если физическая величина  $s(\vec{r}, t)$ , описывающая волновой процесс (например, отклонение частицы от положения равновесия в упругой среде или вектор напряжённости электрического или магнитного поля в пространстве), имеет плоские волновые поверхности, которые перемещаются с постоянной скоростью  $\vec{v} \parallel \vec{n}$ , и в различных точках пространства во времени изменяются по закону косинуса (или синуса), то есть:

$$\begin{aligned} s(\vec{r}, t) &= A \cos[\omega(t - \vec{r} \cdot \vec{n} / v) + \alpha] = A \cos(\omega t - \overbrace{\frac{\omega}{v} \vec{n} \cdot \vec{r}}^{\vec{k}} + \alpha) = \\ &= A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha), \end{aligned} \quad (15.1.8)$$

где  $\omega$  – *круговая частота* колебаний,  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения, а  $\vec{k}$  – вектор, который называют **волновым вектором**, равный:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n} = k \vec{n}. \quad (15.1.9)$$

Скалярная величина  $k$  в (15.1.9) называется **волновым числом** и равна:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (15.1.10)$$

где  $T$  – *период* гармонических колебаний, а величина  $\lambda = vT$  называется **длиной волны**.

По определению, **длина волны** – это *расстояние*, которое волновая поверхность проходит за время, равное периоду колебаний.

Отметим, что скалярное произведение  $(\vec{k} \cdot \vec{r})$  – величина безразмерная, как и произведение  $\omega t$ .

Если учесть, что скалярное произведение  $(\vec{k} \cdot \vec{r})$  можно записать в декартовой системе координат в виде:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z, \quad (15.1.11)$$

или, иначе:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k\vec{n} \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{v} \vec{n} \cdot \vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} \cdot \vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma), \quad (15.1.12)$$

где  $\alpha, \beta$ , и  $\gamma$  – направляющие углы орта  $\vec{n}$ , то для проекций волнового вектора на координатные оси имеем:

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha; \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta; \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma. \quad (15.1.13)$$

Как и при рассмотрении гармонических колебаний, плоскую незатухающую гармоническую волну можно представить при помощи формулы Эйлера в комплексной форме:

$$\tilde{s}(\vec{r}, t) = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)} = A e^{i\alpha} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \tilde{A} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (15.1.14)$$

где  $\tilde{A} = A e^{i\alpha}$  – комплексная амплитуда волны.

Переход от комплексной формы к вещественной форме (15.1.8) осуществляется при помощи формулы:

$$s(\vec{r}, t) = \text{Re } \tilde{A} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (15.1.15)$$

Опыт показывает, что если плоская волна движется вдоль оси  $x$  в однородной среде с затуханием, то будет иметь место уменьшение амплитуды волны по закону  $A(x) = A_0 e^{-\gamma x}$  и уравнение такой **затухающей плоской волны** будет иметь вид:

$$\tilde{s}(\vec{r}, t) = A_0 e^{-\gamma x} e^{i(\omega t - k \cdot x + \alpha)}. \quad (15.1.16)$$

Уравнение *сферической волны* в однородной и изотропной среде можно записать из следующих соображений. Пусть в начале выбранной системы координат находится точечный гармонический источник волн и его фаза есть  $\omega t + \alpha$ . Во всех точках, расположенных на одинаковом расстоянии  $r$  от данного источника (на сфере радиуса  $r$ ), колебания будут отставать на время  $t = \omega / v$ , то есть будут иметь фазу  $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha$ . Амплитуда сферической волны даже в отсутствие затухания будет уменьшаться по закону  $A(r) \sim 1/r$ , и уравнение гармонической сферической волны будет иметь вид:

$$s(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - k \cdot r + \alpha). \quad (15.1.17)$$

Зависимость  $A(r) \sim 1/r$  можно пояснить исходя из закона сохранения энергии. Выделим на расстоянии  $r$  от центра тонкий шаровой слой толщиной  $\delta r$ , объем которого  $\delta V = 4\pi r^2 \delta r$ . Энергия выделенного слоя пропорциональна квадрату амплитуды волны и объёму выделенного слоя, то есть  $\delta W \sim A^2(r) r^2 \delta r$ . Если потерь энергии нет, то при фиксированной толщине слоя  $\delta r$  энергия этого слоя должна оставаться постоянной при увеличении  $r$ , то есть с увеличением  $r$  должно выполняться условие  $A^2(r) r^2 = \text{const}$ . Следовательно, имеем  $A^2(r) = \text{const} / r^2$ , или  $A(r) = \text{const}' / r = A_0 / r$ , как и записано в (15.1.17).

Отметим также, что при описании движения волн не случайно использовалась комбинация слов «скорость перемещения фазы». Дело в том, что использованная нами скорость  $\vec{v}$  называется **фазовой скоростью** волны, поскольку действительно представляет собой именно скорость перемещения фазы, а не скорость переноса энергии, за которую отвечает другая величина – **групповая скорость**, которая будет определена далее. А пока убедимся, что  $\vec{v}$  показывает, в каком направлении и с какой быстротой происходит увеличение фазы волны. Для этого представим себе, что мы имеем возможность перемещаться в пространстве в таком направлении и с такой быстротой, что всегда находимся в точке с одной и той же фазой волны, то есть вместе с некоторой точкой на волновой поверхности. Иными словами, мы «зафиксировали» фазу волны и она (фаза волны) есть для нас некоторая константа. При этом координата  $x$  выбранной нами волновой поверхности вместе нами изменяется (мы перемещаемся вместе с ней), так что для плоской волны имеем:

$$\omega t - k \cdot x + \alpha = \text{const}. \quad (15.1.18)$$

Если продифференцировать (15.1.18) по времени, то получим:

$$\omega - k \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}, \quad (15.1.19)$$

где  $dx/dt$  – скорость изменения координаты волновой поверхности (плоскости), которая совпадает с модулем введённой ранее скорости  $\vec{v}$ .

Это означает, что  $\vec{v}$  – действительно скорость перемещения в пространстве плоскости постоянной фазы, то есть фазовая скорость.



## 15.2. Волновое уравнение

Теперь найдём дифференциальное уравнение, которое имеет своими решениями функции – уравнения волн, называется **волновым уравнением**. Поскольку уравнение любой волны зависит от двух и более переменных, то волновое уравнение будет дифференциальным уравнением в частных производных.

Для поиска волнового уравнения рассмотрим плоскую волну с уравнением волны (15.1.7)  $s(t - \vec{r} \cdot \vec{n} / v)$ , распространяющуюся с фазовой скоростью  $\vec{v}$  в прямоугольной декартовой системе координат. Введём переменную  $u = (t - \vec{r} \cdot \vec{n} / v) = t - (1/v)(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)$  и найдём связь между вторыми частными производными уравнения рассматриваемой волны:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial u}; \quad (15.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial u^2}; \quad (15.2.2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\cos \alpha}{v} \cdot \frac{\partial s}{\partial u}; \quad (15.2.3)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right) = \frac{\cos^2 \alpha}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial u^2}; \quad (15.2.4)$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos \beta}{v} \cdot \frac{\partial s}{\partial u}; \quad (15.2.5)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial s}{\partial y} \right) = \frac{\cos^2 \beta}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial u^2}; \quad (15.2.6)$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\cos \gamma}{v} \cdot \frac{\partial s}{\partial u}; \quad (15.2.7)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial s}{\partial z} \right) = \frac{\cos^2 \gamma}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial u^2}. \quad (15.2.8)$$

Сложим равенства (15.2.4), (15.2.6) и (15.2.8) и получим выражение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial u^2}, \quad (15.2.9)$$

которое с учётом (15.2.2) и того, что  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , примет вид:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (15.2.10)$$

Последнее выражение (15.2.10) и является волновым уравнением.

Для компактности записи используют векторный оператор Лапласа «набла»  $\nabla$ :

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (15.2.11)$$

и его квадрат – скалярный оператор «дельта»  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \Delta \equiv \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla &= \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (15.2.12)$$

с учётом вида которых волновое уравнение принимает вид:

$$\nabla^2 s = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (15.2.13)$$

Кроме компактности, у последней записи волнового уравнения есть ещё одно более существенное преимущество – оно не изменяется при переходе к другой системе координат. При этом, правда, необходимо помнить, что вид операторов  $\nabla$  и  $\Delta$  уже не будет определяться выражениями (15.2.11) и (15.2.12), а будет зависеть от выбранной системы координат.

Хотя волновое уравнение (15.2.13) получено нами при рассмотрении плоских волн, оно описывает любые волновые процессы любой геометрии, в том числе и упомянутые выше сферические и цилиндрические волны. При этом конкретный вид решения волнового уравнения (15.2.13) определяется геометрией задачи и начальными условиями.

Если плоская волна распространяется вдоль какой-либо оси, например оси  $x$ , то  $\vec{r} \cdot \vec{n} = x$ ,  $s(t - x/v)$ , и волновое уравнение для неё упрощается и принимает вид:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \quad (15.2.14)$$

Для плоской незатухающей гармонической волны волновое уравнение принимает более простой вид, поскольку здесь выполняется равенство (15.1.14)  $\tilde{s}(\vec{r}, t) = Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)}$ , откуда следует, что  $(\partial^2 \tilde{s} / \partial t^2) = -\omega^2 \tilde{s}$ , и уравнение примет вид:

$$\nabla^2 \tilde{s} + k^2 \tilde{s} = 0. \quad (15.2.15)$$

Или в одномерном случае:

$$\partial^2 \tilde{s} / \partial x^2 + k^2 \tilde{s} = 0. \quad (15.2.16)$$

В заключение отметим следующее. Если при решении какой-либо задачи физическая величина описывается волновым уравнением (15.2.13) (или его одномерным вариантом), то это означает, что эта величина описывает волну, которая распространяется в рассматриваемой среде.

### 15.3. Волны в упругой среде

Для придания конкретности вопросам, связанным с волновым уравнением, рассмотрим несколько примеров.

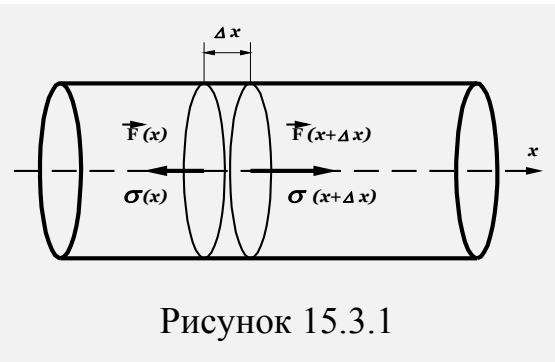


Рисунок 15.3.1

**Волны в упругом стержне.** Рассмотрим тонкий стержень, изготовленный из упругого материала (рисунок 15.3.1). Тонким будем называть стержень, если его поперечный размер много меньше продольного. Выделим цилиндрический элемент объёма длиной Δx (основания цилиндра площадью S имеют координаты x и x + Δx).

Если на основания цилиндра действуют равные по модулю, но противоположные по направлению силы, выделенный участок будет деформирован и его длина изменится на величину Δs (случай Δs < 0 соответствует сжатию, а Δs > 0 – растяжению). Величину  $\langle \varepsilon \rangle = \Delta s / \Delta x$  называют средней *относительной деформацией* рассматриваемого элемента.

Опыт показывает, что модуль относительной деформации пропорционален модулю приложенной силы и обратно пропорционален площади участка, к которому приложена эта сила, то есть:

$$\langle \varepsilon \rangle = \alpha \frac{F}{S}. \quad (15.3.1)$$

Если сила направлена перпендикулярно к рассматриваемой площадке, то отношение  $\sigma = F / S$  называют *нормальным напряжением*, а если направлена по касательной к рассматриваемой площадке, то отношение  $\sigma = F / S$  называют *тангенциальным напряжением* (последнее имеет смысл только для твёрдых тел!).

Рассмотрим ситуацию, когда сила направлена перпендикулярно к рассматриваемой площадке. Коэффициент пропорциональности  $\alpha$  в (15.3.1) принято записывать в виде  $\alpha = 1 / E$ , где величину  $E$  называют *модулем Юнга* (Юнг Томас, англ., 1773–1829). Измеряется модуль Юнга в паскалях (1 Па = 1 Н/м<sup>2</sup>). Формула (15.3.1) с учётом сказанного принимает вид:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sigma}{E}. \quad (15.3.2)$$

Если вернуться к абсолютным значениям деформаций, то с учётом введённых величин имеем:

$$F = \frac{ES}{\Delta x} \Delta s = k \Delta s, \quad (15.3.3)$$

где  $k$  – постоянная, называемая *коэффициентом упругости*.

Из (15.3.3) следует, что (15.3.1) и (15.3.2) выражают закон Гука (Гук Роберт, англ., 1635–1703).

Теперь обратимся к ситуации с распространением продольной упругой волны по стержню. Смещения точек от положений равновесия зависят от координаты и определяются уравнением волны  $s(t, x)$ , так что точки в основаниях цилиндра будут иметь смещения  $s$  и  $s + \Delta s$ , соответственно (в данный момент времени). Предел введённой выше средней относительной деформации  $\langle \varepsilon \rangle = \Delta s / \Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  (то есть  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \langle \varepsilon \rangle = \partial s / \partial x$ ) называют *относительной деформацией* в точке  $x$  (в данный момент времени!). Ясно, что  $\varepsilon$ , как и  $\langle \varepsilon \rangle$ , может быть как положительной, так и отрицательной величиной (отрицательные значения соответствует сжатию, а положительные – растяжению).

Соотношение (15.3.2) для относительной деформации принимает вид:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \text{ или } \sigma = \varepsilon E. \quad (15.3.4)$$

Будем считать, что длина упругой волны существенно превышает продольный размер выделенного участка, то есть  $\lambda \gg \Delta x$ . Пусть для определённости момент деформации рассматриваемого объёма соответствует растяжению.

Обозначим через  $\rho$  плотность среды (считаем её постоянной) и применим к рассматриваемому элементу объёма второй закон Ньютона:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = F_x(x + \Delta x) + F_x(x) = S [\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)] = S \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x, \quad (15.3.5)$$

или

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (15.3.6)$$

С учётом (15.3.4) получим:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \text{ или } \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \quad (15.3.7)$$

где

$$v = \sqrt{E / \rho}. \quad (15.3.8)$$

Видим, что выражение (15.3.7) есть не что иное, как волновое уравнение, решением которого являются волны, движущиеся вдоль оси цилиндра с фазовой скоростью  $v = \sqrt{E / \rho}$ .

**Упругие продольные волны в жидкостях и газах.** К волновому уравнению приводит и задача распространения продольных возмущений плотности жидкостей и газов. Если мысленно выделить цилиндр площадью поперечного сечения  $S$  в газе или жидкости, то, повторив все рассуждения об упругих возмущениях в стержне, получим выражение (15.3.7) в котором, однако, необходимо уточнить, что понимается в данном случае под модулем Юнга, поскольку в качестве параметров системы выступают давление, объём и температура.

В данном случае закон Гука устанавливает связи между избыточным давлением и относительной деформацией, то есть:

$$\Delta p = -E \frac{\Delta s}{\Delta x} = -E \frac{S \Delta s}{S \Delta x} = -E \frac{\Delta V}{V}. \quad (15.3.9)$$

Знак минус в (15.3.9) показывает, что увеличение давления вызывает уменьшение объёма выделенного элемента.

Переходя к пределу, из (15.3.9) получим:

$$E = -V \frac{dp}{dV}. \quad (15.3.10)$$

При изменениях давления и объёма выделенного элемента его плотность также изменяется, но остаётся постоянным произведение  $\rho V = \text{const}$  (масса выделенного элемента не изменяется). Следовательно,  $\rho dV + V d\rho = 0$ , или  $dV / V = -d\rho / \rho$ . Отсюда находим  $dV$ :

$$dV = -V \frac{d\rho}{\rho}, \quad (15.3.11)$$

подставляя эту величину в (15.3.10), получим:

$$E = \rho \frac{dp}{d\rho}. \quad (15.3.12)$$

Подставляем найденную величину в (15.3.8), и для скорости упругих продольных волн в жидкостях и газах имеем:

$$v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (15.3.13)$$

Это выражение также можно упростить для упругих волн в газах, так как волновой процесс можно считать адиабатическим, то есть  $pV^\gamma = \text{const}$ , где  $\gamma = C_p / C_V$  – отношение теплоёмкостей при постоянном давлении и постоянном объёме, так что после логарифмирования и вычисления дифференциала получим:

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{const}', \quad \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0, \quad (15.3.14)$$

откуда находим:

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V}; \quad (15.3.15)$$

подставляя в (15.3.10), имеем:

$$E = \gamma p. \quad (15.3.16)$$

Скорость упругих продольных волн в газах, при сформулированных условиях, равна:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (15.3.17)$$

Из уравнения Менделеева – Клапейрона можно выразить плотность газа:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}, \quad (15.3.18)$$

где  $\mu$  – молярная масса газа,  $R$  – универсальная газовая постоянная; и подставив это выражение в (15.3.17), получаем:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (15.3.19)$$

Преимущество и удобство полученного выражения в том, что в него входят легко вычисляемые величины (например,  $\gamma$  и  $\mu$ ) и измеряемые макроскопические параметры газа.

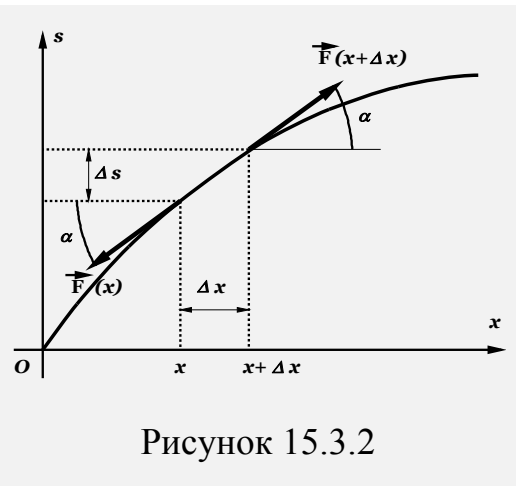


Рисунок 15.3.2

**Колебания струны.** Упругие поперечные колебания тонкой струны неограниченной длины также описываются волновым уравнением.

Для подтверждения рассмотрим тонкую упругую струну, в которой вдоль струны (ось  $x$ ) распространяется бегущее поперечное возмущение  $s(x, t)$  (см. рисунок 15.3.2.)

Отклонения струны будем считать небольшими, что позволяет использовать следующие приближения:

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (15.3.20)$$

Проекции сил, действующей на выделенный элемент длины, на ось ординат будут разные знаки, так что проекция результирующей силы, действующей на выделенный элемент длины, на ось ординат, определяется выражением:

$$\left( F \frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_{x+\Delta x} - \left( F \frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( F \frac{\partial s}{\partial x} \right) dx. \quad (15.3.21)$$

Пренебрегая в (15.3.21) изменением модуля силы, действующей на выделенный элемент длины, что вполне обосновано при малых её отклонениях, получим:

$$\left( F \frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_{x+\Delta x} - \left( F \frac{\partial s}{\partial x} \right) \Big|_x = F \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx. \quad (15.3.22)$$

Если обозначить линейную плотность струны  $\rho_l$ , то масса выделенного элемента длины струны будет равна  $\rho_l dx$ , а уравнение динамики этого элемента длины струны (второй закон Ньютона) будет иметь вид:

$$\rho_l dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx, \quad (15.3.23)$$

или, после сокращения одинаковых множителей и небольших преобразований, получим выражение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{(F / \rho_l)} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \quad (15.3.24)$$

из которого следует, что скорость малых поперечных упругих колебаний струны определяется выражением:

$$v = \sqrt{F / \rho_l}. \quad (15.3.25)$$

Приведённые примеры показывают, что, несмотря на различие сред и механизмов передачи возмущений, упругие волны описываются одним и тем же волновым уравнением (с учётом различия обозначений физических величин, описывающих рассматриваемую задачу). Это позволяет сначала выявить и обсудить общие свойства упругих волн, а затем применить полученные результаты к конкретным физическим ситуациям.

#### 15.4. Энергия упругой волны

Деформации упругой среды связаны с совершением упругими силами работы, которая идет на изменение энергии, связанной с выделенным элементом объёма  $\Delta V$ .

Для вычислений энергии элемента объёма  $\Delta V = S \Delta x$  ( $S$  – площадь поперечного сечения,  $\Delta x$  – длина) будем считать его настолько малым, что скорость его движения и его деформации будем полагать одинаковыми во всех точках этого объёма  $\Delta V$ .

Если плотность среды равна  $\rho$ , то, по определению, кинетическая энергия рассматриваемого элемента объёма  $\Delta V$  равна:

$$\Delta W_k = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 \Delta V, \quad (15.4.1)$$



а его потенциальная энергия

$$\Delta W_n = \frac{k(\Delta s)^2}{2}. \quad (15.4.2)$$

Для продольной плоской волны находим коэффициент упругости среды  $k = ES / \Delta x$  из выражения (15.3.3) и, подставляя в (15.4.2), имеем для потенциальной энергии рассматриваемого объёма:

$$\Delta W_n = \frac{E(\Delta s / \Delta x)^2}{2} \Delta V = \frac{E\varepsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \Delta V, \quad (15.4.3)$$

где  $E$  – модуль Юнга, а  $\varepsilon = \partial s / \partial x \approx \Delta s / \Delta x$  – относительная деформация элемента объёма.

Если учесть, что фазовая скорость упругой волны и модуль Юнга связаны соотношением (15.3.8)  $v = \sqrt{E / \rho}$ , то (15.3.4) принимает вид:

$$\Delta W_n = \frac{\rho v^2 \varepsilon^2}{2} \Delta V = \frac{\rho v^2}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \Delta V. \quad (15.4.4)$$

Для полной механической энергии рассматриваемого элемента объёма, таким образом, имеем:

$$\Delta W = \Delta W_\kappa + \Delta W_n = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V. \quad (15.4.5)$$

Если ввести *объёмную плотность энергии*  $w = \Delta W / \Delta V$ , то для неё находим:

$$w = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (15.4.5)$$

В одномерном случае из уравнения волны  $s = s(t - x / v)$  следует:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial u}; \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} = -\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (15.4.6)$$

Следовательно, оба слагаемых в квадратных скобках (15.4.5) одинаковы (и равноправны), и для плотности энергии упругой волны имеем:

$$w = \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2. \quad (15.4.7)$$

В случае гармонической упругой волны  $s = A \cos(\omega t - kx + \alpha)$  из (15.4.7) получим:

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha). \quad (15.4.8)$$

Для поперечной упругой волны получится точно такое же выражение. Усреднение выражения (15.4.8) даёт:

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \rho A^2 \omega^2 \langle \sin^2(\omega t - kx + \alpha) \rangle = \\ &= \rho A^2 \omega^2 \langle \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2(\omega t - kx + \alpha))) \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2, \end{aligned} \quad (15.4.9)$$

где учтено, что  $\langle \cos(2(\omega t - kx + \alpha)) \rangle = 0$ .

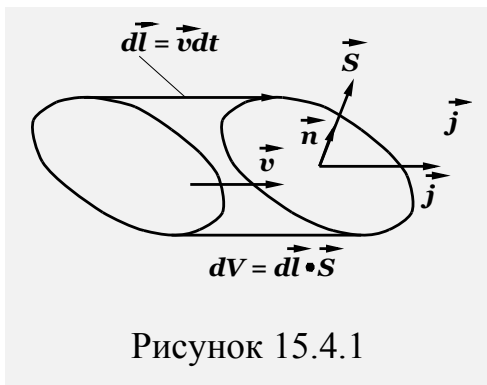
Выражения (15.4.8) и (15.4.9) дают возможность сделать очень важный вывод: плотность энергии гармонической упругой волны и её среднее значение пропорциональны квадрату амплитуды этой волны и квадрату частоты. Более подробный анализ, выходящий за рамки нашего курса, показывает, что подобная зависимость сохраняется и для других видов волн, в том числе и для плоских затухающих, сферических, цилиндрических и др.

Если выделить в пространстве некоторый элемент поверхности  $\Delta S$ , то за время  $\Delta t$  через неё переносится энергия  $\Delta W$ . Предел отношения  $\Delta W / \Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  называют потоком энергии (в данный момент времени):

$$\Phi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}. \quad (15.4.10)$$

Введённый нами скаляр  $\Phi$ , совпадающий по размерности с мощностью, не отражает особенной переноса энергии в зависимости от направления и вида поверхности, через которую переносится энергия.

Чтобы учесть эти особенности, вводят вектор  $\vec{j}$ , который называют **плотностью потока энергии**.



Вычислим энергию, переносимую бегущей упругой волной через плоскую поверхность  $S$  (см. рисунок 15.4.1) за элементарный промежуток времени  $dt$ . Обозначим вектор скорости переноса энергии  $\vec{v}$ , орт нормали к рассматриваемой поверхности  $\vec{n}$ , такой, что обход этой площадки с конца орта нормали виден против часовой стрелки.

Введём также вектор  $\vec{S} = \vec{n}S$ , совпадающий по направлению с ортом нормали  $\vec{n}$ . Построим элементарный цилиндрический объём  $dV = d\vec{l} \cdot \vec{S} = (\vec{v}dt) \cdot \vec{S}$  с направляющей боковой поверхности длиной  $dl = |d\vec{l}|$ , параллельной вектору  $\vec{v}$ . Промежуток времени  $dt$  и площадь оснований этого элементарного цилиндра выберем настолько малыми, что интересующие нас величины будут однородными в пределах этого элементарного объёма  $dV$ , в том числе и плотность энергии  $\langle w \rangle = w$ .

Ясно, что за рассматриваемый промежуток времени  $dt$  через поверхность  $S$  будет перенесена энергия, находящаяся в элементарном объёме  $dV$ , то есть будет определяться выражением:

$$dW = \langle w \rangle dV = w dV, \quad (15.4.11)$$

которое с учётом того, что  $dV = d\vec{l} \cdot \vec{S} = (\vec{v}dt) \cdot \vec{S}$ , примет вид:

$$dW = w dV = w d\vec{l} \cdot \vec{S} = ((w\vec{v}) \cdot \vec{S})dt = (\vec{j} \cdot \vec{S})dt. \quad (15.4.12)$$

В полученном выражении введён новый вектор

$$w\vec{v} = \vec{j}, \quad (15.4.13)$$

который, как уже сказано выше, называют *плотностью потока энергии* (измеряется в Вт/м<sup>2</sup>).

С целью возможности обобщения выражения (15.4.12) для применения в более сложных ситуациях перепишем его с учётом введённого ранее потока энергии  $\Phi = dW / dt$ :

$$\Phi = dW / dt = \vec{j} \cdot \vec{S}. \quad (15.4.14)$$

Для скалярного произведения векторов  $\vec{j}$  и  $\vec{S}$  можем записать выражение:

$$\vec{j} \cdot \vec{S} = jS_{\perp} = \Phi, \quad (15.4.15)$$

из которого следует, что длину вектора плотности потока энергии можно найти из соотношения:

$$j = \Phi / S_{\perp}, \quad (15.4.16)$$

которое, кстати, объясняет название введённой величины  $\vec{j}$ .

Напомним, что поверхность  $S$  считалась плоскостью, и такой малой, что интересующие нас величины являются однородными в пределах этой поверхности. Если это не так, то есть поверхность  $S$  произвольна, то поступают, как обычно. Производят разбиение рассматриваемой поверхности на  $N$  достаточно малых участков с площадями  $\Delta S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , так, что в пределах этих участков все необходимые условия выполняются, на каждом из участков разбиения выбирают произвольные точки пунктуации и определяют в них векторы  $\vec{j}_i$ , подсчитывают поток энергии через каждый из участков по формуле (15.4.14), суммируют по всем участкам разбиения и после предельного перехода при мелкости разбиения  $\lambda$ , стремящейся к нулю, получают точный результат в виде поверхностного интеграла второго рода по рассматриваемой поверхности:

$$\Phi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \Delta \Phi_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i \vec{j}_i \cdot \Delta S_i = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (15.4.17)$$

то есть поток энергии равен потоку вектора плотности потока энергии  $\vec{j}$  через рассматриваемую поверхность  $S$ .

Отметим, что все полученные выражения годятся только для бегущей волны.

Величину  $d\Phi$ , определяемую формулой

$$d\Phi = \vec{j} \cdot d\vec{S} = j dS_{\perp}, \quad (15.4.18)$$

называют элементарным потоком энергии.

В (15.4.18)  $dS_{\perp} = dS \cos(\vec{j} \wedge d\vec{S})$  – проекция элемента площадки в плоскость, перпендикулярную вектору  $\vec{j}$  в рассматриваемой точке.

В заключение добавим, что для гармонических плоских незатухающих волн длина вектора плотности потока энергии вычисляется по формуле:

$$j = (\frac{1}{2}) \rho A^2 \omega^2 v. \quad (15.4.19)$$

С учётом замечания к формуле (15.4.9) можно отметить, что подобная зависимость сохраняется и для других видов волн, в том числе и для плоских затухающих, сферических, цилиндрических и др.

## 15.5. Стоячие волны

Если в среде распространяется сразу несколько упругих волн, то результирующая волна будет результатом наложения (*суперпозиции*) этих волн, причём считается, что налагающиеся волны не искажают друг друга.

Следует отметить, что все рассмотренные нами до сих пор волновые процессы являются линейными. Разделение волновых процессов на линейные и нелинейные отражает тип математических моделей, используемых для их описания. Линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ), к которым относится, в частности, волновое уравнение (15.2.13), содержат только первые степени динамических переменных и их производных. Они характеризуются следующим основным свойством: если функции  $s_1(x, t)$  и  $s_2(x, t)$  являются решениями рассматриваемого ЛДУ, то любая линейная комбинация вида  $C_1 s_1(x, t) + C_2 s_2(x, t)$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные, также служит решением и определяет возможный в этой системе волновой процесс (*принцип суперпозиции*). Соответственно, произвольной может быть и амплитуда колебаний в линейной системе.

Далеко не все системы являются линейными, но здесь и почти всюду далее мы ограничимся рассмотрением только линейных колебаний и волн.

С практической точки зрения, очень важен случай, когда имеет место наложение (суперпозиция) двух гармонических плоских волн одинаковой частоты и амплитуды, но распространяющихся в противоположных направлениях (начальные фазы для простоты выбираем равными нулю):

$$\begin{aligned} s(x, t) &= s_1(x, t) + s_2(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx) = \\ &= 2A \cos \omega t \cdot \cos kx = (2A \cos kx) \cos \omega t = A(x) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (15.5.1)$$

Полученное выражение уже не представляет бегущую волну, у которой аргумент должен иметь вид  $(t \pm x/v)$ . Результирующую волну (15.5.1) называют стоячей волной (рисунок 15.5.1), которую можно интерпретировать как волну с частотой  $\omega$ , как и у налагающихся волн, но с изменяющейся «амплитудой»  $A(x) = |2A \cos kx|$ . Точки, где  $|\cos kx| = 1$ , называют пучностями (здесь «амплитуда» максимальна), а точки, где  $\cos kx = 0$ , – узлами (здесь «амплитуда» равна нулю).

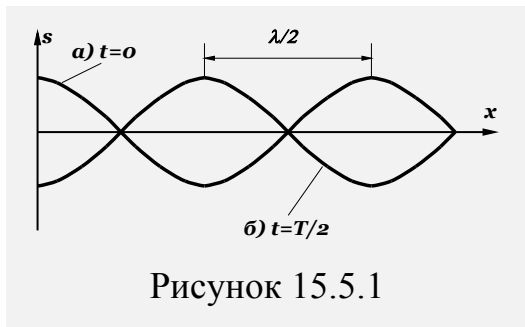


Рисунок 15.5.1

Из равенства  $|\cos kx| = |\cos(kx + \pi)|$  следует, что период функции  $|\cos kx|$  равен  $\pi$ . Поэтому, с учетом определения волнового числа  $k = 2\pi / \lambda$ , находим  $k(x + \pi / k) = k(x + \lambda / 2) = k(x + \lambda_{cm})$ , то есть минимальное расстояние между

двумя пучностями  $\lambda_{cm} = \pi / k = \lambda / 2$ , а это значит, что период стоячей волны в два раза меньше периода налагаемых волн. Между двумя соседними узлами все точки испытывают гармонические колебания во времени в одной фазе (см. рисунок 15.5.1, а, и 15.5.1, б), которая изменяется на  $\pi$  при переходе через узел. Узлы разделяют соседние области с пучностями так, что между этими областями нет передачи возмущений, а значит, нет и переноса энергии стоячей волной. В каждой такой области энергия периодически «перекачивается» из потенциальной в кинетическую и наоборот (как при колебаниях маятника). Этот вывод легко сделать, если записать выражения для скорости частиц среды  $v = \partial s / \partial t$  и относительных деформаций  $\varepsilon = \partial s / \partial x$ , квадраты которых определяют, соответственно, кинетическую и потенциальную энергию стоячей волны:

$$\begin{aligned} v &= \partial s / \partial t = -\omega(2A \cos kx) \sin \omega t, \\ \varepsilon &= \partial s / \partial x = -k(2A \sin kx) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (15.5.2)$$

Видим, что обе эти функции тоже стоячие волны, сдвинутые по фазе на  $\pi / 2$ . Причем пучности и узлы скорости совпадают с пучностями и узлами смещения  $S$ , в то время как с пучностями и узлами смещения  $S$  совпадают узлы и пучности относительной деформации, то есть подтверждается сказанное о периодической «перекачке» энергии из потенциальной в кинетическую и наоборот.

Наиболее важным примером стоячих волн является упругая волна в закреплённой с обеих сторон струне. При возбуждении поперечных колебаний такой струны устанавливаются стоячие волны, причём ясно, что в местах закрепления струны должны быть узлы. Отсюда вытекает необходимость выполнения требования для возбуждаемых волн, чтобы на длине струны  $l$  укладывалось целое число полуволн:

$$l = n(\lambda_n / 2), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (15.5.3)$$

то есть могут возбуждаться только стоячие волны, длины волн которых удовлетворяют условию (15.5.3).

Ситуация, когда та или иная физическая величина не может *непрерывно* принимать все значения из диапазона возможных значений, а принимает лишь отдельные значения (**дискретные** значения), отделённые друг от друга некоторыми промежутками, называется в физике **квантованием**. Раздел физики, который занимается изучением явлений, связанных с причинами появления квантования в различных физических системах и с выяснением особенностей описания этих систем, называется **квантовой механикой**. Не вдаваясь в детали, отметим, что квантование, как правило, проявляется в микромире, то есть на уровне молекул и атомов, и элементарных частиц. Необычность рассматриваемой ситуации состоит в том, что мы столкнулись с квантованием в чисто классической (не квантово-механической) физической задаче, поскольку размеры струны несопоставимы по масштабам с размерами атомов и молекул.

Частоты возбуждаемых стоячих волн также будут квантованными и равными:

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (15.5.4)$$

где  $v$  – фазовая скорость бегущих волн в струне, определяемая выражением (15.3.25)  $v = \sqrt{F / \rho_l}$  и зависящая от линейной плотности струны и силы натяжения струны.

Частоты  $\nu_n$  называются *собственными* частотами струны, причём  $\nu_1 = v / 2l$  называется *основной* частотой, а все остальные частоты ( $\nu_2, \nu_3, \dots$ ) – *обертонами*.

Гармонические колебания с частотами (15.5.4) называются **собственными** колебаниями струны, или **гармониками**. В общем случае в колебания струны могут представлять собой наложение (суперпозицию) различных гармоник.

## 15.6. Звуковые волны

Упругие волны малой амплитуды, распространяющиеся в газообразной, жидкой или твёрдой среде, называются звуковыми, или акустическими волнами. Человеческий орган слуха (ухо) способен воспринимать (регистрировать, то есть слышать) звук с частотами в диапазоне от 16 Гц до 20 кГц. Упругие волны с частотами  $\nu < 16$  Гц называют инфразвуковыми,

с частотами  $\nu > 20$  кГц – ультразвуком. При частотах  $\nu > 1$  ГГц волны называют гиперзвуком.

Человеческое ухо различает звуковые волны (далее кратко – звук) по *высоте, тембру и громкости*. Эти характеристики, несмотря на их субъективность, определяются конкретными физическими величинами. А именно: если звук состоит из колебаний дискретных частот, то говорят, что он имеет *дискретный спектр*. Высота такого звука определяется волной с наименьшей (*основной*) частотой. Количество и интенсивность волн с более высокими частотами определяет тембр звука. **Интенсивностью** звука называют *среднее* (по времени) *значение плотности потока энергии*, переносимой звуковой волной. Существует минимальная интенсивность, называемая **порогом слышимости**, ниже которой ухо не регистрирует звук. Эта характеристика достаточно субъективна, то есть отличается у разных людей. В области от 1000 Гц до 4000 Гц порог слышимости составляет величину около  $10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>. При интенсивностях выше 1–10 Вт/м<sup>2</sup> звук вызывает болевые ощущения, и такие значения интенсивности звука называют **порогом болевого ощущения**.

**Громкость** звука – субъективно оцениваемый параметр, который определяется интенсивностью звука, но связан с ней линейной зависимостью. В качестве числовой характеристики громкости звука принимают величину  $L$ , определяемую выражением:

$$L' = \lg(I / I_0), \quad (15.6.1)$$

где  $I_0$  – пороговая интенсивность, равная  $10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>.

Единицу громкости называют Б (Бел). Громкость составляет величину, равную 1 Б, если интенсивность звука в 10 раз превосходит  $I_0$ . 1 Б – очень крупная величина, поэтому используют в 10 раз меньшую величину – 1 дБ (децибел), которая определяется выражением:

$$L = 10 \lg(I / I_0). \quad (15.6.2)$$

В дБ выражают также отношение интенсивностей звуков:

$$L_{12} = 10 \lg(I_1 / I_2). \quad (15.6.3)$$

В частности, так оценивают затухание звука при прохождении его через какую-то среду.



Из неслышимых человеком звуков очень важную роль играют ультразвуки. С их помощью определяют расстояния до различных объектов (локация), создают различные инструменты по обработке материалов, медицинскую аппаратуру и многое другое.

В заключение отметим, что скорость звука зависит от среды, где он распространяется. В частности, в газах скорость звука определяется выражением (15.3.19):  $v = \sqrt{\gamma RT / \mu}$ . Для воздуха можно взять  $\gamma = 1,4$ , и для скорости звука в воздухе при комнатной температуре находим значение  $v = 340$  м/с, которое хорошо согласуется с экспериментом.

### 15.7. Эффект Доплера для звуковых волн

Если источник и приёмник звука покоятся относительно среды, в которой распространяются звуковые волны, то частоты волн, воспринимаемых приёмником  $\nu'$ , будут совпадать с частотами колебаний источника  $\nu$ . Однако при наличии движения либо одного из этих двух объектов, либо обоих объектов относительно среды, указанные частоты будут различаться, то есть  $\nu \neq \nu'$ . Это явление называют *эффектом Дóплера* (Христиан Дóплер, австр., 1803–1853).

Для простоты будем рассматривать случай, когда источник и приёмник могут двигаться вдоль прямой, соединяющей эти два объекта с постоянными скоростями. Направим вдоль этой линии ось  $x$ , а её направление выберем совпадающим с направлением движения источника звука.

Сначала рассмотрим ситуацию, когда с постоянной скоростью  $u$  (относительно среды) движется только источник по направлению к приёмнику. Это значит, что последовательно расположенные соседние гребни (и впадины тоже) волн, излучаемых источником, будут достигать приёмник быстрее, нежели от неподвижного источника, то есть восприниматься расположенными не на расстоянии длины волны для неподвижного источника  $\lambda = \nu T$ , а на расстоянии  $\lambda' = T(\nu - u)$ , где  $\nu$  – фазовая скорость волны. Таким образом, частота волн, воспринимаемых приёмником, будет равна:

$$\nu' = \frac{\nu}{\lambda'} = \frac{\nu}{T(\nu - u)}. \quad (15.7.1)$$

Если и приёмник движется навстречу источнику со скоростью  $u'$  (относительно среды), то тогда скорость источника по отношению к приёмнику будет равна  $\nu + u'$  и формула (15.7.1) примет вид:

$$v' = \frac{v + u'}{\lambda'} = \frac{1}{T} \frac{v + u'}{(v - u)} = v \frac{v + u'}{v - u}. \quad (15.7.2)$$

Если скорости источника и приёмника не параллельны прямой, соединяющей эти два объекта, и углы между векторами скоростей источника  $\vec{u}$  и приёмника  $\vec{u}'$  и осью  $x$  равны  $\theta$  и  $\theta'$ , соответственно, то вместо (15.7.2) имеем обобщение:

$$v' = v \frac{v - u' \cos \theta'}{v - u \cos \theta} = v \frac{v - u'_x}{v - u_x}. \quad (15.7.3)$$

В частности, когда приёмник и источник удаляются друг от друга со скоростями, параллельными оси  $x$ , то  $\cos \theta = -1$ ,  $\cos \theta' = 1$ , и с помощью (15.7.3) имеем  $v' = v(v - u') / (v + u)$ , а если приближаются друг к другу со скоростями, параллельными оси  $x$ , то  $\cos \theta = 1$ ,  $\cos \theta' = -1$ , и с помощью (15.7.3) имеем  $v' = v(v + u') / (v - u)$ , в полном соответствии с полученной ранее формулой (15.7.2).

Отметим, что замена направления оси  $x$  приведёт к изменению знаков перед скоростями источника и приёмника в приведённых формулах.

## Глава 16. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### 16.1. Волновое уравнение для электромагнитных волн

При изучении электромагнитных полей было установлено, что поведение и свойства этих полей описываются системой уравнений Максвелла, которая в дифференциальной форме имеет вид:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad \text{Закон электромагнитной индукции Фарадея.} \quad (16.1.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad \text{Теорема о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля.} \quad (16.1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad \text{Теорема Гаусса для вектора электрического смещения.} \quad (16.1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad \text{Теорема Гаусса для вектора индукции магнитного поля.} \quad (16.1.4)$$

Там же отмечалось, что система уравнений Максвелла не является полной системой уравнений электромагнитного поля, и для того чтобы сделать её полной системой уравнений, нужно к ней добавить материальные уравнения, которые, например, в однородной и изотропной среде, не содержащей сегнетоэлектрики и магнитоупорядоченные вещества, при не слишком сильных электрических и магнитных полях, имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad \text{Связь между вектором напряжённости электрического поля и вектором электрического смещения;} \quad (16.1.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad \text{Связь между вектором напряжённости магнитного поля и вектором индукции магнитного поля;} \quad (16.1.6)$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E}_{\vartheta} + \vec{E}^*). \quad \text{Обобщённый закон Ома.} \quad (16.1.7)$$

Приведённых выше уравнений уже достаточно, чтобы заняться поиском полевых величин. В частности, для вакуума материальные уравнения упрощаются, так как в этом случае  $\varepsilon = 1$  и  $\mu = 1$ , а  $\sigma = 0$ , так что для этой ситуации имеем:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (16.1.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (16.1.9)$$

Далее увидим, что электромагнитное поле может существовать самостоятельно без наличия токов и зарядов ( $\rho = 0$ ) в виде **электромагнитных волн**, в том числе и в вакууме.

В *однородной* и *изотропной* среде, не содержащей сегнетоэлектрики и магнитоупорядоченные вещества, при не слишком сильных электрических и магнитных полях при отсутствии токов и зарядов, в системе уравнений Максвелла изменится лишь уравнения (16.1.2) и (16.1.3), которые примут вид:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (16.1.2a)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0. \quad (16.1.3a)$$

После дифференцирования по времени (16.1.2a) и после замены порядка применения операторов  $\nabla$  и  $(\partial / \partial t)$  с учётом (16.1.8) и (16.1.9) получим выражение:

$$\frac{1}{\mu_0 \mu} \nabla \times \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (16.1.10)$$

или, после замены  $\partial \vec{D} / \partial t$  по формуле (16.1.1):

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (16.1.11)$$

После применения формулы двойного векторного произведения  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\nabla \cdot \nabla) = -\nabla^2 \vec{E}$  и с учётом (16.1.3a) формула (16.1.11) примет вид:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (16.1.12)$$

Совершенно аналогично, дифференцируя по времени (16.1.1) и выполняя последующие преобразования, получим для вектора  $\vec{H}$ :

$$\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (16.1.13)$$

Видим, что вид уравнений (16.1.12) и (16.1.13) совпадает с волновым уравнением, если в этих формулах обозначить величину  $\sqrt{1/\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}$  через скорость (фазовую) волн:

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}, \quad (16.1.14)$$

которые называют *электромагнитными волнами*.

Обратим внимание, что в качестве среды распространения электромагнитных волн может выступать и вакуум, для которого в (16.1.12)–(16.1.14) нужно принять  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ , так что фазовая скорость электромагнитных волн в вакууме определяется выражением:

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ м / с }, \quad (16.1.15)$$

то есть совпадает с экспериментально определённой скоростью света в вакууме и подтверждает, что свет является электромагнитной волной.

## 16.2. Свойства электромагнитных волн

Основные свойства электромагнитных волн рассмотрим на наиболее простом примере плоских электромагнитных волн.

Выберем декартову прямоугольную систему координат таким образом, что плоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $x$  (вектор скорости плоской электромагнитной волны направлен вдоль оси  $x$ ). Поскольку любая плоскость, перпендикулярная оси  $x$ , будет волновой поверхностью, то все характеристики волны в любой такой плоскости от координат  $y$  и  $z$  зависеть не будут, то есть частные производные по этим координатам от всех интересующих нас величин равны нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\alpha}{\partial y} = 0, \quad \alpha = x, y, z; \quad \frac{\partial E_\alpha}{\partial z} = 0, \quad \alpha = x, y, z; \\ \frac{\partial H_\alpha}{\partial y} = 0, \quad \alpha = x, y, z; \quad \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} = 0, \quad \alpha = x, y, z. \end{aligned} \quad (16.2.1)$$

Учитывая этот факт, запишем в выбранной системе координат выражения для  $\nabla \times \vec{E}$ ,  $\nabla \times \vec{H}$ ;  $\nabla \cdot \vec{E}$ ,  $\nabla \cdot \vec{H}$ :

$$\begin{aligned}
a) \quad \nabla \times \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\vec{j} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \vec{k} \frac{\partial E_y}{\partial x}; \\
b) \quad \nabla \times \vec{H} &= -\vec{j} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \vec{k} \frac{\partial H_y}{\partial x}; \\
в) \quad \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0; \quad з) \quad \nabla \cdot \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{16.2.2}$$

Сравнивая (16.2.2a) с (16.1.1) и (16.2.2б) с (16.1.2a), видим, что:

$$\begin{aligned}
a) \quad -\vec{j} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \vec{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\vec{i} \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} - \vec{j} \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} - \vec{k} \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}; \\
б) \quad -\vec{j} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \vec{k} \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \vec{i} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \vec{j} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \vec{k} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t},
\end{aligned} \tag{16.2.3}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
a) \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} &= 0; \quad -\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}; \quad -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}; \\
б) \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{16.2.4}$$

Из равенства нулю производных по времени от  $E_x$  и  $H_x$ , а также производных по координате  $x$  от  $E_x$  и  $H_x$ , делаем вывод, что  $E_x$  и  $H_x$  не зависят ни от времени, ни от координаты  $x$ , то есть могут быть только составляющими постоянных и однородных электрического и магнитного полей. Поскольку нас интересуют только переменные во времени и пространстве процессы (волновые процессы), то мы не рассматриваем указанные постоянные поля, а компоненты переменных во времени и пространстве полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на ось  $x$  оказываются равными нулю, то есть  $E_x = 0$ ,  $H_x = 0$ . Это позволяет сказать, что электромагнитные волны – поперечные волны, или что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны вектору скорости волны.

Из (16.2.4) следует ещё один вывод. В (16.2.4a) между собой связаны только компоненты  $E_y$  и  $H_z$ , а это значит, что изменения компоненты  $E_y$  создают изменяющееся поле  $H_z$ , и наоборот, эти взаимосвязанные изменения не приводят к появлению компонент  $E_z$  и  $H_y$ . Совершенно то же

самое можно сказать про пару переменных  $E_z$  и  $H_y$ . Таким образом, для описания плоской электромагнитной волны достаточно взять одно из уравнений (16.2.4), положив другую пару компонент равной нулю.

Очень важно установить взаимное расположение векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в плоскости  $Oyz$ . С учётом того, что мы изучаем плоские волны, можем ввести обозначения:

$$\begin{aligned} \text{а) } E_y &= f_1(t - x/v); H_z = \varphi_1(t - x/v); \\ \text{б) } E_z &= f_2(t - x/v); H_y = \varphi_2(t - x/v). \end{aligned} \quad (16.2.5)$$

Если обозначить разность  $t - x/v = u$  и найти производные по  $x$  и  $t$  от отличных от нуля компонент полей, то получим, например, для  $E_y$ :

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial u}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu} \frac{\partial E_y}{\partial u} \quad (16.2.6)$$

и совершенно аналогичные уравнения для других компонент полей.

Из уравнений Максвелла и (16.2.6) (и подобных) имеем:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial E_y}{\partial u} = \sqrt{\mu_0 \mu} \frac{\partial H_z}{\partial u}, \quad (16.2.7)$$

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial E_z}{\partial u} = -\sqrt{\mu_0 \mu} \frac{\partial H_y}{\partial u}, \quad (16.2.8)$$

или,

$$\frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_y - \sqrt{\mu_0 \mu} H_z) = 0 \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_y - \sqrt{\mu_0 \mu} H_z = \text{const}, \quad (16.2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_z + \sqrt{\mu_0 \mu} H_y) = 0 \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_z + \sqrt{\mu_0 \mu} H_y = \text{const}'. \quad (16.2.10)$$

Как уже сказано ранее, нас интересуют только переменные во времени и пространстве процессы (волновые процессы), мы отбрасываем не равные нулю постоянные составляющие и для составляющих плоской электромагнитной волны имеем:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_y = \sqrt{\mu_0 \mu} H_z, \quad (16.2.11)$$

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_z = -\sqrt{\mu_0 \mu} H_y. \quad (16.2.12)$$

Возведём (16.2.11) и (16.2.12) в квадрат, сложим и получим выражение, связывающее длины векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

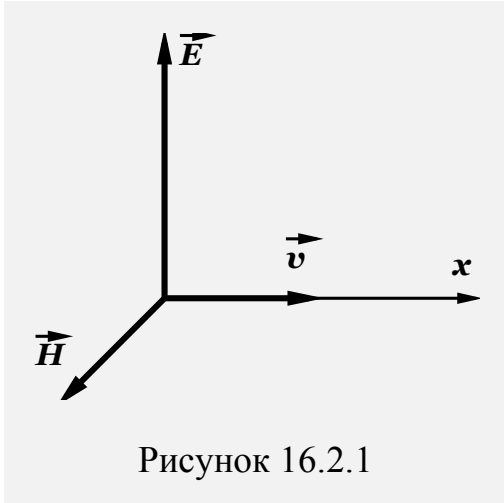
$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H, \quad (16.2.13)$$

где  $E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2}$ ,  $H = \sqrt{H_y^2 + H_z^2}$ .

Для скалярного произведения векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  находим:

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = E_y H_y + E_z H_z = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_y E_z + \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_y E_z = 0, \quad (16.2.14)$$

что означает перпендикулярность друг другу векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .



Поскольку плоскость, в которой лежат векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярна вектору скорости электромагнитной волны  $\vec{v}$ , то рассматриваемые векторы образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов  $\vec{v}, \vec{E}, \vec{H}$ , как это показано на рисунке 16.2.1. То, что  $\vec{v}, \vec{E}, \vec{H}$  – правая тройка векторов, следует из того факта, что оси  $y$  и  $z$  в плоскости волновой поверхности могут быть направлены произ-

вольно, лишь бы сохранялось условие их взаимной перпендикулярности и чтобы порядок был такой, что их орты – правая тройка векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Если сделать ось  $y$  совпадающей по направлению с вектором  $\vec{E}$ , то вектор  $\vec{H}$  будет обязан совпасть с осью  $z$  в силу соотношения (16.2.7) (знаки проекций совпадают). А это и означает, что  $\vec{v}, \vec{E}, \vec{H}$  – правая тройка векторов, вместе с тройкой  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Следовательно, вектор  $\vec{v}$  совпадает по направлению с векторным произведением  $\vec{E} \times \vec{H}$ , то есть:

$$\vec{v} = v \vec{e}_v = v \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{|\vec{E} \times \vec{H}|}, \quad \text{где орт } \vec{e}_v = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{|\vec{E} \times \vec{H}|}. \quad (16.2.15)$$

Соотношение (16.2.7) показывает также, что поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются синфазно (имеют одинаковые фазы) – знаки проекций этих полей на соответствующие координатные оси совпадают, в ноль эти проекции обра-



щаются одновременно и одновременно достигают максимальных и минимальных значений, как это показано на рисунке 16.2.2.

Для *монохроматической* плоской электромагнитной волны, значения проекций полей которой на координатные оси определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \text{а) } E_y &= A_1 \cos(\omega t - kx); & H_z &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_y; \\ \text{б) } E_z &= A_2 \cos(\omega t - kx + \alpha); & H_y &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_z. \end{aligned} \quad (16.2.16)$$

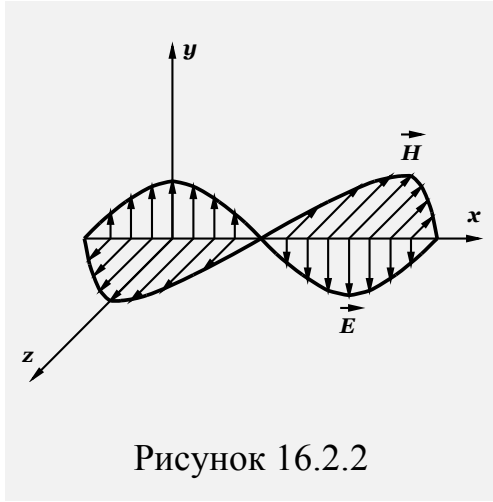


Рисунок 16.2.2

Если компонента  $E_z$  отсутствует, то вектор  $\vec{E}$  колеблется, оставаясь всегда в одной плоскости, проходящей через векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{v}$ , которую называют плоскостью поляризации волны, а сама волна – плоско поляризованной (или линейно поляризованной). Вектор  $\vec{H}$  в этом случае также колеблется, оставаясь всегда в одной плоскости, проходящей через векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{v}$  (см. рисунок 16.2.1).

В общем случае, когда присутствуют две компоненты  $E_y$  и  $E_z$ , волна остаётся плоской, но вектор  $\vec{E}$  (и вектор  $\vec{H}$  тоже) совершает при движении волны поворот, так что конец этого вектора описывает эллипс (если смотреть с конца вектора  $\vec{v}$ ), вид которого зависит от разности фаз между  $E_y$  и  $E_z$ . Действительно, из (16.2.16) следует:

$$\begin{aligned} \text{а) } E_y / A_1 &= \cos(\omega t - kx) = \cos \varphi; \\ \text{б) } E_z / A_2 &= \cos(\varphi + \alpha) = \cos \varphi \cdot \cos \alpha - \sin \varphi \cdot \sin \alpha = \\ &= E_y / A_1 \cos \alpha - \left( \pm \sqrt{1 - \left( \frac{E_y}{A_1} \right)^2} \right) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (16.2.17)$$

Из (16.2.17б) находим выражение:

$$\left( \frac{E_y}{A_1} \right)^2 + \left( \frac{E_z}{A_2} \right)^2 - 2 \frac{E_z E_y}{A_1 A_2} \cos \alpha = \sin^2 \alpha, \quad (16.2.18)$$

которое, как известно, является уравнением *эллипса*.

Поэтому такая плоская электромагнитная волна называется *эллиптически поляризованной*. От значения разности фаз  $\alpha$  зависит ориентация эллипса. В частности, если  $\alpha = (2m+1)\pi/2$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , то уравнение (16.2.18) принимает *канонический* вид:

$$\left(\frac{E_y}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{A_2}\right)^2 = 1, \quad (16.2.19)$$

при этом полуоси эллипса совпадают с координатными осями  $y$  и  $z$ . Если же  $\alpha = m\pi$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , эллипс вырождается в отрезок прямой

$$E_y = \pm \left(\frac{A_1}{A_2}\right) E_z, \quad (16.2.20)$$

где знак «+» соответствует чётным  $m$ .

Видим, что и в случае присутствия двух компонент  $E_y$  и  $E_z$  волна может оказаться плоско поляризованной.

Относительно вектора  $\vec{H}$  рассуждения совершенно аналогичны.

В заключение отметим, что из изложенного выше следует возможность представления произвольной монохроматической плоской электромагнитной волны в виде суперпозиции двух линейно поляризованных монохроматических плоских электромагнитных волн с одинаковыми частотами, волновые векторы которых совпадают, а плоскости поляризации взаимно перпендикулярны.

### 16.3. Энергия и импульс электромагнитных волн

С электромагнитными волнами связан перенос энергии, поскольку их распространение осуществляется перемещением электромагнитных возмущений в пространстве.

Плотность потока энергии электромагнитных волн  $\vec{j}$  определяется выражением (15.4.13)  $\vec{j} = w\vec{v}$ , а объёмная плотность энергии  $w$  равна сумме объёмных плотностей электрического и магнитного полей и, следовательно, для однородных изотропных сред без сегнетоэлектриков и магнитоупорядоченных материалов, при не слишком сильных электрических и магнитных полях определяется выражением:

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}, \quad (16.3.1)$$

которому, с учётом (16.2.13), можно придать вид:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} E H = \frac{1}{v} |\vec{E} \times \vec{H}| \Rightarrow wv = |\vec{E} \times \vec{H}| \Rightarrow \\ &\Rightarrow w\vec{v} = \vec{E} \times \vec{H}. \end{aligned} \quad (16.3.2)$$

Если ввести новый вектор Умова – Пойнтинга  $\vec{P}$  (Умов Николай Алексеевич, рус., 1846–1915; Пойнтинг Джон Генри, англ., 1852–1914)

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (16.3.3)$$

то из (16.3.2) имеем (с учётом того, что  $\vec{v}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  – ортогональная правая тройка векторов):

$$\vec{P} = w\vec{v}, \quad (16.3.4)$$

то есть вектор Умова – Пойнтинга является вектором плотности потока энергии электромагнитной волны.

В случае линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны для длины вектора Умова – Пойнтинга имеем:

$$P = wv = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} E H \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx), \quad (16.3.5)$$

где  $E_m$  – амплитуда колебаний электрического поля  $E_y$ . Аналогично можно записать выражение для длины вектора Умова – Пойнтинга через квадрат длины вектора  $\vec{H}$ .

Длина вектора Умова – Пойнтинга эллиптически поляризованной монохроматической электромагнитной волны равна:

$$P = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} \left[ E_{m1}^2 \cos^2(\omega t - kx) + E_{m2}^2 \cos^2(\omega t - kx + \alpha) \right], \quad (16.3.6)$$

где  $E_{m1}$  и  $E_{m2}$  – амплитуды компонент  $E_y$  и  $E_z$ .

Частоты электромагнитных волн, как правило, очень велики, так что зарегистрировать приборами можно лишь усреднённые энергетические характеристики. Поэтому вводят очень важную характеристику – интенсивность электромагнитной волны  $I$ :

$$I = \langle |\vec{P}| \rangle = \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle. \quad (16.3.7)$$

Из (16.3.7) и (16.3.5) для интенсивности линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны имеем:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^2. \quad (16.3.8)$$

Аналогично для интенсивности эллиптически поляризованной монохроматической электромагнитной волны из (16.3.7) и (16.3.6) находим:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} [E_{m1}^2 + E_{m2}^2]. \quad (16.3.9)$$

Интенсивность сферической линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны будет также иметь вид, аналогичный (16.3.8), но в выражении для интенсивности этой волны должен будет присутствовать дополнительный множитель  $\sim 1/r^2$ , появляющийся из-за того, что амплитуда сферической волны  $\sim 1/r$ .

При прохождении через различные тела или отражении от них электромагнитные волны взаимодействуют с движущимися заряженными частицами, из которых состоят атомы и молекулы вещества, и изменяют не только их энергию, но и импульс этих тел, что означает наличие импульса у электромагнитных волн. Изменение импульса тел, взаимодействующих с электромагнитными волнами, означает также, что эти волны оказывают давление на эти тела.

Электрическое поле электромагнитной волны вызывает в веществе электрический ток с плотностью тока  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  ( $\vec{j} \perp \vec{v}$ ). На элемент объёма  $\Delta V = S \Delta l$  с электрическим током ( $S$  – площадь поперечного сечения элемента слоя, перпендикулярного к  $\vec{v}$ ;  $\Delta l$  – его толщина) со стороны магнитного поля электромагнитной волны действует сила  $\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} S \Delta l$  ( $\vec{F} \perp \vec{B}$ ,  $\vec{F} \perp \vec{E} \Rightarrow \vec{F} \uparrow \vec{v}$ ). Модуль импульса, передаваемого рассматриваемому элементу за время  $dt$  будет равен  $p = jBS \Delta l dt$ .

В соответствии с законом Джоуля – Ленца, этому элементу слоя электромагнитной волной за время  $dt$  передаётся энергия  $W = jES \Delta l dt$ .

Отношение модуля импульса, передаваемого рассматриваемому элементу за время  $dt$ , к энергии, передаваемой этому элементу, будет равна:

$$\frac{p}{W} = \frac{B}{E} = \frac{\mu \mu_0 H}{E} = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} = \frac{1}{v} \Rightarrow p = \frac{W}{v}. \quad (16.3.10)$$

Поскольку вещество является лишь средством обнаружения импульса и энергии у электромагнитной волны, полученное соотношение должно выполняться для этой волны и в вакууме, где скорость  $v = c$ , так что имеем связь между импульсом и энергией электромагнитной волны в вакууме:

$$p = W / c . \quad (16.3.11)$$

Направление импульса электромагнитной волны, как это следует из приведённых выше рассуждений, совпадает с направлением вектора  $\vec{v}$ .

Теперь найдем давление, оказываемое светом. Если электромагнитная волна падает нормально к поверхности тела и полностью поглощается за время  $dt$  в слое объёмом  $Sdl = Scdt$ , то, в соответствии с (16.3.11), рассматриваемый элемент объёма получает от поглощённой волны импульс  $dp = dW / c = (< w > / c)Scdt = < w > Sdt$ , откуда для давления света на рассматриваемый элемент имеем:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{dp / dt}{S} = < w > . \quad (16.3.12)$$

Если поверхность полностью отражает свет, то в формуле (16.3.12) появится множитель 2, поскольку импульс, полученный рассматриваемым элементом, в таком случае удваивается.

## 16.4. Излучение электромагнитных волн.

### Шкала электромагнитных волн

Движущиеся без ускорения электрические заряды не могут излучать электромагнитные волны, поскольку создаваемые такими зарядами электромагнитные поля являются *стационарными*. Для появления переменного во времени магнитного поля необходимо, чтобы токи, его создающие, были изменяющимися во времени, а это возможно только для движущихся с *ускорением* зарядов. В этом случае будет отличаться от нуля производная  $\partial \vec{H} / \partial t$ . Согласно уравнениям Максвелла, это приведёт к появлению переменного электрического поля и так далее. Таким образом, только ускоренно движущиеся заряды излучают электромагнитные волны.

С точки зрения физики, процесс излучения движущимися зарядами можно пояснить так. С неподвижной заряженной частицей связано электростатическое (тоже неподвижное) поле, силовые линии которого уходят в бесконечность. Если привести заряд в движение с ускорением (например,

совершать колебания вблизи некоторой точки), создаваемое им поле тоже будет изменяться. В ближайших к заряду точках поле изменяется, а на больших от заряда расстояниях поле будет неподвижным, поскольку в достаточно удалённых точках электрическое поле не успевает изменяться вместе с колебаниями заряда. Это означает, что происходит «отделение» поля от заряда, а поле, не связанное с зарядом, – свободное электромагнитное поле, которое может находиться лишь в определённом состоянии: векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны, модули их согласованы – перемещается в пространстве со скоростью света.

В качестве простейшей системы, способной излучать электромагнитные волны, рассмотрим электрический диполь. Будем считать, что один из зарядов (например, положительный заряд  $q > 0$ ) совершает гармонические колебания с частотой  $\omega$  вдоль оси диполя, а второй заряд (отрицательный заряд  $-q$ ) неподвижен. Если размеры диполя малы по сравнению с длиной излучаемой волны ( $l \ll \lambda$ ), то систему называют элементарным осциллятором. Дипольный момент рассматриваемой системы будет определяться выражением:

$$\vec{p} = ql(t)\vec{e}_l = ql_m\vec{e}_l \cos \omega t = p_m\vec{e}_l \cos \omega t = \vec{p}_m \cos \omega t. \quad (16.4.1)$$

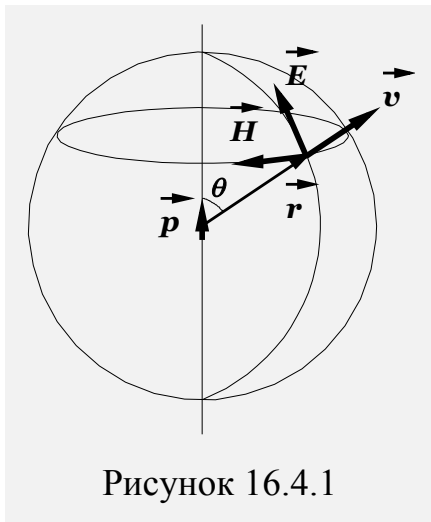


Рисунок 16.4.1

Электромагнитное поле в непосредственной близости от диполя имеет очень сложный вид, поэтому мы будем изучать поведение электромагнитного поля в так называемой *волновой зоне* – на расстояниях от диполя, значительно превышающих длину излучаемой волны и, следовательно, размеры диполя – тем более что именно эта зона, как правило, представляет наибольший практический интерес (рисунок 16.4.1). В соответствии со сказанным выше, переменные электрическое и магнитное поля будут определять вторая производная по времени  $\partial^2 l(t) / \partial t^2 = \ddot{l}(t)$  или вторая производная по времени от дипольного момента  $\ddot{p}(t)$ . Точный расчёт, выходящий за рамки нашего курса, показывает, что электрическое и магнитное поля в волновой зоне в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$  в момент времени  $t$  будут пропорциональны  $\ddot{p}(t - r/c)$ . Аргумент  $(t - r/c)$  показывает, что

дет определять вторая производная по времени  $\partial^2 l(t) / \partial t^2 = \ddot{l}(t)$  или вторая производная по времени от дипольного момента  $\ddot{p}(t)$ . Точный расчёт, выходящий за рамки нашего курса, показывает, что электрическое и магнитное поля в волновой зоне в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$  в момент времени  $t$  будут пропорциональны  $\ddot{p}(t - r/c)$ . Аргумент  $(t - r/c)$  показывает, что

колебания полей в точке, удалённой на расстояние  $r$  от диполя, будут запаздывать относительно колебаний  $\ddot{p}(t)$  на время, необходимое для достижения электромагнитной волной точки наблюдения, то есть на время  $r/c$ .

В п. 15.1 (см. формулу (15.1.17)) уже говорилось, что амплитуда сферической волны будет уменьшаться по закону  $A(r) \sim 1/r$ . Следовательно, амплитуды полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  будут пропорциональны  $1/r$ . Кроме того, поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  будут зависеть от угла  $\theta$  между вектором дипольного момента  $\vec{p}$  и радиус-вектором  $\vec{r}$  точки наблюдения (см. рисунок 16.4.1). Для электрического диполя было установлено, что компонента электрического поля, направленная перпендикулярно радиус-вектору  $\vec{r}$  точки наблюдения, пропорциональна  $\sin \theta$ . В итоге получаем для интересующих нас полей:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}(t - r/c) \sin \theta}{c^2 r}; \quad H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E. \quad (16.4.2)$$

Если дипольный момент изменяется по гармоническому закону, то с учётом (16.4.1) имеем:

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_m \omega^2 \sin \theta}{c^2 r} \sin(\omega t - kr); \quad H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E. \quad (16.4.3)$$

Для плотности потока энергии, излучаемой диполем, таким образом, имеем:

$$\Pi = EH = \frac{\mu_0 p_m^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 cr^2} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sin^2(\omega t - kr), \quad (16.4.4)$$

а для интенсивности, соответственно:

$$I = \langle \Pi \rangle = \langle EH \rangle = \frac{\mu_0 p_m^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 cr^2}. \quad (16.4.5)$$

Из полученных формул вытекает два наиболее существенных вывода:

1. Мощность излучения элементарного осциллятора пропорциональна *четвёртой* степени частоты его колебаний.

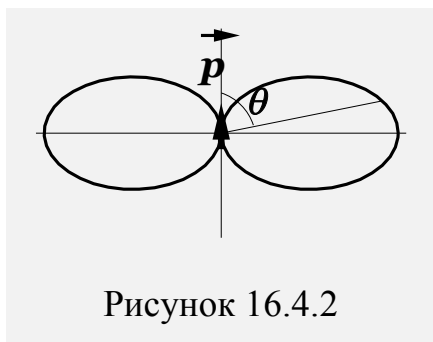


Рисунок 16.4.2

2. Направления наиболее интенсивного излучения лежат в плоскости, проходящей через центр и перпендикулярно оси диполя, что отображено при помощи диаграммы направленности (рисунок 16.4.2).

В зависимости от длины волны в вакууме и частоты колебаний весь спектр электромагнитного излучения (*шкалу электромагнитных волн*) принято делить на диапазоны:

| Длина волны     | Наименование                                  | Частота           |
|-----------------|-----------------------------------------------|-------------------|
| 100 км и более  | <b>Низкочастотные электрические колебания</b> | (0–3) кГц         |
| 100 км – 0,1 мм | <b>Радиоволны:</b>                            | 3 кГц – 3 ТГц     |
| (100–10) км     | мираметровые (очень низкие частоты)           | (3–30) кГц        |
| (10–1) км       | километровые (низкие частоты)                 | (30–300) кГц      |
| 1 км – 100 м    | гектометровые (средние частоты)               | 300 кГц – 3 МГц   |
| (100–10) м      | декаметровые (высокие частоты)                | (3–30) МГц        |
| (10–1) м        | метровые (очень высокие частоты)              | (30–300) МГц      |
| 1 м – 10 см     | дециметровые (ультравысокие частоты)          | (300–3) ГГц       |
| (10–1) см       | сантиметровые (сверхвысокие частоты)          | (3–30) ГГц        |
| (10–1) мм       | миллиметровые                                 | (30–300) ГГц      |
| (1–0,1) мм      | децимиллиметровые (гипервысокие частоты)      | (300–3) ТГц       |
| 2 мм – 3 нм     | <b>Оптический диапазон</b>                    | 150 ГГц – 100 ПГц |
| 2 мм – 760 нм   | инфракрасное излучение                        | 150 ГГц – 400 ТГц |
| (760–380) нм    | видимое излучение                             | (400–800) ТГц     |
| (380–3) нм      | ультрафиолетовое излучение                    | 800 ТГц – 100 ПГц |
| 10 нм – 1 пм    | <b>Рентгеновское излучение</b>                | 300 ПГц – 300 ЭГц |
| до 10 пм        | <b>Гамма-излучение</b>                        | до 30 ЭГц         |



## Глава 17. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

### 17.1. Свет и его характеристики

Понятие «*свет*», несмотря на свою обычность и обыденность, требует пояснений. По мере изучения этого физического объекта физикам стало ясно, что свет представляет собой очень сложное физическое явление, которое, в зависимости от условий его наблюдения, проявляет свои волновые или корпускулярные свойства.

С одной стороны, имеется экспериментальный факт совпадения измеренного значения скорости света в вакууме со значением скорости распространения электромагнитных волн, что позволило Максвеллу высказать предположение, что свет – это электромагнитные волны. Эта гипотеза подтверждается многими экспериментальными фактами. Представлениям электромагнитной теории света полностью соответствуют экспериментально открытые законы отражения и преломления света, явления интерференции, дифракции и поляризации света.

С другой стороны, явления фотоэффекта, эффект Комптона и другие виды взаимодействия света с веществом электромагнитная теория света объяснить не может. Объяснение таких явлений может быть осуществлено только на основе корпускулярных представлений о свете. Эта ситуация в 20 веке была обозначена в физике как представления о *корпускулярно-волновом дуализме* свойств света.

Это представление означает, что свет не является совокупностью частиц, и в то же время его нельзя представлять подобно звуковым волнам или волнам на поверхности воды. Наиболее точно отражает ситуацию сказанная выше фраза о том, что свет – это сложный объект, который, в зависимости от условий его наблюдения, проявляет свои волновые или корпускулярные свойства. При более подробном и глубоком изучении обнаруживается неразрывная связь корпускулярных и волновых свойств света.

В данной главе будут рассматриваться только вопросы и явления, в основе которых лежат волновые свойства света, то есть условия наблюдения таковы, что свет проявляет свойства электромагнитных волн.

Оптические частоты чрезвычайно велики (порядка  $10^{14} - 10^{15}$  Гц), а разность частот между границами оптического диапазона очень мала по сравнению с их величинами, поэтому принято измерять оптический диапазон в длинах волн.

Для частот, более низких, чем частоты оптического диапазона, нельзя построить оптические системы по законам геометрической оптики, а электромагнитное поле более высоких частот, как правило, либо проходит сквозь любое вещество, либо разрушает его.

Оптический диапазон состоит из следующих видов излучения: *ультрафиолетовое* – УФ ((3–380) нм), *видимое* – ВИ ((380–760) нм), *инфракрасное* – ИК (760 нм – 2 мм). Если во времена Ньютона в оптический диапазон входило только видимое излучение, то с техническим прогрессом диапазон существенно расширился – теперь в оптический диапазон иногда включают и рентгеновское излучение. Не исключено дальнейшее расширение оптического диапазона.

На рисунке 17.1.1 показан участок шкалы электромагнитного излучения в длинах волн, соответствующий оптическому диапазону. Границы оптического диапазона, а также границы между его участками установлены на основе экспериментальных данных и не являются абсолютно точными.

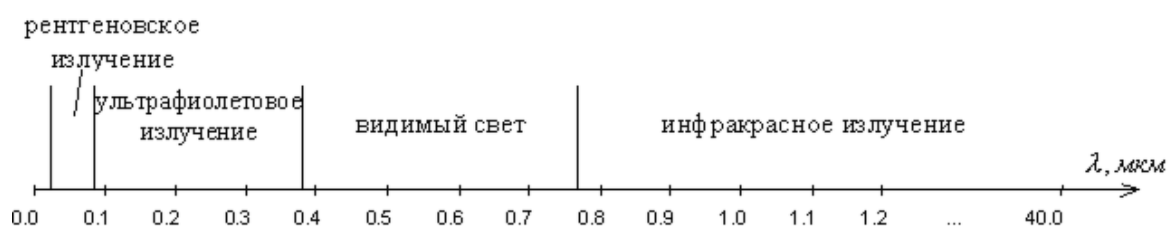


Рисунок 17.1.1. Оптический диапазон

При описании света в волновой оптике будем использовать только вектор напряжённости электрического поля электромагнитных волн, поскольку, как показывает опыт, физиологические, фотохимические, фотоэлектрические и другие воздействия света на вещество обусловлены взаимодействием электрического поля волны с заряженными частицами, тогда как магнитное воздействие на эти частицы значительно слабее. Именно поэтому вектор напряжённости электрического поля электромагнитной волны будем называть *световым вектором*, а его модуль будем обозначать  $E_m$ .

При распространении света в однородной изотропной оптически прозрачной среде будем использовать понятие *абсолютного* показателя преломления этой среды, который определяется выражением:

$$n = c / v, \quad (17.1.1)$$

и, в соответствии с формулой (16.1.14), равен:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (17.1.2)$$

Если рассматриваемая среда не является магнитоупорядоченной, то магнитная проницаемость этих сред близка к единице,  $\mu \cong 1$ , так что далее для таких сред будем считать:

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \quad (17.1.3)$$

**Относительный** показатель преломления второй среды относительно первой определяется выражением:

$$n_{21} = n_2 / n_1 = v_1 / v_2. \quad (17.1.4)$$

Для немагнитоупорядоченных сред имеет место также равенство:

$$n_{21} = \sqrt{\varepsilon_2} / \sqrt{\varepsilon_1}. \quad (17.1.5)$$

Длина световой монохроматической волны  $\lambda$  определяется выражением:

$$\lambda = v / \nu, \quad (17.1.6)$$

откуда следует зависимость длины рассматриваемой волны  $\lambda$  от среды, в которой она распространяется:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}, \quad \lambda_0 = \frac{c}{\nu}. \quad (17.1.7)$$

В формуле (17.1.7)  $\lambda_0 = c / \nu$  – длина световой монохроматической волны в вакууме.

Частоты электромагнитных волн оптического диапазона очень высоки (для ВИ  $\nu = (0,39 - 0,79) \cdot 10^{15}$  Гц), и мгновенные значения светового вектора и связанных с ним физических величин не могут быть зарегистрированы, вследствие чего на практике имеют смысл только средние величины по большим (по сравнению с периодом колебаний) промежуткам времени.

В соответствии с этим интенсивность световой волны в немагнитоупорядоченной среде, например, определяется выражением (16.3.7) и для

плоской линейно поляризованной монохроматической световой волны равна (см. 16.3.8):

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^2 = a n E_m^2, \quad a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}. \quad (17.1.8)$$

В приведённой формуле (17.1.8) важен тот факт, что интенсивность световой волны пропорциональна квадрату амплитуды светового вектора, то есть  $I \sim E_m^2 \sim \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle$ . В связи с этим фактом часто для простоты интенсивность монохроматической световой волны считают просто равной среднему от скалярного произведения светового вектора на самого себя, то есть  $I = \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle$ , что существенно упрощает рассуждения. А недостающий множитель всегда можно добавить в конечный результат. Мы также будем использовать этот общепринятый приём.

Среди других понятий, необходимых в дальнейшем, понадобится понятие *светового луча*.

Световыми лучами называют линии, вдоль которых переносится энергия светового луча, то есть линии, к которым по касательной направлен средний вектор Умова – Пойнтинга. В изотропных средах световые лучи перпендикулярны волновым поверхностям.

Несмотря на то, что в волновой оптике рассматриваются только те явления, в которых проявляются волновые свойства света, полностью исключить из рассмотрения корпускулярные свойства не удаётся. В частности, вопрос испускания света невозможно полноценно описать только на основе классических волновых представлений. Для пояснения свойств реальных световых волн и их взаимодействия необходимо учитывать, что процесс испускания света объясняется на основе квантово-механических представлений о строении атомов и молекул вещества. Из этих представлений, вопреки классической волновой теории, вытекает, что атомы и молекулы вещества (далее – система), состоящие из движущихся ускоренно заряженных частиц, тем не менее могут находиться в так называемых *стационарных* энергетических состояниях, в которых они не излучают энергии. Эти стационарные состояния характеризуются вполне определёнными энергиями, образующими дискретный набор разрешённых значений энергии (то есть значения разрешённых энергий не непрерывно заполняют какой-то диапазон). Наименьшее из возможных значений энергии соответ-

ствует *основному* (невозбуждённому) состоянию системы. Процесс поглощения и/или излучения энергии электромагнитной (световой) волны осуществляется порциями (**квантами** света) только для волн, энергии которых точно равны разнице  $\Delta\mathcal{E}$  между энергиями исходного  $\mathcal{E}_i$  и конечного  $\mathcal{E}_j$  состояния рассматриваемой системы. При поглощении кванта света система переходит в состояние с большей разрешённой энергией, а при излучении кванта света – в состояние с меньшей разрешённой энергией. Планк (Планк Макс Карл Эрнст Людвиг, нем., 1858–1947) в 1900 году высказал фундаментальную гипотезу о том, что *энергии* поглощаемых/испускаемых квантов *пропорциональны частоте* соответствующих световых волн, то есть  $|\Delta\mathcal{E}| = h\nu$ , где  $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка.

Все дальнейшие детали описываемых процессов будут рассмотрены позднее, а в настоящий момент этого достаточно, чтобы ввести понятие *волнового цуга*.

Расчёты и опыт показывают, что процесс испускания кванта света отдельным возбуждённым атомом длится около  $\tau \cong 10^{-8}$  с. За это время возникшая световая волна пройдёт расстояние  $l = c \cdot \tau \cong 3$  м. Вследствие своей конечной протяжённости этот «кусочек» световой волны, называемый **цугом** волн или **волновым цугом**, не является монохроматической волной и может быть представлен последовательностью горбов и впадин длиной около 3 м, а его протяжённость называют длиной цуга. Одновременно образуется огромное количество волновых цугов, испускаемых совершенно независимо различными атомами. Вследствие независимости процессов испускания света различными атомами фазы образованных волновых цугов никак не связаны друг с другом, а плоскости колебаний светового вектора (плоскости поляризации) случайным образом ориентированы в пространстве. Пользуясь случаем, отметим, что описанный выше свет называют **естественным** светом.

## 17.2. Интерференция световых волн. Когерентность

Рассмотрим наложение двух световых монохроматических волн в некоторой области пространства. Световые векторы налагающихся волн обозначим  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ . В предположении, что справедлив принцип суперпо-

зиции, результирующая волна имеет световой вектор  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , а её интенсивность определяется выражением:

$$\begin{aligned} I = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \rangle &= \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 \rangle + \langle \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2 \rangle + 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \\ &= I_1 + I_2 + 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (17.2.1)$$

Из полученной формулы следует, что интенсивность результирующей волны равна сумме интенсивностей налагающихся волн, плюс некоторый добавочный член, называемый **интерференционным** членом, который в зависимости от условий опыта может оказаться либо равным нулю, либо отличным от нуля. Если этот интерференционный член отличен от нуля, не зависит от времени и различен в различных точках пространства, то получится устойчивая во времени область пространства, в различных точках которой интенсивности света различны. Полученная в этом случае картина называется **интерференционной** картиной, и само явление суперпозиции световых волн при соблюдении описанных условий называется **интерференцией**. Из сказанного следует, что не всякое наложение световых волн приводит к интерференции.

Прежде всего отметим, что если векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  взаимно перпендикулярны (для линейно поляризованного света – плоскости поляризации перпендикулярны друг другу), то интерференции нет, так как  $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$  и интерференционный член тоже равен нулю.

Поэтому далее рассмотрим случай, когда налагаются две световые монохроматические волны от двух источников  $S_1$  и  $S_2$ , световые векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  которых в точке наблюдения направлены вдоль одной линии. Для удобства запишем эти волны в комплексной форме (см. 15.1.14):

$$\tilde{E}_1 = E_{m1} e^{i(\omega_1 t - k_1 r_1 + \alpha_1)} = E_{m1} e^{i\varphi_1}, \quad \varphi_1 = \omega_1 t - k_1 r_1 + \alpha_1, \quad (17.2.2a)$$

$$\tilde{E}_2 = E_{m2} e^{i(\omega_2 t - k_2 r_2 + \alpha_2)} = E_{m2} e^{i\varphi_2}, \quad \varphi_2 = \omega_2 t - k_2 r_2 + \alpha_2, \quad (17.2.2б)$$

где  $\omega_i$ ,  $k_i$ ,  $r_i$ ,  $\varphi_i$  и  $\alpha_i$ ,  $i=1,2$ , – частоты, волновые числа, расстояния от источников до точки наблюдения, фазы и начальные фазы первого и второго источников, соответственно.

Поскольку интенсивность должна быть вещественным числом, то, используя (17.2.2), находим для интенсивности результирующей волны:

$$\begin{aligned}
I &= \langle (\tilde{E}_1 + \tilde{E}_2)(\tilde{E}_1^* + \tilde{E}_2^*) \rangle = E_{m1}^2 + E_{m2}^2 + E_{m1}E_{m2} \langle e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} \rangle = \\
&= I_1 + I_2 + 2E_{m1}E_{m2} \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = \quad (17.2.3) \\
&= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos[(\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 r_2 - k_1 r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)] \rangle .
\end{aligned}$$

В (17.2.3) учтено, что  $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$ .

Видим, что интерференционный член будет отличным от нуля, если разность фаз  $\delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  налагающихся волн

$$\delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 r_2 - k_1 r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1) \quad (17.2.4)$$

не зависит от времени.

Волны, **разность фаз** которых в точке (или в точках некоторой области) наблюдения, есть не зависящая от времени постоянная величина, называются **когерентными** волнами. Источники таких волн также называются **когерентными источниками**.

Из (17.2.4) следует, что монохроматические волны будут когерентными только в том случае, если их частоты совпадают, то есть если  $\omega_2 = \omega_1$ . Тогда  $\omega_2 - \omega_1 = 0$  и мы имеем:

$$\delta\varphi = (k_2 r_2 - k_1 r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1) = \text{const} . \quad (17.2.5)$$

Подчеркнём, что в (17.2.5) имеется в виду независимость разности фаз от времени, но не от координат точки наблюдения.

Для интенсивности результирующей волны, возникающей при наложении двух когерентных волн, имеем:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta\varphi . \quad (17.2.6)$$

Из (17.2.6) видим, что разность фаз, будучи величиной, не зависящей от времени, в различных точках будет различаться и, следовательно, будет отличаться и интерференционный член. В точках, где  $\cos \delta\varphi > 0$ , —  $I > I_1 + I_2$ , а в точках, где  $\cos \delta\varphi < 0$ , —  $I < I_1 + I_2$ , то есть имеет место перераспределение энергии налагающихся волн.

По поводу наибольшей и наименьшей результирующей амплитуды можно сказать следующее:

1. Результирующая амплитуда имеет **максимум** в точках, где  $\cos \delta\varphi = 1$ , то есть при разности фаз, удовлетворяющей условию:

$$\delta\varphi = 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.2.7)$$

2. Результирующая амплитуда имеет **минимум** в точках, где  $\cos \delta\varphi = -1$ , то есть при разности фаз, удовлетворяющей условию:

$$\delta\varphi = (2m + 1)\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.2.8)$$

Рассмотрим более подробно разность фаз (17.2.5) налагающихся волн. Для простоты будем считать разность начальных фаз равной нулю. Учтём, что в соответствии с (15.1.10) и (17.1.7) волновое число  $k_i = 2\pi / \lambda_i = 2\pi n_i / \lambda_0$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\lambda_0$  – длина световой волны в вакууме,  $n_i = \sqrt{\varepsilon_i}$ ,  $i = 1, 2$ , – показатели преломления сред, в которых распространяются волны. Таким образом, из (17.2.5) имеем:

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2 r_2 - n_1 r_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta. \quad (17.2.9)$$

В формуле (17.2.9) введены новые величины. А именно, величины  $L_i = n_i r_i$ ,  $i = 1, 2$ , называются **оптическими длинами** путей соответствующих волн, в отличие от геометрических длин путей  $r_i$ ,  $i = 1, 2$ , этих волн. Разность оптических длин волн  $L_2 - L_1 = \Delta$  называется **оптической разностью хода** волн.

С помощью введённых величин условия интерференционного максимума и минимума принимают вид:

1. Интерференционный **максимум** имеет место в точках, оптическая разность хода волн в которых равна чётному числу полуволн, то есть удовлетворяет условию:

$$\Delta = 2m \frac{\lambda_0}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.2.10)$$

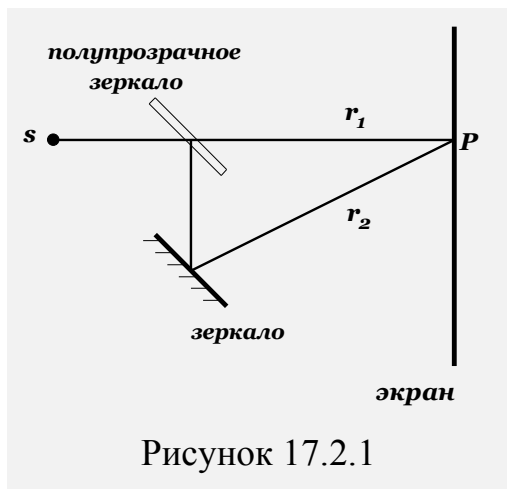
2. Интерференционный **минимум** имеет место в точках, оптическая разность хода волн в которых равна нечётному числу полуволн, то есть удовлетворяет условию:

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.2.11)$$

Здесь и далее используется термин «*полуволна*» для величины  $\lambda_0 / 2$ .



Если источник света имеет размеры значительно меньше длины волны, то разность хода от любой точки источника до произвольной точки  $P$ , где наблюдается интерференция, будет одной и той же. Следовательно, всегда получается чёткая интерференционная картина. Если источник све-



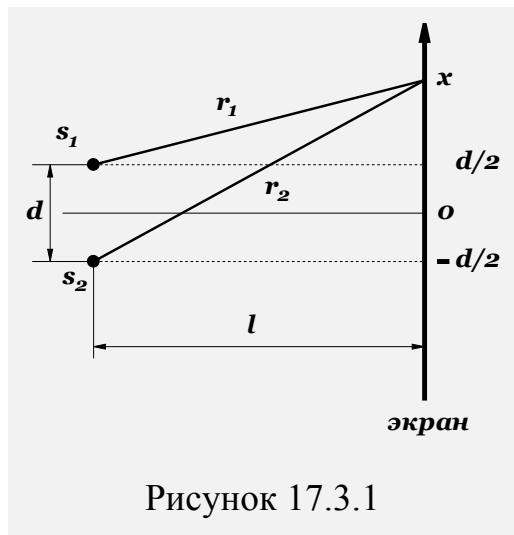
та является протяжённым, то в точку наблюдения будут приходить волны от разных точек источника, т. е. получается наложение многих интерференционных картин, создаваемых многими парами когерентных волн. Результирующая интерференционная картина окажется размытой, а при достаточно больших размерах источника и настолько размытой, что станет невозможно её наблюдать. Пусть налагаются колебания (совершаемые в один мо-

мент времени) от двух различных точек, расположенных в плоскости, перпендикулярной направлению распространения световой волны. Если случайные изменения разности фаз между колебаниями от указанных точек достигают величины, равной  $\pi$ , то расстояние между этими точками называется **длиной пространственной когерентности**. Говорят, что имеет место *пространственная когерентность*, если размеры источника не превышают длину пространственной когерентности (интерференционная картина от такого протяжённого источника наблюдаема).

Если длительность волнового цуга обозначить через  $\tau$ , то диапазон частот рассматриваемого цуга будет равен  $\Delta\omega = 2\pi / \tau$  (соответственно, интервал длин волн  $\Delta\lambda$ ). Если в точке наблюдения налагаются волны, излучаемые одной и той же точкой источника, но разделённые промежутком времени, большим, чем  $\tau$ , то эти волны будут принадлежать разным цугам и интерференция не будет наблюдаться. Поэтому  $\tau$  называют **временем когерентности** и обозначают  $\tau_{\text{ког}}$ . За это время свет пройдёт расстояние  $l_{\text{ког}} = v\tau_{\text{ког}}$ . Выглядит так, как будто эти волны проходят два различных геометрических пути от источника до точки наблюдения  $r_1$  и  $r_2$  (рисунок 17.2.1). Их оптическая разность хода составляет  $|r_2 - r_1|n$ . Интерференция будет наблюдаться, если  $|r_2 - r_1|n < l_{\text{ког}} = v\tau_{\text{ког}}$ . В точке наблюдения осуществляется сложение волн, создаваемых одним и тем же источником в различные моменты времени от  $t$  и  $t + \tau$ . Если  $\tau < |r_2 - r_1|n / v = \tau_{\text{ког}}$ , то

интерференционная картина наблюдается, а такого рода когерентность называется *временной* когерентностью.

### 17.3. Методы наблюдения интерференции света



Прежде чем рассмотреть конкретные опыты, позволяющие наблюдать интерференцию света, опишем классическую схему, изображённую на рисунке 17.3.1, пригодную для расчёта интерференционной картины в любом из опытов по интерференции волн от двух источников  $s_1$  и  $s_2$ . Полученные на основе этой схемы результаты будем применять для анализа конкретных физических опытов и методов наблюдения интерференции света.

Пусть имеется два когерентных монохроматических источника света  $s_1$  и  $s_2$ , выполненных в виде тонких светящихся нитей (или щелей), расположенных параллельно друг другу и плоскому экрану. Среду, в которой распространяется свет от указанных источников, будем считать однородной и изотропной. Расстояние между нитями обозначим  $d$ , а расстояние от нитей до экрана обозначим  $l$ . В любой плоскости, перпендикулярной к нитям, картина будет одинаковой, поэтому можно рассмотреть интерференционную картину в одной из таких плоскостей. Область пространства, в которой наблюдается интерференция, называют полем интерференции. Рассмотрим произвольную точку на экране, удалённую от источников на расстояния  $r_1$  и  $r_2$ .

Из приведённой на рисунке схемы следует:

$$l^2 + (x - d/2)^2 = r_1^2; \quad (17.3.1)$$

$$l^2 + (x + d/2)^2 = r_2^2. \quad (17.3.2)$$

Вычитая из выражения (17.3.2) выражение (17.3.1), имеем:

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2xd. \quad (17.3.3)$$

Как далее увидим, интерференционная картина на экране хорошо наблюдается вблизи начала координат при достаточно близком располо-

жении источников света и при условии  $l/d \gg 1$  (или  $d \ll l$ ), что позволяет сделать в (17.3.3) замену  $r_2 + r_1 \cong 2l$ , так что получим:

$$r_2 - r_1 = x(d/l). \quad (17.3.4)$$

Поскольку среда распространения одинакова для обоих источников, то после умножения на показатель преломления этой среды находим оптическую разность хода волн:

$$\Delta = nx(d/l). \quad (17.3.5)$$

Интерференционные **максимумы** имеют место в точках, координаты  $x_{\max}$  которых удовлетворяют условию (17.2.10), откуда имеем:

$$x_{\max} = m \frac{\lambda_0}{n} \frac{l}{d} = m \lambda \frac{l}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.3.6)$$

Совершенно аналогично для интерференционных **минимумов** имеем:

$$x_{\min} = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0}{n} \frac{l}{d} = (m + \frac{1}{2}) \lambda \frac{l}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.3.7)$$

С помощью полученных выражений для координат интерференционных максимумов и минимумов легко определить наиболее благоприятные условия для наблюдения интерференционной картины.

Для этого введём понятие **ширины интерференционной полосы** как расстояние между соседними интерференционными максимумами (или минимумами). Из (17.3.6) находим выражение для ширины интерференционной полосы:

$$\Delta x = |x_{\min, m+1} - x_{\min, m}| = |(m+1)\lambda(l/d) - m\lambda(l/d)| = \lambda(l/d), \quad (17.3.8)$$

из которого следуют совершенно очевидные условия наиболее благоприятного наблюдения интерференционной картины.

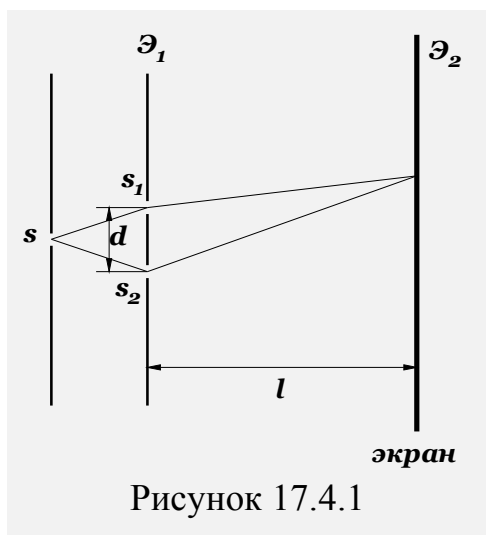
Поскольку диапазон изменения длины волны ВИ не слишком велик (0,38 мкм – 0,76 мкм), то изменять фактически можно только отношение  $l/d$ . Чем шире полоса, тем проще её наблюдать, так что для достижения этой цели следует увеличивать отношение  $l/d$ , выбирая его таким, чтобы для наблюдения интерференционной картины не требовалось слишком большое увеличение. Видим, что для получения ширины интерференционной полосы порядка от 0,4 мм и более требуется выбрать  $l/d \geq 10^3$ . Если

вспомнить, что в самом начале обсуждения интерференционной схемы и при нахождении разности хода лучей (формула 17.3.4) мы считали, что выполняется условие  $l/d \gg 1$ , то теперь найдено подтверждение справедливости этого условия.

#### 17.4. Некоторые классические опыты наблюдения интерференции света

Наиболее известные классические методы наблюдения интерференции света основаны на методе **деления волнового фронта**. Поясним, что это такое.

Обычные источники света, например две лампы накаливания, не дают интерференционной картины, так как такие источники не являются когерентными.



Световые волны испускаются атомами вещества независимо друг от друга в виде цугов волн. В цуге содержится  $(10^7 - 10^8)$  длин волн или периодов колебаний. Поэтому излучение отдельного атома сохраняет регулярность только в течение времени  $\tau_{\text{ког}} \sim 10^{-8}$  с. К точке наблюдения приходят цуги волн, испускаемые различными атомами, при этом за время наблюдения многократно и произвольно меняется соотношение между фазами волн от различных атомов. В результате этого устойчи-

вая интерференционная картина не наблюдается.

Интерференцию света можно получить, если световую волну, испускаемую конкретным атомом, разделить на две или несколько когерентных волн. После совмещения разделённых волн можно наблюдать интерференционную картину. Так как интерферировать могут цуги волн, относящиеся к одному акту испускания рассматриваемого атома, необходимо, чтобы разность хода  $\Delta$  между расщепленными лучами света не должна превышать длину когерентности  $l_{\text{ког}} = v\tau_{\text{ког}}$  ( $v$  – скорость волны в среде). Такое разделение возможно осуществить, в основном, **двумя методами**: *делением волнового фронта* и *делением амплитуды*. Рассмотрим вначале некоторые из способов, основанных на методе деления волнового фронта.

В опыте Юнга (Юнг Томас, англ., 1773–1829) свет, исходящий от источника  $s$  (рисунок 17.4.1), направляется на экран  $\mathcal{E}_1$ , на котором распо-

ложены два отверстия. На экране  $\mathcal{E}_2$  возникает интерференционная картина. Отверстия на экране  $\mathcal{E}_1$  играют роль когерентных источников света в

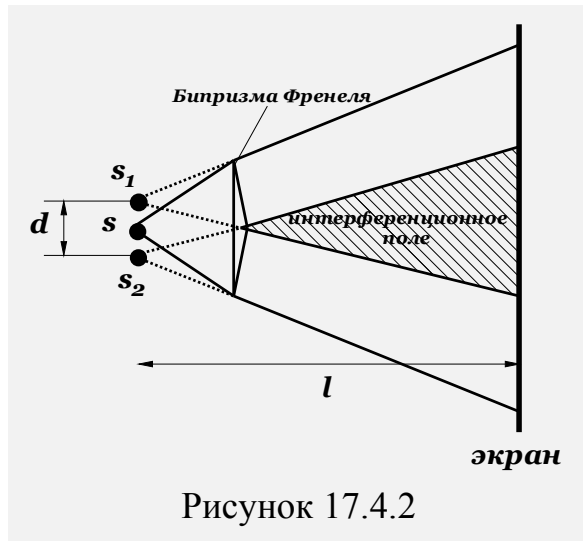


Рисунок 17.4.2

соответствии с принципом Гюйгенса (Гюйгенс Христиан, голл., 1629–1695), согласно которому каждую точку фронта волны, дошедшего до экрана  $\mathcal{E}_1$ , можно рассматривать как источник вторичных волн. Так, волны, исходящие из  $S_1$  и  $S_2$ , воспроизводят одно и то же колебание, исходящее от источника  $S$ , т. е. получены разбиением одного и того же волно-

вого фронта и являются когерентными, поэтому при наложении они могут давать на экране  $\mathcal{E}_2$  устойчивую интерференционную картину.

Другой классический опыт по наблюдению интерференции света использует бипризму Френеля (Френель Огюстен Жан, фр., 1788–1827), которая представляет собой призму с углом при вершине, близким к  $180^\circ$  (рисунок 17.4.2). Конструктивно бипризма Френеля может быть выполнена в виде двух призм с малыми преломляющими углами, сложенных основаниями. Световая волна, исходящая от источника  $S$ , разбивается призмами на две волны, которые, складываясь на экране  $\mathcal{E}$ , дают интерференционную картину. Наблюдателю, который находится в месте расположения экрана, кажется, что световые волны исходят из двух источников  $S_1$  и  $S_2$ , являющихся мнимыми изображениями источников.

Имеются и многие другие опыты наблюдения интерференции света, основанные на методе деления волнового фронта.

## 17.5. Интерференция света в тонких плёнках

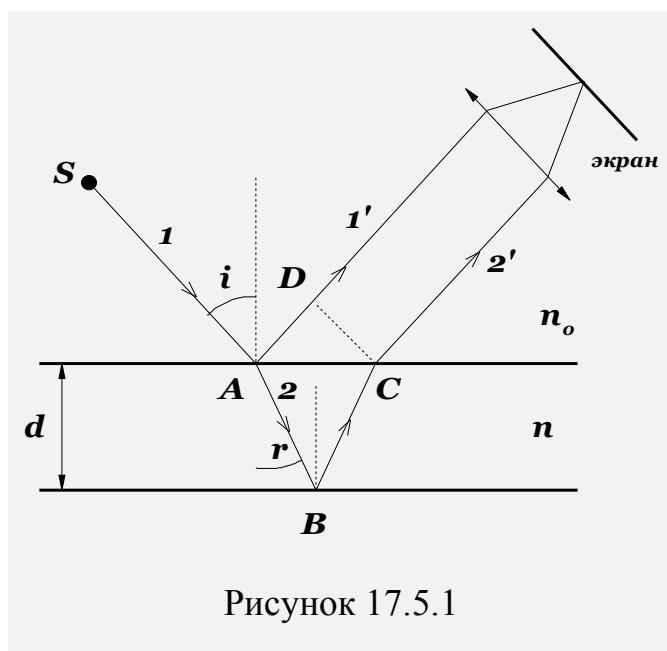
Интерференцию можно наблюдать вследствие отражения света от верхней и нижней поверхностей тонких плёнок, т. е. когда когерентные волны получают методом деления амплитуд. При наложении этих волн наблюдается интерференционная картина. Если свет естественный (белый), то интерференционные полосы приобретают радужную окраску. Наблюдать

это явление можно на тонких прозрачных плёнках, таких, например, как на мыльных пузырях, плёнках бензина или масла на поверхности воды и т. п.

Результат интерференции в тонких плёнках разделяют на два вида:

- интерференция от плоскопараллельной прозрачной пластинки;
- интерференция от пластинки с переменной толщиной.

Наблюдаемые при этом интерференционные полосы называются в первом случае кривыми равного наклона, во втором – кривыми равной толщины.



Рассмотрим оба указанных случая.

**Полосы равного наклона.** Пусть на плоскопараллельную пластинку толщиной  $d$  и показателем преломления  $n$  попадает монохроматическая световая волна от источника  $S$  (например, нити или щели, параллельной плоскости пластинки, рисунок 17.5.1).

Рассмотрим один луч  $SA$ , который в точке  $A$  разделяется на

два: отражённый луч  $1'$  и преломлённый луч  $2$ . После отражения от нижней поверхности пластинки преломлённый луч также попадает в среду (луч  $2'$ ), в которой распространяется первый луч. Если на пути лучей  $1'$  и  $2'$  поставить линзу (роль линзы может играть хрусталик глаза), то в фокальной плоскости линзы будет максимум или минимум в зависимости от разности хода лучей. Оптическая разность хода лучей  $1'$  и  $2'$  будет равна:

$$\Delta = (|AB| + |BC|)n - |AD|n_0 - (\lambda_0 / 2), \quad (17.5.1)$$

где учтено, что при отражении от оптически более плотной среды в оптической длине пути одного из лучей теряется  $\lambda_0 / 2$ .

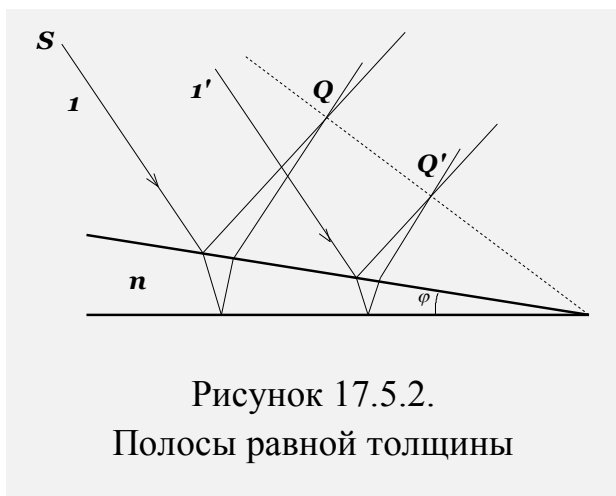
Дополнительная разность хода  $\lambda_0 / 2$  обусловлена отражением света от оптически более плотной среды. Если  $n > n_0$ , то потеря полуволны произойдёт в точке  $A$ , а если  $n < n_0$ , то потеря полуволны произойдёт в точке  $B$ .

После несложных вычислений с учётом закона преломления Снеллиуса (Виллеброрд Снелл ван Ройен (печатался под именем Снеллиус), голл., 1580–1626):  $n_0 \sin i = n \sin r$ , получим:

$$\Delta = 2dn \cos r - (\lambda_0 / 2) = 2d \sqrt{n^2 - n_0^2 \sin^2 i} - (\lambda_0 / 2). \quad (17.5.2)$$

Таким образом, если на пути лучей, отражённых от плоскопараллельной пластинки, поставить линзу, то в фокальной плоскости будет наблюдаться интерференционная картина, причём в точках, где  $\Delta = 2m(\lambda_0 / 2)$ , возникает максимум, где  $\Delta = (2m + 1)(\lambda_0 / 2)$  – минимум. Из (17.5.2) видно, что при данных  $\lambda_0$ ,  $d$ ,  $n$  и  $n_0$  каждому наклону лучей (определенное значение угла  $i$ ) соответствует своя интерференционная полоса. Их и называют полосами равного наклона, так как каждая из них образована лучами, имеющими одинаковый наклон.

**Полосы равной толщины.** Рассмотрим теперь интерференционную картину при отражении от пластинки с переменной толщиной, иногда называемой клином. Показатель преломления клина обозначим  $n$ , а показатель преломления окружающей среды –  $n_0$  (рисунок 17.5.2).



Пусть на пластину падает плоская монохроматическая волна. Картина здесь несколько будет отличаться, поскольку при падении луча 1 луч, отражённый от верхней плоскости, и луч, отражённый от нижней плоскости, уже не будут параллельными, а пересекутся в некоторой точке  $Q$ . Аналогично и для падающего луча  $1'$  луч, отражённый от верхней плоскости, и луч, отражённый от нижней плоскости, пересекутся в точке  $Q'$ .

Можно показать, что точки  $Q$ ,  $Q'$ , ... лежат в одной плоскости, проходящей через ребро клина (пунктир на рисунке 17.5.2). В итоге вблизи ребра клина в плоскости, проходящей через ребро клина, и точки пересечения лучей, отражённых от разных плоскостей клина, появятся светлые и тёмные полосы, параллельные ребру клина. Светлые полосы будут наблюдаться при отражении на тех толщинах клина, для которых выполняется

условие максимума, а тёмные – при отражении на тех толщинах клина, для которых выполняется условие минимума.

Типичным примером кривых равной толщины являются интерференционные кольца Ньютона. Они наблюдаются в том случае, когда выпуклая поверхность сферической линзы соприкасается с плоской хорошо отполированной стеклянной пластинкой (рисунок 17.5.3). Если на такую систему направить монохроматический световой пучок, то, как в отражённом, так и в проходящем свете, наблюдаются интерференционные полосы, которые представляют собой чередование светлых и темных концентрических колец с центром в точке соприкосновения. Легко показать, что в отражённом свете (как, например, для отражённых лучей 1 и 2, рисунок 17.5.3) выражения для радиусов светлых и тёмных колец имеют вид:

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \text{ (тёмные кольца);} \quad (17.5.3)$$

$$r_m = \sqrt{(m - 1/2)\lambda R}, \quad m = 1, 2, \dots \text{ (светлые кольца).} \quad (17.5.4)$$

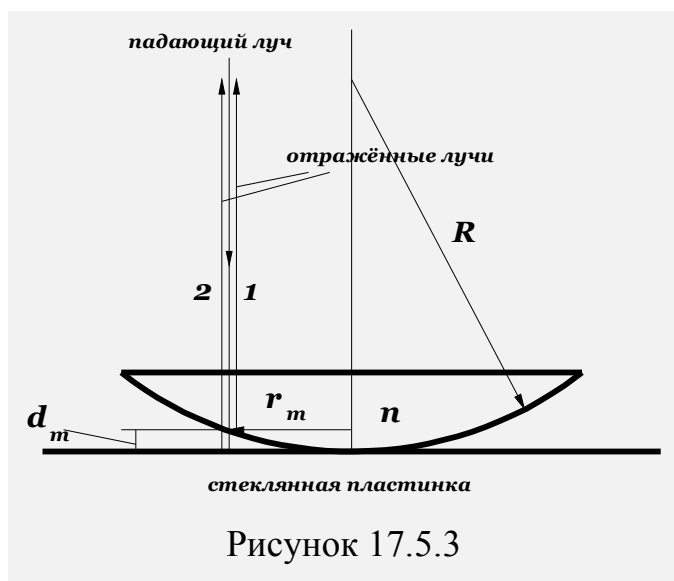


Рисунок 17.5.3

В частности, случай, когда  $m = 0$  и  $r_m = 0$  соответствует центральному тёмному пятну в отражённом свете. Очевидно, что максимума нулевого порядка не будет.

В заключение поясним, почему наблюдение интерференции света возможно в тонких пластинках (плёнках) и оценим максимальную толщину пластинки, превышение которой

делает наблюдение интерференции невозможным.

Свет, падающий на плёнку, не является строго монохроматическим. Как уже отмечалось, время когерентности  $\tau_{\text{ког}}$  связано с частотным диапазоном  $\Delta\omega$  (и, соответственно, интервалом длин волн  $\Delta\lambda$ ) волнового цуга соотношением  $\Delta\omega = 2\pi / \tau_{\text{ког}}$ . Если в точке наблюдения налагаются волны, излучаемые одной и той же точкой источника, но разделённые промежутком времени, большим, чем  $\tau_{\text{ког}}$ , то эти волны будут принадлежать разным цугам и интерференция не будет наблюдаться.



Степень монохроматичности излучения часто характеризуют величиной  $\Delta\lambda / \lambda$ , где  $\Delta\lambda$  – интервал длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ , в котором сосредоточено излучение.

Очевидно, что если падающий свет не является монохроматическим, то каждая монохроматическая составляющая даёт свою систему интерференционных полос, смещённых одна относительно другой. Найдём связь между  $\Delta\lambda$  и  $m_{\max}$ , т. е. тем порядком интерференции, который можно наблюдать.

Если максимум порядка  $m_{\max}$  для излучения с длиной волны  $\lambda + \Delta\lambda$  будет совпадать с максимумом порядка  $m_{\max} + 1$  для излучения с длиной волны  $\lambda$ , то интерференция не будет наблюдаться, т. е. имеем:

$$m_{\max}(\lambda + \Delta\lambda) = (m_{\max} + 1)\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda / m_{\max}. \quad (17.5.5)$$

Если излучение источника настолько монохроматично, что человеческий глаз не различает по цвету крайние спектральные монохроматические волны ( $\Delta\lambda < 10$  нм), то интерференционная картина будет одноцветной и не будет наблюдаться, начиная с  $m_{\max} = \lambda / \Delta\lambda$ .

Выражение (17.5.5) налагает ограничение на разность хода  $\Delta = m_{\max}\lambda = (\lambda / \Delta\lambda)\lambda = \lambda^2 / \Delta\lambda$ , поскольку разность хода не должна превышать длину когерентности, то есть  $\Delta = \lambda^2 / \Delta\lambda \leq l_{\text{ког}}$ .

На основе (17.5.5) можно оценить максимально допустимую толщину плёнок, когда ещё можно наблюдать интерференцию в естественном свете. Полагая  $\lambda \cong 500$  нм,  $\Delta\lambda \cong 10$  нм,  $n = 1,5$  и падение света нормальным по формуле (17.5.2):  $\Delta = 2dn - \lambda / 2$ , найдём граничную толщину плёнки:

$$d \approx \left( \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} + \frac{\lambda}{2} \right) / 2n = [(2,5 \cdot 10^{-5} + 0,025 \cdot 10^{-5}) / 3] \text{ м} \cong 8,42 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 8,42 \text{ мкм}.$$

## 17.6. Дифракция света. Принцип Гюйгенса – Френеля

Под дифракцией света понимают явления отклонения распространения волн от прямолинейного и нарушения законов геометрической оптики в средах с резкими неоднородностями, сравнимыми по размерам с длинами распространяющихся волн (типа отверстий и щелей в непрозрачных экранах, областей вблизи краёв экранов и т. п.). Отклонения от законов геометрической оптики состоят в том, что волны огибают препятствия,

проникают в область геометрической тени и в некоторых областях возникают устойчивые в пространстве и во времени участки из полос с неравномерной освещённостью, называемые дифракционной картиной.

Отклонения распространения световых волн от прямолинейного можно объяснить при помощи принципа Гюйгенса (Христи́ан Гю́йгенс ван Зёйлихем, нидерл., 14.04.1629 – 08.07.1695), который позволяет по известному волновому фронту в момент времени  $t$  найти положение и построить волновой фронт в момент времени  $t + \Delta t$ . В соответствии с этим принципом каждая точка поверхности, через которую проходит фронт волны в момент времени  $t$ , рассматривается как источник вторичных волн и положение фронта волны в момент времени  $t + \Delta t$  совпадает с положением поверхности, огибающей все вторичные волны (рисунок 17.6.1). При этом считается, что в однородной среде вторичные волны излучаются только вперёд, то есть в направлениях, составляющих острые углы с внешней нормалью в каждой точке волнового фронта. В однородной изотропной среде вторичные волны являются сферическими (рисунок 17.6.1).

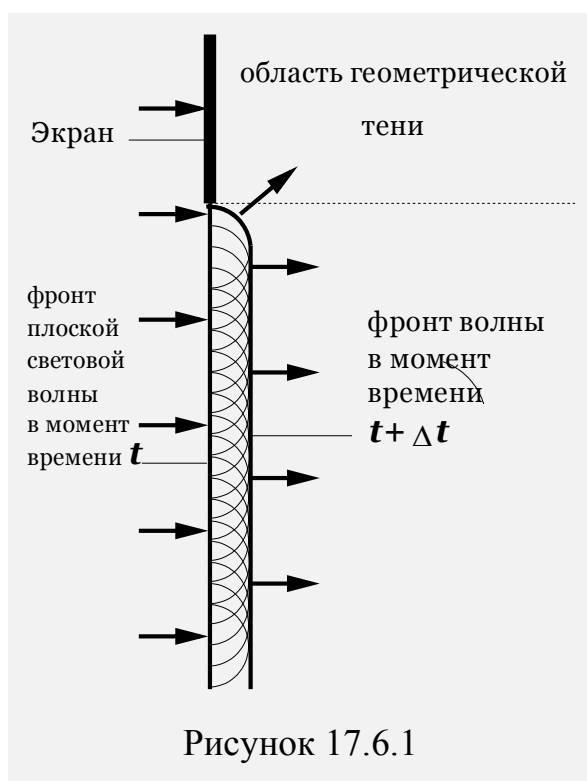


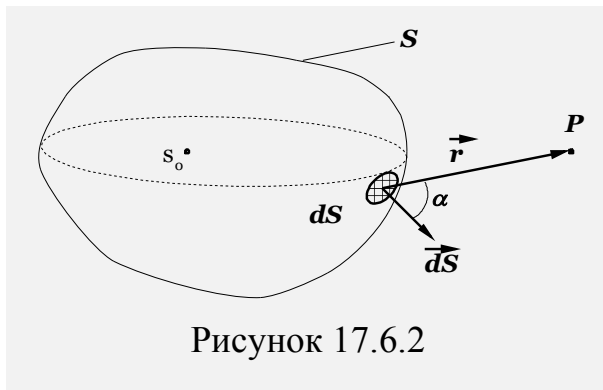
Рисунок 17.6.1

Однако принцип Гюйгенса не позволяет произвести количественные оценки интенсивности света в областях дифракционной картины.

Френель (Огюстен Жан Френель, фр., 10.05.1788 – 14.07.1827) дополнил упомянутый принцип положениями о свойствах вторичных источников и их интерференции (рисунок 17.6.2):

1) при расчётах амплитуды световых волн в некоторой точке наблюдения  $P$  первичный источник  $S_0$  можно заменить совокупностью эквивалентных ему вторичных источников на произвольной замкнутой поверхности  $S$ , расположенной так, что первичный источник  $S_0$  находится внутри этой замкнутой поверхности;

2) вторичные источники когерентны первичному источнику и между собой;



3) амплитуда колебаний  $dE$ , возбуждаемых вторичными источниками на элементе площади  $dS$  на *незакрытых* непрозрачными экранами участках указанной замкнутой поверхности, пропорциональна амплитуде  $E_0$  света первичного источника и площади  $dS$  элемента

поверхности и обратно пропорциональна расстоянию от данного элемента поверхности до точки наблюдения, то есть определяется выражением:

$$dE = f(\alpha) \frac{E_0 dS}{r}, \quad (17.6.1)$$

где  $f(\alpha)$  – монотонная функция угла  $\alpha$  между радиус-вектором точки наблюдения, начало которого находится на рассматриваемом элементе поверхности, и вектором площадки рассматриваемого элемента поверхности, такая, что  $f(\alpha) = 1$  при  $\alpha = 0$ ,  $f(\alpha) = 0$  при  $\alpha \geq \pi/2$  и  $1 > f(\alpha) > 0$  при  $0 < \alpha < \pi/2$ .

Поскольку в пункте 1 говорится о произвольной замкнутой поверхности, то выбор этой поверхности осуществляется исходя из соображений удобства расчётов в каждой конкретной задаче. Чаще всего замкнутую поверхность выбирают в виде волновой поверхности, поскольку при таком выборе будут совпадать фазы всех вторичных источников на этой поверхности.

Справедливость принципа Гюйгенса – Френеля подтверждается совпадением результатов расчётов дифракционных картин, полученных на основе этого принципа, с опытными данными. В частности, на практике используют так называемые зонные пластинки, представляющие собой стеклянные пластинки, на поверхность которых нанесены непрозрачные покрытия в виде колец, закрывающие участки пластинки, ослабляющие свет в точке наблюдения. Такая пластинка действует подобно собирающей линзе.

## 17.7. Дифракция света на щели

В зависимости от вида волнового фронта падающей на препятствие световой волны принято различать два вида дифракции, которые, не слишком вдаваясь в детали, можно обозначить следующим образом:

1) **дифракцией Фраунгофера** (Фраунгофер Йозеф, нем., 1787–1826) – это дифракция в параллельных лучах (волновой фронт – плоскость), и дифракционная картина наблюдается на экране, который находится в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной на пути прошедшего через препятствие света;

2) **дифракцией Френеля** – в противном случае.

Первый случай – дифракция Фраунгофера – наиболее простой для анализа и имеет большое практическое значение. Здесь мы ограничимся рассмотрением только дифракции Фраунгофера.

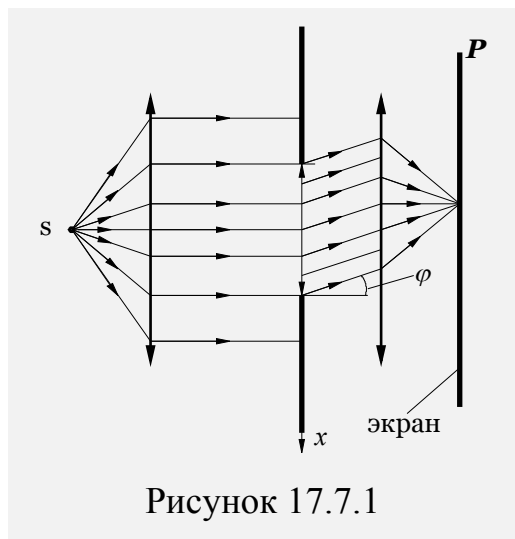


Рисунок 17.7.1

Схема наблюдения дифракции Фраунгофера на щели шириной  $a$ , полученной путём вырезания полосы указанной ширины и бесконечной длины в непрозрачном экране, приведена на рисунке 17.7.1. Для проведения расчётов выберем систему координат так, как это показано на рисунке 17.7.2. Незакрытая непрозрачным экраном полоска является источником вторичных волн, расположенных на одной из волновых поверхностей.

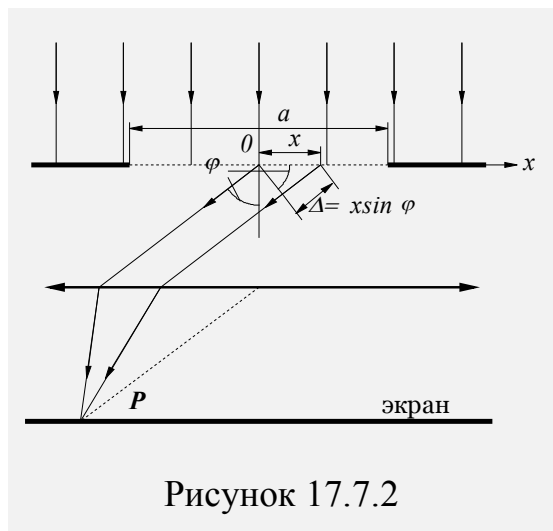


Рисунок 17.7.2

В качестве элементов поверхности в данном случае выбираем элементарные полоски шириной  $dx$ , параллельные щели. Рассмотрим две элементарные полоски, расположенные в центре щели и на расстоянии  $x$  от центра щели (рисунок 17.7.2). Указанные полоски располагаются на одной волновой поверхности (плоскости), и поэтому являются когерентными синфазными источниками вторичных волн,

излучаемых «вперёд», в том числе и под некоторым произвольным углом дифракции  $\varphi$  (не большим  $\pi/2$ ) по отношению к прямолинейному распространению волн. Вторичные волны, определяемые **углом дифракции**  $\varphi$ , соберутся линзой в некоторой точке  $P$  фокальной плоскости, в которой расположен экран. Распределение интенсивности света, прошедшего через щель, получим при помощи принципа Гюйгенса – Френеля. Каждая эле-

ментарная полоска создаст в точке  $P$  световую волну амплитудой  $dE$ , причём множитель  $1/r$  отсутствует, поскольку волновая поверхность плоская. При не слишком больших углах дифракции  $\varphi$  (а это на практике действительно так) множитель  $f(\alpha)$  в (17.6.1) можно считать постоянным.

Площадь полосок пропорциональна их ширине  $dx$ , следовательно, амплитуда световой волны  $dE = Cdx$ , где константа  $C$  определяется интенсивностью первичного источника и шириной щели и находится из условия  $E_0 = Ca$ .

Будем считать вторичные волны гармоническими. В соответствии с принципом Гюйгенса – Френеля (17.6.1), участок щели шириной  $dx$ , расположенный в начале координат, пойдёт в направлении, определяемом углом  $\varphi$ , волну с амплитудой, определяемой выражением:

$$d\tilde{E}_\varphi = \frac{E_0 dx}{a} e^{i\omega t}, \quad (17.7.1)$$

а аналогичный участок, расположенный на расстоянии  $x$  от центра щели, будет иметь отставание по фазе  $(2\pi / \lambda) \cdot \Delta = (2\pi / \lambda) \cdot x \sin \varphi$  (см. рисунок 17.7.2), то есть:

$$d\tilde{E}_\varphi = \frac{E_0 dx}{a} e^{i(\omega t - 2\gamma x)}, \text{ где } \gamma = (\pi / \lambda) \sin \varphi. \quad (17.7.2)$$

Следовательно, амплитуда световой волны от всей щели в направлении, определяемом углом дифракции  $\varphi$ , будет равна:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\varphi &= \frac{E_0}{a} e^{i\omega t} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-2i\gamma x} dx = \frac{E_0}{a} e^{i\omega t} \frac{1}{-2i\gamma} e^{-2i\gamma x} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{E_0}{a} e^{i\omega t} \frac{1}{2i\gamma} (e^{i\gamma a} - e^{-i\gamma a}) = \\ &= \frac{E_0}{\gamma a} e^{i\omega t} \frac{1}{2i} (e^{i\gamma a} - e^{-i\gamma a}) = E_0 e^{i\omega t} \frac{\sin \gamma a}{\gamma a} = E_0 e^{i\omega t} \frac{\sin((\pi a / \lambda) \sin \varphi)}{(\pi a / \lambda) \sin \varphi}. \end{aligned} \quad (17.7.3)$$

Поскольку интенсивность световой волны вещественная положительная величина, для неё имеем:

$$I_\varphi = \tilde{E}_\varphi \tilde{E}_\varphi^* = I_0 \left[ \frac{\sin((\pi a / \lambda) \sin \varphi)}{(\pi a / \lambda) \sin \varphi} \right]^2 = I_0 \left[ \frac{\sin u}{u} \right]^2, \quad (17.7.4)$$

где  $I_0 = E_0^2$ ,  $\tilde{E}_\varphi^*$  – величина, комплексно сопряжённая с  $\tilde{E}_\varphi$ , а  $u = (\pi a / \lambda) \sin \varphi$ .

График интенсивности световой волны как функции синуса угла дифракции показан на рисунке 17.7.3.

Прежде всего отметим, что интенсивность прошедшей рассматриваемую щель монохроматической плоской световой волны распределена неравномерно и симметрично относительно середины щели, в виде чередующихся светлых и тёмных полос (максимумов и минимумов), параллельных щели. Как и следовало ожидать, наибольший по амплитуде максимум находится в центре дифракционной картины (при нулевом угле дифракции), причём  $I_{\varphi,0} = I_0 = E_0^2$ .

Положение минимумов можно точно определить из условия  $\sin u = 0$ ,  $u \neq 0$ , что приводит к следующему выражению, определяющему минимумы дифракционной картины на щели:

$$\sin \varphi = m \frac{\lambda}{a}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (17.7.5)$$

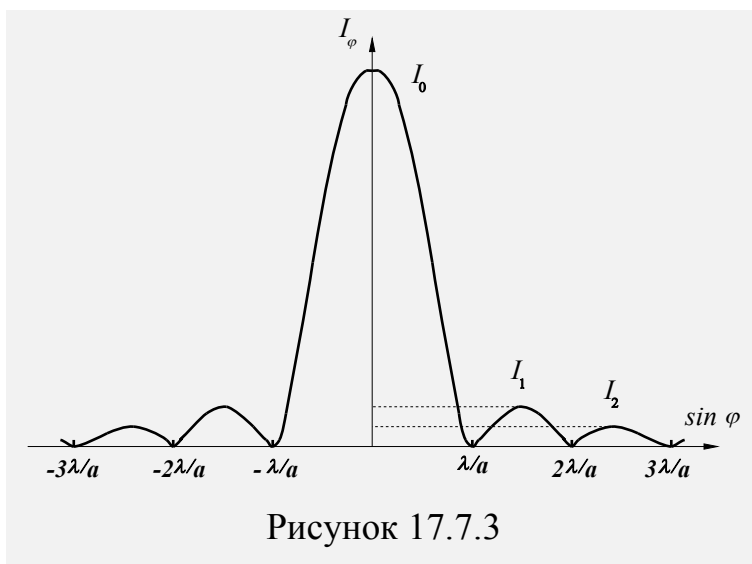


Рисунок 17.7.3

Между минимумами расположены побочные максимумы, которые определяются обычным методом исследования функций на экстремумы и положение которых находится из решения трансцендентного уравнения  $\operatorname{tg} u = u$ . Отметим, что располагаются эти максимумы примерно посередине между соседними минимумами.

Если обозначить интенсивности побочных максимумов  $I_1$ ,  $I_2$  и т. д. (см. рисунок 17.7.3), то, как показывают расчёты, отношение этих интенсивностей к  $I_0$  будет составлять следующие величины:  $I_0 : I_1 : I_2 : I_3 \dots = 1 : 0,047 : 0,017 : 0,0083 \dots$ . Это значит, что основная доля энергии света (более 90%), прошедшего через щель, будет сосредоточена в пределах углов дифракции между первыми (с разных сторон) минимумами.

Из (17.7.5) следует, что при  $\lambda < a$  количество наблюдаемых максимумов ограничено условием  $m\lambda / a \leq 1$ , то есть чем шире щель (по сравне-

нию с длиной световой волны), тем меньше ширина главного и других максимумов. Однако при слишком малых отношениях  $\lambda / a$  расстояние между максимумами становится столь малым, что их наблюдение затруднено. При уменьшении ширины щели ширина главного максимума увеличивается и при  $\lambda \approx a$  этот максимум расплывается на всю плоскость. Дальнейшее уменьшение ширины щели, с точки зрения вида дифракционной картины, ничего не меняет, за исключением уменьшения высоты центрального (и единственного) максимума за счёт уменьшения интенсивности света, прошедшего через щель.

Отметим также, что нарушение монохроматичности света приведёт к появлению разноцветных побочных максимумов, поскольку условие (17.7.5) при одинаковых  $m$  для света с разными длинами волн будет выполняться при различных углах дифракции.

## 17.8. Дифракционная решётка

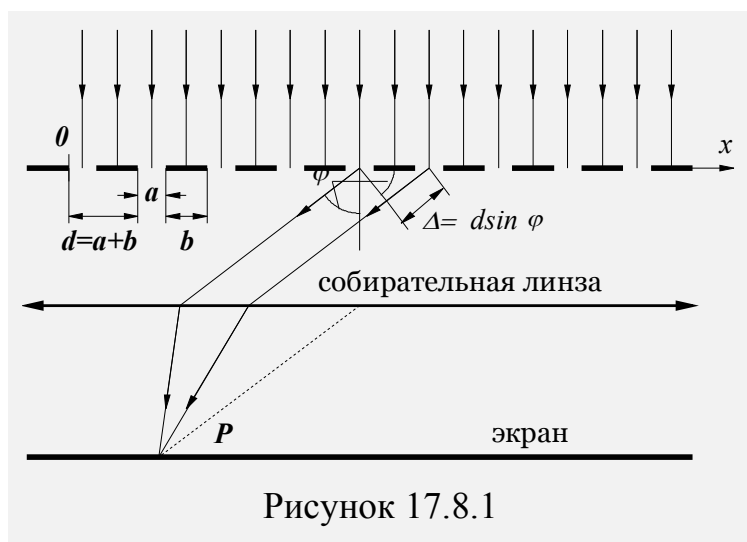


Рисунок 17.8.1

С точки зрения практического применения, наибольший интерес представляет дифракция света не на одной щели, а на совокупности  $N$  одинаковых параллельных друг другу щелей, расположенных в одной плоскости и разделённых между собой одинаковыми непрозрач-

ными полосами одинаковой ширины. Такая оптическая система называется **дифракционной решёткой** и схематически изображена на рисунке 17.8.1. Ширину непрозрачной полосы между соседними щелями обозначим  $b$ , а ширину щели вновь обозначим  $a$ . Величину  $d = a + b$  называют **периодом** дифракционной решётки.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера монохроматической плоской волны с длиной волны  $\lambda$ , падающей на дифракционную решётку нормально (рисунок 17.8.1).

Дифракционная картина от каждой из  $N$  щелей нами уже рассмотрена и описывается выражением (17.7.4). Однако в данном случае происходит наложение когерентных волн от вторичных источников, расположенных в

плоскости решётки в различных щелях. Сдвиг по фазе между световыми волнами, отклонёнными на угол дифракции  $\varphi$ , пришедшими в точку наблюдения от одинаково расположенных точек в соседних щелях, как это видно из рисунка (17.8.1), составляет величину  $\delta = (2\pi / \lambda) \cdot \Delta = (2\pi / \lambda) \cdot d \sin \varphi$ . Поэтому результирующая амплитуда световой волны в точке наблюдения будет определяться следующим выражением:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_\varphi &= \sum_{k=1}^N \tilde{E}_{k,\varphi} = \sum_{k=1}^N E_0 \left( \frac{\sin[(\pi a / \lambda) \sin \varphi]}{(\pi a / \lambda) \sin \varphi} \right) e^{i[\omega t - (k-1)\delta]} = \\ &= E_0 \left( \frac{\sin[(\pi a / \lambda) \sin \varphi]}{(\pi a / \lambda) \sin \varphi} \right) e^{i\omega t} \sum_{k=1}^N e^{-i(k-1)\delta} = \\ &= E_0 \left( \frac{\sin[(\pi a / \lambda) \sin \varphi]}{(\pi a / \lambda) \sin \varphi} \right) e^{i\omega t} \frac{1 - e^{-iN\delta}}{1 - e^{-i\delta}}.\end{aligned}\quad (17.8.1)$$

Дробь  $(1 - e^{-iN\delta}) / (1 - e^{-i\delta})$  в (17.8.1) представляет собой сумму  $N$  первых членов геометрической прогрессии  $(s_N = a_1(1 - q^N) / (1 - q))$  с первым членом  $a_1 = 1$  и знаменателем  $q = e^{-i\delta}$ .

Для интенсивности световой волны  $I_\varphi = \tilde{E}_\varphi \tilde{E}_\varphi^*$  ( $\tilde{E}_\varphi^*$  – величина, комплексно сопряжённая с  $\tilde{E}_\varphi$ ), попадающей в точку наблюдения после прохождения дифракционной решётки под углом дифракции  $\varphi$ , имеем:

$$\begin{aligned}I_\varphi &= \tilde{E}_\varphi \tilde{E}_\varphi^* = I_0^{(1)} \left[ \frac{\sin((\pi a / \lambda) \sin \varphi)}{(\pi a / \lambda) \sin \varphi} \right]^2 \left( \frac{1 - e^{-iN\delta}}{1 - e^{-i\delta}} \right) \left( \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} \right) = \\ &= I_0^{(1)} \left[ \frac{\sin((\pi a / \lambda) \sin \varphi)}{(\pi a / \lambda) \sin \varphi} \right]^2 \left( \frac{2 - (e^{-iN\delta} + e^{iN\delta})}{2 - (e^{-i\delta} + e^{i\delta})} \right) = \\ &= I_0^{(1)} \left[ \frac{\sin((\pi a / \lambda) \sin \varphi)}{(\pi a / \lambda) \sin \varphi} \right]^2 \left( \frac{1 - \cos N\delta}{1 - \cos \delta} \right) = \\ &= I_0^{(1)} \left[ \frac{\sin((\pi a / \lambda) \sin \varphi)}{(\pi a / \lambda) \sin \varphi} \right]^2 \left[ \frac{\sin((\pi d N / \lambda) \sin \varphi)}{\sin((\pi d / \lambda) \sin \varphi)} \right]^2.\end{aligned}\quad (17.8.2)$$

В (17.8.2)  $I_0^{(1)}$  – интенсивность от одной щели при нулевом угле дифракции и учтено тригонометрическое тождество  $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ .



Полученное выражение определяет зависимость интенсивности света, прошедшего через дифракционную решётку от угла дифракции и параметров решётки (соотношения размеров щелей и непрозрачных участков и количества щелей у дифракционной решётки).

Ясно, что минимумы от одной щели будут повторяться и у решётки (первый множитель в квадратных скобках последней строки в (17.8.2)). Эти минимумы определяются тем же условием, что и для одной щели:

$$\sin \varphi = k \frac{\lambda}{a}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (17.8.3)$$

Второй множитель в квадратных скобках в (17.8.2) принимает значения  $N^2$  при  $(\pi d / \lambda) \sin \varphi = m\pi$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , то есть при:

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (17.8.4)$$

Условия (17.8.4) определяют положение главных дифракционных максимумов, причем интенсивность света в этих максимумах будет в  $N^2$  раз превосходить интенсивность света от одной щели, поскольку  $\lim_{u \rightarrow 0} [\sin Nu / \sin u]^2 = N^2$ , так что:

$$I_{\max, \varphi} = N^2 I_{\max, \varphi}^{(1)} \quad (17.8.5)$$

Числа  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  в (17.8.4) называют порядком главного максимума, причём максимум с  $m = 0$  называют центральным главным максимумом (ЦГМ).

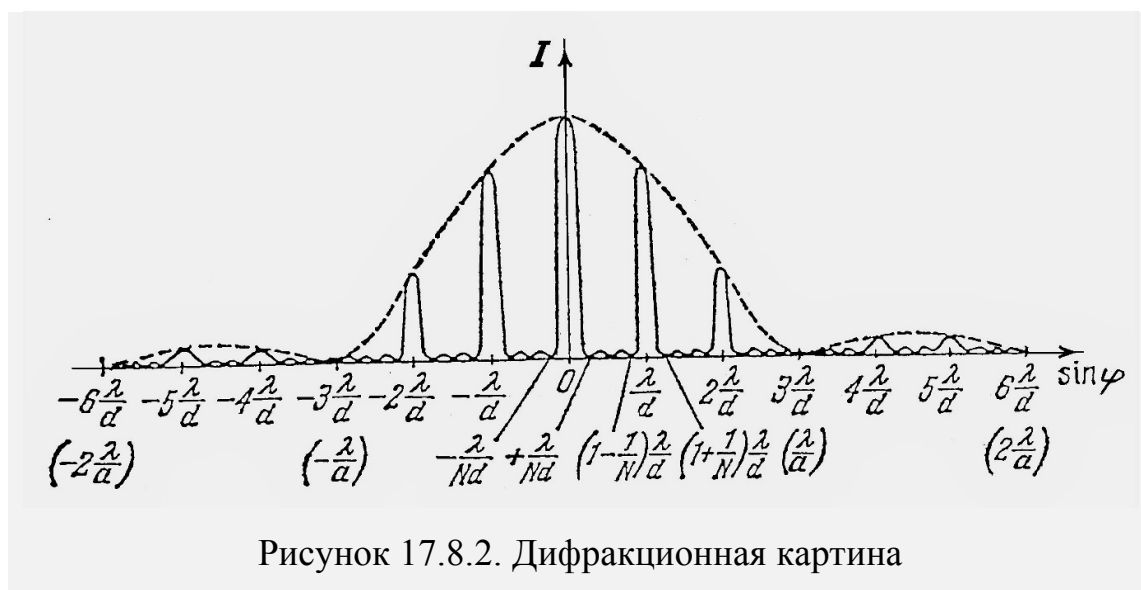
Кроме основных минимумов, определяемых условием (17.8.3), в промежутках между соседними главными максимумами имеются  $(N - 1)$  дополнительных минимумов, появляющихся в точках, в которых числитель сомножителя  $[\sin((\pi d N / \lambda) \sin \varphi) / \sin((\pi d / \lambda) \sin \varphi)]^2$  в (17.8.2) обращается в ноль, а знаменатель нет. Это имеет место при углах, удовлетворяющих условию:

$$d \sin \varphi = \frac{p}{N} \lambda; \quad (17.8.6)$$

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm(N - 1), \pm(N + 1), \dots, \pm(2N - 1), \pm(2N + 1), \dots$$

Легко сообразить, что между  $(N - 1)$  дополнительными минимумами должно быть  $(N - 2)$  дополнительных максимумов.

Дифракционная картина (графическая зависимость  $I_\varphi$  как функции от  $\sin \varphi$ ) при  $N = 4$  и  $d / a = 3$  представлена на рисунке 17.8.2.



Полученное нами условие (17.8.4) ( $d \sin \varphi = m\lambda$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ), определяющее положение главных дифракционных максимумов, показывает также, что дифракционная решётка может использоваться как спектральный прибор. Действительно, если на дифракционную решётку падает некогерентный свет, то для света с различными длинами волн максимумы будут иметь место при различных углах дифракции (кроме ЦГМ), то есть главные дифракционные максимумы одного порядка для света с различными длинами волн будут на экране наблюдаться в разных местах. Следовательно, при известных параметрах дифракционной решётки можно, измеряя дифракционные углы максимумов (спектральных линий), определять спектральный состав падающего света.

Практическое применение указанной методики требует определения количественных характеристик дифракционной решётки и управления ими с целью создания оптимальных условий для наблюдений и измерений.

Основными количественными характеристиками дифракционной решётки являются **угловая дисперсия  $D$**  и **разрешающая сила (способность)  $R$** .

Угловая дисперсия определяет угловое расстояние между двумя **ближайшими (соседними)** спектральными линиями и определяется выражением:

$$D = d\varphi/d\lambda \quad (17.8.7)$$

и имеет следующий смысл.

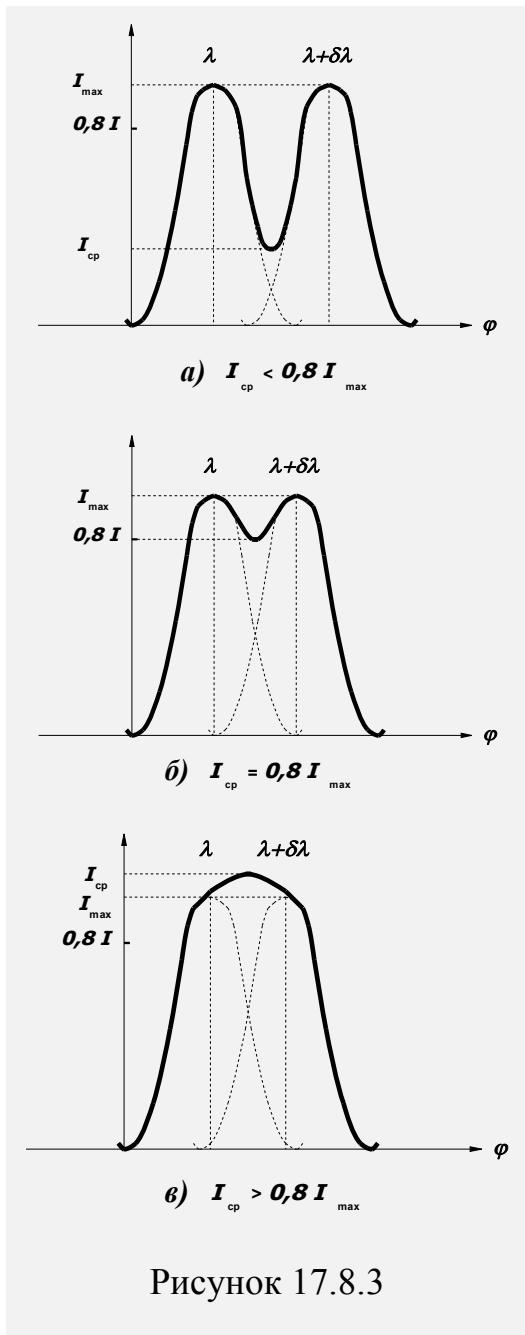
Пусть два соседних максимума (спектральные линии) имеют длины волн  $\lambda$  и  $\lambda + d\lambda$ . Тогда при прохождении света данного спектрального состава через дифракционную решётку с угловой дисперсией  $D$  эти спектральные линии будут наблюдаются под углами  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$ , соответственно, причём угловое расстояние  $d\varphi$  между этими спектральными линиями будет равно  $d\varphi = Dd\lambda$ . Отсюда следует, что для улучшения условий наблюдения желательно увеличивать угловую дисперсию насколько это возможно. Дифференцирование (17.8.4) по переменной  $\varphi$  при заданном значении  $m$  и использование выражения для производной обратной функции для угловой дисперсии даёт выражение:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}. \quad (17.8.8)$$

Ясно, что для увеличения угловой дисперсии дифракционной решётки нужно уменьшать её период. Кроме того, угловая дисперсия увеличивается с ростом  $m$  и  $\varphi$ . Однако с ростом  $m$  и  $\varphi$  интенсивность максимумов очень быстро падает, так что этот вариант не слишком эффективен. Кроме того, поскольку интенсивность максимумов, как правило, достаточна для наблюдения только при малых углах дифракции, то в (17.8.8) можно считать  $\cos \varphi \approx 1$  и для определения угловой дисперсии применять упрощённое выражение  $D \cong m / d$ .

Для определения разрешающей силы дифракционной решётки рассмотрим два соседних максимума, имеющих длины волн  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ . Представим себе, что мы изменяем спектральный состав падающего на дифракционную решётку света таким образом, что разность длин волн  $\Delta\lambda$  у наблюдаемых соседних максимумов уменьшается. До некоторого наименьшего значения разности длин волн, обозначаемого  $\delta\lambda$ , соседние спектральные линии наблюдаются раздельными (разрешаются данным спектральным прибором), а при дальнейшем уменьшении  $\Delta\lambda$  (то есть при  $\Delta\lambda < \delta\lambda$ ) эти спектральные линии сливаются и воспринимаются как одна спектральная линия (перестают разрешаться). Этот факт приводит к понятию **разрешающей силы** данного спектрального прибора, определяемой как отношение:

$$R = \lambda / \delta\lambda. \quad (17.8.9)$$



Значение наименьшей разности длин волн  $\delta\lambda$ , при которой спектральные линии наблюдаются ещё раздельно, зависит как от параметров спектральных приборов (объективных параметров), так и от опыта, квалификации и остроты зрения наблюдателя (субъективных параметров). Поэтому условие определения указанной **наименьшей** разности длин волн  $\delta\lambda$  достаточно условно. Такой **условный критерий** (предложен Рэлеем (Джон Уильям Стретт), лорд, англ., 1842–1919) утверждает, что **две спектральные линии с разными длинами волн одинаковой интенсивности считаются разрешёнными (наблюдаются раздельными)**, если интенсивность  $I_{cp}$  посередине промежутка между двумя максимумами интенсивности составляет не более 0,8 от интенсивности в разрешаемых максимумах  $I_{max}$ . В случае точного равенства  $I_{cp} = 0,8 I_{max}$ , главный максимум (середина) одной спектральной линии совпадает с первым минимумом другой (соседней) спектральной линии (см. рисунок 17.8.3, б).

Таким образом, в соответствии с критерием Рэлея, необходимо, чтобы максимум  $m$ -го порядка (угол дифракции определяется условием (17.8.4):  $d \sin \varphi = m(\lambda + \delta\lambda)$ ) с длиной волны  $\lambda + \delta\lambda$  совпадал с минимумом (первый дополнительный минимум ( $p = mN + 1$ ), определяется условием (17.8.6):  $d \sin \varphi = (p / N)\lambda$ ) для спектральной линии с длиной волны  $\lambda$ , то есть чтобы выполнялось условие:

$$m(\lambda + \delta\lambda) = \frac{mN + 1}{N} \lambda. \quad (17.8.10)$$

Из (17.8.10) имеем:

$$m\delta\lambda = \frac{1}{N}\lambda, \quad (17.8.11)$$

откуда находим отношение  $\lambda / \delta\lambda = R$ , то есть разрешающую силу:

$$R = \frac{m}{N}. \quad (17.8.12)$$

Из (17.8.12) следует, что для повышения разрешающей силы дифракционной решётки нужно либо увеличивать число щелей, либо вести наблюдение при высоких дифракционных порядках.

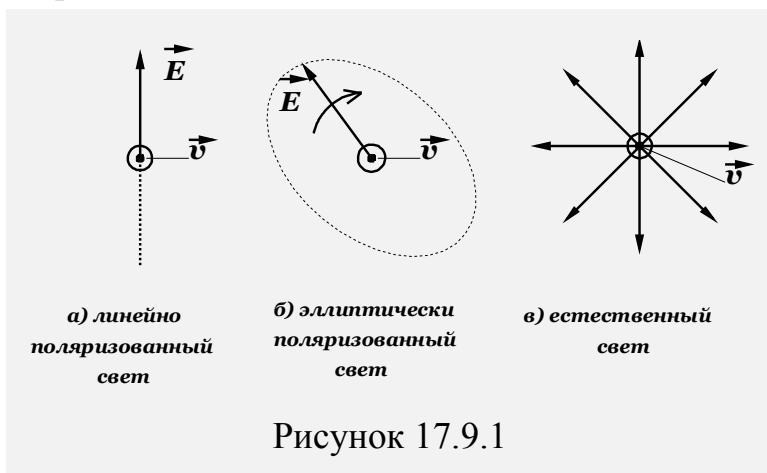
Следует добавить, что полученное выражение (17.8.12) справедливо при упомянутом выше условии равенства интенсивностей разрешаемых максимумов, а также при том условии, что длина когерентности падающего на решётку света превышает ширину этой решётки, иначе будет нарушено условие когерентности света, попадающего в точку наблюдения от всех щелей. Добавим, что лучшие решётки имеют до 1200 штрихов на миллиметр (период  $d \approx 8 \cdot 10^{-7}$  м), а общее число штрихов у них достигает 200 000 (длина чуть менее 2 мм). Поскольку  $|\sin \varphi| \leq 1$ , то из (17.8.4) следует, что  $m \leq d / \lambda = 8 \cdot 10^{-7} / 3,8 \cdot 10^{-7} \cong 2,11$ , то есть для видимого излучения наблюдать спектры второго порядка и выше не удаётся).

## 17.9. Поляризация света

В общем случае **поляризованной** называют любую электромагнитную волну, у которой *колебания светового вектора каким-либо образом упорядочены*. В частности, если световой вектор  $\vec{E}$  в процессе распространения этой волны остаётся всегда в одной плоскости, проходящей через векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{E}$  (в какой-то произвольно выбранный фиксированный момент времени, когда  $\vec{E} \neq \vec{0}$ ), то такую электромагнитную волну называют **плоско поляризованной** (или **линейно поляризованной**), а указанную плоскость называют *плоскостью поляризации* волны (см. п. 3.2).

Вектор  $\vec{H}$  в процессе распространения этой волны также остаётся всегда в одной плоскости, проходящей через вектор  $\vec{v}$  перпендикулярно плоскости поляризации (рисунок 17.9.1, а).

Если наложить две линейно-поляризованные электромагнитные монохроматические волны одинаковой частоты с некоторым постоянным фазовым сдвигом (когерентные волны), движущиеся в одном направлении, и имеющие взаимно перпендикулярные плоскости поляризации, то результирующая электромагнитная волна будет являться в общем случае **эллиптически поляризованной** (см. формулы (3.2.17) – (3.2.19) и комментарии к ним). В частном случае, когда амплитуды световых векторов налагающихся волн равны, получится **поляризованная по кругу** электромагнитная волна. При наблюдении с конца вектора скорости  $\vec{v}$  световой вектор эллиптически поляризованной волны вращается, а его конец описывает в пространстве эллипс. Если световой вектор эллиптически поляризованной волны вращается по часовой стрелке, то поляризация называется правой, в противном случае – левой (рисунок 17.9.1, б). Разумеется, справедливо и обратное утверждение, заключающееся в том, что любую эллиптически поляризованную монохроматическую волну можно считать суммой двух линейно-поляризованных электромагнитных монохроматических волн одинаковой частоты с некоторым фазовым сдвигом, движущихся в одном направлении и имеющих взаимно перпендикулярные плоскости поляризации.



При обсуждении понятия волнового цуга уже упоминалось о **естественном** свете. Напомним, что в процессе перехода атомов некоторого объёма какого-либо вещества из возбуждённого состояния в невозбуждённое одновременно образуется

огромное количество волновых цугов, испускаемых совершенно независимо различными атомами. Вследствие независимости процессов испускания света различными атомами фазы образованных волновых цугов никак не связаны друг с другом, а плоскости поляризации случайным образом ориентированы в пространстве. Такой свет называют естественным светом. Таким образом, у естественного света колебания светового вектора никак не упорядочены и плоскость поляризации такого света, хотя и проходит через световой луч, но ориентирована в пространстве случайным образом (см. рисунок 17.9.1, в). Отметим, что **естественный свет** можно предста-

вить как результат *наложения двух линейно поляризованных монохроматических волн* одного направления одинаковой частоты и амплитуды *с взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации* и со случайным *фазовым сдвигом* (то есть налагаются, некогерентные волны).

Результат наложения естественного и линейно поляризованного света одного направления называют **частично** поляризованным светом.

Для получения линейно поляризованного света используют специальные приборы, называемые **поляризаторами**. Для изготовления поляризаторов используют различные физические явления, которые отчасти будут обсуждаться далее. Основное свойство поляризатора состоит в том, что этот прибор пропускает только свет, имеющий плоскость поляризации, параллельную некоторой плоскости, жёстко связанной с поляризатором и называемой **плоскостью пропускания поляризатора**. Свет с плоскостью поляризации, перпендикулярной плоскости пропускания поляризатора, поляризатор или совсем не пропускает (идеальный поляризатор), или частично. Всюду далее будем полагать, что используется идеальный поляризатор.

Если частично поляризованный свет направить на поляризатор, то при вращении поляризатора вокруг луча (при изменении расположения плоскости пропускания поляризатора) прошедший через него свет будет иметь различную интенсивность от минимальной  $I_{\min}$  до максимальной  $I_{\max}$ . Это позволяет определить числовую характеристику степени поляризации света:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (17.9.1)$$

Очевидно, что для естественного света  $P = 0$ , а для линейно поляризованного света  $P = 1$ . Для эллиптически поляризованного света понятие степени поляризации и формула (17.9.1) неприменимы. Добавим, при использовании поляризатора для анализа поляризации света его называют также **анализатором**.

Интенсивность линейно поляризованного света, прошедшего через поляризатор, можно определить при помощи закона Малюса (Малюс Этьен Луи, фр., 1775–1812), который состоит в следующем.

Пусть на поляризатор падает линейно поляризованный свет и угол между плоскостью пропускания поляризатора  $P$  и плоскостью поляризации света равен  $\alpha$  (рисунок 17.9.2). В п. 3.2 отмечалось, что линейно поляризованную монохроматическую волну можно представить суммой двух линейно поляризованных монохроматических волн одного направления

той же частоты, что и результирующая волна, с нулевым фазовым сдвигом и со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации. Выберем налагаемые линейно поляризованные волны так, что плоскость поляризации одной из них параллельна плоскости пропускания поляризатора  $P$ , а плоскость поляризации другой перпендикулярна  $P$ , и обозначим их амплитуды  $\vec{E}_{\parallel}$  и  $\vec{E}_{\perp}$ , соответственно (сами волны тоже будем обозначать таким же образом).

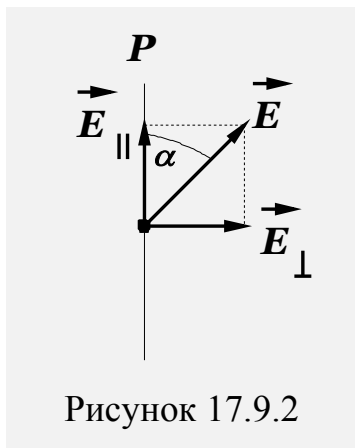
Через поляризатор пройдёт только линейно поляризованная волна  $\vec{E}_{\parallel}$ , причём, как это видно из рисунка 17.9.2,

$$E_{\parallel} = E \cos \alpha. \quad (17.9.2)$$

Интенсивность света, прошедшего через поляризатор, определим возведением обеих частей (17.9.2) в квадрат и получим:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (17.9.3)$$

где  $I = E_{\parallel}^2$  – интенсивность света, прошедшего через поляризатор, а  $I_0 = E^2$  – интенсивность света, падающего на поляризатор. Напомним, что и падающая на поляризатор, и прошедшая через него волны считаются линейно поляризованными.



Если же на поляризатор падает естественный свет интенсивности  $I_{есн}$ , то через поляризатор пройдёт свет интенсивности  $\frac{1}{2} I_{есн}$ . Действительно, пусть на поляризатор падает естественный монохроматический свет интенсивности  $I_{есн}$ . Выше отмечалось, что такой свет можно представить суммой двух линейно поляризованных монохроматических волн одного направления одинаковой частоты и амплитуды с взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации и со случайным фазовым сдвигом (некогерентными волнами), то есть имеем  $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ ,  $E_{\parallel} = E_{\perp}$ , и после возведения в квадрат получим (с учётом того, что  $\vec{E}_{\parallel} \cdot \vec{E}_{\perp} = 0$ ):

$$I_{есн} = I_{\parallel} + I_{\perp} = 2I_{\parallel}, \quad (17.9.4)$$

где  $I_{\parallel} = E_{\parallel}^2$ ,  $I_{\perp} = E_{\perp}^2$  и  $I_{\parallel} = I_{\perp}$ . Из (17.9.4) имеем:  $I_{\parallel} = I_{есн} / 2$ .



Поскольку через поляризатор пройдёт только составляющая  $E_{\parallel}$ , то интенсивность прошедшего света составит только половину от  $I_{есм}$ , то есть  $I_{есм}/2$ .

Если на пути естественного света поставить два поляризатора, плоскости пропускания которых образуют угол  $\alpha$  между собой, то интенсивность света, прошедшего оба поляризатора, составит:

$$I = \frac{1}{2} I_{есм} \cos^2 \alpha. \quad (17.9.5)$$

Видим, что если плоскости пропускания поляризаторов взаимно перпендикулярны, то свет через рассматриваемую систему не проходит.

### 17.10. Поляризация при отражении и преломлении

Для получения линейно поляризованного света из естественного света часто используется явление поляризации света при прохождении границы раздела двух оптически прозрачных диэлектриков.

Опыт и расчёты показывают, что при падении естественного света на границу раздела двух оптически прозрачных диэлектриков отражённый и преломлённый лучи оказываются частично поляризованными. При этом степень поляризации обоих лучей зависит от угла падения. Если обозначить через  $i_{Бр}$  угол падения луча света, при котором выполняется условие, называемое законом Брюстера (Брюстер Дэвид, шотл., 1781–1868):

$$\operatorname{tg} i_{Бр} = n_{21}, \quad (17.10.1)$$

то отражённый луч оказывается полностью линейно поляризованным с плоскостью поляризации, перпендикулярной плоскости падения луча (обозначено точками на рисунке 17.10.1).

Преломлённый луч всегда остаётся частично поляризованным, и в нём преобладает свет с плоскостью поляризации параллельной плоскости падения луча (обозначено штрихами на рисунке 17.10.1). При выполнении условия (17.10.1) преломлённый луч имеет наибольшую степень поляризации. Кроме того, что при падении под углом Брюстера преломлённый и отражённый лучи взаимно перпендикулярны. В этом легко убедиться, если учесть, что по закону Снеллиуса  $n_{21} = \sin i_{Бр} / \sin r$ , так что  $\cos i_{Бр} = \sin r = \cos(\pi/2 - r)$ , или  $i_{Бр} + r = \pi/2$ . Сравнивая два равенства  $i_{Бр} + r = \pi/2$  и  $i_{Бр} + x = \pi/2$ , находим  $x = r$ , откуда следует  $y = i_{Бр}$ , или  $x + y = \pi/2$ , как и сказано выше.

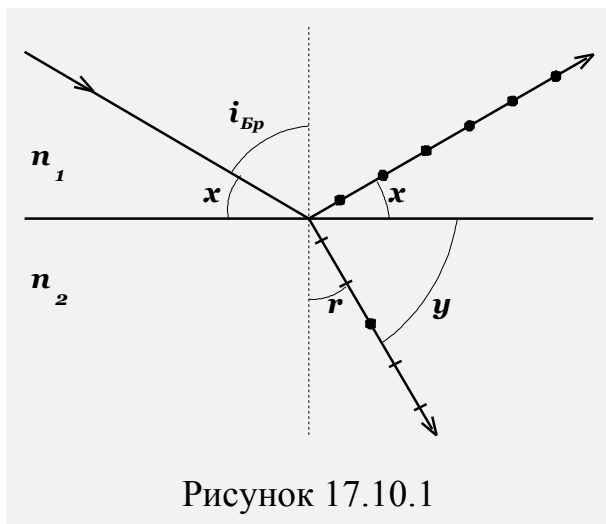


Рисунок 17.10.1

Для повышения степени поляризации преломлённого света используют несколько плоскопараллельных пластин (стопу, например из стекла), расположенных параллельно друг другу и под углом Брюстера к падающему свету. При достаточно большом количестве пластин в стопе прошедший через неё свет будет практически плоско поляризованным. Интенсивность све-

та, прошедшего через стопу, будет зависеть от поглощения света в материале, из которого сделаны пластинки стопы и, при отсутствии поглощения, составит половину от интенсивности падающего естественного света.

### 17.11. Поляризация при двойном лучепреломлении

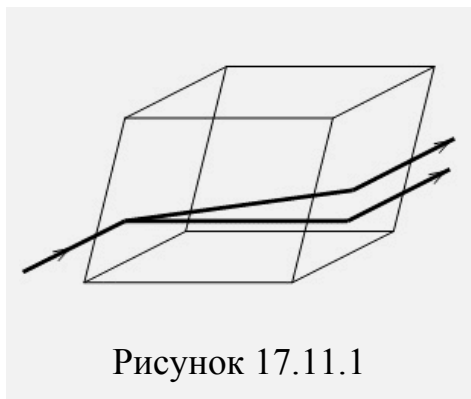


Рисунок 17.11.1

При прохождении света через прозрачные анизотропные кристаллические вещества со структурой кристаллической решётки, отличающейся от кубической, наблюдается явление **двойного лучепреломления**, которое проявляется в том, что падающий на такой кристалл луч света разделяется на два преломлённых луча (рисунок

17.11.1). Впервые это явление наблюдал в 1670 г. Бартолин (Бартолин Расмус, дат., 1625–1698) на кристалле исландского шпата (разновидность углекислого кальция  $CaCO_3$ , с кристаллической решёткой, относящейся к гексагональной системе). Изучение распространяющихся в кристалле преломлённых лучей показало, что они являются линейно поляризованными, причём плоскости поляризации этих лучей не совпадают (взаимно перпендикулярны). Один из этих лучей подчиняется обычным законам геометрической оптики (в частности, закону преломления Снеллиуса), называется **обыкновенным** лучом и обозначается буквой *o* (рисунок 17.11.2). Вторым луч этим законам не подчиняется (например, при нормальном падении на кристалл отклоняется от нормали), называется **необыкновенным** лучом и обозначается буквой *e*. Необыкновенный луч, как правило, не лежит в

плоскости падения. Отметим, что деление лучей на обыкновенный и необыкновенный имеет смысл только при их распространении в *кристалле*. После выхода этих лучей из кристалла в анизотропную среду (например, воздух) эти лучи, с точки зрения геометрической оптики, ничем, кроме поляризации, не отличаются.

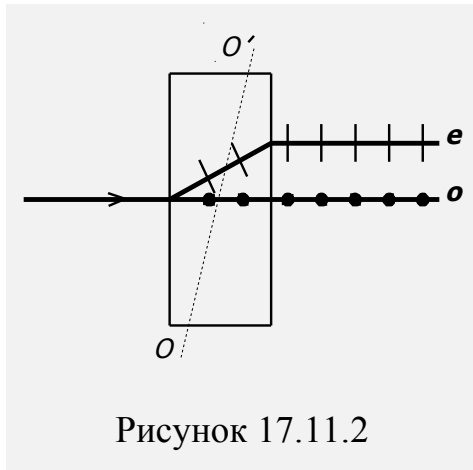


Рисунок 17.11.2

Для пояснения сущности и причин возникновения двойного лучепреломления необходимо ввести дополнительные понятия, связанные с оптическими свойствами кристаллов.

Оказывается, что в анизотропных кристаллах имеется по крайней мере одно направление, при распространении вдоль которого свет **не испытывает** двойного лучепреломления. Такое направление (задаваемое прямой линией  $OO'$ ) называется **оптической осью** рассматриваемого кристалла. Отметим, что оптическая ось – это не одна отдельная прямая линия, а любая прямая, параллельная направлению (заданному указанной прямой линией), вдоль которого луч света не испытывает двойного лучепреломления. В зависимости от типа симметрии кристалла осей может быть либо одна (исландский шпат, кварц, турмалин и др.), либо две (гипс, слюда, топаз, ромбическая сера и др.). Кристаллы с одной оптической осью называются **одноосными**, а с двумя оптическими осями – **двуосными**. Мы ограничимся рассмотрением лишь одноосных кристаллов.

Плоскость, проходящая через оптическую ось, называется *главной плоскостью*, или **главным сечением**, кристалла. Как правило, используют главное сечение, проходящее и через световой луч.

Подробное изучение обыкновенного и необыкновенного лучей показало, что плоскость поляризации обыкновенного луча перпендикулярна главному сечению, плоскость поляризации необыкновенного луча параллельна главному сечению кристалла (рисунок 17.11.2). В некоторых кристаллах наблюдается явление *дихроизма* – разное поглощение обыкновенного и необыкновенного лучей (в турмалине обыкновенный луч очень сильно поглощается, по сравнению с необыкновенным лучом). Дихроизм кри-

сталлов используется для создания поляризаторов, создающих линейно поляризованный свет из естественного света и называемых также *поляроидами*.

Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов. Более конкретно, взаимное расположение светового вектора волны и оптической оси определяет диэлектрическую проницаемость материала для данной волны и, следовательно, её фазовую скорость. В одноосных кристаллах диэлектрические проницаемости для направлений электрического поля параллельно оптической оси ( $\epsilon_{\parallel}$ ) и перпендикулярно оптической оси ( $\epsilon_{\perp}$ ) различны. При других направлениях светового вектора по отношению к оптической оси кристалла диэлектрическая проницаемость принимает промежуточные значения между указанными  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$ . Различаются, следовательно, и показатели преломления световых волн, так как  $n = \sqrt{\epsilon}$ .

Если в кристалле распространяется световая волна с плоскостью поляризации, перпендикулярной главному сечению кристалла, то световой вектор такой волны будет всегда перпендикулярен оптической оси при любом направлении распространения этой волны. Следовательно, диэлектрическая проницаемость такой волны будет постоянной и равной  $\epsilon_{\perp}$  и не зависит показателя преломления этой волны от направления её распространения. Следовательно, это обыкновенная волна  $o$ , а её показатель преломления равен  $n_o = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$ . Именно поэтому фазовая скорость обыкновенной волны  $v_o = c / n_o$  не зависит от направления её распространения.

Для световой волны, плоскость поляризации которой параллельна главному сечению кристалла, всё выглядит несколько иначе. Угол между световым вектором этой волны и оптической осью кристалла  $\alpha$  меняется в зависимости от направления распространения этой волны. Меняется при этом и показатель преломления кристалла. Изменения диэлектрической проницаемости и показателя преломления такой волны будет осуществляться в промежутке от  $\epsilon_{\perp}$  и  $n_o = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$  (луч параллелен оптической оси,  $\alpha = \pi/2$ ) до  $\epsilon_{\parallel}$  и  $n_e = \sqrt{\epsilon_{\parallel}}$  (луч перпендикулярен оптической оси,  $\alpha = 0$ ), соответственно. Видим, что эта волна не подчиняется законам обычной геометрической оптики (для изотропных материалов), следовательно, это и есть необыкновенная волна  $e$ .

Если представить себе точечный источник света в некоторой внутренней точке одноосного кристалла, то волновые поверхности от этого источника для волн  $o$  и  $e$  будут выглядеть так, как это показано на рисунке 17.11.3. На этом рисунке указаны три направления распространения волн. Для обыкновенной волны фазовая скорость одинакова, независимо от направления, поэтому её фазовая поверхность является сферой.

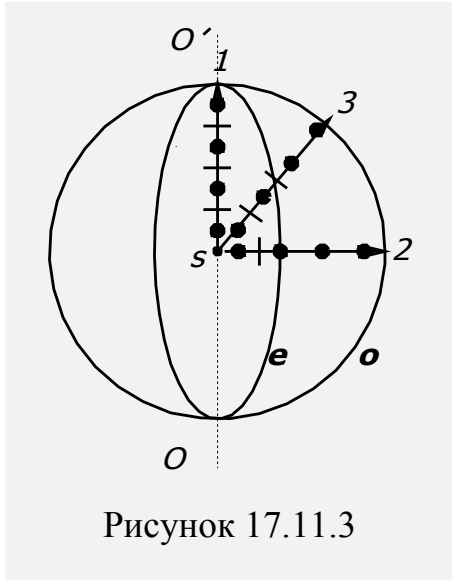


Рисунок 17.11.3

Для необыкновенной волны фазовая скорость зависит от направления её движения. В направлении 1 скорость необыкновенной волны совпадает со скоростью обыкновенной, поскольку, как уже отмечено выше, в этом случае световой вектор перпендикулярен оптической оси и её фазовая скорость в данном направлении совпадает с  $v_o$ . В направлении 2 световой вектор необыкновенной волны параллелен оптической оси и её фазовая скорость в данном направлении равна  $v_e = c/n_e < v_o$ , поскольку выбрано  $\epsilon_{\parallel} > \epsilon_{\perp}$ ,

так что  $n_e = \sqrt{\epsilon_{\parallel}} > n_o$ . В направлении 3 скорость необыкновенного луча будет иметь промежуточное значение между скоростями  $v_e$  и  $v_o$ . Можно показать, что волновая поверхность для необыкновенной волны будет эллипсоидом вращения.

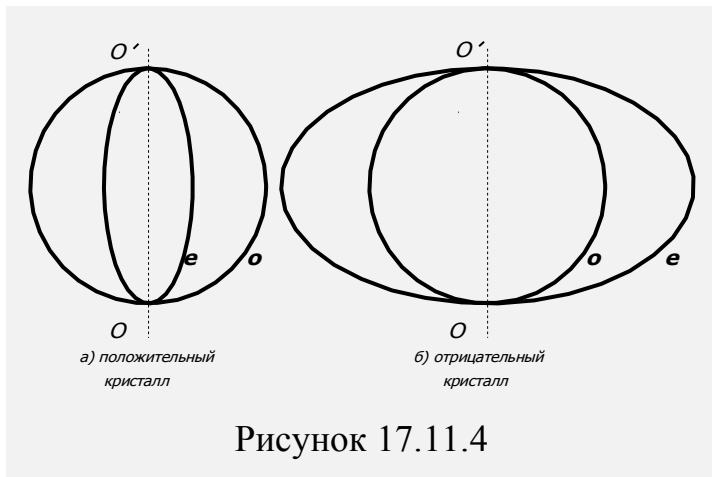


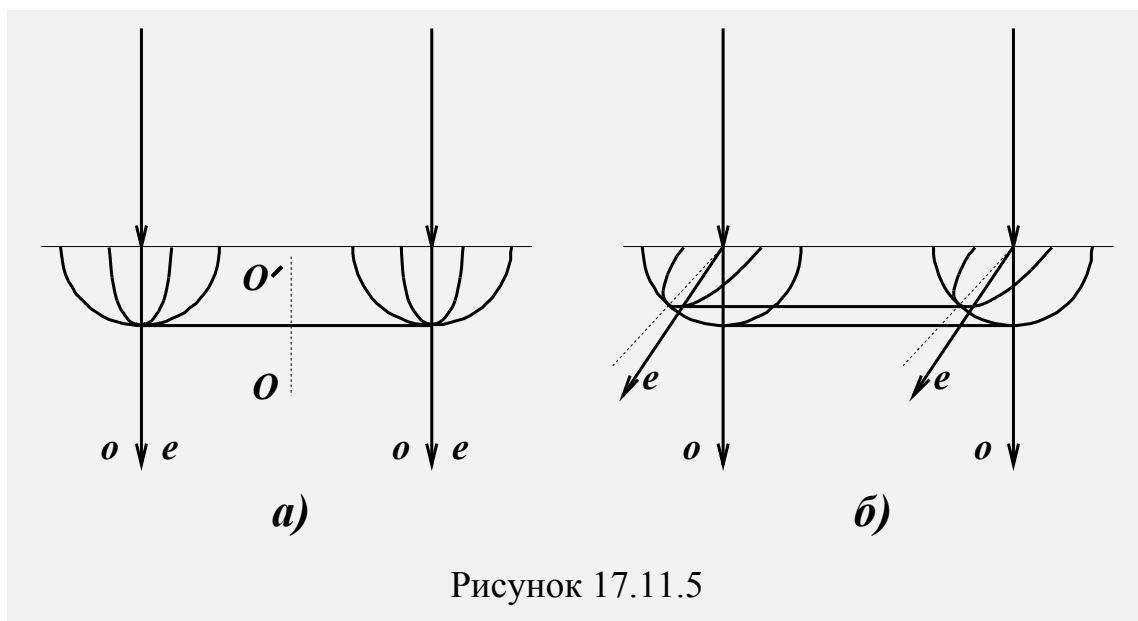
Рисунок 17.11.4

В зависимости от соотношения между скоростями  $v_e$  и  $v_o$  (или  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$ ) различают кристаллы «положительные» ( $v_e < v_o$ ,  $\epsilon_{\parallel} > \epsilon_{\perp}$ ) и «отрицательные» ( $v_e > v_o$ ,  $\epsilon_{\parallel} < \epsilon_{\perp}$ ) – рисунок 17.11.4. Такие названия возникли из-за некоторых ассоциаций эллипсоида вра-

щения со знаками «плюс» и «минус».

С помощью принципа Гюйгенса и волновых поверхностей для обыкновенных и необыкновенных лучей можно определить ход лучей в конкретном кристалле. Пусть, например, имеется «положительный» кристалл,

на поверхность которого нормально падает световая волна. Ход обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле зависит от расположения оптической оси этого кристалла, который показан на рисунке 17.11.5, *а*, и рисунке 17.11.5, *б*, для двух вариантов её расположения. В первом случае оптическая ось расположена в кристалле перпендикулярно к его грани, на которую нормально падает свет. В этом случае обыкновенный и необыкновенный лучи совпадают, поскольку свет движется вдоль оптической оси (рисунок 17.11.5, *а*). Во втором случае оптическая ось расположена под некоторым (непрямым) углом к грани кристалла, на которую нормально падает свет. Здесь обыкновенный и необыкновенный лучи уже не совпадают, поскольку свет движется под углом к оптической оси (рисунок 17.11.5, *б*).



## 17.12. Вращение плоскости поляризации

Из многочисленных интереснейших физических явлений, наблюдаемых с поляризованным светом, рассмотрим ещё одно, называемое **вращением плоскости поляризации**. Сущность этого явления состоит в том, что некоторые вещества, называемые **оптически активными**, вызывают поворот плоскости поляризации проходящего через них линейно поляризованного света. К оптически активным веществам относятся некоторые кристаллы (*кварц, киноварь*), чистые жидкости (*никотин, скипидар*) и растворы оптически активных веществ в некоторых неактивных жидкостях (*водные растворы сахара, винной кислоты*).

В оптически активных кристаллах и чистых жидкостях угол поворота  $\varphi$  плоскости поляризации пропорционален пути  $l$ , пройденному светом в данном оптически активном веществе, то есть определяется выражением:

$$\varphi = \alpha \cdot l, \quad (17.12.1)$$

где коэффициент  $\alpha$ , различный для различных активных веществ, называется *постоянной вращения*. Постоянная вращения зависит от многих факторов, основными из которых являются температура оптически активного вещества и длина волны света.

В растворах оптически активных веществ угол поворота  $\varphi$  плоскости поляризации пропорционален пути  $l$ , пройденному светом в растворе оптически активного вещества, и концентрации оптически активного вещества, то есть определяется выражением:

$$\varphi = [\alpha] \cdot c \cdot l = [\alpha] \cdot D \cdot K \cdot l, \quad (17.12.2)$$

где величина  $[\alpha]$  называется *удельной постоянной вращения*,  $c$  – объёмно-массовая концентрация оптически активного вещества в растворе ( $\text{кг/м}^3$ ),  $D$  – плотность раствора,  $K$  – долевая концентрация по массе, то есть отношение массы оптически активного вещества к массе всего раствора. Значение удельной постоянной вращения  $[\alpha]$  зависит от вида активного вещества и растворителя, длины волны света и температуры.

В зависимости от направления поворота плоскости поляризации (если смотреть навстречу лучу) оптически активные вещества делят следующим образом. Оптически активные вещества, осуществляющие поворот плоскости поляризации по часовой стрелке (вправо), называются *правовращающими* веществами, а в противном случае – *левовращающими* веществами.

Явление вращения плоскости поляризации используется для измерения концентрации оптически активных веществ. На использовании этого явления, в частности, устроен *сахариметр* – прибор, предназначенный для измерения концентрации сахара в его растворе.

Фарадей (Фарадей Майкл, англ., 1791–1867) обнаружил, что при помещении оптически неактивных веществ в продольное (в отношении светового луча) магнитное поле они становятся оптически активными (*эффект Фарадея*). Оказалось, что угол поворота плоскости поляризации пропорционален пути  $l$ , пройденному светом в веществе, помещённом в

продольное магнитное поле, и индукции магнитного поля  $B$ , то есть определяется выражением:

$$\varphi = V \cdot l \cdot B, \quad (17.12.3)$$

где коэффициент  $V$  называется *постоянной Вердэ*. Постоянная Вердэ зависит от природы вещества, его состояния, температуры и длины волны.

### 17.13. Дисперсия света

*Дисперсией* света обозначают явления, обусловленные зависимостью фазовой скорости световых волн от их частоты, то есть зависимость вида:

$$v = f(\nu). \quad (17.13.1)$$

Поскольку фазовая скорость волн определяется соотношением  $v = c / n$ , где  $c$  – фундаментальная физическая постоянная, из соотношения (17.13.1) приходим к формуле:

$$n = c / f(\nu) = \varphi(\nu). \quad (17.13.2)$$

Так как длина волны  $\lambda$  и частота  $\nu$  также связаны между собой, а именно:  $\lambda = v \cdot T = v / \nu = (c / n) / \nu = (c / \nu) / n = \lambda_0 / n$ ,  $\lambda_0 = c / \nu \Rightarrow \nu = c / \lambda_0$ , то под дисперсией можно понимать зависимость  $v = g(\lambda_0)$ , то есть зависимость фазовой скорости (или показателя преломления) световых волн от длины этих волн в вакууме  $\lambda_0$ .

В зависимости от ситуации будем использовать оба варианта определения дисперсии.

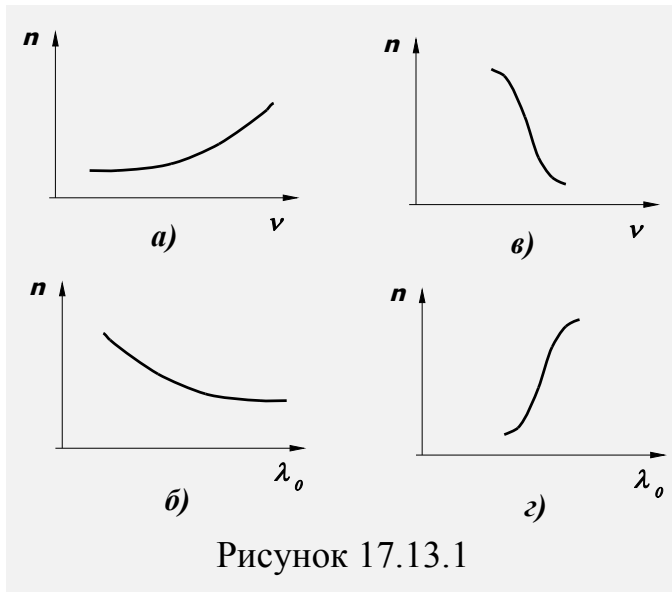
Опыт показывает, что показатель преломления оптически прозрачных веществ вдали от областей сильного поглощения при увеличении частоты световых волн увеличивается (рисунок 17.13.1, а). При этом  $dn / d\nu > 0$ , и такой вид дисперсии называют **нормальной дисперсией**.

Если пользоваться длиной волны  $\lambda_0$ , то при нормальной дисперсии показатель преломления оптически прозрачных веществ убывает при увеличении длины волны, то есть здесь  $dn / d\lambda_0 < 0$  (рисунок 17.13.1, б).

В областях сильного поглощения показатель преломления оптически прозрачных веществ при увеличении частоты световых волн уменьшается (рисунок 17.13.1, в). При этом  $dn / d\nu < 0$ , и такой вид дисперсии называют **аномальной дисперсией**. И наоборот, при увеличении длины волны показатель преломления возрастает, то есть здесь  $dn / d\lambda_0 > 0$  (рисунок 17.13.1, г).



Элементарная классическая теория дисперсии света основана на взаимодействии электрического поля световой волны с заряженными частицами, из которых состоят атомы и молекулы веществ.



Для простоты оптически прозрачную среду будем считать однородной и изотропной средой, а электрическое поле световой (электромагнитной) волны будем полагать слабым. В этом случае, как это показывалось в электродинамике, диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  есть скаляр, определяемый выражением:

$$\varepsilon = 1 + \chi_e, \quad (17.13.4)$$

где  $\chi_e$  – диэлектрическая восприимчивость, связывающая векторы поляризованности и напряжённости электрического поля:  $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$ , так что можем записать:

$$\varepsilon = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}. \quad (17.13.5)$$

В электрическом поле световой волны существенной оказывается только электронная поляризация, так как ориентация молекул на оптических частотах не успевает измениться. Наиболее значительно взаимодействуют с электрическим полем световой волны только внешние (оптические) электроны. Опять же, для простоты будем считать, что в атоме (молекуле) один внешний электрон. Если обозначить смещение электрона относительно положения равновесия под действием электрического поля световой волны  $x$ , то наведённый дипольный момент у атома с одним электроном равен  $p_e = ex$ . Следовательно, поляризованность вещества будет определяться выражением  $P = n_0 ex$ , где  $n_0$  – концентрация атомов вещества. Таким образом, для диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  имеем:

$$\varepsilon = 1 + \frac{n_0 ex}{\varepsilon_0 E}, \quad (17.13.6)$$

а для показателя преломления, связанного с диэлектрической проницаемостью формулой  $n = \sqrt{\varepsilon}$  :

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e x}{\varepsilon_0 E} . \quad (17.13.7)$$

Рассмотрим монохроматическую световую (электромагнитную) волну, напряжённость электрического поля которой в точке наблюдения меняется по закону:

$$E = E_m \cos \omega t . \quad (17.13.8)$$

Уравнение движения (вынужденных колебаний) внешнего электрона массой  $m$  в отсутствии сил сопротивления имеет вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{e E_m}{m} \cos \omega t . \quad (17.13.9)$$

Легко проверить, что частное решение (17.13.9) имеет вид  $x = A(\omega) \cos \omega t$ , а амплитуда вынужденных колебаний этого электрона определяется выражением (14.7.8), то есть:

$$A(\omega) = \frac{e E_m}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} . \quad (17.13.10)$$

Следовательно, для показателя преломления вещества имеем:

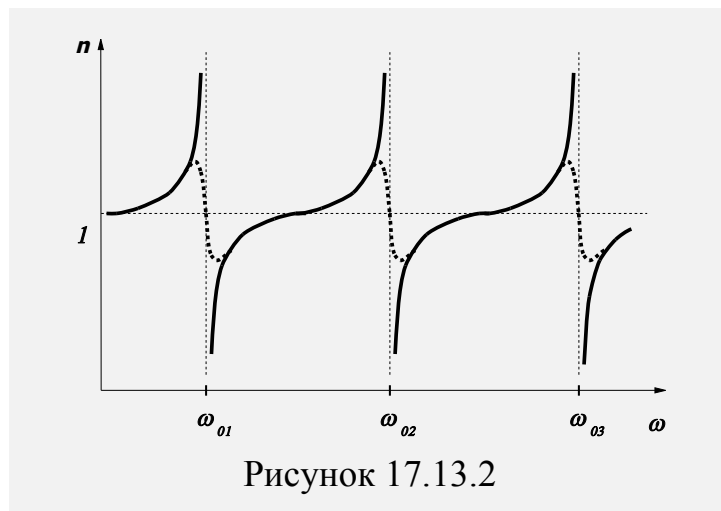
$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} . \quad (17.13.11)$$

Если внешний электрон в атоме не один, то легко обобщить полученный результат:

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \sum_i \frac{1}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)} . \quad (17.13.12)$$

Графически вид  $n = f(\omega)$  показан на рисунке 17.13.2. Сплошные линии соответствуют случаю без затухания. Учёт затухания приведёт к тому, что разрывы в точках совпадения частоты световой волны с собственными частотами колебаний электронов будут отсутствовать (пунктирные линии на рисунке 17.13.2). Видим, что при  $\omega < \omega_{0i}$  и  $\omega > \omega_{0i}$  показатель преломления увеличивается с ростом частоты, что соответствует

нормальной дисперсии. И, наоборот, вблизи собственных частот показатель преломления уменьшается с ростом частоты, что соответствует аномальной дисперсии.



Несмотря на существенные упрощения, сделанные в ходе решения рассматриваемой задачи, полученное решение качественно очень неплохо объясняет явление дисперсии света в веществе.

## 17.14. Поглощение света

При прохождении света через вещество часть энергии этой волны теряется за счёт перехода этой энергии на возбуждение атомов и увеличение интенсивности их движения, то есть переходит во внутреннюю энергию вещества, энергию вторичного излучения, других направлений и спектрального состава. Потеря энергии световой волны при её прохождении через вещество называется **поглощением** света.

Обсудим вопрос о закономерностях при поглощении света. Пусть плоская монохроматическая волна распространяется в однородной изотропной оптически прозрачной среде вдоль оси  $x$ . Если в некоторой точке с координатой  $x$  интенсивность света обозначить  $I(x)$  и мысленно выделить элементарный слой толщиной  $dx$  в направлении движения волны, то при прохождении через этот слой интенсивность света уменьшится на величину  $dI$ . Естественно предположить, что уменьшение интенсивности света пропорционально его интенсивности и толщине слоя, то есть определяется выражением:

$$dI = -\alpha \cdot I \cdot dx, \quad \alpha > 0, \quad (17.14.1)$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности, называемый **коэффициентом поглощения** и измеряемый в  $\text{м}^{-1}$ .

Интегрируя (17.14.1), находим зависимость интенсивности света от координаты:

$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha \cdot x}, \quad (17.14.2)$$

где введено обозначение при условии  $I(x)|_{x=0} = I_0$ .

Выражение (17.14.2) хорошо подтверждается опытом и называется **законом Бугёра – Ламберта – Бёра** (Пьер Бугёр (иногда – Бугё), фр., 1698–1758; Иоганн Генрих Ламберт, нем., 1728–1777; Август Бер, нем., 1825–1863).

Коэффициент поглощения  $\alpha$  зависит от вида вещества, его агрегатного состояния и от длины волны световой волны (или от частоты). Зависимость коэффициента поглощения  $\alpha$  от длины волны световой волны (или от частоты) называют **спектром поглощения вещества**. Наименьшими коэффициентами поглощения обладают, как правило, вещества в газообразном атомарном состоянии, для которых практически на всех длинах волн (частотах) коэффициент поглощения составляет очень незначительную величину, за исключением очень узких областей (измеряемых в длинах волн) шириной порядка  $(10^{-12}–10^{-11})$  м вблизи резонансных длин волн (частот) колебаний электронов внутри атомов и коэффициент поглощения в которых резко увеличивается. Такие спектры поглощения называют **линейчатыми**. У молекулярных газов в спектре поглощения появляются более широкие **полосы поглощения** (порядка  $(10^{-10}–10^{-7})$  м), обусловленные поглощением света за счёт возбуждения колебательных степеней свободы в молекулах.

Коэффициенты поглощения оптически прозрачных диэлектриков невелики (порядка  $(10^{-1}–10^{-3}) \text{ м}^{-1}$ ) и имеют вид широких полос поглощения, обусловленных поглощением за счёт возбуждения межатомных связей этих веществ. Такие спектры называются **сплошными**.

Металлы практически **непрозрачны** для света (коэффициенты поглощения для них составляют величины порядка  $10^6 \text{ м}^{-1}$ ), что обусловлено наличием в металлах свободных электронов, которые под действием электрического поля световой волны возбуждают высокочастотные токи, приводящие к выделению джоулева тепла, и практически в приграничном слое электромагнитная волна исчезает.

## Глава 18. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

### 18.1. Равновесное тепловое излучение. Закон Кирхгофа

Все тела состоят из электрически нейтральных атомов и молекул, которые, в свою очередь, состоят из электрически заряженных частиц: положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов. Даже в состоянии термодинамического равновесия (ТДР) атомы и молекулы, и входящие в их состав электрически заряженные частицы, находятся в непрерывном хаотическом движении (тепловом движении), характер которого определяется агрегатным состоянием вещества. Опыт показывает, что, независимо от агрегатного состояния вещества, тепловое движение его атомов и молекул сопровождается излучением электромагнитных волн и энергии. Такое излучение называется тепловым излучением. Одновременно происходит поглощение электромагнитных волн, излучённых другими частями данного тела и другими телами.

Поясним указанные процессы более подробно. Отделим некоторую область пространства с расположенными в ней телами замкнутой адиабатической оболочкой. При различии температур находящихся в рассматриваемой области тел между ними начнут осуществляться различные процессы переноса, стремящиеся перевести систему в состояние ТДР. При отсутствии непосредственного контакта тел и теплопроводящей среды (например, в вакууме) тела обмениваются энергией только посредством теплового излучения (испускания и поглощения лучистой энергии). По истечении определенного промежутка времени между телами в области, ограниченной замкнутой оболочкой и заключённым внутри излучением, установится ТДР. Все тела внутри полости в состоянии ТДР будут иметь одинаковую температуру. Излучение в таких условиях называется **равновесным тепловым излучением** (РТИ), и ему приписывается температура, равная температуре находящихся с ним в ТДР окружающих тел и оболочки. Далее, если не оговорено противное, речь идёт о РТИ. Приписав РТИ температуру тел, с которыми оно находится в равновесии, необходимо распространить при этом законы равновесной термодинамики на РТИ. А именно: для РТИ определяется и рассчитывается внутренняя энергия, давление, энтропия и другие термодинамические характеристики. РТИ должно быть однородным, то есть плотность энергии этого излучения одинакова во всех точках пространства, где оно сосредоточено. РТИ должно быть изотропным и неполяризованным.

Отметим, что только тепловое излучение может быть равновесным. Все остальные известные виды излучения (их обобщённое название – люминесценция: хемилюминесценция, электролюминесценция и др.) являются **неравновесными излучениями**, то есть не могут осуществляться в состоянии ТДР.

**Количественные характеристики теплового излучения.** Рассмотрим в указанной выше области пространства, ограниченной адиабатической оболочкой, некоторое тело, находящееся в состоянии ТДР (с другими телами и РТИ). Энергия РТИ этого тела  $dE$  за промежуток времени  $dt$  пропорциональна  $dt$ , то есть  $dE = \Phi_e dt$ , где  $\Phi_e$  – поток энергии РТИ (мощность рассматриваемого РТИ). Поток энергии РТИ элемента поверхности  $dS$  тела во всём диапазоне частот пропорциональна  $dS$ , то есть  $d\Phi_e = R dS$ , где  $R$  – поверхностная плотность потока энергии РТИ во всех направлениях и во всём диапазоне частот (**энергетическая светимость** РТИ тела), измеряемая в СИ в  $\text{Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^2) = \text{Вт}/\text{м}^2$ . Энергетическая светимость тела зависит от его температуры. По заданной энергетической светимости  $R$  находим поток энергии РТИ  $\Phi_e$  всей поверхности рассматриваемого тела во всём диапазоне частот:  $\Phi_e = \int_s R dS$ . В частности, если поверхностная плотность потока энергии РТИ  $R$  постоянна, то  $\Phi_e = R \int_s dS = RS$ , так что в данном случае имеем:  $R = \Phi_e / S$ .

Важно знать не только поток энергии РТИ рассматриваемого тела во всём диапазоне частот, но и как распределена мощность излучения по частотам – спектр излучения. Поверхностная плотность потока энергии  $dG(\nu)$  РТИ в диапазоне частот  $(\nu, \nu + d\nu)$  будет пропорциональна ширине этого частотного участка, то есть определяется выражением:

$$dG(\nu) = r_{\nu,T} d\nu, \quad (18.1.1)$$

где введена новая величина  $r_{\nu,T}$ , называемая **спектральной плотностью энергетической светимости** РТИ изучаемого тела (называемая также **испускательной способностью** тела). В СИ испускательная способность измеряется в  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}) = \text{Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}) = \text{Дж}/\text{м}^2$ .

Спектральная плотность энергетической светимости  $r_{\nu,T}$  зависит от свойств тела (свойств вещества), частоты излучения и температуры тела.

Частота и температура являются аргументами функции  $r_{\nu,T}$ , и следовало бы писать  $r(\nu,T)$  (как обычно делают для обозначения аргументов функций). Однако сложилась историческая традиция обозначения аргументов у спектральной плотности энергетической светимости в виде индексов, и мы будем её придерживаться, то есть будем писать  $r_{\nu,T}$ , имея в виду, что  $r_{\nu,T} \equiv r(\nu,T)$ .

Очевидно, что между энергетической светимостью и испускательной способностью тела имеет место связь:

$$\int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = R, \quad (18.1.2)$$

объясняющая название величины  $r_{\nu,T}$  спектральной плотностью энергетической светимости РТИ.

Отметим, что не следует писать  $dR = r_{\nu,T} d\nu$ , так как энергетическая светимость  $R$  от частоты излучения не зависит и её дифференциал равен нулю. Именно по этой причине в (18.1.1) введена новая функция  $G(\nu) = \int_0^{\nu} r_{\nu',T} d\nu'$ , имеющая смысл поверхностной плотности потока энергии РТИ, излучаемого телом в диапазоне частот  $\nu' \in (0, \nu)$ . Используя известную математическую теорему о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом, находим, что  $dG(\nu)/d\nu = r_{\nu',T}|_{\nu'=\nu} = r_{\nu,T} \Rightarrow dG(\nu) = (dG(\nu)/d\nu) d\nu = r_{\nu,T} d\nu$ . Видим также, что энергетическая светимость тела связана с функцией  $G(\nu)$  соотношением  $R = \lim_{\nu \rightarrow \infty} G(\nu)$ .

Часто удобнее пользоваться не частотной зависимостью различных физических величин, а их зависимости от длин волн. Сделать требуемый переход можно, учитывая, что диапазону частот  $(\nu, \nu + d\nu)$  соответствует диапазон длин волн  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$  и связь длины волны излучения с его частотой:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow d\nu = \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda. \quad (18.1.3)$$

Исходя из соотношения, аналогичного (18.1.2), имеем:

$$dG(\lambda) = r_{\lambda,T} d\lambda. \quad (18.1.4)$$

Поскольку речь идёт об энергиях одного и того же теплового излучения и так как испускательные способности по определению величины неотрицательные, то  $|r_{\lambda,T}d\lambda| = |r_{\nu,T}d\nu| \Rightarrow r_{\lambda,T} = r_{\nu,T} |d\nu / d\lambda|$ , то есть:

$$r_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T} \Big|_{\nu=c/\lambda}. \quad (18.1.5)$$

Выражение (18.1.5) означает, что для получения из испускательной способности  $r_{\nu,T}$  величины  $r_{\lambda,T}$  нужно в испускательной способности  $r_{\nu,T}$  заменить аргумент  $\nu$  на  $c/\lambda$  и умножить полученную величину на  $c/\lambda^2$ .

Кроме способности излучать энергию, тела характеризуются способностью её поглощать. **Поглощательной способностью**  $a(\nu)$  тела на частоте  $\nu$  (или  $a(\lambda)$  на длине волны  $\lambda$ ) называется отношение потока энергии  $\delta\Phi^{ногл}(\nu)$ , поглощаемой элементом поверхности в диапазоне частот  $(\nu, \nu + \delta\nu)$  (или в диапазоне длин волн  $(\lambda, \lambda + \delta\lambda)$ ), к потоку энергии  $\delta\Phi^{пад}(\nu)$ , падающего на рассматриваемый элемент поверхности энергии в диапазоне частот  $(\nu, \nu + \delta\nu)$  (или в диапазоне длин волн  $(\lambda, \lambda + \delta\lambda)$ ), то есть:

$$a(\nu) = \frac{\delta\Phi^{ногл}(\nu)}{\delta\Phi^{пад}(\nu)}; \quad a(\lambda) = \frac{\delta\Phi^{ногл}(\lambda)}{\delta\Phi^{пад}(\lambda)}. \quad (18.1.6)$$

Из определения следует, что поглощательная способность тел является безразмерной величиной, а также то, что  $a(\nu) \leq 1$  ( $a(\lambda) \leq 1$ ). Значение поглощательной способности  $a(\nu)$  зависит от многих факторов: природы тела, его агрегатного состояния, температуры и частоты.

Если поглощательная способность тела равна единице на всех частотах, то есть  $a(\nu) = 1$ ,  $\nu \in (0, +\infty)$ , то это тело называется **абсолютно чёрным**. Из определения следует, что абсолютно чёрное тело (АЧТ) поглощает всё падающее на него излучение во всём диапазоне частот. Характеристики АЧТ отмечают звёздочкой, например, испускательную способность АЧТ обозначают  $r_{\nu,T}^*$ .

**Серым** называют тело, поглощательная способность которого  $a^{сер} = const < 1$  не зависит от частоты, направления распространения и поляризации падающего излучения.

Обсудим энергетические характеристики непосредственно РТИ. Как и всякое электромагнитное излучение, РТИ имеет энергию, определяемую



температурой рассматриваемой равновесной системы. Объёмная плотность энергии РТИ  $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu_0\mu H^2$  связана с плотностью потока энергии РТИ  $\Phi_e$  выражением  $\Phi_e = wc$  (отметим, что  $\Phi_e$  можно выразить через вектор Умова – Пойнтинга  $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = w\vec{c} \Rightarrow |\vec{E} \times \vec{H}| = \Phi_e$ ). Распределение энергии РТИ по частотам характеризуется спектральной плотностью объёмной плотности  $\rho(\nu, T)$ , которая связана с объёмной плотностью энергии РТИ выражением:

$$w = \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu. \quad (18.1.7)$$

Если ввести спектральную плотность (поверхностной) плотности потока энергии  $\psi_{\nu, T}$  РТИ выражением, подобным (18.1.1), то есть  $\Psi(\nu) = \int_0^{\nu} \psi_{\nu', T} d\nu'$ , где  $\Psi(\nu)$  – аналог функции  $G(\nu)$  в (18.1.4), то будут иметь место равенства:  $\psi_{\nu, T} = \rho(\nu, T)c$ ,  $d\Psi = \psi_{\nu, T} d\nu = c\rho(\nu, T) d\nu$  и  $\Phi_e = \int_0^{\infty} \psi_{\nu, T} d\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Psi(\nu)$ .

Рассмотрим некоторую элементарную площадку и выберем сферическую систему координат, причём ось  $z$  направим вдоль нормали к рассматриваемому участку поверхности. Доля плотности потока изотропного РТИ в пределах телесного угла  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  в заданном направлении равна  $c\rho(\nu, T)(d\Omega / 4\pi)$  ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) – угол выбранного направления с осью  $z$ ,  $4\pi$  – суммарный телесный угол, учитывающий все направления. При угле  $\theta$  между заданным направлением с осью  $z$  составляющая на ось  $z$  плотности потока изотропного равновесного излучения в пределах телесного угла  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  в рассматриваемом направлении равна  $[c\rho(\nu, T)(d\Omega / 4\pi)] \cdot \cos\theta$ . Для спектральной плотности (поверхностной) плотности потока РТИ  $\psi_{\nu, T}$ , падающего на рассматриваемый элемент поверхности, после интегрирования по всем направлениям получим:

$$\begin{aligned} \psi_{\nu, T} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{\rho(\nu, T)}{4\pi} c \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta = 2\pi \frac{c \cdot \rho(\nu, T)}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot d(\sin\theta) = \\ &= \frac{c \cdot \rho(\nu, T)}{2} \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{c \cdot \rho(\nu, T)}{4}. \end{aligned} \quad (18.1.8)$$

Из того факта, что РТИ обеспечивает наличие ТДР с различными по составу и свойствам телами, находящимися в адиабатической оболочке, следует, что величина  $\psi_{\nu,T}$  должна быть универсальной функцией частоты и температуры (или длины волны и температуры).

В рассматриваемом спектральном диапазоне на элементе поверхности  $dS$  некоторого тела поглощается часть падающего потока энергии РТИ  $a(\nu) \cdot \psi_{\nu,T} \cdot dS dv$ , а оставшая часть  $(1 - a(\nu)) \cdot \psi_{\nu,T} \cdot dS dv$  – отражается. В этом же спектральном диапазоне к отражённой части РТИ от элемента поверхности  $dS$  добавляется поток энергии собственного РТИ тела  $r_{\nu,T} \cdot dS dv$ . В соответствии с принципом детального равновесия на любом элементе поверхности  $dS$  и в любом частотном диапазоне  $dv$  поток энергии, исходящий от этого элемента поверхности, равный  $[(1 - a(\nu)) \cdot \psi_{\nu,T} + r_{\nu,T}] \cdot dS dv$ , должен быть равен потоку энергии, падающему на рассматриваемый элемент  $dS$  в рассматриваемом частотном диапазоне –  $\psi_{\nu,T} \cdot dS dv = (c \cdot \rho(\nu, T) / 4) \cdot dS dv$ , то есть  $(1 - a(\nu)) \cdot \psi_{\nu,T} \cdot dS dv + r_{\nu,T} \cdot dS dv = \psi_{\nu,T} \cdot dS dv$ , находим:

$$\frac{r_{\nu,T}}{a(\nu)} = \psi_{\nu,T} = \frac{c \cdot \rho(\nu, T)}{4}. \quad (18.1.9)$$

Выражение (18.1.9) было установлено в 1860 г. Кирхгофом (Кирхгоф Густав Роберт, нем., 1824–1887), и поэтому называется **законом Кирхгофа** для равновесного теплового излучения.

Закон Кирхгофа (18.1.9) утверждает, что *отношение испускательной способности РТИ некоторого тела к поглощательной способности этого тела не зависит природы (состава, состояния формы и т. п.) этого тела и является универсальной функцией частоты и температуры РТИ, равной  $c \cdot \rho(\nu, T) / 4$ .*

Если одно из тел, находящихся в адиабатической оболочке, является АЧТ, то из закона Кирхгофа следует:

$$r_{\nu,T}^* = \psi_{\nu,T} = \frac{c \cdot \rho(\nu, T)}{4}, \quad (18.1.10)$$

то есть испускательная способность АЧТ является той самой универсальной функцией частоты и температуры.

Для серого тела находим:

$$r_{\nu,T}^{cep} = a^{cep} r_{\nu,T}^*; \quad R^{cep} = \int_0^{\infty} r_{\nu,T}^{cep} d\nu = a^{cep} \int_0^{\infty} r_{\nu,T}^* d\nu = a^{cep} R^*. \quad (18.1.11)$$

Для произвольного тела (не абсолютно чёрного) можно всегда подобрать некоторое постоянное число  $0 < \alpha < 1$ , такое что:

$$R = \alpha R^*. \quad (18.1.12)$$

Это число  $\alpha$  называется *интегральной степенью черноты* данного тела.

## 18.2. Формула Релея – Джинса

Исходя из закона Кирхгофа можно сделать вывод, что основной задачей исследования теплового излучения является получение аналитического выражения для испускательной способности АЧТ  $r_{\nu,T}^* = c \cdot \rho(\nu, T) / 4$ .

Моделью РТИ в замкнутой полости является набор элементарных осцилляторов, частоты колебаний которых изменяются в диапазоне  $\nu \in (0, \infty)$ . В замкнутой полости возникают стоячие волны, частоты которых принимают дискретные значения, поскольку на расстояниях между границами полости в некотором направлении должно укладываться целое число полуволин.

Действительно, рассмотрим ситуацию, когда плоские волны бегут в противоположных направлениях вдоль оси  $x$  (между стенками, расположенными перпендикулярно оси  $x$  на расстоянии  $L$  друг от друга), и запишем эти волны в комплексной форме (сдвиг по фазе для простоты примем равным нулю):

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 &= Ae^{i(\omega t - kx)} && \text{— в направлении оси } x; \\ \tilde{s}_2 &= Be^{i(\omega t + kx)} && \text{— в направлении, противоположном оси } x. \end{aligned} \quad (18.2.1)$$

Результатом наложения бегущих в противоположных направлениях волн будет:

$$\tilde{s} = \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)}. \quad (18.2.2)$$

Если считать, что на границах ( $x=0$  и  $x=L$ ) полости будут узлы ( $\tilde{s}(0) = \tilde{s}(L) = 0$ ), то получим:

$$\begin{aligned}\tilde{s}(0) = 0 &\Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B, \\ \tilde{s}(L) = 0 &\Rightarrow A(e^{ikL} - e^{-ikL}) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow k = n\pi / L, \quad n = 1, 2, \dots, \quad n \neq 0.\end{aligned}\tag{18.2.3}$$

Для расстояния между разрешёнными волновыми векторами находим:

$$\Delta k = \Delta n\pi / L, \quad n = 1, 2, \dots, \quad n \neq 0.\tag{18.2.4}$$

Если перейти к трём измерениям, выбрав три взаимно перпендикулярных направления, то на основе (18.2.4) можем записать:

$$\Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3 = \frac{\pi^3}{L_1 L_2 L_3} \Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3, \quad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, \dots.\tag{18.2.5}$$

В пространстве волновых векторов (с тремя взаимно перпендикулярными координатными осями  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$ ) каждой разрешённой стоячей волне с конкретными значениями величин волновых чисел (проекций  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  волнового вектора  $\vec{k}$  на координатные оси) соответствует точка  $M(k_1, k_2, k_3)$ . Минимальные расстояния до соседних разрешённых точек равны  $\pi / L_1$ ,  $\pi / L_2$  и  $\pi / L_3$ . Следовательно, минимальный объём в пространстве волновых векторов, соответствующий каждой стоячей волне с волновым вектором, имеющим указанные проекции, равен  $\pi^3 / V$ ,  $V = L_1 L_2 L_3$ .

Для числа  $\Delta N = \Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3$  стоячих волн, соответствующих объёму  $k$ -пространства  $\Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3$ , на основании (18.2.5) можно записать в виде:

$$\Delta N = \frac{V}{\pi^3} \Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3,\tag{18.2.6}$$

или, переходя к элементарным приращениям:

$$dN = \frac{V}{\pi^3} dk_1 dk_2 dk_3.\tag{18.2.7}$$

Множитель  $V / \pi^3$  в (18.2.7) играет роль плотности точек, соответствующих разрешённым стоячим волнам, в  $k$ -пространстве.

В  $k$ -пространстве стоячим волнам, волновые векторы которых имеют модули в диапазоне  $(k, k + dk)$  и положительные знаки проекций на координатные оси (см. (18.2.3)), соответствует  $1/8$  шарового слоя объёмом  $dV_k = 4\pi k^2 dk$ . Следовательно, на основе (18.2.7), а также с учётом связи между круговой частотой и модулем волнового вектора  $k = \omega / v$  и  $dk = (1/v)d\omega$ , имеем:

$$\begin{aligned} dN_k &= \frac{V}{\pi^3} \frac{1}{8} 4\pi k^2 dk; \\ dN_\omega &= V \frac{\omega^2}{2\pi^2 v^3} d\omega, \quad dn_\omega = \frac{\omega^2}{2\pi^2 v^3} d\omega, \quad n_\omega = N_\omega / V; \\ dn_v &= \frac{4\pi v^2}{v^3} dv, \quad \omega = 2\pi v. \end{aligned} \quad (18.2.8)$$

Если перейти к электромагнитным волнам, то нужно учесть, что вдоль каждого направления может распространяться две линейно поляризованные стоячие волны с одинаковыми проекциями волнового вектора с взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации, а также то, что в адиабатической оболочке с вакуумом в пространстве между телами скорость этих волн равна скорости света. Следовательно, для электромагнитных волн, вместо (18.2.8), имеем:

$$dn_v = \frac{8\pi v^2}{c^3} dv. \quad (18.2.9)$$

Если известна  $\langle \varepsilon_v \rangle$  – средняя энергия осциллятора с частотой  $v$ , то для спектральной  $\rho(v, T)$  плотности объёмной плотности РТИ  $\rho(v, T)$  получаем:

$$\rho(v, T) = \frac{8\pi v^2}{c^3} \langle \varepsilon_v \rangle, \quad (18.2.10)$$

а для испускательной способности РТИ АЧТ:

$$r_{v,T}^* = \frac{1}{4} c \rho(v, T) = \frac{2\pi v^2}{c^2} \langle \varepsilon_v \rangle. \quad (18.2.11)$$

В начале 20-го столетия Релёй (Джон Уильям Стретт (лорд Релёй), англ., 1842–1919) и Джинс (Джеймс Хопвуд Джинс, англ., 1877–1946) независимо друг от друга, основываясь на представлениях классической физики, предположили, что средняя энергия осциллятора  $\langle \varepsilon_v \rangle = kT$  (по

$\frac{1}{2}kT$  на электрическую и магнитную составляющую электромагнитной волны), получили для испускательной способности РТИ АЧТ выражение:

$$r_{\nu,T}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT, \quad (18.2.12)$$

которое называется **законом (формулой) Релея – Джинса** для РТИ.

Этот закон даёт достаточно хорошее согласие с опытом при малых частотах. Однако при увеличении частоты способность РТИ АЧТ  $r_{\nu,T}^*$  значительно превосходит экспериментально наблюдаемую. Но самым существенным недостатком формулы Релея – Джинса является то, что она приводит к противоречащему опыту результату для энергетической светимости АЧТ. Действительно, учитывая (18.1.2), для энергетической светимости АЧТ имеем расходящийся несобственный интеграл:

$$R^* = \int_0^{\infty} r_{\nu,T}^* d\nu = \frac{2\pi}{c^2} kT \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty. \quad (18.2.13)$$

Видим, что теория Релея – Джинса приводит к результату, означающему бесконечно большую поверхностную плотность потока энергии РТИ и невозможность теплового равновесия между веществом и излучением, что находится в вопиющем противоречии с опытом и, с физической точки зрения, абсурдно. Данная ситуация (монотонное возрастание испускательной способности с увеличением частоты – (18.2.12) и обусловленная этим расхождением энергетической светимости РТИ АЧТ – (18.2.13)) получила название **ультрафиолетовой катастрофы** (термин введён Эренфестом (Эренфест Пауль), нидерл., 1880–1933).

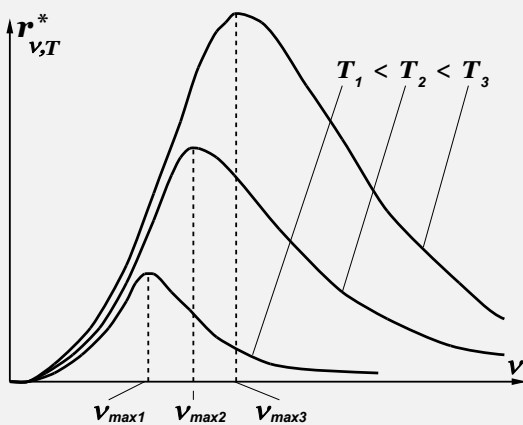


Рисунок 18.2.1

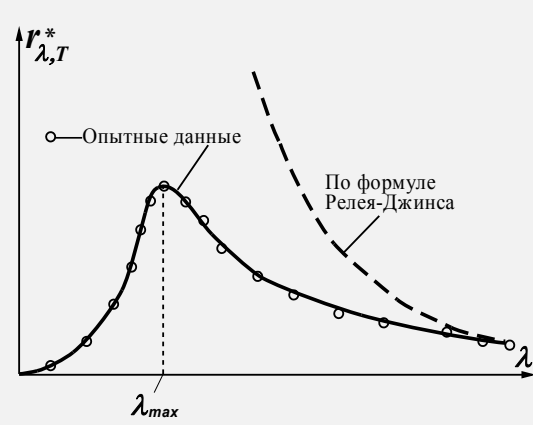


Рисунок 18.2.2

Отметим, что экспериментальные данные приводят к немонотонной зависимости испускательной способности РТИ АЧТ с двумя участками монотонности: возрастание  $r_{\nu,T}^*$  на участке частот  $(0, \nu_{\max})$  и убывание  $r_{\nu,T}^*$  на участке частот  $(\nu_{\max}, \infty)$  (рисунок 18.2.1). Аналогичная немонотонная зависимость испускательной способности РТИ АЧТ имеет место, если рассматривать её как функцию от длины волны  $r_{\lambda,T}^*$  (рисунок 18.2.2). При этом нужно помнить, что частота и длина волны излучения обратно пропорциональны друг другу.

### 18.3. Законы Стефана – Больцмана и Вина

Основываясь на законах термодинамики и классической электромагнитной теории Вин (Вин Вильгельм, нем., 1866–1938) в 1893 г. получил выражение, носящее его имя, уточняющее характер зависимости испускательной способности РТИ АЧТ от частоты и температуры. А именно, Вином было доказано, что испускательную способность РТИ АЧТ можно представить в виде произведения куба частоты и некоторой функции  $f(\nu / T)$  отношения частоты к температуре:

$$r_{\nu,T}^* = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right). \quad (18.3.1)$$

Конкретный вид  $r_{\nu,T}^*$  нельзя установить с использованием только электродинамики и феноменологической термодинамики. Здесь, однако, конкретный вид этой функции не потребуется.

Установленный Вином вид испускательной способности РТИ АЧТ позволяет получить выражение для энергетической способности АЧТ как функции температуры:

$$R^* = \int_0^\infty r_{\nu,T}^* d\nu = \int_0^\infty \overbrace{\nu^3}^{x^3 T^3} f\left(\overbrace{\nu/T}^x\right) \overbrace{d\nu}^{T dx} = T^4 \overbrace{\int_0^\infty x^3 f(x) dx}^\sigma = \sigma T^4 \quad (18.3.2)$$

и называется **законом Стефана – Больцмана** (Йозеф Стефан, австр., 1835–1893; Людвиг Больцман, австр., 1844–1906), который утверждает, что:

энергетическая светимость  $R^*$  РТИ АЧТ пропорциональна четвёртой степени его температуры.

Стефан пришёл к этому выводу в 1879 г. на основе анализа экспериментальных данных, а Больцман – в 1884 г. на основе электродинамики Максвелла при теоретическом изучении вопроса о давлении изотропного излучения. Константа  $\sigma$  в (18.3.2) называется постоянной Стефана – Больцмана и в СИ, как показывают опыт и теория, имеет значение  $\sigma = 5,6686 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\text{К}^4$ .

Из (18.3.1) вытекает также правило смещения – **первый закон Вина**, для доказательства которого удобнее перейти в (18.3.1) от частоты к длине волны исходя из соотношения (18.1.5):

$$r_{\lambda,T}^* = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T}^* \Big|_{\nu=c/\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} \left( \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \right) \Big|_{\nu=c/\lambda} = \frac{c^4}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = \frac{1}{\lambda^5} f_1(\lambda T), \quad (18.3.3)$$

или

$$r_{\lambda,T}^* = \frac{1}{\lambda^5} f_1(\lambda T) = T^5 \underbrace{\left( \frac{f_1(\lambda T)}{(\lambda T)^5} \right)}_{\varphi_1(\lambda T)} = T^5 \varphi_1(\lambda T). \quad (18.3.3a)$$

Учтём, что  $r_{\lambda,T}^*$  в (18.3.3) имеет экстремум на некоторой длине волны, которую мы обозначим  $\lambda_{\max}$ . Следовательно, приравнявая производную от  $r_{\lambda,T}^*$  по длине волны, получим:

$$\frac{d(T^5 \varphi_1(\lambda T))}{d\lambda} = T^5 \frac{d(\varphi_1(x))}{dx} \frac{dx}{d\lambda} = T^6 \frac{d(\varphi_1(x))}{dx} = 0. \quad (18.3.4)$$

Поскольку условие экстремума имеет место при любых возможных температурах, то из (18.3.4) следует:

$$\frac{d(\varphi_1(x))}{dx} = 0, \quad (18.3.5)$$

которое имеет корень  $x = x_{\max}$ . Это значит, что при любой температуре максимум функции  $r_{\lambda,T}^*$  имеет место при одном и том же значении аргумента  $x = x_{\max}$ , то есть при  $T\lambda_{\max} = \text{const}$ .

Следовательно, имеем правило смещения – **первый закон Вина**, которое гласит:

Длина волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующая максимальной испускательной способности АЧТ, обратно пропорциональна его температуре.



Для длины волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующей максимальной испускательной способности АЧТ, имеем:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}. \quad (18.3.6)$$

Опытные данные, подтверждаемые теоретическими расчётами, дают значение постоянной  $b$  в законе смещения Вина:  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

Из (18.3.3а) следует также, что:

$$r_{\lambda_{\max}, T}^* = T^5 \varphi_1(\underbrace{\lambda_{\max} T}_{const=b}) = CT^5, \quad (18.3.7)$$

то есть:

значение испускательной способности  $r_{\lambda, T}^*$  РТИ АЧТ при длине волны, соответствующей максимуму испускательной способности  $r_{\lambda_{\max}, T}^*$ , пропорционально пятой степени температуры АЧТ.

Эта закономерность называется **вторым законом Вина**. Опытные данные, подтверждаемые теоретическими расчётами, дают значение постоянной  $C$  во втором законе Вина:  $C = 1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$ .

#### 18.4. Формула Планка. Корпускулярные свойства света

Как показано выше, классическая физика приводит к ультрафиолетовой катастрофе – ситуации с неограниченным ростом поверхностной плотности потока энергии РТИ и невозможностью теплового равновесия между веществом и излучением, что находится в вопиющем противоречии с опытом.

Планк (Макс Карл Эрнст Людвиг Планк, нем., 1858–1947) в 1900 году предложил подобранную эмпирическим путём, а затем и теоретически обосновал, формулу для испускательной способности РТИ АЧТ:

$$r_{\nu, T}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}, \quad (18.4.1)$$

которая называется **формулой Планка** и даёт прекрасно согласующиеся с опытом результаты. В формуле Планка  $h$  – новая физическая постоянная, имеющая в СИ значение  $h = 6,67 \cdot 10^{-34} \text{ Дж/с}$ .

Для получения этой формулы Планк воспользовался, как и мы в п. 18.2, моделью РТИ как набора стоячих волн (элементарных осциллято-

ров) в замкнутой полости, частоты колебаний которых изменяются в диапазоне  $\nu \in (0, \infty)$ . Но при этом Планку пришлось ввести совершенно чуждую представлениям классической физики **гипотезу о квантовании** РТИ, состоящую в том, что энергия осциллятора  $\varepsilon$  меняется **не непрерывно** (по представлениям классической физики), а принимает определённые **дискретные значения**  $\varepsilon_n$ , отделённые друг от друга конечными интервалами. Переход осциллятора из состояния с энергией  $\varepsilon_1$  в другое состояние с энергией  $\varepsilon_2$  сопровождается испусканием или поглощением порции (**кванта**) энергии излучения  $\Delta\varepsilon$ , равной разности между энергиями рассматриваемых состояний, то есть  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$  ( $\Delta\varepsilon > 0$  – поглощение,  $\Delta\varepsilon < 0$  – испускание). Планк также предположил, что соседние разрешённые значения энергии осциллятора отделены друг от друга одинаковым минимальным энергетическим расстоянием (квантом) энергии  $\varepsilon_0$  (*эквидистантны*), которое он принял пропорциональным частоте излучения, то есть равным  $\varepsilon_0 = h\nu$ . Спектр возможных значений энергий осциллятора по Планку определяется выражением<sup>15</sup>:

$$\varepsilon_n = nh\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18.4.2)$$

В соответствии с распределением Больцмана, в состоянии ТДР вероятность обнаружения осциллятора в состоянии с энергией  $\varepsilon_n$  будет определяться выражением:

$$p_n = Ce^{-\varepsilon_n/(kT)}; \quad \sum_n p_n = 1 \Rightarrow C = 1 / \sum_n e^{-\varepsilon_n/(kT)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18.4.3)$$

Для средней энергии осциллятора с частотой  $\nu$  получаем:

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \sum_n \varepsilon_n p_n = \sum_n \varepsilon_n e^{-\varepsilon_n/(kT)} / \sum_n e^{-\varepsilon_n/(kT)}. \quad (18.4.4)$$

Величина в знаменателе (18.4.4) представляет собой сумму бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом  $a_1 = 1$  и знаменателем  $q = e^{-\varepsilon_0/(kT)} < 1$ . Сумма такой прогрессии есть:

---

<sup>15</sup> Последовательный квантово-механический расчёт впоследствии дал для гармонического осциллятора выражение  $\varepsilon_n = (n + 1/2)h\nu$ . Однако в данном случае это не влияет на окончательный результат для искомого среднего значения энергии осциллятора  $\langle \varepsilon_\nu \rangle$ .

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n \frac{\varepsilon_0}{kT}}) / (1 - e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}}) = (1 - e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}})^{-1}.
\end{aligned} \tag{18.4.5}$$

Если ввести обозначение  $x = 1 / (kT)$ , то легко заметить, что числитель (18.4.4) связан со знаменателем этой формулы соотношением:

$$\begin{aligned}
\sum_n n \varepsilon_0 e^{-n \varepsilon_0 x} &= -(\sum_n e^{-n \varepsilon_0 x})' = -[(1 - e^{-\varepsilon_0 x})^{-1}]'_x = \\
&= \frac{\varepsilon_0 e^{-\varepsilon_0 x}}{(1 - e^{-\varepsilon_0 x})^2} = \frac{h\nu e^{-h\nu/(kT)}}{(1 - e^{-h\nu/(kT)})^2}.
\end{aligned} \tag{18.4.6}$$

Подставляя (18.4.5) и (18.4.6) в (18.4.4), имеем для средней энергии осциллятора с частотой  $\nu$ :

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \sum_n \varepsilon_n e^{-\varepsilon_n/(kT)} / \sum_n e^{-\varepsilon_n/(kT)} = \frac{h\nu e^{-h\nu/(kT)}}{(1 - e^{-h\nu/(kT)})} = \frac{h\nu}{(e^{h\nu/(kT)} - 1)}. \tag{18.4.7}$$

Наконец, в соответствии с (18.2.11), для испускательной способности РТИ АЧТ получим выражение:

$$r_{\nu,T}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{(e^{h\nu/(kT)} - 1)}, \tag{18.4.8}$$

названное формулой Планка.

Формула Планка прекрасно согласуется с экспериментальными данными (приведены на рисунке 18.2.2 в виде сплошной линии, построенной по экспериментальным точкам), причём в области низких частот (длинноволновая область) ( $h\nu \ll kT \Rightarrow e^{h\nu/(kT)} \cong 1 + h\nu / (kT)$ ) она переходит в формулу Релея – Джинса (18.2.12) (на рисунке 18.2.2 – пунктирная линия), а в области высоких частот ( $h\nu \gg kT \Rightarrow e^{h\nu/(kT)} \gg 1$ ) – в выражение  $r_{\nu,T}^* \cong (2\pi h\nu^3 / c^2) e^{-h\nu/(kT)}$ , эмпирически подобранное Вином на основе анализа экспериментальных результатов.

Формула Планка не только находится в согласии с экспериментом и справедлива для любых частот и температур, но позволяет получить как следствия все другие ранее рассмотренные законы теплового излучения.

Получим вначале формулу Стефана – Больцмана из формулы Планка. Подставляя в (18.1.2) излучательную способность РТИ АЧТ, определяемую формулой Планка (18.4.1), для энергетической светимости АЧТ получим:

$$R^* = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1} = \left| \frac{x = h\nu / kT}{dx = (h / (kT)) d\nu} \right| = \frac{2\pi (kT)^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \quad (18.4.9)$$

$$= \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4; \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5,6686 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2\text{К}^4\text{)}.$$

Следует отметить, что постоянная Стефана – Больцмана в (18.4.9) определяется только через универсальные постоянные и отлично согласуется с экспериментальным значением этой величины.

Легко убедиться в том, что и законы Вина следуют из формулы Планка, причём соответствие опытным данным вновь отличное.

Действительно, используя (18.1.5), перейдём в выражении (18.4.1) от частоты к длине волны:

$$r_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} \left( \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1} \right) \bigg|_{\nu=c/\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}, \quad (18.4.10)$$

или

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} = T^5 \frac{2\pi hc^2}{(\lambda T)^5} \frac{1}{e^{hc/(k(\lambda T))} - 1} = T^5 \varphi_1(\lambda T). \quad (18.4.10a)$$

Находим производную  $(r_{\lambda,T})'_\lambda$ , приравниваем её к нулю и получаем условие, соответствующее максимуму функции  $r_{\lambda,T}$ :

$$\frac{dr_{\lambda,T}}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^6 (e^{hc/(\lambda kT)} - 1)} \left[ \frac{(hc / (\lambda kT)) e^{hc/(\lambda kT)}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} - 5 \right] \bigg|_{\lambda=\lambda_{\max}} = 0. \quad (18.4.11)$$

Вводя новую переменную  $x = hc / (\lambda_{\max} kT)$ , получаем трансцендентное уравнение:

$$xe^x - 5(e^x - 1) = 0, \quad (18.4.12)$$

решение которого находится численным методом и есть  $x = 4,965$ .

Следовательно, имеем:

$$4,965 = hc / (\lambda_{\max} kT); \lambda_{\max} = \frac{hc}{4,965 \cdot k T} = \frac{b}{T};$$

$$b = \frac{hc}{4,965 \cdot k} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}.$$
(18.4.13)

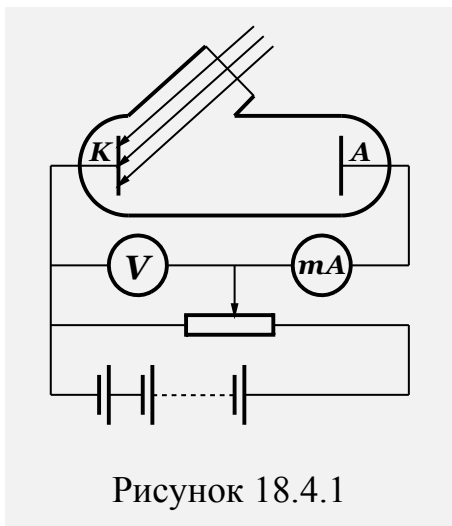
Видим, что из формулы Планка следует закон смещения Вина, причём значение постоянной  $b = hc / (4,965 \cdot k) = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  вновь выражается через универсальные постоянные и прекрасно согласуется с опытными данными.

В настоящее время на основе законов теплового излучения разработаны методы измерения высоких температур. Приборы, используемые для этой цели, называются оптическими пирометрами.

В зависимости от того, какой из законов теплового излучения используется при определении температуры, принято различать три температуры – радиационную, яркостную и цветовую. Методы измерения этих температур составляют предмет исследования оптической пирометрии.

Гипотеза Планка о квантовании энергии осциллятора приводит, как это показано, к формуле для РТИ АЧТ, находящейся в полном согласии с экспериментом.

Имеется также ряд других опытов, объяснение которых невозможно с точки зрения волновых представлений о свете, среди которых здесь рассмотрим внешний фотоэффект и эффект Комптона.



Фотоэффект возникает при взаимодействии вещества с поглощаемым электромагнитным излучением оптического диапазона.

Различают внешний и внутренний фотоэффект, вентильный фотоэффект и др.

**Внешний фотоэффект.** Внешним фотоэффектом называется явление вырывания электронов из вещества под действием падающего на него света.

Внешний фотоэффект был открыт в 1887 году Герцем (Герц (иногда – Херц, от нем. Hertz) Генрих Рудольф, нем., 1857–1894), а исследован детально в 1888–1890 гг. Столетовым. При этом он пользовался созданной им установкой, принципиальная схема которой изображена на рисунке 18.4.1.

Внутри стеклянного баллона с двумя электродами откачивался воздух и через кварцевое «окошко», прозрачное для ультрафиолетового излучения (УФИ), свет падал на катод К. Подаваемое на электроды напряжение можно изменять с помощью потенциометра и измерять вольтметром  $V$ . Под действием света электроны «выбивались» из катода и их направленное движение (к аноду) приводило к появлению электрического тока (фототока), величина которого фиксировалась амперметром.

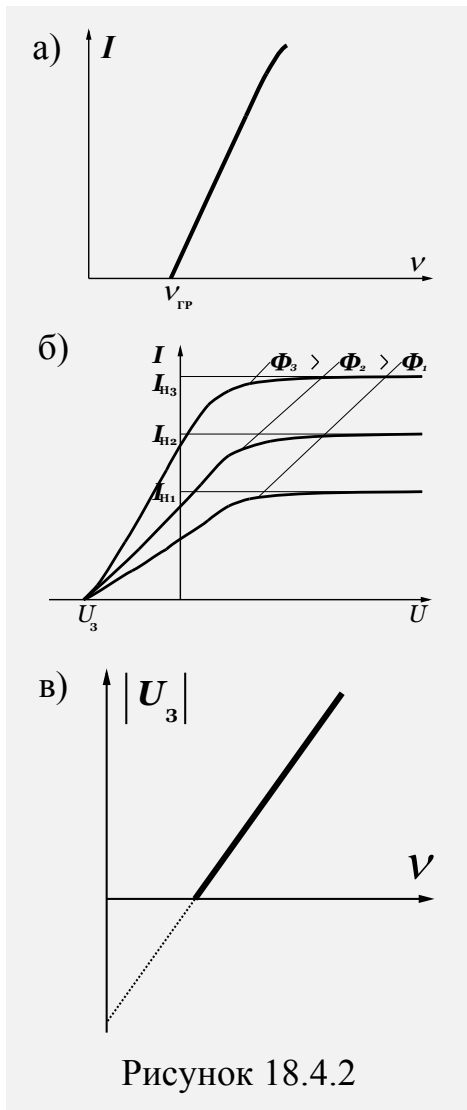


Рисунок 18.4.2

Из анализа вольтамперных характеристик (ВАХ), качественный вид которых изображён на рисунке 18.4.2, б, были установлены законы внешнего фотоэффекта:

1. Для каждого материала фотокатода существует граничная частота света  $\nu_{гр}$ , ниже которой для данного материала катода фотоэффект отсутствует, независимо от плотности светового потока энергии и продолжительности облучения катода (рисунок 18.4.2, а).

2. Электроны покидают поверхность катода с кинетическими энергиями от нуля до максимальной  $\frac{1}{2}mv_{\max}^2$ , которая не зависит от плотности светового потока энергии и линейно зависит от частоты.

3. При фиксированной частоте излучения число электронов, выбитых из катода в единицу времени, прямо пропорционально плотности светового потока энергии (рисунок 18.4.2, б). А поскольку сила фототока насыщения  $I_H$  определяется числом элек-

тронов, выбиваемых из катода в единицу времени, то и сила фототока насыщения  $I_H$  пропорциональна световому потоку, падающему на катод ( $I_H \sim \Phi$ ).

При некотором значении отрицательного напряжения  $U_3$  (задерживающее напряжение) фототок прекращается (рисунок 18.4.2, б).

Последний факт объясняется исходя из закона сохранения энергии, а именно: работа задерживающего электрического поля  $A_3$  равна изменению максимальной кинетической энергии  $\Delta W_K$  фотоэлектронов:

$$A_3 = \Delta W_K \Rightarrow eU_3 = \frac{mv_{\max}^2}{2}. \quad (18.4.14)$$

Следовательно, зная  $U_3$ , можно найти максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов.

Из рисунка 18.4.2, в, следует, что величина задерживающего напряжения увеличивается с увеличением частоты падающего света.

Минимальная (граничная) частота  $\nu_{ГР}$  (соответствующая максимальная длина волны  $\lambda_{КР}$ ) падающего света, при которой ещё возможен фотоэффект, называется **красной границей фотоэффекта**.

Сформулированные выше законы внешнего фотоэффекта находятся в резком противоречии с классическими представлениями о волновой природе света. А именно. В рамках волновых представлений о свете качественно фотоэффект объясняется следующим образом. На электроны в материале катода действует электрическое поле электромагнитной волны (ЭМВ). В результате электроны в металле начинают «раскачиваться», амплитуда их вынужденных колебаний возрастает. При достижении достаточно большой энергии электрон покидает катод, т. е. происходит внешний фотоэффект. Однако амплитуда вынужденных колебаний электрона в волновой картине излучения пропорциональна амплитуде вектора напряжённости электрического поля падающей на катод ЭМВ. Плотность светового потока энергии прямо пропорциональна квадрату амплитуды вектора напряжённости электрического поля ЭМВ. Следовательно, максимальная скорость покидающих катод фотоэлектронов должна увеличиваться с возрастанием плотности светового потока энергии. В действительности же скорость фотоэлектронов не зависит от неё. Наличие граничной частоты фотоэффекта также невозможно объяснить исходя из волновых представлений о свете. Кроме того, практическая безынерционность внешнего фотоэффекта не укладывается в рамки результатов времени запаздывания, которое дают расчёты (расчёты дают в десятки тысяч раз большее время запаздывания в фотоэффекте, нежели экспериментальные верхние оценки времени запаздывания).

А. Эйнштейн в 1905 г. для объяснения внешнего фотоэффекта использовал представления о квантах света, введённые в 1900 году Планком

для объяснения законов РТИ АЧТ. Он предложил считать, что монохроматическое световое излучение, падающее на металл, поглощается порциями (квантами света), энергия которых определяется частотой падающего света, то есть  $W = h\nu$ . Электроны приповерхностного слоя металла получают энергию этих фотонов, причём при взаимодействии излучения с веществом один электрон целиком поглощает энергию одного фотона.

Если энергия фотона  $W$  равна или превышает работу выхода  $A_{\text{вых}}$ , то электроны вылетают из металла. При этом часть энергии фотона, превышающая работу выхода  $A_{\text{вых}}$ , переходит в кинетическую энергию фотоэлектрона:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}. \quad (18.4.15)$$

Это выражение называется **уравнением Эйнштейна** для фотоэффекта и позволяет объяснить все опытные данные (законы фотоэффекта).

Это уравнение представляет собой закон сохранения энергии в применении к фотоэффекту.

На основе квантовых представлений о свете можно объяснить законы фотоэффекта.

В стационарном случае для светового потока имеем:  $\Phi = W / t$ , где  $W$  – энергия, переносимая светом за время  $t$ . В свою очередь  $W = N_{\phi} h\nu$ , где  $N_{\phi}$  – число фотонов, падающих на вещество. Очевидно, что число фотоэлектронов  $N_{\text{э}} \sim N_{\phi}$ . Следовательно,  $N_{\text{э}} \sim \Phi$ , в полном соответствии с третьим законом фотоэффекта.

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона определяется разницей между энергией поглощённого фотона и работой выхода:

$$\frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = h\nu - A_{\text{вых}}, \quad (18.4.16)$$

откуда следует, что  $h\nu \geq A_{\text{вых}}$ , то есть объясняется причина наличия граничной частоты  $\nu_{\text{ГР}}$ .

Кроме того, поскольку  $eU_{\text{з}} = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2$ , имеем:

$$eU_{\text{з}} = h\nu - h\nu_{\text{ГР}} \Rightarrow eU_{\text{з}} = \frac{h(\nu - \nu_{\text{ГР}})}{e}, \quad (18.4.17)$$

в полном соответствии со вторым законом фотоэффекта.



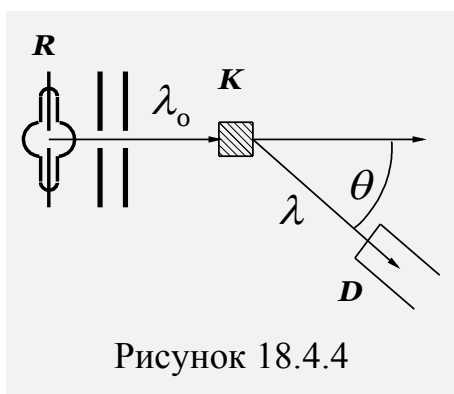


Рисунок 18.4.4

**Эффект Кóмптона.** Представления о фотонах, предложенных А. Эйнштейном для объяснения фотоэффекта, получили экспериментальное подтверждение в опытах американского физика А. Кóмптона в 1922 г. (А́ртур Хо́лли Кóмптон, амер., 1892–1962). Комптон исследовал упругое рассеяние коротковолнового рентгеновского излучения на свободных (или слабо связанных с атомами) электронах

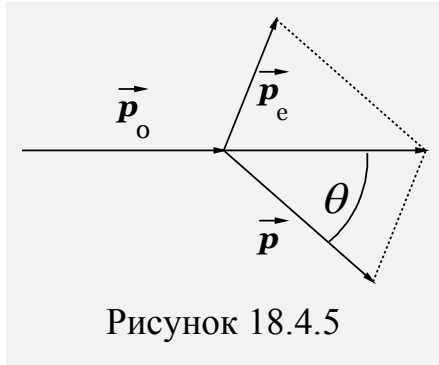
вещества. Он обнаружил, вопреки ожиданиям, что рассеянное излучение имеет большую длину волны, чем падающее излучение. Согласно волновой теории, длина волны излучения не должна изменяться при рассеянии. Согласно принципу Гюйгенса – Френеля, электрон под действием периодического поля световой волны совершает вынужденные колебания на частоте волны и поэтому излучает рассеянные волны той же частоты.

Схема наблюдения эффекта Комптона представлена на рисунке 18.4.4. Монохроматическое рентгеновское излучение с длиной волны  $\lambda_0$  от рентгеновской трубки R проходит через свинцовые диафрагмы и в виде узкого пучка направляется на рассеивающее вещество-мишень K (графит, алюминий). Излучение, рассеянное под некоторым углом  $\theta$ , анализируется с помощью спектрографа рентгеновских лучей D. Опыт показал, что в рассеянном излучении наблюдается увеличение длины волны  $\Delta\lambda$ , зависящее от угла рассеяния  $\theta$ :

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\lambda_K \sin^2(\theta / 2) = \lambda_K (1 - \cos\theta),$$

где  $\lambda_K = 2,43 \cdot 10^{-3}$  нм – константа, называемая комптоновской длиной волны, не зависящая от свойств рассеивающего вещества. В рассеянном излучении наряду со спектральной линией с длиной волны  $\lambda$  наблюдается не смещённая линия с длиной волны  $\lambda_0$ . Соотношение интенсивностей смещённой и не смещённой линий зависит от рода рассеивающего вещества. Объяснение эффекта Комптона было независимо дано в 1923 году А. Комптоном и П. Дебáем (Пéтер Йóзеф Вильгéльм Дебáй, нидерл., 1884–1966) на основе квантовых представлений о природе излучения. Если принять, что излучение представляет собой поток фотонов, то эффект Комптона есть результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными электронами вещества. У легких атомов рассеивающих веществ электроны слабо связаны с ядрами атомов, поэтому их можно считать сво-

бодными. В процессе столкновения фотон передаёт электрону часть своей энергии и импульса в соответствии с законами сохранения.



Рассмотрим упругое столкновение двух частиц (рисунок 18.4.5) – налетающего фотона, обладающего энергией  $W_0 = h\nu_0$  и импульсом  $p_0 = h\nu_0 / c$ , с покоящимся электроном, энергия покоя которого равна  $W_{e_0} = mc^2$ . Фотон, столкнувшись с электроном, изменяет направление движения (рассеивается). Импульс фотона после рассеяния становится равным  $p = h\nu / c$ , а его энергия  $W = h\nu < W_0$ . Энергия электрона после столкновения, в соответствии с релятивистской формулой (см. п. 7.5), становится равной  $W_e = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4}$ , где  $p_e$  – импульс, приобретённый электроном. Закон сохранения энергии записывается в виде:

$$W_0 + W_{e_0} = W + W_e, \text{ или } h\nu_0 + mc^2 = h\nu + \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (18.4.18)$$

После деления на  $c$  из закона сохранения энергии имеем:

$$h \frac{\nu_0}{c} + mc = h \frac{\nu}{c} + \sqrt{p_e^2 + m^2 c^2}. \quad (18.4.19)$$

С учётом определения волнового числа и его связи с длиной волны и частотой:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}, \quad \lambda = cT = \frac{c}{\nu}, \quad \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{k}{2\pi},$$

из (18.4.19) находим:

$$\begin{aligned} \sqrt{p_e^2 + m^2 c^2} &= \hbar(k_0 - k) + mc \Rightarrow \\ \Rightarrow p_e^2 &= \hbar^2(k_0^2 - 2k_0 k + k^2) + 2\hbar(k_0 - k) \cdot mc. \end{aligned} \quad (18.4.20)$$

Закон сохранения импульса  $\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{p}_e$  запишем в виде  $\vec{p}_e = \vec{p}_0 - \vec{p} \Rightarrow \Rightarrow \vec{p}_e = \hbar\vec{k}_0 - \hbar\vec{k}$  и после возведения в квадрат находим:

$$\begin{aligned} (\vec{p}_e)^2 &= (\hbar\vec{k}_0 - \hbar\vec{k})^2, \quad \vec{p}_e^2 = \hbar^2 \{k_0^2 + k^2 - 2kk_0 \cos(\vec{k}_0 \wedge \vec{k})\}, \quad \cos(\vec{k}_0 \wedge \vec{k}) = \cos \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{p}_e^2 &= \hbar^2 \{k_0^2 + k^2 - 2kk_0 \cos \theta\}. \end{aligned} \quad (18.4.21)$$

Сравнение (18.4.20) и (18.4.21) даёт:

$$\begin{aligned}
 \cancel{\hbar^2(k_o^2 + k^2)} - 2\hbar^2 k k_o \cos \theta &= \cancel{\hbar^2(k_o^2 + k^2)} - 2\hbar^2 k k_o + 2\hbar(k_o - k) \cdot mc \\
 (k_o - k) &= \frac{\hbar k k_o (1 - \cos \theta)}{mc}, \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{k_o} = \frac{\hbar(1 - \cos \theta)}{mc}, \quad \frac{\lambda}{2\pi} - \frac{\lambda_o}{2\pi} = \frac{\hbar(1 - \cos \theta)}{mc} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda - \lambda_o &= \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) = 2 \frac{h}{mc} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = 2\lambda_K \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right). \quad (18.4.22)
 \end{aligned}$$

Таким образом, теоретический расчёт, выполненный на основе квантовых представлений, дал исчерпывающее объяснение эффекту Комптона и позволил выразить комптоновскую длину волны  $\lambda_K$  через фундаментальные константы:

$$\lambda_K = h / mc = 2,42621 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Как показывает опыт, в рассеянном излучении наряду со смещённой линией с длиной волны  $\lambda$  наблюдается и несмещённая линия с первоначальной длиной волны  $\lambda_o$ . Это объясняется взаимодействием части фотонов с электронами, сильно связанными с атомами. В этом случае фотон обменивается энергией и импульсом с атомом в целом. Из-за большой массы атома по сравнению с массой электрона атому передаётся лишь ничтожная часть энергии фотона, поэтому длина волны  $\lambda$  рассеянного излучения практически не отличается от длины волны  $\lambda_o$  падающего излучения.

Подводя итоги, отметим, что в 1905 г. Эйнштейн (Эйнштейн Альберт, 1879–1955) предположил, что дискретность изменения энергии имеет место не только в процессах излучения и поглощения света, но и сам **свет является потоком частиц – световых квантов**.

Как всякая частица, движущаяся со скоростью света  $c$ , квант света с энергией  $E = h\nu$ , согласно специальной теории относительности, должен иметь энергию  $E = mc^2$ . Следовательно, как всякая частица, квант света имеет массу, определяемую из условия  $h\nu = mc^2$  выражением:

$$m = \frac{h\nu}{c^2}, \quad (18.4.23)$$

и импульс  $p = mc$ , или:

$$p = \frac{h\nu}{c} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}. \quad (18.4.24)$$

Выражения для энергии кванта света и его импульса часто записывают в несколько ином виде, используя понятие волнового числа  $k = 2\pi / \lambda$  и волнового вектора  $\vec{k} = k\vec{n}$ , а именно:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad (18.4.25)$$

где использовано общепринятое обозначение  $\hbar = h / 2\pi = 1,054571817 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, также называемая постоянной Планка (читается: «аш с чертой»).

С точки зрения классической (не квантовой) физики присутствие в каждом из выражений (18.4.23)–(18.4.25) одновременно величин, определяющих и волновые свойства описываемого объекта, и корпускулярные, выглядело, мягко говоря, нелепо.

Тем не менее именно гипотеза о корпускулярных свойствах света позволила объяснить результаты экспериментов по фотоэффекту, эффект Комптона и ряд других явлений, совершенно непонятных и необъяснимых с позиций классической электромагнитной теории. В то же время имеется огромное количество явлений (интерференция, дифракция, поляризация и др.), в которых проявляются волновые свойства света. Остаётся признать, что:

*свет – это сложное физическое явление, которое в зависимости от условий его наблюдения проявляет либо волновые, либо корпускулярные свойства.*

Такой двойственный характер света принято называть **корпускулярно-волновым дуализмом**.

## Глава 19. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ, ФИЗИКИ АТОМА

### 19.1. Гипотеза де Бройля. Волны де Бройля

Де Бройль (Луи Виктор Пьер Раймон, 7-й герцог Брольи, более известный как Луи де Бройль (фр. Louis-Victor-Pierre-Raymond, 7ème duc de Broglie, Louis de Broglie), фр., 1892–1987), основываясь на представлениях о двойственной природе света, в 1923 году выдвинул гипотезу об универсальности корпускулярно-волнового дуализма. Он предположил, что не только кванты света – фотоны, но и *любые другие частицы материи наряду с корпускулярными обладают также волновыми свойствами, проявляющимися в соответствующих условиях*. Согласно де Бройлю, с каждой частицей (телом), связываются, с одной стороны, корпускулярные характеристики – энергия  $E$  и импульс  $\vec{p}$ , а с другой стороны, волновые характеристики – частота  $\nu$  и длина волны  $\lambda$ , связанные между собой соотношениями, аналогичными для связи величин, описывающих корпускулярные и волновые свойства фотонов:

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}; \quad p = h / \lambda, \quad (19.1.1)$$

причём, в общем случае, импульс и энергия определяются релятивистскими выражениями  $\vec{p} = (m / \sqrt{1 - \beta^2})\vec{v}$  и  $E = mc^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$  (и между собой связаны формулами  $\vec{p} = (E / c^2)\vec{v}$  и  $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ ).

Таким образом, любой частице, обладающей импульсом, сопоставляется волновой процесс, длина волны которого определяется по *формуле де Бройля*:

$$\lambda = h / p, \quad (19.1.2)$$

и приписывается волновая функция  $\Psi(\vec{r}, t)$ .

При этом частице (свободной частице), движущейся по инерции в отсутствие внешних силовых полей, соответствует «плоская волна» де Бройля:

$$\Psi(\vec{r}, t) = Ce^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})}. \quad (19.1.3)$$

Долгое время смысл волнового процесса и соответствующей ему волновой функции был непонятен. И лишь в 1926 году Борн (Борн Макс, нем., 1882–1970) дал её правильную статистическую интерпретацию, о которой будет сказано ниже.

Из формулы де Бройля становится ясно, почему у макроскопических объектов волновые свойства не проявляются в обычных условиях и у каких объектов они могут быть легко обнаружены.

Для пояснения определим порядок величин длин волн для двух частиц.

1. Рассмотрим сначала пылинку массой  $m = 1 \text{ мг} = 10^{-6} \text{ кг}$ , движущуюся со скоростью  $v = 10 \text{ м/с}$ . Длина волны де Бройля в этом случае оказывается равной  $\lambda = 6,62 \cdot 10^{-34} / (10^{-6} \cdot 10) \text{ м} = 10^{-29} \text{ м}$ . Такую длину волны и, соответственно, волновые свойства такой частицы никаким прибором зафиксировать невозможно.

2. Возьмём теперь электрон с энергией  $E = 150 \text{ эВ} = 2,4 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}$ . Его скорость при этом равна  $v = 7,26 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ . Длина волны такого электрона может быть вычислена по нерелятивистской формуле  $\lambda = 6,62 \cdot 10^{-34} / (9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 7,26 \cdot 10^6) \text{ м} \cong 10^{-10} \text{ м}$  и сопоставима с длинами волн рентгеновских лучей и с размерами атома и постоянных кристаллических решёток.

Это натолкнуло исследователей на проведение опытов, аналогичных опытам по рассеянию рентгеновских лучей (приведших к открытию их дифракции на кристаллах и выводу закона Брэгга), используя вместо рентгеновского луча сфокусированный поток электронов, и позволило вскоре получить экспериментальное подтверждение гипотезы де Бройля. Дэвиссон (Кли́нтон Джо́зеф Дэ́виссон, амер., 1881–1958) и Джермер (Джермер Лестер Халберт, амер., 1896–1971) в 1927 г. провели опыты по рассеиванию пучка быстрых электронов на кристаллической решётке кристалла никеля. Созданные за счёт термоэлектронной эмиссии у катода прибора, электроны разгоняются полем между катодом и анодом прибора и попадают на поверхность кристалла. Отражённые от поверхности металла, электроны регистрируются гальванометром. По силе тока гальванометра судят о числе электронов, летящих в определенном направлении. При неизменном угле падения электронов непрерывно изменялось ускоряющее напряжение. На эксперименте снималась зависимость тока гальванометра от величины ускоряющего напряжения. В итоге удалось обнаружить интерференционные пики интенсивности рассеянных электронов, первый из

которых приходился на угол рассеяния около  $65^\circ$ , которые дают отчётливую дифракционную картину. Дифракционные максимумы соответствовали формуле Вульфа – Брэггов, определяющей условия дифракционных максимумов в данном случае. По найденному углу и импульсу электронов была рассчитана длина волны, соответствующая рассеиваемым электронам, и она в точности совпала с длиной волны, предсказываемой соотношением де Бройля.

Впоследствии дифракционные явления обнаружили также для нейтронов, протонов, атомных и молекулярных пучков. Это окончательно послужило доказательством наличия волновых свойств микрочастиц и позволило описывать движение микрочастиц в виде волнового процесса, характеризующегося определенной длиной волны, рассчитываемой по формуле де Бройля (19.1.2). Открытие волновых свойств микрочастиц привело к появлению и развитию новых методов исследования структуры веществ, таких, как электронография и нейтронография, а также к возникновению новой отрасли науки – электронной оптики.

## 19.2. Вероятностная трактовка волновой функции

Прежде всего отметим, что волны де Бройля, описываемые волновой функцией  $\Psi(\vec{r}, t)$ , не могут иметь электромагнитную природу. Действительно, даже электрически заряженная свободно движущаяся частица не излучает электромагнитных волн и, следовательно, соответствующая ей волна де Бройля не является электромагнитной.

Далее мы везде будем рассматривать ситуации, когда размеры и характеристики движения рассматриваемых объектов (частиц) таковы, что волновые свойства этих частиц существенны, и будем их называть микрообъектами (микрочастицами). Иногда, для краткости и там, где нет опасности неправильного понимания ситуации, будем говорить просто частицы, имея в виду микрочастицы. В опытах по дифракции различных микрочастиц наличие максимумов, обнаруживаемых в некоторых направлениях, позволяет сделать вывод о том, что этим направлениям соответствуют наибольшие интенсивности волн де Бройля, пропорциональные квадратам амплитуд этих волн. Следовательно, физическое содержание должны иметь не амплитуды волн де Бройля, а квадраты амплитуд этих волн.

В 1926 году Макс Борн предложил **статистическую интерпретацию** волн де Бройля, состоящую в том, что

вероятность  $dP$  обнаружения частицы в некотором элементе объёма  $dV$  равна произведению квадрата модуля волновой функции  $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi(\vec{r}, t)\Psi^*(\vec{r}, t)$ ,  $r \in dV$  рассматриваемой частицы на этот элемент объёма, то есть:

$$dP = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = \Psi(\vec{r}, t)\Psi^*(\vec{r}, t)dV; \quad r \in dV. \quad (19.2.1)$$

Видим, что квадрат модуля волновой функции  $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi(\vec{r}, t)\Psi^*(\vec{r}, t)$  играет роль плотности вероятности и, следовательно, должно выполняться условие нормировки:

$$\int_{V_{\text{доступн}}} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = \int_{V_{\text{доступн}}} \Psi(\vec{r}, t)\Psi^*(\vec{r}, t)dV = 1, \quad (19.2.2)$$

означающее обнаружение частицы в какой-либо точке доступного для этой частицы области пространства  $V_{\text{доступн}}$  (достоверное событие).

Если выбрана декартова прямоугольная система координат, то выражение (19.2.2) запишется в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dx dy dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\vec{r}, t)\Psi^*(\vec{r}, t) dx dy dz = 1. \quad (19.2.3)$$

В соответствии с теорией вероятности, знание плотности вероятности обнаружения частицы (через квадрат модуля волновой функции этой частицы) позволяет вычислять средние значения (математические ожидания) любых интересующих нас физических величин, выражаемых через координаты точек пространства. Например, если известна волновая функция  $\Psi(\vec{r}, t)$  электрона в каком-либо атоме и  $\vec{r}$  – радиус-вектор электрона, то можно вычислить среднее расстояние электрона от ядра при помощи выражения (средний модуль  $\vec{r}$ ):

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dx dy dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\vec{r}, t)r\Psi^*(\vec{r}, t) dx dy dz. \quad (19.2.4)$$

Как это следует из теории вероятностей, «рецепт» (19.2.4) годится для вычисления средних величин любых функций координат  $\langle f(r) \rangle$ :



$$\begin{aligned}
\langle f(r) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dx dy dz = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\vec{r}, t) f(r) \Psi^*(\vec{r}, t) dx dy dz.
\end{aligned}
\tag{19.2.5}$$

Например, можно вычислить средний квадрат модуля радиус-вектора  $\langle r^2 \rangle$ , среднее значение потенциальной энергии  $\langle U(r) \rangle$  и т. д.

### 19.3. Соотношения неопределённостей Гейзенберга

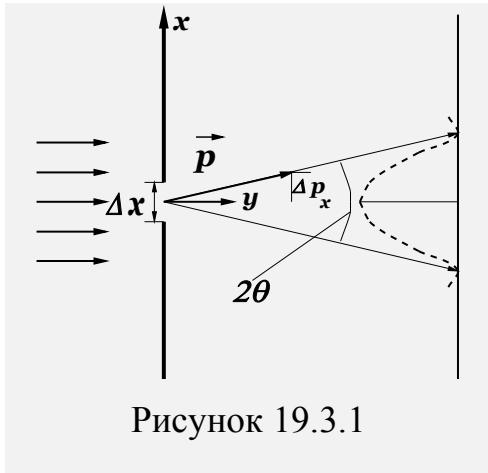


Рисунок 19.3.1

В соответствии с современными представлениями корпускулярно-волновой дуализм состоит в том, что каждый физический объект имеет возможность проявлять себя, в зависимости от условий, либо как волна, либо как частица.

В классической физике исчерпывающее описание состояния частицы определяется динамическими параметрами, такими как координаты, импульс, момент импульса, энергия и др. Поведение микрочастиц показывает, что существует принципиальный предел точности, с которой подобные переменные могут быть указаны и измерены. Причины существования этого предела, который называют принципом неопределённости, в 1927 установил В. Гейзенберг (Вёрнер Карл Гейзенберг, нем., 05.12.1901–01.02.1976), выражающимся в виде соотношений неопределённостей. Поясним причины существования принципа неопределённости при помощи мысленного эксперимента. Пусть у нас имеется свободно движущаяся вдоль некоторого направления (оси  $y$ ) микрочастица (не локализованная), имеющая импульс  $\vec{p} = 0\vec{i} + p\vec{j} + 0\vec{k}$ . Такой частице соответствует плоская волна де Бройля  $\Psi(\vec{r}, t) = C \exp\{-(i/\hbar)(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})\}$  (19.1.3).

Поставим на пути движения частицы щель шириной  $\Delta x$  (рисунок 19.3.1). До прохождения частицы через щель её импульс имеет точное значение  $\vec{p}$ , так же, как и его проекция на ось  $x$ ,  $p_x = 0$ . Следовательно, до прохождения через щель неопределённость значения проекции импульса  $\Delta p_x = 0$ , а координата  $x$  такой частицы не определена (волна не локализо-

вана). Если частица пройдёт сквозь щель, то в плоскости щели координата  $x$  частицы будет зарегистрирована с неопределённостью, равной ширине щели  $\Delta x$ . При этом вследствие дифракции с наибольшей вероятностью частица будет попадать в область экрана, ограниченную в пределах угла  $2\theta$ , где  $\theta$  – угол, соответствующий первому дифракционному минимуму:

$$\Delta x \sin \theta = \lambda, \quad (19.3.1)$$

где  $\lambda$  – длина волны де Бройля. В результате дифракции возникает неопределённость значения проекции импульса на ось  $x$ , величина которой, как это видно из рисунка, равна:

$$\Delta p_x = p \sin \theta \Rightarrow \frac{\Delta p_x}{p} = \sin \theta. \quad (19.3.2)$$

Из формулы де Бройля находим  $p = h / \lambda$  и имеем  $\Delta x \cdot \underbrace{(\Delta p_x / p)}_{\sin \theta} = \lambda \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x = \underbrace{(h / \lambda) \cdot \lambda}_p$ , или:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = h. \quad (19.3.3)$$

Поскольку часть электронов будет зарегистрирована и с отклонениями на большой угол, то в выражении (19.3.3) следует писать знак « $\geq$ » вместо знака « $=$ », и вместо (19.3.3) будет выражение:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar / 2, \quad (19.3.4a)$$

в котором сделана указанная замена знаков и заменена постоянная  $h$  на  $\hbar / 2$ , поскольку наши рассуждения носили оценочный характер, а точные расчёты дают именно значение константы в правой части неравенства. Отметим, что соотношение (19.3.4a) связывает неопределённость координаты  $\Delta x$  и неопределённость проекции импульса  $\Delta p_x$ .

Координаты равноправны, и, следовательно, аналогичные соотношения попарно связывают неопределённости координаты  $\Delta y$  и неопределённость проекции импульса  $\Delta p_y$ , и неопределённости координаты  $\Delta z$  и неопределённость проекции импульса  $\Delta p_z$ :

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar / 2; \quad (19.3.4б)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar / 2. \quad (19.3.4в)$$

Выражения (19.3.4а), (19.3.4б) и (19.3.4в) и называют **соотношениями неопределённостей Гейзенберга**. Таким образом, попытка локализовать частицу («определить» координаты частицы) привела к появлению неопределённостей импульса частицы.

Неравенства (19.3.4) утверждают, что **невозможно одновременно** определить какую-либо **координату** микрочастицы **и проекцию её импульса на данную координатную ось**. Это означает, что если мы измерим координату  $x$  с точностью  $\Delta x$ , то при этом неизбежно вносим изменения в проекцию импульса на эту ось, величиной не менее  $\hbar / (2\Delta p_x)$ . Увеличение точности определения координаты неизбежно ведёт к потере точности определения импульса. Предельная точность одновременного определения координаты и импульса даётся соотношением  $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar / 2$ .

Каждое из записанных выше соотношений неопределённостей Гейзенберга связывает неопределённость какой-либо координаты частицы с неопределённостью проекции импульса именно на данную координатную ось. Такие пары физических величин называются канонически сопряжёнными (не путать с комплексно сопряжёнными величинами). Ограничений на точность одновременного определения не сопряжённых канонически величин нет. Например, могут одновременно иметь точные значения (и точно определены) такие пары величин:  $\Delta z$  и  $\Delta p_y$ ;  $\Delta y$  и  $\Delta p_x$  и т. д. Таким образом, фундаментальные соотношения неопределённостей Гейзенберга устанавливают предел точности **одновременного** определения **канонически сопряжённых** физических величин, характеризующих систему (например, координаты и импульса).

Это ограничение не связано с несовершенством методов измерения или измерительных приборов, а являются следствием двойственной, корпускулярно-волновой природы частиц материи.

Показатель экспоненты в выражении (19.1.3) для волновой функции свободной частицы –  $\{E \cdot t - \vec{p} \cdot \vec{r}\} = \{E \cdot t - (p_x x + p_y y + p_z z)\}$  – «подсказывает», что ещё одной парой канонически сопряжённых величин являются энергия и время.

Для этой пары канонически сопряжённых величин соотношение неопределённости записывается по аналогии с выражениями (19.3.4) и имеет вид:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar / 2. \quad (19.3.4г)$$

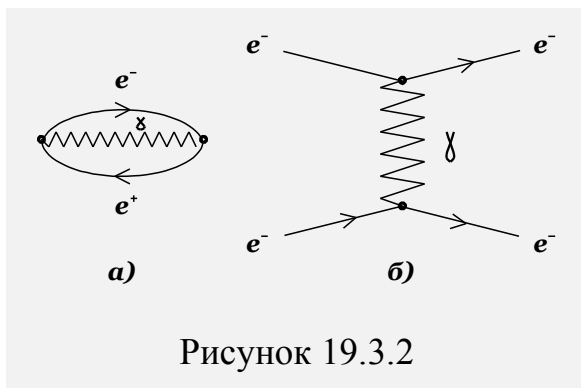
Это выражение можно получить, например, из (19.3.4а) при помощи следующих преобразований:  $(\underbrace{\Delta x / c}_{\Delta t}) \cdot (\underbrace{\Delta p_x \cdot c}_{\Delta E}) \geq \hbar / 2 \Rightarrow \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar / 2$ .

Имеется два варианта физического толкования соотношения неопределённостей для энергии и времени:

1. Если частица находится в стационарном состоянии, то определение энергии с точностью  $\Delta E$  должно занять время, по меньшей мере  $\Delta t \sim \hbar / \Delta E$ , т. е. в процессе измерения или наблюдения чем меньше время наблюдения, тем меньше точность определения энергии (тем больше неопределённость энергии рассматриваемого состояния).

2. Если система (или частица) находится в нестационарном состоянии (например, возбуждённом состоянии) в течение «времени жизни»  $\tau = \Delta t$ , то неопределённость энергии этого состояния  $\Delta E$  (естественная ширина полосы) не менее  $\Delta E \sim \hbar / \Delta t$ . Следовательно, чем дольше частица находится в состоянии с данной энергией (чем больше времени жизни  $\tau = \Delta t$ ), тем точнее значение энергии этой частицы.

Кстати, последняя трактовка соотношения неопределённостей для энергии и времени позволяет вводить понятие **виртуальных (ненаблюдаемых)** частиц и переходов, в которых «нарушается» закон сохранения энергии. Событие, длящееся конечный промежуток времени, не позволяет зафиксировать энергию с точностью выше некоторого предела. Иначе говоря, можно говорить о существовании в течение этого времени промежуточных частиц, которые «берут энергию взаймы» на некоторое небольшое время при своём появлении («рождении») и отдают при исчезновении (поглощении).



В качестве иллюстрации приведём два примера виртуальных частиц – короткоживущих ненаблюдаемых частиц, возникающих в вакууме и при столкновениях или распадах реальных (наблюдаемых) частиц. При столкновениях и распадах частиц виртуальные частицы играют роль

переносчиков взаимодействий. Взаимодействия и взаимные превращения частиц в квантовой теории описываются как рождение или поглощение свободной частицей виртуальных частиц.

Два простейших процесса с участием виртуальных частиц показаны на рисунке 19.3.2. Виртуальными частицами на левой части рисунка (ри-

сунок 19.3.2, а) являются электрон, позитрон и фотон. Они одновременно рождаются в вакууме в левом узле и затем исчезают в правом. Рисунок 19.3.2, б (справа) иллюстрирует взаимодействие двух реальных электронов посредством обмена виртуальным фотоном, играющим роль переносчика электромагнитного взаимодействия. Появление любой виртуальной частицы нарушает закон сохранения энергии на некую величину  $\Delta E$ , однако такие нарушения допускаются квантовой механикой в течение интервалов времени  $\Delta t$ , разрешённых соотношением неопределённостей  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar / 2$ . В течение интервалов времени  $\Delta t < \hbar / (2\Delta E)$  эти нарушения принципиально не наблюдаемы, как не наблюдаемы и сами промежуточные частицы, называемые, как сказано выше, виртуальными. В момент исчезновения (поглощения) виртуальной частицы баланс энергий восстанавливается. Для виртуальной частицы не выполняется соотношение специальной теории относительности между полной энергией  $E$ , импульсом и массой  $m$ :  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ . Так, виртуальный фотон может иметь нулевой импульс, т. е. покоиться, что исключено для наблюдаемого фотона. На испускании и поглощении виртуальных частиц основаны практически все физические процессы, происходящие при высоких энергиях и на масштабах расстояний, меньших  $10^{-10}$  м.

Соотношение неопределённостей указывает, в какой мере можно пользоваться понятиями классической механики применительно к микрочастицам, то есть является квантовым ограничением применимости классической механики к микрообъектам.

Для перехода к классическому пределу постоянную Планка можно устремить к нулю. Ошибки в определении канонически сопряжённых параметров при этом становятся сколь угодно малыми – соотношение неопределённостей не накладывает никаких ограничений на точность измерения координаты и импульса. Тем самым определена траектория классической частицы. В квантовой физике мы вынуждены отказаться от понятия траектории и перейти к вероятностному, или статистическому описанию поведения микрочастиц

Можно также утверждать, что любой процесс измерения в квантовой механике связан с изменением параметров этого состояния, изменяет состояние объекта и точное описание его состояния невозможно. Однако оценки показывают, что для классических объектов возможно описание их с помощью классической физики. Так, для шарика массой  $10^{-3}$  кг и диаметром  $10^{-4}$  м неопределённость в определении скорости, связанная с со-

отношением неопределённости, равна  $\Delta v_x = \Delta p_x / m \sim \hbar / (m\Delta x) \approx 10^{-27}$  м/с. Такая величина не может быть измерена, а следовательно, никак не сказывается на вычислениях по формулам классической физики. Для электрона в атоме водорода оценки дают при размере атома порядка  $10^{-10}$  м, неопределённость в определении скорости равна  $10^6$  м/с. Эта величина сравнима со скоростью электрона при его движении по орбите. Поэтому понятие траектории для этого случая неприменимо.

Часто одного этого соотношения достаточно, чтобы получить ряд важных результатов. В частности, соотношение неопределённостей позволяет объяснить, почему электрон не падает на ядро атома, а также оценить размеры атома и минимально возможную энергию электрона в таком атоме.

Пусть микрочастица находится в одномерной потенциальной «яме» размером  $L$ . При нахождении возможного значения минимальной энергии  $E_{\min}$  частицы будем считать, что импульс частицы по порядку величины равен его неопределённости, т. е.  $p \approx \Delta p$ . Чтобы понять, почему это так, представим себе, что частица в этой области имеет энергию  $E > E_{\min}$ . Тогда её импульс может быть представлен как  $p = \langle p \rangle + \Delta p$ . Теперь начнём мысленно уменьшать энергию, а значит, и импульс  $\langle p \rangle$ . При этом  $\Delta p$  не меняется, поскольку  $\Delta p \sim \hbar / L$ . Когда выполнится условие  $E = E_{\min}$ , величина  $\langle p \rangle = 0$  и останется  $p = \Delta p$ .

Применим наши рассуждения к атому водорода. Точное положение электрона в данном атоме неизвестно (точное значение координат запрещено принципом неопределённости – в этом случае  $\Delta p \rightarrow \infty$ ). Поэтому для оценки  $E_{\min}$  электрона в кулоновском поле ядра можно положить неопределённость расстояния от ядра до электрона  $\Delta r$  равной этому расстоянию  $\Delta r \approx r$ , для импульса и его неопределённости воспользоваться полученным выше результатом  $\Delta p \approx p$ . Поскольку  $p \approx \hbar / r$ , то для  $E_{\min}$  имеем:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}, \quad (19.3.5)$$

Точка, где  $E = E_{\min}$ , является точкой экстремума (производная по  $r$  равна 0):

$$\left. \frac{dE}{dr} \right|_{r=r_0} = - \frac{\hbar^2}{mr_0^3} + \frac{e^2}{r_0^2} = 0. \quad (19.3.6)$$

Следовательно:

$$r_0 = \hbar^2 / me^2. \quad (19.3.7)$$

Полученный результат в точности совпадает с результатом, полученным по элементарной теории Бора атома водорода.

С учётом (19.3.7) для  $E_{\min}$  находим:

$$E_{\min} \approx \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} - \frac{e^2}{r_0} = \frac{\hbar^2 m^2 e^4}{2m\hbar^4} - \frac{e^2 me^2}{\hbar^2} = \frac{e^2 me^2}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ эВ}, \quad (19.3.8)$$

что также совпадает с энергией основного состояния атома водорода по теории Бора.

Совпадение этих грубых оценок с точными значениями  $r_0$  и  $E_{\min}$  следует считать случайным. Важно лишь то, что получен верный порядок этих величин и что, основываясь на принципе неопределённости, можно понять, почему атомный электрон не падает на ядро. Размер атома является результатом компромисса двух слагаемых энергии (19.3.5), имеющих противоположные знаки. Если увеличить отрицательное слагаемое (потенциальную энергию), уменьшив  $r$ , то увеличится кинетическая энергия, и наоборот.

Таким образом, соотношение неопределённостей позволяет сделать ряд важных выводов:

1. В атоме невозможно состояние, в котором частица находилась бы в состоянии покоя.
2. При рассмотрении движения микрочастиц необходимо во многих случаях отказаться от самого понятия классической траектории.
3. Часто теряет смысл деление полной энергии  $E$  частицы (как квантового объекта) на потенциальную  $U$  и кинетическую  $T$ . В самом деле,  $U$  зависит от координат, а  $T$  – от импульса. Эти же динамические переменные не могут иметь одновременно определенного значения.
4. Соотношение неопределённостей не позволяет электрону в атоме «свалиться» на ядро (точное значение координат запрещено принципом неопределённости – в этом случае  $\Delta p \rightarrow \infty$ ).

## 19.4. Уравнение Шрёдингера

Развивая идеи де Бройля о волновых свойствах вещества, Шрёдингер (Эрвин Рудольф Йозеф Александр Шрёдингер, нем., 12.08.1887–04.01.1961) постулировал в 1926 г. уравнение, определяющее волновую функцию микросистемы. Это уравнение, называемое **уравнением Шрёдингера**, является основным уравнением нерелятивистской квантовой теории. Данное уравнение было именно постулировано, оно является новым фундаментальным законом, который невозможно вывести из прежних представлений и теорий. Справедливость этого уравнения установлена тем, что все вытекающие из него следствия подтверждены экспериментом. Уравнение Шрёдингера играет в квантовой теории такую же роль, как основное уравнение динамики (второй закон Ньютона) в нерелятивистской механике.

Сформулировав это уравнение, Шрёдингер сразу же применил его к атому водорода и получил для уровней энергии спектр, точно совпадающий со спектром по первоначальной теории Бора и, соответственно, с опытными данными.

Уравнение Шрёдингера имеет следующий вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + U \Psi(\vec{r}, t), \quad (19.4.1)$$

где  $i$  – мнимая единица,  $m$  – масса частицы,  $U(\vec{r}, t)$  – потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором она движется;  $\Psi(\vec{r}, t)$  – искомая волновая функция частицы;  $\nabla^2 \equiv \Delta$  – оператор Лапласа, который в системе декартовых прямоугольных координат определяется выражением:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \quad (19.4.2)$$

Уравнение (12.11) называют общим уравнением Шрёдингера или *временным* уравнением Шрёдингера. Уравнение Шрёдингера справедливо для любой частицы, движущейся с малой (по сравнению со скоростью света) скоростью  $v$ , т. е.  $v \ll c$ . При решении уравнения Шрёдингера на волновую функцию из физических соображений накладываются условия:

1. Волновая функция должна быть конечной, однозначной и непрерывной, а также иметь непрерывные первые производные по пространственным координатам и времени.



2. Функция  $|\Psi|^2$  должна быть интегрируема; это условие в простейших условиях сводится к условию нормировки вероятностей (19.2.2).

Особую роль в квантовой теории играют **стационарные состояния** – состояния, в которых все наблюдаемые физические величины не меняются с течением времени, в частности потенциальная энергия  $U = U(\vec{r})$ .

Волновую функцию в стационарных состояниях можно записать в виде:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \varphi(t)\psi(\vec{r}), \quad (19.4.3)$$

а уравнение Шрёдингера разделить на два дифференциальных уравнения.

Действительно, подстановка (19.4.3) в (19.4.1) даёт:

$$i\hbar\psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi \nabla^2 \psi + \varphi U \psi \Rightarrow i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\psi} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U. \quad (19.4.4)$$

Левая часть (19.4.4) зависит только от времени, а правая часть – только от координат. Выполняться такое равенство может, если обе его части равны одной и той же константе, которую мы обозначим  $E$ . Следовательно, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} E \Rightarrow d \ln \varphi = -\frac{i}{\hbar} E dt \Rightarrow \ln \varphi / C = -\frac{i}{\hbar} Et \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi = C e^{- (i/\hbar) Et} = C e^{- i\omega t}; \end{aligned} \quad (19.4.5a)$$

$$-\frac{1}{\psi} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U = E \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + [E - U(\vec{r})]\psi = 0, \quad (19.4.5b)$$

а для волновой функции стационарной задачи:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{- (i/\hbar) Et}. \quad (19.4.6)$$

Константа в (19.4.6) внесена в функцию  $\psi(\vec{r})$ .

Уравнение (19.4.5б) называется **стационарным** уравнением Шрёдингера.

В стационарном случае плотность вероятности остаётся постоянной:

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi(\vec{r}, t) \cdot \Psi^*(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \psi^*(\vec{r}). \quad (19.4.7)$$

Потенциальная энергия  $U(\vec{r})$  в (19.4.5б) рассматривается как функция локализованной точечной частицы в силовом поле, то есть функция

$U(\vec{r})$  определяется классически, как если бы никакими волновыми свойствами частица не обладала.

Физический смысл имеют лишь те решения уравнения (19.4.5б), которые удовлетворяют естественным или стандартным условиям, упомянутым выше.

Решения, удовлетворяющие этим условиям, зависят от условий рассматриваемых задач. Важно отметить, что решения этих задач часто оказываются возможными лишь при некоторых значениях постоянной разделения  $E$  (энергии системы). Их называют собственными значениями, а функции  $\psi(\vec{r})$ , являющиеся решениями уравнения (19.4.5б) при этих значениях энергии – собственными функциями, принадлежащими собственным значениям  $E$ .

Собственные значения энергии  $E$  принимаются за возможные значения энергии в соответствующих стационарных состояниях. Эти значения энергии  $E$  могут быть дискретными (квантованными) (их можно пронумеровать  $E_1, E_2, \dots, E_N, \dots$ ), образуя **дискретный энергетический спектр**, или непрерывными (можно указать диапазон, которому принадлежат эти возможные значения), образуя **непрерывный энергетический спектр**, а могут быть и комбинацией этих двух вариантов, образуя **смешанный энергетический спектр**.

Ниже обсуждены ситуации, когда частицы имеют различные виды энергетических спектров, и условия, влияющие на вид этих спектров.

### 19.5. Свободная частица

В качестве первого примера получим решение уравнения Шрёдингера для свободной частицы. В микромире частицу считают свободной, если внешние воздействия отсутствуют, то есть будем рассматривать стационарное уравнение Шрёдингера, в котором потенциальную энергию положим равной нулю  $U(\vec{r}, t) = 0$ :

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0; \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E. \quad (19.5.1)$$

Будем искать решение в декартовой прямоугольной системе координат. Стационарную часть волновой функции представим в виде произведе-

ния  $\psi(x, y, z) = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \psi_3(z)$  и получим из (19.5.1) после подстановки  $\psi(x, y, z)$  и деления на произведение  $\psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \psi_3(z)$ :

$$\overbrace{\frac{1}{\psi_1(x)} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2}}^{-k_1^2} + \overbrace{\frac{1}{\psi_2(y)} \frac{d^2 \psi_2}{dy^2}}^{-k_2^2} + \overbrace{\frac{1}{\psi_3(z)} \frac{d^2 \psi_3}{dz^2}}^{-k_3^2} = -k^2; \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2, \quad (19.5.2)$$

откуда находим три независимых уравнения:

$$\frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + k_1^2 \psi_1 = 0; \quad (19.5.3a)$$

$$\frac{d^2 \psi_2}{dy^2} + k_2^2 \psi_2 = 0; \quad (19.5.3б)$$

$$\frac{d^2 \psi_3}{dz^2} + k_3^2 \psi_3 = 0. \quad (19.5.3в)$$

Поскольку полученные уравнения совершенно однотипны, то достаточно решить одно из них. Например, одно из частных линейно независимых решений (19.5.3a) имеет вид:

$$\psi_1(x) = C_1 e^{ik_1 x}. \quad (19.5.4)$$

Записывая аналогично решения (19.5.3б) и (19.5.3в), для стационарной части волновой функции в рассматриваемом случае имеем:

$$\psi = C e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} = C e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})}; \quad \vec{k} = k_1 \vec{e}_1 + k_2 \vec{e}_2 + k_3 \vec{e}_3; \quad \vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3. \quad (19.5.5)$$

Для полной волновой функции рассматриваемой задачи (с учётом (19.4.6)) имеем:

$$\Psi(\vec{r}, t) = C e^{\frac{i}{\hbar}(\hbar \vec{k} \cdot \vec{r} - Et)} = C e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}; \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}. \quad (19.5.6)$$

Видим, что волновая функция свободной частицы совпадает с «плоской волной» де Бройля (19.1.3), приписанной нами свободной частице.

Плотность вероятности обнаружения рассматриваемой частицы будет постоянной:  $\Psi \Psi^* = |C|^2$ . Это значит, что вероятность обнаружения частицы в одинаковых по величине элементах объёма  $dV (= const)$  не будет зависеть от координат точки, окрестностью которой является указанный элемент объёма  $dV$ , то есть  $dP = |C|^2 dV = const$ .

Следует обратить внимание на одну сложность при описании свободной частицы плоской волной де Бройля (19.5.6). Дело в том, что в данном случае не выполняется условие нормировки (19.2.2) (или (19.19.3)), поскольку несобственные интегралы в этих формулах расходятся. Физически это может быть вызвано тем, что абсолютно свободных частиц не существует в природе (понятие о свободном движении – некоторая идеализация реального движения рассматриваемой частицы).

Возникшая сложность при использовании плоских волн де Бройля, однако, не носит принципиального характера. Разработаны такие способы их использования в квантовой механике, которые позволяют обойти возникающие математические трудности.

В частности, применяются специальные условия нормировки. Один из возможных методов приведём ниже.

Для этого введём понятие плотности потока вероятности. Вернёмся к уравнению Шрёдингера (19.4.1) и умножим это уравнение на величину  $\Psi^*/i\hbar$ :

$$\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \Psi^* \nabla^2 \Psi + \frac{U}{i\hbar} \Psi^* \Psi. \quad (19.5.7a)$$

Аналогично комплексно-сопряжённое уравнение Шрёдингера умножим на  $\Psi/(-i\hbar)$ :

$$\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = - \frac{i\hbar}{2m} \Psi \nabla^2 \Psi^* - \frac{U}{i\hbar} \Psi \Psi^*. \quad (19.5.7b)$$

Сумма правых и левых частей формул (19.5.7a) и (19.5.7b) даёт:

$$\begin{aligned} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} &= \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Psi \Psi^*) &= \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*). \end{aligned} \quad (19.5.8)$$

Дифференцируя выражение (19.2.2) (условие нормировки), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 0, \quad (19.5.9)$$

и, подставляя в полученное выражение (19.5.8) (правую часть), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = \frac{i\hbar}{2m} \int_V (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) dV. \quad (19.5.10)$$

Используя тождество

$$\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^* = \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (19.5.11)$$

и вводя новую величину

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi), \quad (19.5.12)$$

которую называют **плотностью потока вероятности**, и, обозначая плотность вероятности  $\rho = \Psi \Psi^*$ , можем записать:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\Psi \Psi^*) dV + \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad (19.5.13)$$

Вычислим плотность потока вероятности с учётом вида волновой функции свободной частицы (19.5.6)  $\Psi(\vec{r}, t) = C \exp[\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)]$ :

$$\begin{aligned} \Psi \nabla \Psi^* &= \Psi \nabla (C^* e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}) = (-\frac{i}{\hbar})(\Psi \Psi^*) \nabla (\overbrace{\vec{p} \cdot \vec{r}}^{p_x x + p_y y + p_z z}) = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \Psi \Psi^* (\vec{e}_x p_x + \vec{e}_y p_y + \vec{e}_z p_z) = -\frac{i}{\hbar} \Psi \Psi^* \vec{p}. \end{aligned} \quad (19.5.14a)$$

$$\Psi^* \nabla \Psi = \Psi^* \nabla (C e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}) = (\frac{i}{\hbar})(\Psi^* \Psi) \nabla (\overbrace{\vec{p} \cdot \vec{r}}^{p_x x + p_y y + p_z z}) = \frac{i}{\hbar} \Psi \Psi^* \vec{p}. \quad (19.5.14b)$$

Вычитая (19.5.14b) из (19.5.14a) и умножая на  $i\hbar/2m$ , для плотности потока вероятности находим:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{2i}{\hbar} \overbrace{\Psi \Psi^*}^{CC^* = |C|^2} \vec{p} = \frac{\vec{p}}{m} |C|^2 = \vec{v} |C|^2 = \vec{v} \rho, \quad (19.5.6)$$

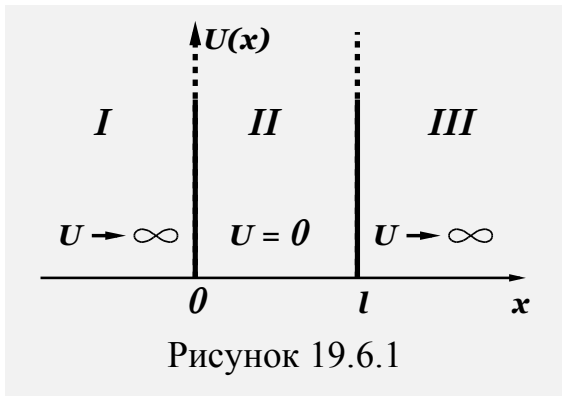
где  $\rho = \Psi \Psi^* = |C|^2$  – плотность вероятности. Полученный результат снимает вопрос с нормировкой волновых функций свободных частиц.

## 19.6. Частица в потенциальном ящике. Квантование энергии

Несмотря на чрезвычайное упрощение ситуации, решение задачи о поведении частицы в *одномерной прямоугольной потенциальной яме с неограниченно высокими стенками* имеет очень важное значение, так как при решении этой задачи выявляются все принципиальные особенности движения микрообъектов при наличии силовых полей, ограничивающих пространственную локализацию рассматриваемых частиц.

Итак, рассмотрим одномерное движение частицы массой  $m$ , например электрона, при наличии стационарного силового поля, в котором потенциальная энергия частицы вне и внутри потенциального ящика (рисунок 19.6.1) описывается выражением:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 ; \\ 0, & 0 \leq x \leq l ; \\ \infty, & x > l . \end{cases} \quad (19.6.1)$$



Области I и III для частицы недоступны, поэтому  $\psi_I = \psi_{III} = 0$ , а в области II нужно решать стационарное уравнение Шрёдингера, которое в данном случае будет ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 \psi_{II}}{dx^2} + k^2 \psi_{II} = 0, \quad (19.6.2)$$

где  $k^2 = (2m/\hbar^2)E$  – постоянный коэффициент (при фиксированном значении энергии  $E$ ).

Решение ЛОДУ (19.6.2) имеет вид:

$$\psi_{II}(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}. \quad (19.6.3)$$

Используя ограничения, налагаемые на волновые функции, находим:

$$\begin{aligned} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) &\Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B \Rightarrow \\ &\Rightarrow \psi_{II}(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2iA \sin kx = C \sin kx . \end{aligned} \quad (19.6.4)$$

И далее находим:

$$\begin{aligned}\psi_{II}(l) = \psi_{III}(l) &\Rightarrow C \sin kx = 0; \quad C \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin kl = 0 &\Rightarrow kl = n\pi, \quad n=1,2,\dots; \quad n \neq 0, \\ k &= \frac{n\pi}{l}, \quad n=1,2,\dots; \quad n \neq 0.\end{aligned}\tag{19.6.5}$$

Значение  $n=0$  отпадает, так как при этом  $\psi(x)=0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$  – частицы нет – что противоречит условиям задачи, а отрицательные значения  $n$  приводят к тем же функциям, что и для положительных  $n$ , но с отрицательным знаком, что не даёт новых физических решений).

Для собственных значений энергии частицы в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме (с учётом связи  $k^2 = (2m/\hbar^2)E$ ) имеем:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} \cdot n^2, \quad n=1,2,\dots \tag{19.6.6}$$

Соответствующие собственные волновые функции определяются выражением (19.6.4), где константа  $C$  находится (с учётом одномерности задачи) из условия нормировки (19.2.3):

$$C^2 \int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = 1. \tag{19.6.7}$$

Делая замену переменной  $n\pi x/l = u$  и используя тригонометрическую формулу  $\sin^2 u = (1 - \cos 2u)/2$ , находим:  $C = \sqrt{2/l}$ . Таким образом, для собственных волновых функций  $\psi_n$  (индекс  $II$  для упрощения обозначений опускаем) в рассматриваемом случае имеем:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \tag{19.6.8}$$

где индекс  $n$  подчёркивает зависимость волновой функции от значения главного квантового числа  $n$  (а значит, и от энергии  $E_n$ ).

Видим, что спектр энергии частицы  $E$  является **дискретным (квантованным)**. Дискретные значения  $E_n$  называют уровнями энергии, а число  $n$  – **главным квантовым числом**.

Из формулы (19.6.6) следует, что при  $n=1$  энергия системы **минимальна и не равна нулю**:

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2}, \quad (19.6.9)$$

а волновая функция, соответствующая этому состоянию, определяется выражением:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (19.6.10)$$

Это полностью согласуется с принципом неопределённости. Ведь у частицы в яме ограничена область возможных значений её координаты, поэтому должен существовать разброс по импульсам, а значит, отлична от нуля и энергия. Состояние с энергией  $E_1$  называется **основным** или **невоз-**

**буждённым** состоянием, а состояния с  $n > 1$  – **возбуждёнными**.

На рисунке 19.6.2 изображены (не в масштабе) уровни энергии частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками.

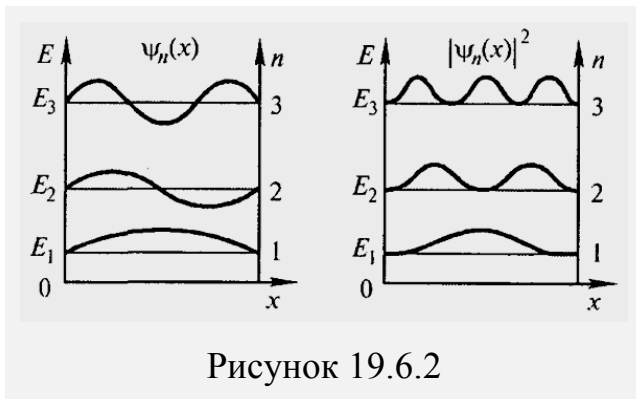


Рисунок 19.6.2

Здесь же представлены собственные волновые функции  $\psi_n(x)$  для  $n=1, 2$  и  $3$  и плотности вероятности обнаружения частицы как функции от расстояния, равные  $|\psi_n(x)|^2 = \psi_n^*(x) \cdot \psi_n(x)$ .

Из графиков, в частности, следует, что в состоянии с  $n=2$  частица не может быть обнаружена в середине ямы. Вместе с тем в левой и правой половине ямы частицу можно обнаружить с одинаковой вероятностью.

С увеличением энергии (т. е. с ростом квантового числа  $n$ ) максимумы распределения  $|\psi_n(x)|^2$  располагаются все ближе друг к другу. При очень больших значениях  $n$  максимумы распределения  $|\psi_n(x)|^2$  практически «сливаются» друг с другом и частица, особенно при больших размерах потенциальной ямы и значительной массе, начинает вести себя фактически как «классическая» частица, не «замечая» дискретности разрешённых значений энергии. Об этом свидетельствует также тот факт, что расстояние между разрешёнными энергетическими уровнями равно  $\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = (\hbar^2 \pi^2 / (2ml^2)) \cdot (2n+1)$ , а для  $n \gg 1$  получаем  $\Delta E_n \approx (\hbar^2 \pi^2 / (ml^2)) \cdot n$ . При



больших значениях  $n$  ( $n \gg 1$ ) относительная разность между соседними значениями энергии  $\Delta E_n/E_n = (E_{n+1} - E_n)/E_n = (2n+1)/n^2 \approx 1/n$  становится очень малой ( $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta E_n/E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$ ).

Следует отметить, что для одной и той же частицы, в зависимости от условий, можно либо пренебречь квантованием энергии и рассматривать её как классическую частицу, либо квантование энергии существенно для рассматриваемого случая. Чтобы понять, когда квантование существенно, а когда нет, полезно рассмотреть конкретные примеры.

Сначала рассмотрим ситуацию, когда частицы массой  $m = 10^{-26}$  кг, сравнимой с массой атомов или молекул, находятся в сосуде размерами  $l = 1 \text{ см} = 10^{-2}$  м. Для расстояния между разрешёнными энергетическими уровнями (значениями энергии) при  $n \gg 1$  в данном случае имеем:

$$\Delta E_n \approx (3,14^2 \cdot 1,05^2 \cdot 10^{-68} / (10^{-26} \cdot 10^{-4})) \cdot n \approx 10^{-37} \cdot n \text{ Дж} \approx 6,3 \cdot 10^{-19} \cdot n \text{ эВ}.$$

Энергия квантована, но расстояние между уровнями чрезвычайно мало. Уровни энергии расположены настолько близко друг к другу, что в реальности представляют практически сплошной спектр, если сравнивать, например, с энергией хаотического теплового движения рассматриваемой частицы. При температуре  $T = 3 \cdot 10^2$  К (близко к комнатной температуре) энергия хаотического теплового движения рассматриваемой частицы имеет порядок величины  $kT \approx 4,1 \cdot 10^{-21}$  Дж  $= 2,6 \cdot 10^{-2}$  эВ. Дискретность уровней никак не сказывается на движении частиц молекул в таком сосуде. Аналогичная ситуация получится и для свободных электронов в металле:  $m \approx 10^{-30}$  кг,  $l = 10^{-2}$  м; и для расстояния между разрешёнными энергетическими уровнями при  $n \gg 1$  в данном случае имеем:  $\Delta E_n \approx 10^{-33} \cdot n$  Дж  $\approx 6,3 \cdot 10^{-15} \cdot n$  эВ.

В качестве альтернативы рассмотрим ситуацию, когда электрон  $m \approx 10^{-30}$  кг, находится в яме с размерами порядка размеров атома  $l = 10^{-10}$  м. В этом случае для расстояния между разрешёнными уровнями имеем:

$$\Delta E_n \approx (3,14^2 \cdot 1,05^2 \cdot 10^{-68} / (10^{-30} \cdot 10^{-20})) \cdot n \approx 10^{-17} \cdot n \text{ Дж} \approx 10^2 \cdot n \text{ эВ},$$

что сравнимо со значениями энергии электрона и квантование энергии в данном случае весьма существенно.

Необходимо отметить ещё одно важное обстоятельство, являющееся следствием из соотношения неопределённостей Гейзенберга и проявляющееся во всех задачах, где на частицу накладываются условия, означающие её локализацию в некоторой области пространства. Локализация частицы в пределах потенциальной ямы, количественно определяемая шириной этой ямы  $l$ , приводит к квантованию энергии этой частицы. Действительно, из выражения (19.6.6) для собственных значений энергии рассматриваемой задачи видим, что именно конечность размеров ширины  $l$  потенциальной ямы приводит к квантованию энергии рассматриваемой частицы.

### 19.7. Квантовый гармонический осциллятор

Линейный гармонический осциллятор – система, совершающая движение под действием квазиупругой силы. Осциллятор называют одномерным, если система, например частица, может двигаться только вдоль одной прямой.

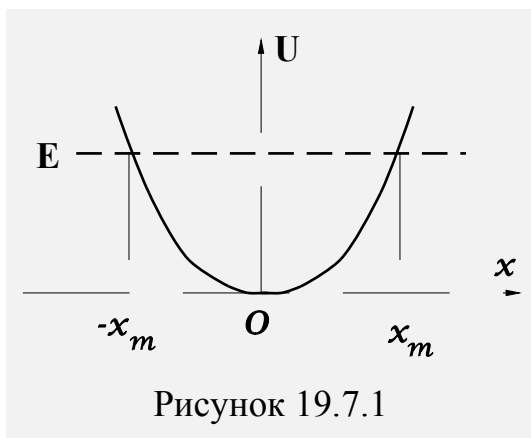


Рисунок 19.7.1

Задача об уровнях энергии одномерного гармонического осциллятора является одной из наиболее важных задач о собственных значениях.

В квантовой теории понятие силы теряет смысл, поэтому квантовый гармонический осциллятор следует определить как поведение частицы массы с потенциальной энергией  $U(x)$  такой же, как у

классического осциллятора, а именно:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}. \quad (19.7.1)$$

Собственная частота классического гармонического осциллятора равна  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , где  $m$  – масса частицы;  $x$  – отклонение от положения равновесия. Зависимость  $U(x)$  имеет вид параболы (рисунок 19.7.1), т. е. потенциальная яма в данном случае является параболической.

С классической точки зрения, амплитуда малых колебаний  $x_m$  ( $x_m > 0$ ) осциллятора определяется его полной энергией  $E$  (рисунок 19.7.1). В точках с координатами  $\pm x_m$  кинетическая энергия осциллятора равна нулю и вся энергия переходит в потенциальную энергию осциллятора.

Поэтому, с классической точки зрения, частица не может выйти за пределы области  $(-x_m, +x_m)$ . Такой выход означал бы, что её потенциальная энергия больше полной, что абсурдно, так как приводит к выводу, что кинетическая энергия отрицательна. Таким образом, координата  $x$  классического осциллятора находится в диапазоне  $(-x_m \leq x \leq +x_m)$ , то есть  $|x| \leq x_m$  (говорят: «частица находится в “потенциальной яме” с координатами  $(-x_m \leq x \leq +x_m)$  без права выхода из неё»).

Гармонический осциллятор в квантовой механике – **квантовый осциллятор** – описывается стационарным уравнением Шрёдингера (19.4.5б), учитывающим выражение (19.7.1) для потенциальной энергии. Тогда стационарные состояния квантового осциллятора определяются уравнением Шрёдингера вида

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right] \psi = 0, \quad (19.7.2)$$

где  $E$  – полная энергия осциллятора.

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнение (19.7.2) имеет однозначные, конечные и непрерывные решения при собственных значениях

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19.7.3)$$

Из (19.7.3) следует, что энергия квантового осциллятора, как и в примере одномерной прямоугольной потенциальной ямы с неограниченно высокими стенками, имеет дискретные значения (квантуется).

Видим также, что разрешённые значения энергии расположены на одинаковых расстояниях друг от друга, равных  $\hbar \omega_0$ . Минимальное значение энергии  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$  называется энергией нулевых колебаний. При  $n \gg 1$   $E_n \cong n \hbar \omega_0$ , т. е. разрешённые значения энергии (энергетические уровни) осциллятора совпадают с величинами квантованной энергии осциллятора, постулируемыми Планком в теории равновесного теплового излучения абсолютно черного тела.

Наличие энергии нулевых колебаний вытекает из соотношения неопределённостей. Действительно, постоянное присутствие частицы на дне потенциальной ямы (независимо от формы) означало бы, что её импульс и его неопределённость обращались бы в нуль. Это означает, что неопреде-

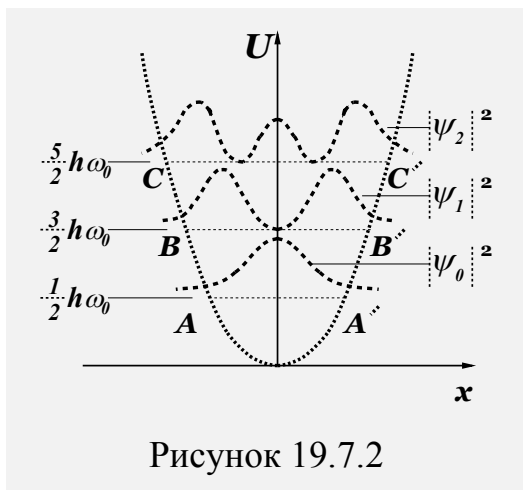
лённость координаты  $\Delta x \rightarrow \infty$  и противоречит факту пребывания частицы в потенциальной яме.

Существование нулевой энергии подтверждается на опытах по рассеянию света кристаллами при низких температурах. По классическим представлениям интенсивность рассеянного света по мере понижения температуры должна стремиться к нулю, а на опыте она приближается к некоторому конечному значению. Это означает, что и при абсолютном нуле колебания атомов в кристаллической решётке не прекращаются.

Плотность вероятности обнаружить частицу в некотором диапазоне на оси  $x$  определяется квадратом модуля волновой функции  $|\psi_n(x)|^2$ , которые, как доказывается в специальной литературе, имеют вид:

$$\psi_n(\xi) = A_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad (19.7.4)$$

где  $H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \{d^n(e^{-\xi^2}) / d\xi^n\}$ ,  $n=0,1,2,\dots$  – полиномы Чебышева – Эрмита,  $\xi = x\sqrt{m\omega_0 / \hbar}$ ,  $A_n = \{n!2^n \sqrt{\pi}\}^{-1/2}$  – нормировочная константа.



На рисунке 19.7.2 представлены кривые (пунктирные линии) распределения плотности вероятности  $|\psi_n(x)|^2$  для различных состояний квантового осциллятора, определяемых значениями квантового числа  $n$ .

В точках  $A$  и  $A'$ ,  $B$  и  $B'$ ,  $C$  и  $C'$ , как видно из рисунка 19.7.2, потенциальная энергия равна полной энергии ( $U = E$ ), причём, как известно, классический осциллятор не может выйти за пределы этих точек.

Для квантового осциллятора и за пределами этих точек  $|\psi_n(x)|^2$  имеет конечные значения.

Это означает, что в данной квантово-механической системе  $|\psi_n(x)|^2$  имеется хоть и небольшая, но отличная от нуля вероятность обнаружить частицу за пределами потенциальной ямы.

Расчёты, выходящие за рамки настоящего курса, показывают, что для квантового осциллятора возможны переходы лишь между соседними уровнями, разность между квантовыми числами  $n$  которых равна 1, то есть:

$$\Delta n = \pm 1. \quad (19.7.5)$$

Это – **правило отбора** для квантового гармонического осциллятора.

Из правила отбора (19.7.5) следует, что энергия гармонического осциллятора может изменяться только **дискретно** (квантами) на величину  $\hbar\omega_0$ , что полностью подтверждает гипотезу Планка об изменении энергии гармонического осциллятора при решении задачи о равновесном тепловом излучении (раздел 18.4).

## 19.8. Прохождение частиц через потенциальный барьер

**Потенциальным барьером** называют область пространств, в которой потенциальная энергия больше, чем в окружающих областях пространства.

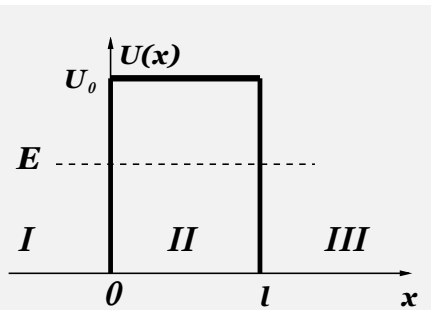


Рисунок 19.8.1

Частица массой  $m$  совершает одномерное движение, например слева направо, и встречает на своём пути потенциальный барьер высоты  $U_0$  и ширины  $l$  (рисунок 19.8.1). По классическим представлениям поведение частицы имеет следующий характер. Если энергия частицы больше высоты барьера  $E > U_0$ , частица беспрепятственно проходит над барьером (на участке  $0 < x < l$  лишь уменьшается скорость частицы, но затем, при  $x > l$ , снова принимает первоначальное значение). Если же  $E < U_0$  (как изображено на рисунке), то частица отражается от барьера и летит в обратную сторону; сквозь барьер частица проникнуть не может.

Стационарное уравнение Шрёдингера (19.4.5б) в данной задаче являются ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, и имеет вид (в отдельных областях):

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,3}}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_{1,3} = 0; \quad (19.8.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi_2 = 0, \quad (19.8.2)$$

причём наиболее интересен случай, когда в области II  $E - U_0 < 0$ . Именно эту ситуацию и рассмотрим здесь.

Обозначения  $\alpha = (1/\hbar)\sqrt{2mE}$  и  $\beta = (1/\hbar)\sqrt{2m(U_0 - E)}$ . Решения ЛОДУ (19.8.1) и (19.8.2) можно записать в виде:

$$\psi_{1,3} = A_{1,3}e^{i\alpha x} + B_{1,3}e^{-i\alpha x}; \quad (19.8.3)$$

$$\psi_2 = A_2e^{\beta x} + B_2e^{-\beta x}. \quad (19.8.4)$$

Решение вида  $\exp(i\alpha x)$  соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ , а решение вида  $\exp(-i\alpha x)$  – волне, распространяющейся в противоположном направлении.

В области III имеется только волна, прошедшая через барьер – коэффициент  $B_3$  в выражении (19.8.3) следует положить равным нулю. Для нахождения остальных коэффициентов используют регулярность волновой функции, то есть непрерывность самой волновой функции и её первых производных всюду, в том числе и в точках  $x = 0$  и  $x = l$ :

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 + B_2, \\ i\alpha A_1 - i\alpha B_1 &= \beta A_2 - \beta B_2, \\ A_2e^{\beta l} + B_2e^{-\beta l} &= A_3e^{i\alpha l}, \\ \beta A_2e^{\beta l} - \beta B_2e^{-\beta l} &= i\alpha A_3e^{i\alpha l}. \end{aligned} \quad (19.8.5)$$

После деления всех уравнений на  $A_1$  и введения обозначений:

$$b_1 = \frac{B_1}{A_1}; \quad a_2 = \frac{A_2}{A_1}; \quad b_2 = \frac{B_2}{A_1}; \quad a_3 = \frac{A_3}{A_1}; \quad c = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{U_0 - E}{E}} \quad (19.8.6)$$

уравнения (19.8.5) примут вид:

$$\begin{aligned} 1 + b_1 &= a_2 + b_2, \\ i - ib_1 &= ca_2 - cb_2, \\ a_2e^{\beta l} + b_2e^{-\beta l} &= a_3e^{i\alpha l}, \\ ca_2e^{\beta l} - cb_2e^{-\beta l} &= ia_3e^{i\alpha l}. \end{aligned} \quad (19.8.7)$$

**Коэффициент отражения:**

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = |b_1|^2. \quad (19.8.8)$$

**Коэффициент прозрачности:**

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = |a_3|^2. \quad (19.8.9)$$

Зная  $D$ , легко найти и  $R$ , поскольку эти коэффициенты связаны очевидным соотношением  $R + D = 1$ .

После умножения первого из уравнений (19.8.7) на  $i$  и складывания со вторым получим:

$$a_2(c + i) - b_2(c - i) = 2i. \quad (19.8.10)$$

А после умножения третьего из уравнений (19.8.7) на  $i$  и вычитания результата из четвёртого уравнения получим:

$$a_2(c - i)e^{\beta l} - b_2(c + i)e^{-\beta l} = 0. \quad (19.8.11)$$

Совместное решение уравнения (19.8.10) и (19.8.11) даёт:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2i(c + i)\exp(-\beta l)}{(c + i)^2 \exp(-\beta l) - (c - i)^2 \exp(\beta l)}; \\ b_2 &= \frac{2i(c - i)\exp(\beta l)}{(c - i)^2 \exp(\beta l) - (c + i)^2 \exp(-\beta l)}. \end{aligned} \quad (19.8.12)$$

Подставив найденные нами значения  $a_2$  и  $b_2$  в третье из уравнений (19.8.7)  $a_2 e^{\beta l} + b_2 e^{-\beta l} = a_3 e^{i\alpha l}$ , получим выражение для  $a_3$ :

$$a_3 = \frac{4ci}{(c + i)^2 \exp(-\beta l) - (c - i)^2 \exp(\beta l)} e^{-i\alpha l}. \quad (19.8.13)$$

$\beta l = \left( \sqrt{2m(U_0 - E)} / \hbar \right) \cdot l$  обычно бывает много больше единицы. В знаменателе выражения для  $a_3$  слагаемым, содержащим множитель  $\exp(-\beta l)$ , можно пренебречь по сравнению со слагаемым, содержащим множитель  $\exp(\beta l)$  (комплексные числа  $c + i$  и  $c - i$  имеют одинаковые модули):

$$a_3 \approx -\frac{4ci}{(c - i)^2} e^{-i\alpha l} \cdot e^{-\beta l}. \quad (19.8.14)$$

Для коэффициента прозрачности барьера:

$$D = |a_3|^2 \approx \frac{16c^2}{(c^2 + 1)^2} \cdot e^{-2\beta l} = D_0 \cdot e^{-2\beta l}, \quad (19.8.15)$$

где  $D_0 = 16c^2 / (c^2 + 1)^2$  порядка единицы. Имеем:

$$D \approx D_0 \exp(-2\beta l) = D_0 \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} \cdot l\right]. \quad (19.8.16)$$

Вероятность прохождения частицы через потенциальный барьер отлична от нуля, то есть микрочастицу можно обнаружить, в отличие от классической частицы, в области III. Рассмотренное нами явление, состоящее в возможности проникновения микрочастицы в область, недоступную для классической частицы, называется **туннельным эффектом**. Вероятность обнаружения микрочастицы в области III (туннелирования) сильно зависит от ширины барьера  $l$  и от величины  $U_0 - E$ . В частности, для электрона, при ширине потенциального барьера  $l = 10^{-10}$  м и его высоте  $U_0 - E = 10$  эВ по формуле (19.8.16) находим  $D = D_0 \cdot e^{-3,24} \approx 0,04D_0$ , а при той же ширине барьера, но вдвое меньшей высоте,  $U_0 - E = 5$  эВ, имеем  $D = D_0 \cdot e^{-2,29} \approx 0,1D_0$ . Коэффициент прозрачности барьера также резко уменьшается при увеличении массы частицы  $m$ .

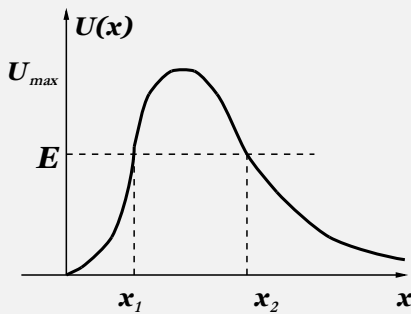


Рисунок 19.8.2

Полученный результат можно обобщить на потенциальный барьер произвольной формы (рисунок 19.8.2). В данном случае его можно приближённо представить в виде суммы узких прямоугольных барьеров.

Если потенциальный барьер произвольной формы удовлетворяет условиям так называемого квазиклассического приближения (достаточно гладкая форма кривой),

то **коэффициент прозрачности** с достаточно хорошим *приближением* определяется формулой:

$$D = D_0 \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[U(x) - E]} dx\right\}. \quad (19.8.17)$$

Туннельный эффект можно объяснить исходя из соотношения неопределённостей. Для простоты рассуждений будем считать, что барьер имеется только вдоль координаты  $x$  на некотором участке (например, от



0 до  $l$ ). Данное ограничение на движение микрочастицы в некоторой области пространства, означающее локализацию этой частицы и уменьшение неопределённости  $\Delta x$  по координате  $x$ , в соответствии с принципом неопределённостей Гейзенберга  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar / 2$ , приводит к возрастанию неопределённости проекции её импульса  $\Delta p_x$  и возможности добавления частице случайным образом энергии, так, что энергия станет достаточной для преодоления барьера. Таким образом, с некоторой вероятностью квантовая частица может проникнуть через барьер, а средняя энергия частицы останется неизменной.

Туннельный эффект – специфически квантовое явление, не имеющее аналога в классической физике (где такого в принципе не может быть). Этот эффект объясняет многие физические явления, например холодную эмиссию электронов из металлов, альфа-распад, спонтанное деление ядер и другие, и лежит в основе функционирования различных приборов, например полупроводниковых туннельных диодов.

### 19.9. Водородоподобный атом

Водородоподобные системы – это такие системы, в которых электрон движется в электрическом поле неподвижного массивного ядра с зарядом  $+Ze$  ( $Z=1$  для атома водорода и  $Z=2, 3, 4, \dots$  для других водородоподобных систем (ионов)).

Потенциальная энергия системы или электрона в электрическом поле неподвижного ядра:

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (19.9.1)$$

$e$  – элементарный заряд,  $\epsilon_0 \cong 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная,  $Z=1, 2, 3, \dots$  – зарядовые числа ядер,  $r$  – длина радиус-вектора точки наблюдения.

Стационарное уравнение Шрёдингера:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m_0}{\hbar^2} \overbrace{\left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)}^{k^2} \psi = 0, \quad (19.9.2)$$

$\nabla^2 \equiv \Delta$  – дифференциальный оператор Лапласа, вид которого зависит от выбора системы координат, действующий на три пространственные координаты,  $k^2 = (2m_0 / \hbar^2)(E + Ze^2 / 4\pi\epsilon_0 r)$ .

Задача имеет сферическую симметрию, поэтому вводят сферические координаты  $r, \theta, \varphi$ . Оператор Лапласа в этом случае:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \equiv \Delta &= \overbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)}^{\Delta_r} + \frac{1}{r^2} \left[ \overbrace{\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}^{\Delta_{\theta, \varphi}} \right] = \\ &= \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi}.\end{aligned}\quad (19.9.3)$$

Решение ищем в виде:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = G(r) \underbrace{Y(\theta) \Phi(\varphi)}_{\Gamma(\theta, \varphi)} = G(r) \Gamma(\theta, \varphi); \quad \Gamma(\theta, \varphi) = Y(\theta) \Phi(\varphi). \quad (19.9.4)$$

С учётом (19.9.3) и (19.9.4):

$$\left( \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \right) G(r) \Gamma(\theta, \varphi) + k^2 G(r) \Gamma(\theta, \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad (19.9.5a)$$

$$\Gamma(\theta, \varphi) \Delta_r G(r) + \frac{G(r)}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \Gamma(\theta, \varphi) + k^2 R(r) \Gamma(\theta, \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad (19.9.5b)$$

$$\underbrace{r^2 \frac{\Delta_r G(r)}{G(r)}}_{\text{зависит только от } r} + k^2 r^2 = - \underbrace{\frac{\Delta_{\theta, \varphi} \Gamma(\theta, \varphi)}{\Gamma(\theta, \varphi)}}_{\text{зависит только от } \theta \text{ и } \varphi}. \quad (19.9.5b)$$

Величины в (19.9.5b) слева и справа от знака равенства есть одна и та же постоянная  $\lambda$ .

Уравнение Шрёдингера (19.9.2) разделилось на два независимых ДУ:

$$\Delta_r G(r) + k^2 G(r) = \frac{\lambda}{r^2} G(r) \quad \Rightarrow \quad \Delta_r G(r) + \left( k^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) G(r) = 0 \quad (19.9.6)$$

и

$$-\frac{\Delta_{\theta, \varphi} \Gamma(\theta, \varphi)}{\Gamma(\theta, \varphi)} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \Delta_{\theta, \varphi} \Gamma(\theta, \varphi) + \lambda \Gamma(\theta, \varphi) = 0. \quad (19.9.7)$$

Радиальное уравнение (19.9.6):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right) + \left( k^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) G = 0. \quad (19.9.8)$$

В (19.9.7) вновь разделим переменные заменой  $\Gamma(\theta, \varphi) = Y(\theta)\Phi(\varphi)$  :

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{Y(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \lambda Y(\theta)\Phi(\varphi) = 0 \Rightarrow \quad (19.9.9)$$

$$\Rightarrow \overbrace{\frac{1}{Y(\theta)} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y(\theta)}{\partial \theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta}^{m^2} = - \overbrace{\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}}^{m^2}. \quad (19.9.9a)$$

В итоге:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dY(\theta)}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) Y(\theta) = 0 \quad (19.9.10)$$

и

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0. \quad (19.9.11)$$

В курсах математики доказывается, что уравнение (19.9.10) имеет решения только при условии  $\lambda = l(l+1)$ ;  $l = 0, 1, 2, \dots$ , и эти решения имеют вид:

$$Y_{l,m}(\cos \theta) = \left[ \frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta), \quad (19.9.12)$$

где  $P_l^m(\cos \theta)$  – специальные функции, называемые присоединёнными полиномами Лежандра:

$$P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_l(\cos \theta), \quad (19.9.13)$$

$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$  или  $P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d(\cos \theta)^l} (\cos^2 \theta - 1)^l$  – полиномы

Лежандра. Множитель в квадратных скобках (19.9.12) содержит величины  $(l-m)!$  и  $(l+m)!$ , что, с учётом определения факториала, приводит к необходимости выполнения условия  $|m| \leq l$ .

Из условия нормировки:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{V_{\text{доступ}}} \Psi^* \Psi dV = \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr \int_0^\pi |Y|^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} |\Phi|^2 d\varphi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = 1; \quad \int_0^\pi |Y|^2 \sin \theta d\theta = 1; \quad \int_0^{2\pi} |\Phi|^2 d\varphi = 1. \end{aligned} \quad (19.9.14)$$

Решение уравнения (19.9.11) имеет вид:

$$\Phi_m(\varphi) = Ce^{im\varphi}. \quad (19.9.15)$$

Из условия:

$$\int_0^{2\pi} Ce^{im\varphi} \cdot C^* e^{-im\varphi} d\varphi = |C|^2 \cdot 2\pi = 1 \Rightarrow C = 1/\sqrt{2\pi}. \quad (19.9.16)$$

Из условия однозначности функции  $\Phi(\varphi) = Ce^{im\varphi}$  (значения не должны различаться при любом повороте на угол, кратный  $2\pi$ ):

$$\Phi_m(\varphi) = \Phi_m(\varphi + m2\pi) \Rightarrow e^{im2\pi} = 1 \Rightarrow m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (19.9.17)$$

Радиальное уравнение:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG(r)}{dr} \right) + \frac{2m_0}{\hbar^2} \left[ E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_0 r^2} \right] G(r) = 0. \quad (19.9.18)$$

Начала отсчёта для потенциальной энергии  $U(r) = -Ze^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$  выбрано так, что полная энергия водородоподобного атома  $E$  для связанного состояния отрицательна и становится положительной величиной, когда электрон не связан с ядром, то есть в случае свободного электрона.

Решение радиального уравнения (19.9.18) вынесено в Приложение 2.

Окончательные результаты состоят в следующем. Радиальное уравнение (19.9.18) имеет решения для двух этих случаев, удовлетворяющих требованиям, налагаемым на волновые функции, причём:

1) если полная энергия системы  $E$  не отрицательна ( $E \geq 0$ ), то решения имеются при **любых неотрицательных значениях  $E$** . Это означает, что электрон, будучи не связан с ядром (свободный электрон), совершает **инфинитное** движение;

2) если энергия  $E$  отрицательна ( $E < 0$ ), то решения имеются только для некоторых **дискретных (разрешённых) отрицательных значений  $E$** . Здесь связанный электрон локализован в некоторой окрестности ядра и совершает **финитное** движение в системе с конкретным разрешённым отрицательным значением энергии.

Случай  $E \geq 0$  не интересен и не будет рассматриваться.

В связанном состоянии уравнение для радиальной части волновой функции имеет решения при дискретных значениях энергии:

$$E_n = -\frac{Z^2 m_0 e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n=1,2,3, \dots, \quad n = n_r + l + 1. \quad (19.9.19)$$

Радиальная часть волновой функции:

$$G_{n,l}(\rho) = \rho^l e^{-\frac{\rho}{n}} \sum_{k=0}^{n_r} c_k \rho^k, \quad (19.9.20)$$

$\rho = Zr / a$ ,  $a$  – радиус Бора;  $a = (4\pi\varepsilon_0 \hbar^2) / (m_0 e^2) = 0,529\,177\,249(24) \cdot 10^{-10}$  м.

В (19.9.19) и (19.9.20) целое число  $n_r$ ,  $n_r = 0, 1, 2, \dots$  – **радиальное** квантовое число; целое число  $n = n_r + l + 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  – **главное** квантовое число. Главное квантовое число имеет минимальное значение, равное 1 (при  $n_r = 0$  и  $l = 0$ ).

Энергия  $E_n$  водородоподобного атома (иногда говорят: энергия электрона в водородоподобном атоме) принимает ряд дискретных отрицательных значений, полностью определяемых значением главного квантового числа  $n$ . При  $n \rightarrow \infty$  энергия  $E_n \rightarrow 0$ , что соответствует освобождению электрона от связи с ядром и переходу к его инфинитному движению.

Состояние водородоподобного атома с минимальным значением главного квантового числа  $n = 1$  называют основным (невозбуждённым), и ему соответствует энергия  $E_1 = -Z^2(m_0 e^4) / (32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2) = -Z^2 W$ , где  $W = (m_0 e^4) / (32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2) = 13,6056981$  эВ – в точности соответствует энергии ионизации атома водорода в теории Бора.

Найденные нами величины  $E_1$  и  $a$  находятся в отличном соответствии с экспериментом и со значениями соответствующих величин в теории Бора, но не потребовали введения дополнительных предположений, условий и постулатов, аналогичных постулатам в теории Бора.

Волновая функция стационарного уравнения Шрёдингера

$$\psi(r, \theta, \varphi) = G_{n,l}(Z\rho / a) Y_{l,m}(\cos\theta) \Phi_m(\varphi) \quad (19.9.21)$$

зависит от трёх целых чисел  $n$ ,  $l$  и  $m$ , называемых квантовыми числами.

**Главное** квантовое число  $n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , однозначно определяет энергию системы. **Орбитальное** квантовое число  $l$ ,  $l = 1, 2, \dots, (n-1)$ , определяет момент импульса системы, обусловленный «орбитальным»

движением электрона. **Магнитное** квантовое число  $m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, l$ , ограничено по модулю  $|m| \leq l$  (пояснено к формуле (19.9.13)).

Во всех состояниях водородоподобной системы, кроме состояния с  $n = 1$ , одному значению энергии соответствует несколько волновых функций, различающихся значениями квантовых чисел  $l$  и  $m$  – **вырожденные** состояния. **Кратность вырождения**  $f$  данного состояния системы – число волновых функций, различающихся значениями квантовых чисел  $l$  и  $m$  при данном значении  $n$ . При заданном значении главного квантового числа  $n > 1$   $l$  принимает  $(n - 1)$  значение  $l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$ ;  $m$  при каждом из указанных возможных значений  $l$  принимает  $(2l + 1)$  возможных значений  $m = 0, \underbrace{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm l}_{2l \text{ значений}}$ . Нужно просуммировать число  $(2l + 1)$  различных состояний при заданном  $l$  по всем возможным значениям  $l$ :

$$f = \sum_{l=0}^{n-1} 2l + 1 = \sum_{k=1}^n 2(k - 1) + 1 = n^2. \quad (19.9.22)$$

Сумма (19.9.22) легко вычисляется, если обратить внимание на то, что речь идёт о вычислении суммы  $n$  членов  $S_n = (a_1 + a_n)n / 2 = (2a_1 + (n - 1)d)n / 2$  арифметической прогрессии с общим членом  $a_k = 2(k - 1) + 1 = 2k - 1$ ,  $d = 2(k + 1) - 1 - (2k - 1) = 2k + 2 - 1 - 2k + 1 = 2$ ,  $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ ,  $a_n = 2n - 1$  и  $S_n = (1 + 2n - 1)n / 2 = 2n^2 / 2 = n^2$ .

Квантовое число  $l$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$ , появляется при определении возможных значений постоянной разделения  $\lambda = l(l + 1)$  и присутствует в числителе в третьем члене  $\hbar^2 l(l + 1) / (2m_0 r^2)$  в квадратных скобках уравнения (19.9.18). Все три указанные величины имеют размерность энергии, причём первый член  $E$  – это полная энергия системы, второй член  $U(r)$  – потенциальная энергия системы, и третий член  $T = \hbar^2 l(l + 1) / (2m_0 r^2)$  – кинетическая энергия системы, связанная с «орбитальным» движением электрона, то есть:

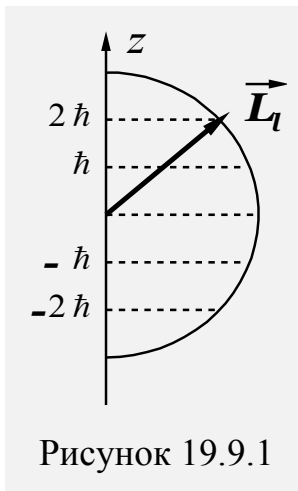
$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2 l(l + 1)}{2m_0 r^2} = T &\Rightarrow \hbar^2 l(l + 1) = r^2 (2m_0 T) = r^2 (2m_0 \frac{p^2}{2m_0}) = \\ &= \underbrace{(rp)^2}_{L_l^2} = L_l^2 \Rightarrow L_l = \hbar \sqrt{l(l + 1)}. \end{aligned}$$

По размерности и по смыслу величина  $L_l = rp$  – модуль вектора момента импульса. Из этой аналогии и равенства  $L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$  следует название *орбитальное квантовое число*.

Более точное толкование названия орбитального квантового числа следует из того факта, что стационарные волновые функции  $\psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi)$ , описывающие различные квантовые состояния атома, являются собственными функциями не только оператора полной энергии  $\hat{H}$ , но и оператора квадрата момента импульса  $\hat{L}^2 = -\hbar^2\Delta_{\theta,\varphi}$ , для которого уравнение (19.9.7) принимает вид:

$$\hat{L}^2\Gamma(\theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1)\Gamma(\theta,\varphi) \Rightarrow \hat{L}^2\psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1)\psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi).$$

В любом квантовом состоянии водородоподобный атом обладает определенным значением квадрата момента импульса, причём модуль орбитального момента импульса определяется орбитальным квантовым числом, то есть  $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ .



Целое число  $m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, l$ , называемое магнитным квантовым числом, задаёт возможные значения проекции орбитального момента импульса на некоторую ось, обозначаемую обычно  $z$  (см. рисунок 19.9.1);  $m$  является собственным значением оператора проекции момента импульса  $\hat{L}_z = -i\hbar(\partial/\partial\varphi)$  на ось  $z$ , то есть собственным значением уравнения:

$$\hat{L}_z\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi) = m\hbar\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, l.$$

В квантовой механике, в отличие от классической, проекция момента импульса на выделенное в пространстве направление  $z$  может иметь не произвольные, а только определенные значения  $L_z = m\hbar$ . Выделение направления в пространстве осуществляется, как правило, заданием какого-либо внешнего поля, например магнитного. Отсюда и идёт название квантового числа  $m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, l$ . Магнитное квантовое число определяет возможные значения проекций момента импульса на выделенную ось, и, следовательно, определяет пространственное расположение момента импульса по отношению к указанной оси (рисунок 19.9.1).

Состояние атома однозначно определяется конкретным набором квантовых чисел. Перевод атома из одного состояния в другое (это можно осуществить, например, испусканием либо поглощением фотона) связан с изменением набора этих квантовых чисел. В курсах квантовой механики доказывается **правило отбора** для орбитального квантового числа  $l$ : возможны только те переходы, в которых орбитальное квантовое число  $l$  изменяется на единицу, то есть  $\Delta l = \pm 1$ . Правило обусловлено необходимостью соблюдения при взаимодействии атома с излучением закона сохранения энергии и закона сохранения импульса.

Орбитальное квантовое число определяет также возможные значения магнитного момента атома, связанного с «орбитальным» движением электрона. Финитному орбитальному движению электрона по круговой орбите радиуса  $r$  со скоростью  $\vec{v}$  и с периодом  $T$  можно сопоставить замкнутый электрический ток, силу которого можно оценить исходя из выражения

$$I_e = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}. \quad (19.9.23)$$

Данному круговому току соответствует орбитальный магнитный момент  $\vec{p}_m = I_e \pi r^2 \vec{n}$  (см. рисунок 19.9.2), и можем установить связь между орбитальным магнитным моментом и орбитальным моментом импульса:

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{e}{2m_0} \overbrace{m_0 v r}^{=rp=L_l} = \frac{e}{2m_0} L_l \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{p}_m &= \underbrace{\frac{e}{2m_0}}_g \vec{L}_l = g \vec{L}_l; \quad g = -\frac{e}{2m_0} < 0. \end{aligned} \quad (19.9.24)$$

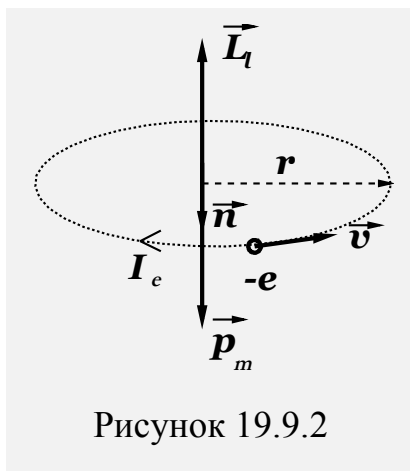


Рисунок 19.9.2

Величина  $g = -(e/2m_0) < 0$  называется **гиромангнитным отношением** (орбитальным). В квантовой теории орбитальный магнитный момент корректно определяется на основе формулы  $\vec{j}_e = -e\vec{j}$ , где  $\vec{j}_e$  – плотность электрического тока, соответствующего движению электрона,  $\vec{j}$  – плотность потока вероятности (19.5.12). Точный расчёт гиромангнитного отношения, основанный на этой формуле и на полной волновой функции

для рассматриваемого состояния водородоподобной системы, приводит к той же величине  $g = -(e/2m_0)$ .



Приходим к определению возможных значений орбитального магнитного момента:

$$p_m = |g| L_l = \frac{e\hbar}{2m_0} \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{l(l+1)}; \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0}. \quad (19.9.25)$$

$$\mu_B = e\hbar / (2m_0) = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл} - \text{магнетон Бора}.$$

Вводят буквенно-цифровые обозначения различных состояний:

|                  |   |   |   |   |   |     |
|------------------|---|---|---|---|---|-----|
| Значение $l$     | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| Символ состояния | s | p | d | F | g | ... |

Для полного обозначения квантового состояния атома числовое значение главного квантового числа указывается перед символом состояния. Так, квантовое состояние с  $n = 2$  и  $l = 0$  обозначается символом  $2s$ , состояние с  $n = 3$  и  $l = 3$  обозначается символом  $3f$  и т. п.

Штерн (Штерн Отто, нем., 1888–1969) и Герлах (Вальтер Гёрлах, нем., 1889–1979) изучали в 1922 году поведение в сильном магнитном поле атомов водорода в основном состоянии  $1s \Rightarrow n = 1, l = 0, m = 0$ . В данном состоянии орбитальный магнитный момент атома водорода, в соответствии с формулой (19.9.25)  $p_m = \mu_B \sqrt{l(l+1)}$ , равен нулю и атомы водорода в таком состоянии не должны были отклоняться от прямолинейного движения в магнитном поле. Однако Штерн и Герлах обнаружили расщепление пучка атомов водорода в основном состоянии в сильном магнитном поле на два пучка, что свидетельствовало о наличии магнитного момента у исследуемых атомов и о двух возможных значениях этой величины.

В 1925 г. Уленбек (Джордж Юджин Уленбек, амер., 1900–1988) совместно с Гоулдсмитом (Сэмюэл Абрахам Гаудсмит, амер., 1902–1978) предложили рассматривать электрон как «вращающийся волчок», который имеет собственный механический момент (*спин*), равный  $\hbar/2$ , и собственный магнитный момент, равный магнетону Бора.

Если собственный момент импульса и магнитный момент электрона обусловлены его вращением вокруг собственной оси симметрии, то скорость на поверхности электрона должна превышать скорость света, что недопустимо с позиции релятивизма (Ральф Крониг, нидерл., 1904–1995). Кроме того, гиромагнитное отношение, определённое по результатам опытов Штерна и Герлаха, в два раза превышало орбитальное гиромагнитное

отношение  $|g| = e / 2m_0$  и составляет  $2|g| = e / m_0 = 2\mu_B$ . В итоге гипотезу о связи собственного момента импульса и магнитного момента электрона с вращением электрона вокруг собственной оси пришлось отвергнуть, а название *спин* так и осталось для обозначения собственного момента импульса электрона.

В итоге физики были вынуждены признать, что спин не связан с движением в пространстве и является внутренней, исключительно квантовой характеристикой, присущей микрообъектам (так же, как и другие их характеристики: заряд, масса и т. п.), которую нельзя объяснить в рамках классической релятивистской механики. В дальнейшем выяснилось, что спином обладает не только электрон, но и другие микрообъекты. Установлено, что спин (и его проекции на какую-либо ось) может принимать как целые, так и полуцелые значения (в единицах постоянной  $\hbar$ ).

По аналогии с орбитальным моментом импульса, спин принимает значения:

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad (19.9.26)$$

а его проекция на некоторую ось  $z$

$$L_{sz} = \hbar m_s, \quad (19.9.27)$$

где  $s$  – спиновое квантовое число (спин);  $m_s$  – спиновое магнитное квантовое число. Значения этих квантовых чисел могут изменяться в зависимости от вида микрочастиц.

Для электрона: проекция спина и, соответственно, спинового магнитного числа  $m_s$ , принимает  $2s + 1$  значений. Из опытов Штерна – Герлаха следует, что это число равно 2:

$$2s + 1 = 2; \quad s = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m_s = \pm s = \pm \frac{1}{2}. \quad (19.9.28)$$

С учётом спина кратность вырождения состояния водородоподобного атома (и число возможных состояний с различными квантовыми числами при фиксированном главном квантовом числе):

$$f = 2 \left( \sum_{l=0}^{n-1} 2l + 1 \right) = 2 \left[ \sum_{k=1}^n 2(k-1) + 1 \right] = 2n^2. \quad (19.9.29)$$

## 19.10. Многоэлектронные атомы

Поведение систем (коллективов) микрочастиц, таких, например, как многоэлектронные атомы, определяется **принципом тождественности** микрочастиц:

*В замкнутой системе одинаковых (то есть обладающих одинаковыми физико-химическими характеристиками: массой, зарядом, спином и т. п.) микрочастиц реализуются только такие квантовые состояния, которые не меняются при перестановке местами двух любых частиц.*

Обнаружить замену одной микрочастицы на другую тождественную микрочастицу опытным путём нельзя. В классической механике можно проследить за движением отдельных частиц по траекториям и таким образом отличить их друг от друга. Состояние микрочастицы в квантовой механике описывается с помощью волновой функции. В случае перекрытия в пространстве волновых функций двух (или более) тождественных микрочастиц нет смысла говорить о том, какая из частиц находится в данной точке; имеет смысл говорить лишь о вероятности нахождения в этой точке одной из тождественных микрочастиц.

Математически принцип тождественности микрочастиц можно выразить при помощи понятия перестановки координат частиц и соответствующего оператора перестановки координат частиц.

Для упрощения пояснения этих понятий рассмотрим систему из двух тождественных микрочастиц. Обозначим наборы координат (пространственных и прочих) этих микрочастиц  $x_1$  – набор координат частицы 1;  $x_2$  – набор координат частицы 2;  $\Psi(x_1, x_2)$  и  $\Psi(x_2, x_1)$  – волновые функции этих систем до и после перестановки частиц местами.

В соответствии с принципом тождественности микрочастиц обнаружить перестановку тождественных микрочастиц нельзя:

$$|\Psi(x_1, x_2)|^2 = |\Psi(x_2, x_1)|^2 \quad (19.10.1)$$

Из (19.10.1) следует:

$$\Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_2, x_1) \quad (19.10.2)$$

и

$$\Psi(x_1, x_2) = -\Psi(x_2, x_1). \quad (19.10.3)$$

Первая из ситуаций (см. 19.10.2), соответствующая симметричной (относительно перестановки частиц) волновой функции, реализуется в системах тождественных микрочастиц, называемых **бозонами** (от имени Шатъендранат Бóзе, инд., 1894–1974). Вторая ситуация, соответствующая антисимметричной (относительно перестановки частиц) волновой функции, реализуется в системах тождественных микрочастиц, называемых **фермионами** (от имени Энри́ко Фёрми, итал., 1901–1954, лауреат Нобелевской премии в 1938 г. за открытие ядерных реакций под действием медленных нейтронов).

В дальнейшем было установлено, что симметричность или антисимметричность волновых функций систем тождественных микрочастиц определяется спином этих микрочастиц.

Системы тождественных микрочастиц с целым спином (то есть  $L_s = \hbar, 2\hbar, 3\hbar, \dots$  – бозоны (фотоны, мезоны, ядра, содержащие чётное количество нуклонов (протонов и нейтронов), мюон,  $W^\pm$  и  $Z$  бозоны, гравитон (гравитационное взаимодействие), бозон Хиггса и другие).

Системы тождественных микрочастиц с полуцелым спином (то есть  $L_s = \hbar/2, 3\hbar/2, 5\hbar/2, \dots$  – фермионы (лептоны (электрон, мюон, нейтрино), кварки, протон, нейтрон и другие)).

Отличие фермионов от бозонов определяется **принципом Паули** (Вóльфганг Эрнст Па́ули, нем., 1900–1958, лауреат Нобелевской премии по физике, 1945 г.):

*В замкнутой системе тождественных фермионов любые два (или более) из них не могут находиться в одном и том же состоянии, то есть не могут иметь одинаковый набор квантовых чисел.*

К атомам: **в атоме не может быть более одного электрона с данным набором квантовых чисел**. Например, в многоэлектронном атоме у двух электронов при равных квантовых числах  $n$ ,  $l$  и  $m$  спиновое магнитное число  $m_s$  должно отличаться.

Для описания электронной структуры основного состояния атома с порядковым номером  $Z$  надо расположить  $Z$  электронов по различным квантовым состояниям с наименьшей энергией. Для подсчёта электронных состояний используется набор квантовых чисел. Все электроны с одинаковым главным квантовым числом  $n$  относятся к одному электронному слою, и максимальное число электронов в этом слое  $2n^2$ .

Слои с различными значениями главного квантового числа  $n$  обозначаются большими буквами латинского алфавита, начиная с  $K$  для  $n = 1$ . Далее  $L$  ( $n = 2$ ),  $M$  ( $n = 3$ ), и так далее по алфавиту. Все электроны в данном слое с фиксированным орбитальным квантовым числом  $l$  образуют электронную **оболочку** с  $2l(l + 1)$  электронами.

В основе последовательности заполнения слоёв и оболочек лежат сформулированный выше принцип Паули и принцип минимума энергии, состоящий в следующем: при заданном общем числе электронов в атоме осуществляется состояние с минимальной энергией.

Энергия системы увеличивается с ростом  $n$ . Сначала заполняется  $K$ -слой, затем  $L$ -слой и так далее.

Для определения последовательности заполнения состояний  $s, p, d, f, \dots$  в пределах каждого слоя необходимо дополнительные данные, поскольку при фиксированном главном квантовом числе  $n$  энергия системы от значений орбитального квантового числа  $l$  не зависит. Учёт взаимодействия между электронами приводит к слабой зависимости энергии системы и от орбитального квантового числа  $l$ : энергия увеличивается с возрастанием  $l$  при фиксированном  $n$ . Заполнение оболочки начинается с  $l = 0$  и заканчивается на  $l = n - 1$ . Каждый добавляемый к системе электрон связывается в состоянии с наименьшими допустимыми принципом Паули квантовыми числами  $n$  и  $l$ . Полностью заполненная оболочка соответствует электронной конфигурации благородного газа. После этого начинает заполняться следующая оболочка, первым элементом которой является щелочной металл.

Последовательность заполнения электронных состояний при одном и том же значении орбитального квантового числа  $l$  определяется **правилом Хунда** (Фридрих Хунд, нем., 1896–1997): при фиксированном  $l$  сначала заполняются состояния с различными значениями орбитального магнитного квантового числа  $m$  в порядке  $m = -l, (-l + 1), \dots, (l - 1), l$  при одинаковом значении спинового магнитного квантового числа  $m_s$  (например,  $m_s = 1/2$ ) и когда все  $2l + 1$  по квантовому числу  $m$  заполняются электронами с одинаковым спиновым магнитным квантовым числом  $m_s$ , происходит заполнение электронами с противоположным спиновым магнитным квантовым числом  $m_s = -1/2$ .

Возможные максимальные числа электронов в каждом из слоёв и оболочек приведены в таблице 1.

Таблица 1

| Значения $n$ | Слой | Числа электронов в оболочках |             |             |             |             | Максимальное число электронов в слое |
|--------------|------|------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------------------------------|
|              |      | $s (l = 0)$                  | $s (l = 1)$ | $s (l = 2)$ | $s (l = 3)$ | $s (l = 4)$ |                                      |
| 1            | К    | 2                            |             |             |             |             | 2                                    |
| 2            | L    | 2                            | 6           |             |             |             | 8                                    |
| 3            | M    | 2                            | 6           | 10          |             |             | 18                                   |
| 4            | N    | 2                            | 6           | 10          | 14          |             | 32                                   |
| 5            | O    | 2                            | 6           | 10          | 14          | 18          | 50                                   |

Фактические электронные конфигурации некоторых атомов приведены в таблице 2. В слоях M и далее заполненные оболочки отмечены в квадратных скобках.

Таблица 2

|                                    |                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>K-слой</i>                      | ${}^1H - 1s; {}^2He - 1s^2$                                                                                                                                                                                                                |
| <i>L-слой</i>                      | ${}^3Li - 1s^2 2s; {}^4Li - 1s^2 2s^2; {}^5B - 1s^2 2s^2 2p; {}^6C - 1s^2 2s^2 2p^2;$<br>${}^7N - 1s^2 2s^2 2p^3; {}^8N - 1s^2 2s^2 2p^4;$<br>${}^9N - 1s^2 2s^2 2p^5; {}^{10}N - 1s^2 2s^2 2p^6$                                          |
| две оболочки<br><i>M-слоя</i>      | ${}^{11}Na - [K, L] 3s; {}^{12}Mg - [K, L] 3s^2; {}^{13}Al - [K, L] 3s^2 3p;$<br>${}^{14}Si - [K, L] 3s^2 3p^2; {}^{15}P - [K, L] 3s^2 3p^3;$<br>${}^{16}S - [K, L] 3s^2 3p^4; {}^{17}Cl - [K, L] 3s^2 3p^5; {}^{18}Ar - [K, L] 3s^2 3p^6$ |
| <i>s-оболочка</i><br><i>N-слоя</i> | ${}^{19}K - [K, L] 3s^2 3p^6 4s; {}^{20}Ca - [K, L] 3s^2 3p^6 4s^2$                                                                                                                                                                        |
| <i>d-оболочка</i><br><i>M-слоя</i> | ${}^{21}Sc - [K, L] 3s^2 3p^6 3d 4s^2; {}^{22}Ti - [K, L] 3s^2 3p^6 3d^2 4s^2$                                                                                                                                                             |

Описанная выше последовательность заполнения оболочек выполняется только для первых 18 элементов периодической системы Менделеева, начиная с 19-го элемента ( ${}^{19}K$ ) идеализированная последовательность нарушается.

Отклонения от этой последовательности происходят по той причине, что взаимодействием электронов между собой и отклонением поля от кулоновского пренебрегать нельзя.

В курсах квантовой механики и квантовой химии показывается, что учёт взаимодействия электронов позволяет полностью объяснить периодическую систему элементов.

К началу 20 века различными учёными (Иоганн Якоб Бальмер, швейц., 1825–1898; Лайман Теодор, амер., 1874–1954; Йоханнес Роберт Ридберг, швед., 1854–1919; Луис Карл Генрих Фридрих Пашен, нем., 1865–1947; Фредерик Самнер Бракетт, амер., 1896–1988; Пфунд Август Герман, амер., 1879–1949 и др.) был накоплен большой материал по спектрам излучения атомов различных веществ.

Установлено, что спектры излучения атомов различных веществ состоят из отдельных спектральных линий (являются *линейчатыми*).

Для спектров излучения атома водорода была экспериментально установлена закономерность:

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad n > m; \quad (19.10.4a)$$

$$\nu = cR' \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad n > m, \quad (19.10.4b)$$

где  $c = 2,998 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме,  $R' = 1,097 \cdot 10^7$  м<sup>-1</sup> и  $R = cR' = 3,293 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup> – постоянная Ридберга (Йоханнес Роберт Ридберг, швед., 1854–1919).

Группа линий с одинаковым значением  $m$  образует *серию*. Для атома водорода эти серии имеют имена:  $m = 1$  – *серия Лаймана* (ультрафиолетовая область спектра);  $m = 2$  – *серия Бальмера* (видимая область спектра);  $m = 3$  – *серия Пашена* (инфракрасная область спектра);  $m = 4$  – *серия Бракета* (инфракрасная область спектра);  $m = 5$  – *серия Пфунда* (инфракрасная область спектра);  $m = 6$  – *серия Хемпфри* (инфракрасная область спектра).

Экспериментальные данные находятся в полном соответствии с результатами решения уравнения Шрёдингера для водородоподобного атома.

Из выражения (19.9.19) для собственных значений энергии для частоты излучения при переходе из состояния с энергией  $E_n$  в состояние с энергией  $E_m$ ;  $n > m$ ,  $E_m < E_n$ :

$$\nu = \frac{E_n - E_m}{h} = Z^2 \frac{m_0 e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = Z^2 R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (19.10.5)$$

Подставляя числовые значения, для постоянной Ридберга находим:  $R = m_0 e^4 / (8 \varepsilon_0^2 h^3) \cong 3,29 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup>, что отлично согласуется с экспериментальным значением этой величины.

## Глава 20. СТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА ЯДРА. ЧАСТИЦЫ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

### 20.1. Состав и характеристики ядер

Атомные ядра различных элементов состоят из нуклонов. Каждый из нуклонов может находиться в одном из двух зарядовых состояний: с положительным электрическим зарядом  $e$  (**протон**) и с нулевым электрическим зарядом – **нейтрон**.

Нейтрон обнаружен в 1932 г. Дж. Чедвиком (сэр Джеймс Чедвик, англ., 1891–1974, лауреат Нобелевской премии по физике, 1935 г.) при облучении бериллиевой мишени потоком альфа-частиц.

Гипотеза о протонно-нейтронном строении атомных ядер появилась после открытия нейтрона Д. Д. Иваненко (Дмитрий Дмитриевич Иваненко, рус., 1904–1994) и В. Гейзенберг (Вернер Карл Гейзенберг, нем., 1901–1976, лауреат Нобелевской премии по физике, 1932 г.). Протоны и нейтроны принято называть нуклонами.

**Протон**  ${}^1_1p$ . Краткое обозначение протона  $p$ , он имеет электрический заряд  $q_p = +e$  и массу  $m_p = 1,67262 \cdot 10^{-27}$  кг. Полное обозначение протона  ${}^1_1p$ . В левом нижнем углу указывается заряд частицы в единицах элементарного заряда (зарядовое число  $Z$ ); в левом верхнем углу (массовое число  $A$ ) указывается число нуклонов.

Принято массу частицы выражать в эквивалентных значениях энергии на основе формулы  $E = mc^2$  и измерять в электрон-вольтах (эВ).

Для протона:  $E_p = m_p c^2 \approx 938,27917$  МэВ и  $m_p \approx 938,27917$  МэВ/с<sup>2</sup>. Часто опускают множитель  $1/c^2$ , записывая просто  $m_p \approx 938,27917$  МэВ.

Масса электрона равна  $m_e = 0,5110034$  МэВ  $\longrightarrow m_p / m_e = 1836,15$ .

Массу частицы выражают в атомных единицах массы (а. е. м). 1 а. е. м. =  $1/12$  массы нуклида  ${}^{12}_6C$ . 1 а. е. м.  $\approx 1,6605402 \cdot 10^{-27}$  кг = 931,494028 МэВ.

Спин  $s = 1/2$ ; собственный магнитный момент  $p_{m,p} = +2,79\mu_y$ , где  $\mu_y = e\hbar / (2m_p) = 5,05 \cdot 10^{-27}$  Дж/Тл – ядерный магнетон, который примерно в 1836 раз меньше магнетона Бора  $\mu_B = e\hbar / (2m_0) = 0,927 \cdot 10^{-23}$  Дж/Тл.

**Нейтрон**  ${}^1_0n$ . Краткое обозначение нейтрона  $n$ , имеет нулевой электрический заряд и массу  $m_n = 1,67493 \cdot 10^{-27}$  кг, или  $m_n = 939,56535$  МэВ.



Спин  $s = 1/2$  и собственный магнитный момент  $p_{m,n} = -1,91\mu_n$ . Знак минус означает, что направления собственного механического и магнитного моментов противоположны. В свободном состоянии нейтрон нестабилен и самопроизвольно распадается:



Период полураспада (т. е. время, за которое распадается половина первоначального количества нейтронов) равен примерно 12 мин.

### Характеристики атомного ядра.

Зарядовое число  $Z$  (совпадает с порядковым номером элемента в периодической таблице Менделеева и числом протонов, входящих в состав атомного ядра).

Массовое число  $A$ , равное числу нуклонов в ядре:  $A = Z + N$ . Ядра химических элементов обозначают символом  $X$  (или  $Y$ ), так что имеем в итоге  ${}_Z^AX$ . Например,  ${}_1^1H$  – водород,  ${}_2^4He$  – гелий.

**Изотопы:**  $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n$ . У большинства химических элементов имеется несколько изотопов. У водорода – три изотопа:  ${}_1^1H$  – обычный водород ( $Z = 1, N = 0$ ),  ${}_1^2H \equiv {}_1^2D$  – тяжёлый водород, или дейтерий ( $Z = 1, N = 1$ ), и  ${}_1^3H \equiv {}_1^3T$  тритий ( $Z = 1, N = 2$ ).

Химические элементы в природных условиях обычно представляют собой смесь изотопов. Присутствие изотопов определяет значение атомной массы природного элемента в периодической таблице Менделеева. Так, например, относительная атомная масса природного углерода равна 12,011.

**Изобары:**  $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ . Например,  ${}_{18}^{40}Ar$  и  ${}_{20}^{40}Ca$ .

**Изотоны:**  $N_1 = N_2 = \dots = N_n$ . Например,  ${}_{6}^{13}C$ ,  ${}_{7}^{14}N$ .

**Изомеры:** ядра, у которых одинаковые  $Z$  и  $A$ , но отличающиеся  $T_{1/2}$  (период полураспада).

Радиус ядра определяется эмпирической формулой:

$$R = R_0 \cdot A^{1/3}, R_0 \cong (1,3 - 1,7) \cdot 10^{-15} \text{ м}. \quad (20.1.2)$$

Плотность вещества во всех ядрах примерно одинакова  $\rho \sim 10^{17} \text{ кг/м}^3$ .

**Спин ядра.** Спин ядра складывается из спинов нуклонов и из орбитальных моментов составляющих это ядро нуклонов. Спин нуклона  $s = 1/2$ . Квантовое число спина ядра  $I$  – полуцелое при нечётном числе

нуклонов  $A$ ; целое или нуль при чётном  $A$  и не превышают нескольких единиц вследствие того, что спины большинства нуклонов в ядре взаимно компенсируют друг друга, располагаясь антипараллельно. У всех чётно-чётных ядер (т. е. ядер с чётным числом протонов и чётным числом нейтронов) спин равен нулю.

Со спином ядра связан магнитный момент:

$$\mu_{m,я} = g_я L_я, \quad (20.1.3)$$

где  $g_я$  – ядерное гиромагнитное отношение.

Взаимодействие магнитных моментов электронов и ядра приводит к дополнительному расщеплению энергетических уровней, в результате чего линии тонкой структуры испытывают в свою очередь расщепление – наблюдается сверхтонкая структура спектральных линий. Это расщепление мало (порядка несколько тысячных нм) и наблюдается лишь с помощью приборов самой большой разрешающей способности.

Характеристики протона, нейтрона, электрона

| Характеристика                                                                     | Протон          | Нейтрон                                                          | Электрон                  |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Масса, МэВ                                                                         | 938,28          | 939,57                                                           | 0,511                     |
| Электрический заряд<br>(в единицах заряда электрона)                               | +1              | 0                                                                | –1                        |
| Внутренний момент<br>количества движения<br>(в единицах $\hbar$ )                  | 1/2             | 1/2                                                              | 1/2                       |
| Чётность                                                                           | +1              | +1                                                               | +1                        |
| Статистика                                                                         | Ферми – Дирака  |                                                                  |                           |
| Магнитный момент<br>(в единицах ядерного магнетона)<br>(в единицах магнетона Бора) | +2,79<br>–      | –1,91<br>–                                                       | –<br>1,001                |
| Время жизни                                                                        | $> 10^{25}$ лет | $887 \pm 2$ с                                                    | $> 4,3 \cdot 10^{23}$ лет |
| Тип распада                                                                        |                 | ${}^1_0n \rightarrow {}^1_1p + {}^0_{-1}e + {}^0_0\tilde{\nu}_e$ |                           |

## 20.2. Масса и энергия связи ядра

**Масса ядра** измеряется в атомных единицах массы (а.е.м). Как уже отмечено выше, за одну атомную единицу массы принимается  $1/12$  массы нуклида  ${}^{12}\text{C}$ :

1 а. е. м.  $\approx 1,6605402 \cdot 10^{-27}$  кг =  $1,5 \cdot 10^{-10}$  Дж = 931,494028 МэВ.

Масса ядра всегда меньше массы составляющих его нуклонов.

**Энергия связи ядра**  $E_{св}(A, Z)$  – это минимальная энергия, необходимая, чтобы развалить ядро на отдельные, составляющие его нуклоны:

$$E_{св}(A, Z) = [Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - M(A, Z)] \cdot c^2 = \Delta m \cdot c^2, \quad (20.2.1)$$

где  $Z$  – число протонов,  $(A - Z)$  – число нейтронов,  $m_p$  – масса протона,  $m_n$  – масса нейтрона,  $M(A, Z)$  – масса ядра с массовым числом  $A$  и зарядом  $Z$ ,  $\Delta m$  – **дефект масс** (разность между массой связанной системы взаимодействующих частиц и суммой их масс в свободном состоянии).

Полная энергия связи ядра, выраженная через массу атома  $M_{ат}(A, Z)$ , имеет вид:

$$E_{св}(A, Z) = [Z \cdot m_H + (A - Z) \cdot m_n - M_{ат}(A, Z) - Z \cdot m_e] \cdot c^2, \quad (20.2.2)$$

где  $m_H$  – масса атома водорода,  $m_e$  – масса электрона.

**Удельная энергия связи ядра**  $\varepsilon(A, Z)$  – это энергия связи, приходящаяся на один нуклон:

$$\varepsilon(A, Z) = E_{св}(A, Z) / A. \quad (20.2.3)$$

На рисунке 20.2.1 удельная энергия связи ядра изображена графически в зависимости от массовых чисел элементов в периодической системе элементов.

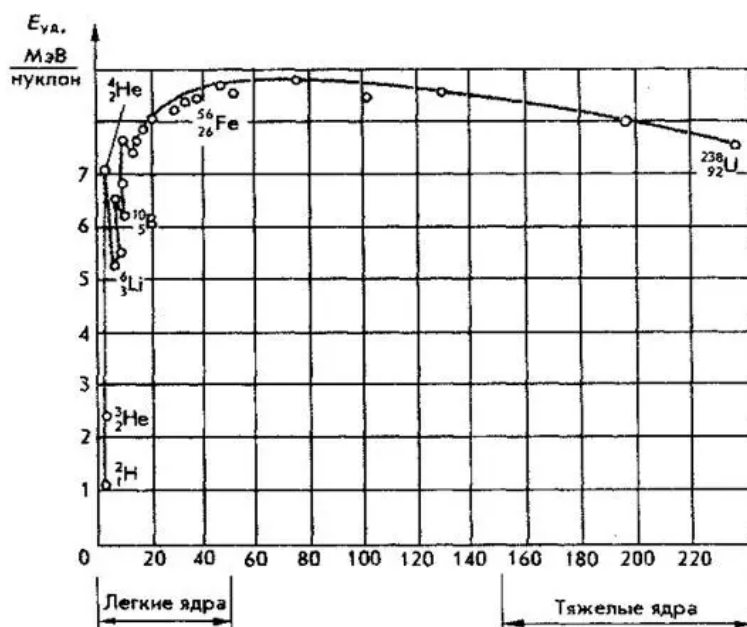


Рисунок 20.2.1

Наиболее устойчивы ядра, у которых магическое число нейтронов – (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, 184) или протонов – (2, 8, 20, 28, 50, 82, 114).

Существование магических чисел объясняется с позиций оболочечной структуры ядра (см. п. 3.3). Магическим числам нуклонов отвечают ядра с заполненными нуклонными оболочками, имеющими повышенную устойчивость, подобно атомам инертных газов с заполненными электронными оболочками. Ядра, содержащие магические числа и протонов, и нейтронов, называются дважды магическими. К ним относятся стабильные ядра.

$${}^4_2\text{He} (p = 2, n = 2), {}^{16}_8\text{O} (p = 8, n = 8), {}^{40}_{20}\text{Ca} (p = 20, n = 20), \\ {}^{48}_{20}\text{Ca} (p = 20, n = 28), {}^{208}_{82}\text{Pb} (p = 82, n = 126).$$

### 20.3. Ядерные силы

#### Основные свойства ядерных сил.

Ядерные силы обусловлены самым интенсивным из всех известных в физике видов взаимодействий – **сильным взаимодействием**. Ядерные силы притяжения между нуклонами в сотни раз превосходят электромагнитные силы отталкивания.

Особенности этих сил:

1) ядерные силы являются силами **притяжения**, не сводящиеся к силам гравитации или электромагнитным;

2) ядерные силы являются **короткодействующими** с радиусом действия  $\sim 10^{-15}$  м. На существенно меньших расстояниях притяжение нуклонов сменяется их отталкиванием. На расстояниях, больших радиуса действия, ядерные силы несутельственны (по сравнению с другими);

3) ядерным силам свойственна **зарядовая независимость**: ядерные силы, действующие между двумя протонами, или двумя нейтронами, или между протоном и нейтроном, одинаковы по величине;

4) ядерным силам свойственно **насыщение**, т. е. каждый нуклон в ядре взаимодействует только с ограниченным числом ближайших к нему нуклонов. Насыщение проявляется в том, что удельная энергия связи нуклонов в ядре (если не учитывать лёгкие ядра) при увеличении числа нуклонов мало изменяется;

5) ядерные силы зависят от взаимной ориентации спинов взаимодействующих нуклонов. Например, протон и нейтрон образуют дейтрон (ядро изотопа  ${}^2_1\text{H}$ ) только при условии параллельной ориентации их спинов;

б) ядерные силы не являются центральными, т. е. действующими по линии, соединяющей центры взаимодействующих нуклонов.

### **Взаимодействие между нуклонами.**

Ядерные силы носят обменный характер, т. е. нуклоны виртуально обмениваются частицами –  $\pi$ -мезонами. При взаимодействии нуклонов квантами поля являются  $\pi$ -мезоны (пионы), существование которых было предсказано в 1935 г. Юкавой (Хидэки Юка́ва, япон., 1907–1981, лауреат Нобелевской премии по физике, 1949 г.).

Частицы были экспериментально обнаружены к концу 40-х годов 19 века.

По классическим законам такие процессы идти не могут в связи с нарушением закона сохранения энергии. Например, покоившийся свободный нейтрон не может самопроизвольно превратиться в пару частиц ( $n + \pi$ ), суммарная масса которых больше массы нейтрона.

Если процесс обмена  $\pi$ -мезоном происходит за время  $\tau$ , меньшее промежутка времени  $\Delta t$ , связывающего неопределённости энергии и времени, то есть если  $\tau \leq \Delta t \sim \hbar / \Delta E$ , то неопределённость энергии  $\Delta E$  в таком процессе может оказаться достаточной, чтобы он осуществился.

Испущенный  $\pi$ -мезон с энергией  $\Delta E \approx m_\pi c^2$  – **виртуальный** – может существовать только конечное время, не большее, чем  $\Delta t \approx \hbar / m_\pi c^2$ .

По истечении этого времени  $\pi$ -мезон поглощается испустившим его нуклоном. Расстояние, на которое  $\pi$ -мезон удаляется от нуклона, при этом составляет величину порядка комптоновской длины волны  $l = \Delta t c \approx \hbar / m_\pi c = \lambda_{K\pi}$ .

Одиночный нуклон окружён испускаемыми им виртуальными  $\pi$ -мезонами (мезонной «шубой»), которые и он сам поглощает, если поблизости от нуклона нет других частиц, способных поглотить эти мезоны. Это облако виртуальных  $\pi$ -мезонов, которые безостановочно испускаются и поглощаются нуклоном, удаляясь от него в среднем на расстояние (радиус действия), не большее, чем комптоновская длина волны  $\lambda_{K\pi}$ .

При сближении двух нуклонов их мезонные шубы начинают соприкасаться, создаются условия для обмена виртуальными мезонами – возникает ядерное взаимодействие. Радиус действия ядерных сил имеет порядок комптоновской длины волны  $\lambda_{K\pi}$ . Из опыта известно:  $\lambda_{K\pi} \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ м} \Rightarrow m_\pi \approx \hbar / (\lambda_{K\pi} c) = 1,05 \cdot 10^{-34} / (1,4 \cdot 10^{-15} \cdot 3 \cdot 10^8) \approx 2,5 \cdot 10^{-28} \text{ кг} \Rightarrow m_\pi / m_e \approx 270$ .

Указанная взаимосвязь радиуса действия ядерных сил и массы виртуальных частиц – переносчиков взаимодействия – это частный случай фундаментального квантового закона: чем меньше масса частиц – переносчиков взаимодействия, тем больше радиус действия этого взаимодействия.

Три разновидности  $\pi$ -мезона: положительный ( $\pi^+$ ), отрицательный ( $\pi^-$ ) и нейтральный ( $\pi^0$ ) мезоны.

Таблица 20.3.1

|         | Масса                      | Заряд | Спин    | Время жизни                             |
|---------|----------------------------|-------|---------|-----------------------------------------|
| $\pi^+$ | $273m_e = 140 \text{ МэВ}$ | $+e$  | $s = 0$ | $\tau^+ = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ с}$  |
| $\pi^-$ | $273m_e = 140 \text{ МэВ}$ | $-e$  | $s = 0$ | $\tau^- = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ с}$  |
| $\pi^0$ | $264m_e = 135 \text{ МэВ}$ | 0     | $s = 0$ | $\tau^0 = 0,8 \cdot 10^{-16} \text{ с}$ |

Заряженные  $\pi$ -мезоны распадаются в основном по схеме:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu; \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_\mu, \quad (20.3.1)$$

$\mu^-$  и античастица  $\mu^+$  – отрицательный и положительный мюоны;  $\nu_\mu$  и  $\tilde{\nu}_\mu$  – мюонные нейтрино и антинейтрино.

$\pi^0$ -мезоны распадаются в основном на два  $\gamma$ -кванта:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (20.3.2)$$

Характеристики  $\mu^\pm$ : электрический заряд  $\pm e$  (соответственно, для  $\mu^+$  и  $\mu^-$ );  $m_\mu = 207m_e = 106 \text{ МэВ}$ ,  $s = 1/2$ , одинаковые времена жизни  $2,2 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ .

Мюоны нестабильны:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu; \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \tilde{\nu}_\mu, \quad (20.3.3)$$

$\nu_e$  и  $\tilde{\nu}_e$  – электронные нейтрино и антинейтрино.

Схемы процессов, приводящих к возникновению мезонных «шуб»:

$$p \leftrightarrow n + \pi^+; \quad n \leftrightarrow p + \pi^-; \quad n \leftrightarrow n + \pi^0; \quad p \leftrightarrow p + \pi^0. \quad (20.3.4)$$

При сближении отдельных нуклонов поглощение этих мезонов другим нуклоном приводит к сильному взаимодействию между нуклонами, которое осуществляется по одной из следующих схем:

$$p + n \leftrightarrow n + \pi^+ + n \leftrightarrow n + p \quad (20.3.5a)$$

$$n + p \leftrightarrow p + \pi^- + p \leftrightarrow p + n \quad (20.3.5б)$$

$$n + p \leftrightarrow n + \pi^0 + p \leftrightarrow p + n$$

$$p + p \leftrightarrow p + \pi^0 + p \leftrightarrow p + p \quad (20.3.5в)$$

$$n + n \leftrightarrow n + \pi^0 + n \leftrightarrow n + n$$

Пояснения первой из схем. Протон испускает виртуальный  $\pi^+$ -мезон, превращаясь в нейтрон.  $\pi^+$ -мезон поглощается нейтроном, который вследствие этого превращается в протон. Затем такой же процесс протекает в обратном направлении. Каждый из взаимодействующих нуклонов часть времени проводит в заряженном состоянии, а часть – в нейтральном.

**Модели ядер.** Наиболее часто используют две модели ядра: капельной и оболочечной.

**Капельная модель** (1936, Н. Бор, Я. Френкель (Яков Ильич Фрэнкель, советск., 1894–1952)). Атомное ядро рассматривается как капля заряженной несжимаемой жидкости с очень высокой плотностью  $\sim 10^{17}$  кг/м<sup>3</sup>. Позволила вывести полуэмпирическую формулу для энергии связи ядра и помогла объяснить процесс деления тяжёлых ядер. Не может объяснить устойчивость магических ядер.

**Оболочечная модель** (1948–1949, Мария Гёпперт-Майер, нем., 1906–1972; Йоханнес Ханс Даниель Йёнсен, нем., 1907–1973). Каждый нуклон движется в усреднённом поле остальных нуклонов ядра. Имеются дискретные энергетические уровни, заполненные нуклонами с учётом принципа Паули. Эти уровни группируются в *оболочки*, в каждой из которых может находиться определенное число нуклонов. Полностью заполненные оболочки образуют особо устойчивые структуры. Таковыми являются ядра, имеющие, в соответствии с опытом, число протонов либо нейтронов (либо оба эти числа) 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Эти числа и соответствующие им ядра называют *магическими*.

Кроме предсказания магических чисел, эта модель позволила объяснить спины основных и возбуждённых состояний ядер, а также их магнитные моменты.

## 20.4. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада

Радиоактивность открыта в 1896 г. А. Беккерелем (Антуа́н Анри́ Беккерель, фр., 1852–1908, лауреат Нобелевской премии по физике,

1903 г.) **Радиоактивность** – спонтанное (самопроизвольное) превращение атомных ядер одних элементов в другие, сопровождаемое испусканием элементарных частиц. Такие превращения претерпевают только нестабильные ядра.

К радиоактивным процессам относятся: 1)  $\alpha$ -распад, 2)  $\beta$ -распад (в том числе электронный захват), 3)  $\gamma$ -излучение ядер, 4) спонтанное деление тяжёлых ядер, 5) протонная радиоактивность.

**Естественная** радиоактивность наблюдается у существующих в природе неустойчивых изотопов тяжёлых ядер за *Pb*.

**Искусственная** радиоактивность наблюдается у неустойчивых изотопов ядер, полученных посредством ядерных реакций. Между искусственной и естественной радиоактивностью нет принципиального различия. Радиоактивное ядро называют **материнским**, а ядра, образующиеся в результате распада, – **дочерними**.

подавляющая часть известных атомных ядер нестабильны (около 90% из 2500). У больших ядер нестабильность возникает вследствие конкуренции между притяжением нуклонов ядерными силами и кулоновским отталкиванием протонов. Стабильных ядер с зарядовым числом  $Z > 83$  и массовым числом  $A > 209$  не существует.

Радиоактивными могут оказаться и ядра атомов с существенно меньшими значениями чисел  $Z$  и  $A$ . Если ядро содержит значительно больше протонов, чем нейтронов, то нестабильность обуславливается избытком энергии кулоновского взаимодействия. Ядра, которые содержат избыток нейтронов, оказываются нестабильными вследствие того, что масса нейтрона превышает массу протона. Увеличение массы ядра приводит к увеличению его энергии.

Вероятность распада отдельного нестабильного ядра не зависит только от промежутка времени наблюдения и пропорциональна этому промежутку времени.

Число распадающихся ядер  $dN$  за элементарный промежуток времени  $dt$  должно быть пропорционально количеству  $N$  этих ядер в данный момент времени и вероятности распада ядра за промежуток времени  $dt$ :

$$dN = -\lambda N dt, \quad \lambda > 0, \quad (20.4.1)$$

где  $\lambda > 0$  (измеряется в  $\text{с}^{-1}$ ) – **постоянная распада**. Для каждого вида радиоактивных ядер характерна своя постоянная распада. Значения постоянных распада для различных радиоактивных ядер могут различаться очень



существенно (на много порядков). Знак «—» в (20.4.1) означает, что с течением времени число нераспавшихся ядер  $N$  уменьшается.

Общее решение (20.4.1):

$$N(t) = Ce^{-\lambda t}, \quad (20.4.2a)$$

где постоянная интегрирования  $C$  находится из начальных условий  $N(t)|_{t=0} = N_0$  и, следовательно:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (20.4.2б)$$

Выражение (20.4.2б) называют *законом радиоактивного распада*.

**Активность** — интенсивность (скорость) радиоактивного распада  $A = |dN / dt|$ . Единица активности с СИ — беккерель (Бк, международное Bq), 1 Бк = 1 распад/с (Антуан Анри Беккерель, фр., 1852–1908). Используется внесистемная единица активности кюри (Ки; международное: Ci), 1 Ки =  $3,7 \cdot 10^{10}$  Бк.

Активность радиоактивных ядер определяется выражением:

$$A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N(t). \quad (20.4.3)$$

**Период полураспада**  $T_{1/2}$ , определяется из условия  $N(t)|_{t=T_{1/2}} = N_0 / 2$ :

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \Rightarrow \ln 2 = \lambda T_{1/2} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (20.4.4)$$

За промежуток времени  $T_{1/2}$  количество радиоактивных ядер уменьшается вдвое.

**Время жизни**  $\tau$  определяется из условия  $N(t)|_{t=\tau} = N_0 / e$ :

$$\frac{N_0}{e} = N_0 e^{-\lambda \tau} \Rightarrow 1 = \lambda \tau \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (20.4.5)$$

За время жизни  $\tau$  количество радиоактивных ядер уменьшается в  $e$  раз.

Связь между временем жизни  $\tau$  и периодом полураспада радиоактивных ядер данного вида:

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = 0,693\tau. \quad (20.4.6)$$

Период полураспада — основная величина, характеризующая скорость процесса. Чем меньше период полураспада, тем интенсивнее протекает распад. Так, для урана  $T_{1/2} \approx 4,5$  млрд. лет, а для радия  $T_{1/2} \approx 1600$  лет.

Поэтому активность радия значительно выше, чем урана. Существуют радиоактивные элементы с периодом полураспада в доли секунды.

## 20.5. Основные типы радиоактивности

$\alpha$ -распад и  $\beta$ -распад радиоактивных ядер осуществляется по следующим схемам (правила Фаянса-Содди (Казимир Фаянс, амер., 1887–1975; Фредерик Содди, англ., 1877–1956, лауреат Нобелевской премии по химии, 1921 г.)):

$$\alpha\text{-распад: } {}^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2\text{He}, \quad (20.5.1)$$

$$\beta^-\text{-распад: } {}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}Y + {}^0_{-1}e + {}^0_0\tilde{\nu}_e, \quad (20.5.2a)$$

$$\beta^+\text{-распад: } {}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + {}^0_1e + {}^0_0\nu_e, \quad (20.5.2б)$$

$$K\text{-захват: } {}^A_ZX + {}^0_{-1}e \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + {}^0_0\nu_e. \quad (20.5.2в)$$

При  $\alpha$ - и  $\beta$ -радиоактивном распаде дочернее ядро также может оказаться нестабильным. Поэтому возможны серии последовательных радиоактивных распадов, которые заканчиваются образованием стабильных ядер. В природе существует несколько таких серий. Наиболее длинной является серия  ${}^{238}_{92}\text{U}$ , состоящая из 14 последовательных распадов (8  $\alpha$ -распадов и 6  $\beta$ -распадов). Эта серия заканчивается стабильным изотопом свинца  ${}^{206}_{82}\text{Pb}$  (рисунок 20.5.1).

В природе существуют ещё несколько радиоактивных серий, аналогичных серии  ${}^{238}_{92}\text{U}$ .

Известна также серия, которая начинается с искусственного изотопа нептуния  ${}^{237}_{93}\text{Np}$  и заканчивается на висмуте  ${}^{209}_{83}\text{Bi}$ . Эта серия радиоактивных распадов возникает в ядерных реакторах.

На явлении радиоактивности основан метод датирования археологических и геологических находок по концентрации радиоактивных изотопов. Чаще всего используется радиоуглеродный метод датирования. Нестабильный изотоп углерода  ${}^{14}_6\text{C}$  возникает в атмосфере вследствие ядерных реакций, вызываемых космическими лучами. Небольшой процент этого изотопа содержится в воздухе наряду с обычным стабильным изотопом  ${}^{12}_6\text{C}$ . Растения и другие организмы потребляют углерод из воздуха, и в них накапливаются оба изотопа в той же пропорции, как и в воздухе. После ги-

бели растений они перестают потреблять углерод и нестабильный изотоп в результате  $\beta$ -распада постепенно превращается в азот  $^{14}_7N$  с периодом полураспада 5730 лет. Путём точного измерения относительной концентрации радиоактивного углерода  $^{14}_6C$  в останках древних организмов можно определить время их гибели.

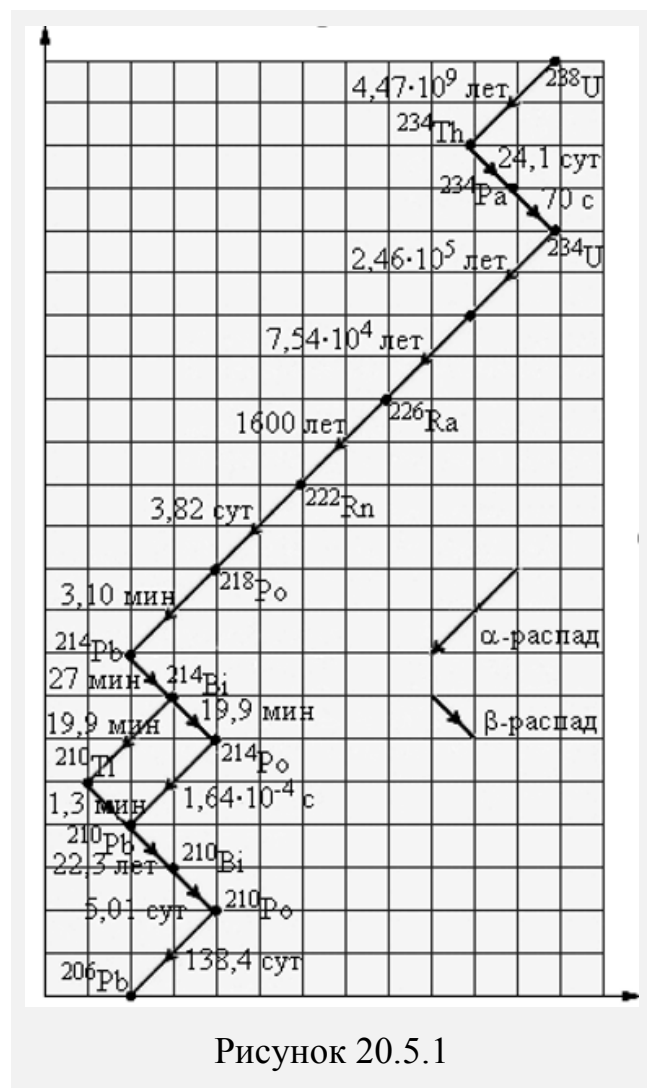


Рисунок 20.5.1

Радиоактивное излучение всех видов (альфа, бета, гамма, нейтроны), а также электромагнитная радиация (рентгеновское излучение) оказывают очень сильное биологическое воздействие на живые организмы, которое заключается в процессах возбуждения и ионизации атомов и молекул, входящих в состав живых клеток. Под действием ионизирующей радиации разрушаются сложные молекулы и клеточные структуры, что приводит к лучевому поражению организма. Поэтому при работе с любым источником радиации необходимо принимать все меры радиационной защиты людей, которые могут попасть в зону действия излучения.

Серьёзную опасность для здоровья человека в бытовых условиях может представлять инертный, бесцветный, радиоактивный газ радон  $^{222}_{86}C$ . Радон является продуктом  $\alpha$ -распада радия и имеет период полураспада  $T_{1/2} = 3,82$  сут. (рисунок 20.5.1). Радий в небольших количествах содержится в почве, в камнях, в различных строительных конструкциях. Несмотря на сравнительно небольшое время жизни, концентрация радона непрерывно восполняется за счёт новых распадов ядер радия, поэтому радон может накапливаться в закрытых помещениях. Попадая в лёгкие, радон испускает  $\alpha$ -частицы и превращается в полоний  $^{218}_{84}Po$ , который не является химически инертным

веществом. Далее следует цепь радиоактивных превращений серии урана (рисунок 20.5.1).

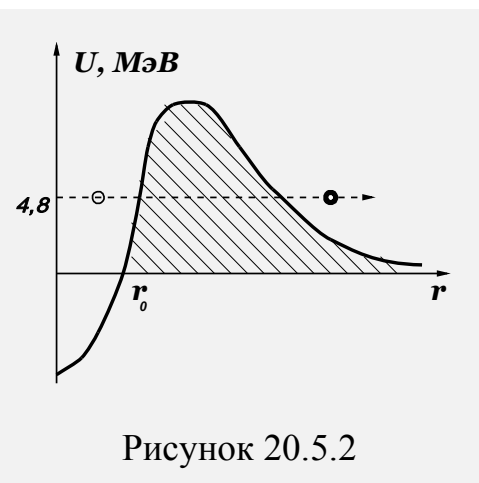
По данным Американской комиссии радиационной безопасности и контроля, человек в среднем получает 55% ионизирующей радиации за счёт радона и только 11% за счёт медицинских процедур. Вклад космических лучей составляет примерно 8%. Общая доза облучения, которую получает человек за жизнь, во много раз меньше предельно допустимой дозы (ПДД), которая устанавливается для людей некоторых профессий, подвергающихся дополнительному облучению ионизирующей радиацией.

**Альфа-распад.** Альфа-лучи – поток ядер гелия  ${}^4_2\text{He}$ . Пример:



Альфа-частицы испускают только тяжёлые ядра. Кинетическая энергия вылетающей  $\alpha$ -частицы – несколько МэВ. В воздухе при нормальном давлении пробег  $\alpha$ -частиц составляет несколько сантиметров (их энергия расходуется на образование ионов на своём пути).

Кинетическая энергия  $\alpha$ -частиц возникает за счёт избытка энергии покоя материнского ядра над суммой энергий покоя дочернего ядра и  $\alpha$ -частицы. Эта избыточная энергия распределяется между  $\alpha$ -частицей и дочерним ядром в отношении, обратном пропорциональному их массам (в соответствии с законом сохранения импульса).



В теории  $\alpha$ -распада предполагается, что внутри ядер могут образовываться группы, состоящие из двух протонов и двух нейтронов, т. е.  $\alpha$ -частица.

Материнское ядро является для  $\alpha$ -частиц **потенциальной ямой**, которая ограничена потенциальным барьером. Внутренняя сторона барьера обусловлена ядерными силами, внешняя же – силами кулоновского отталкивания  $\alpha$ -частицы и дочернего ядра. Энергия  $\alpha$ -частицы в ядре недостаточна для преодоления этого барьера (рисунок 20.5.2). Вылет  $\alpha$ -частицы из ядра оказывается возможным только благодаря **туннельному** эффекту.

**Бета-распад.** Исходное ядро превращается в другое ядро с тем же массовым числом  $A$ , но с зарядовым числом  $Z$ , отличающимся от исход-

ного на  $\pm 1$  (см. 20.5.2).  $\beta$ -распад сопровождается испусканием электрона (позитрона) или его захватом из электронной оболочки атома.

Три разновидности  $\beta$ -распада:

– электронный  $\beta^-$ -распад – ядро испускает электрон, и его зарядовое число  $Z$  становится  $Z+1$  (схема 20.5.2а);

– позитронный  $\beta^+$ -распад – ядро испускает позитрон, и его зарядовое число  $Z$  становится  $Z-1$  (схема 20.5.2б);

–  $K$ -захват – ядро захватывает один из электронов электронной оболочки атома (обычно из  $K$ -оболочки), и его зарядовое число  $Z$  становится равным  $Z-1$  (схема 20.5.2в). На освободившееся место в  $K$ -оболочке переходит электрон с другой оболочки, и поэтому  $K$ -захват всегда сопровождается характеристическим рентгеновским излучением.

Пример  $\beta^-$ -распада – превращение нейтрона в протон:



Бета-распад может сопровождаться испусканием  $\gamma$ -лучей. Дочернее ядро возникает не только в нормальном, но и в возбуждённых состояниях. Переходя затем в состояние с меньшей энергией, ядро высвечивает  $\gamma$ -фотон.  $\beta$ -электроны обладают самой разнообразной кинетической энергией от 0 до  $E_{\text{макс}}$ . На рисунке 20.5.3 изображён энергетический спектр электронов, испускаемых ядрами при  $\beta$ -распаде.

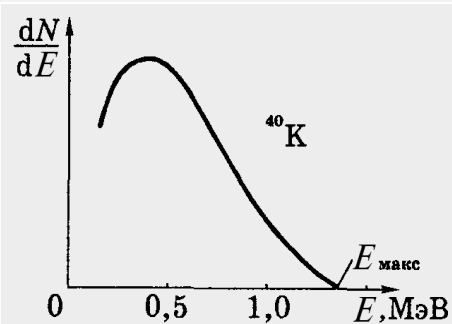


Рисунок 20.5.3

Площадь, охватываемая кривой, даёт общее число электронов, испускаемых в единицу времени,  $dN$  – число электронов, энергия которых заключена в интервале  $dE$ . Энергия  $E_{\text{макс}}$  соответствует разности между массой материнского ядра и массами электрона и дочернего ядра. Распады, при которых энергия электрона  $E < E_{\text{макс}}$ , протекают с кажущимся нарушением закона сохранения энергии. В. Паули высказал в 1932 г. предположение, что при  $\beta$ -распаде вместе с электроном испускается ещё одна частица – **нейтрино**, которая уносит с собой энергию  $E_{\text{макс}} - E$ . Она нейтральна, имеет малую массу и обладает большой проникающей способностью. Спин нейтрино (и антинейтрино) равен  $1/2$ .

Энергия, выделяющаяся при  $\beta$ -распаде, распределяется между электроном и антинейтрино (либо между позитроном и нейтрино, см. ниже) в самых разнообразных пропорциях.

Пример  $\beta^+$ -распада – превращение протона в ядре в нейтрон:



Для свободного протона такой процесс невозможен по энергетическим соображениям, так как масса протона меньше массы нейтрона. Однако протон в ядре может заимствовать требуемую энергию от других нуклонов, входящих в состав ядра.

Третий вид  $\beta$ -распада ( $K$ -захват) – процесс захвата одним из протонов в ядре электрона из  $K$ -оболочки (реже – один из  $L$ - или  $M$ -оболочки):



Возникшее ядро может оказаться в возбуждённом состоянии. Переходя затем в более низкие энергетические состояния, оно испускает  $\gamma$ -фотоны.

Место в электронной оболочке, освобождённое захваченным электроном, заполняется электронами из вышележащих слоёв, в результате чего возникают рентгеновские лучи.

**Гамма-распад.** Гамма-радиоактивность ядер не связана с изменением внутренней структуры ядра и не сопровождается изменением зарядового или массового чисел. Для осуществления  $\gamma$ -радиоактивности ядер необходимо каким-либо образом перевести ядро в возбуждённое состояние. Переход ядра из возбуждённого состояния в основное сопровождается испусканием одного или нескольких  $\gamma$ -квантов, уносящих избыточную энергию. Энергия этих  $\gamma$ -квантов может достигать нескольких МэВ.

**Спонтанное деление тяжёлых ядер.** Г. Н. Флеровым (Георгий Николаевич Флёрв, сов., 1913–1990) и К. А. Петржаком (Константин Антонович Петржак, сов., 1907–1998) в 1940 г. был обнаружен процесс самопроизвольного деления ядер урана на две примерно равные части. Впоследствии это явление наблюдалось и для многих других тяжёлых ядер. По своим характерным чертам спонтанное деление близко к вынужденному делению.

**Протонная радиоактивность.** Как следует из названия, при протонной радиоактивности ядро претерпевает превращение, испуская один или

два протона (в последнем случае говорят о двупротонной радиоактивности). Этот вид радиоактивности наблюдался впервые в 1963 г. группой физиков, руководимой Г. Н. Флеровым.

## 20.6. Ядерные реакции

**Ядерные реакции** – это процесс взаимодействия атомного ядра с другим ядром или элементарной частицей, сопровождающийся изменением состава и структуры ядра и выделением вторичных частиц или  $\gamma$ -квантов. Это взаимодействие возникает благодаря действию ядерных сил при сближении частиц до расстояний порядка 10–13 см.

Используются два варианта символической записи ядерных реакций (ЯР):

$$a + X \rightarrow Y + b, \quad (20.6.1a)$$

$$X(a,b)Y, \quad (20.6.1b)$$

где  $X$  и  $Y$  – исходное и конечное ядра,  $a$  и  $b$  – бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы. Роль частиц  $a$  и  $b$  чаще всего выполняют нейтрон  $n$ , протон  $p$ , дейтрон  $d$ ,  $\alpha$ -частица и  $\gamma$ -квант.

В ЯР выполняются законы сохранения:

– *электрических зарядов и массовых чисел*: сумма зарядов (и массовых чисел) ядер и частиц, вступающих в ядерную реакцию, равна сумме зарядов (и сумме массовых чисел) конечных продуктов (ядер и частиц) реакции;

– *закон сохранения энергии*;

– *закон сохранения импульса*;

– *закон сохранения момента импульса*;

– *закон сохранения барионного заряда*;

– *закон сохранения лептонного заряда*;

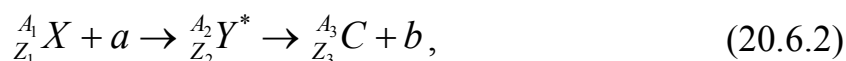
– *некоторых других специфических квантовых характеристик*.

ЯР могут быть как **экзотермическими** (с выделением энергии), так и **эндотермическими** (с поглощением энергии).

ЯР протекают, как правило, в *несколько этапов*. На первом этапе налетающая частица испытывает неупругое взаимодействие в ядром-мишенью («застревает» в нём) образуя **составное ядро**, или **компаунд-ядро**, её энергия равномерно распределяется между всеми частицами со-

ставного ядра. Составное ядро – возбуждённая статистическая *система* частиц, совершающая неупорядоченные движения, подобные движению частиц в *капле* жидкости. В результате *случайных* отклонений от равномерного распределения энергии возбуждения между частицами составного ядра на какой-либо одной из них концентрируется энергия, достаточная для вылета этой частицы из ядра. Второй этап ядерной реакции происходит по истечении времени  $(10^7-10^8)\tau_{\text{я}}$  после первого этапа, где  $\tau_{\text{я}} \sim 10^{-22}$  с – **характерное ядерное время** ( $\tau_{\text{я}}$  – время, которое требуется частице со скоростью  $\sim 10^7$  м/с для того, чтобы пройти расстояние, равное диаметру ядра  $\sim 10^{-15}$  м).

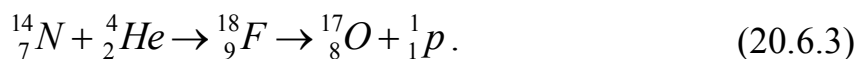
Схема ЯР с образованием компаунд-ядра:



где  ${}_{Z_1}^{A_1}X$  – исходное ядро-мишень,  $a$  – налетающая частица,  ${}_{Z_2}^{A_2}Y^*$  – составное ядро (звёздочка указывает на то, что ядро  $Y^*$  возникает в возбуждённом состоянии),  ${}_{Z_3}^{A_3}C$  – ядро – продукт ядерной реакции,  $b$  – частица, вылетевшая из ядра в результате реакции.

Если  $a \equiv b$ , то происходит **рассеяние** частицы ядром: **упругое** – при  $E_b = E_a$ , **неупругое** – при  $E_b \neq E_a$ . Если же испущенная частица не тождественна с захваченной ( $a \neq b$ ), то идёт ядерная реакция в прямом смысле слова.

Первая в истории ЯР была осуществлена Резерфордом (Эрнест Резерфорд, англ., 1871–1937, лауреат Нобелевской премии по химии 1908 года) в 1919 при бомбардировке ядра азота  $\alpha$ -частицами:



Ядерные реакции под действием нейтронов. В зависимости от скорости (энергии) нейтроны делят на **медленные** и **быстрые**. В основе указанной классификации нейтронов лежит сопоставление длины волны де Бройля  $\lambda = h / p = h / m_n v$ , соответствующей движущемуся нейтрону, с размером ядра-мишени  $R_{\text{я}}$ . Если  $\lambda \leq R_{\text{я}}$ , то нейтрон относят к быстрым, а если  $\lambda > R_{\text{я}}$  – к медленным.



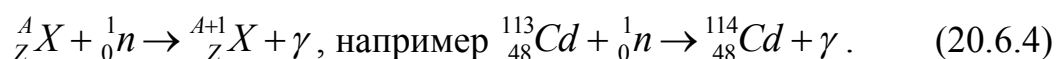
Таблица 20.6.1

| Медленные нейтроны                      | Быстрые нейтроны                         |
|-----------------------------------------|------------------------------------------|
| ультрахолодные – $\leq 10^{-7}$ эВ      | быстрые – $(10^4-10^8)$ эВ               |
| очень холодные – $(10^{-7}-10^{-4})$ эВ | высокоэнергетичные – $(10^8-10^{10})$ эВ |
| холодные – $(10^{-4}-10^{-3})$ эВ       | релятивистские – $\geq 10^{10}$ эВ       |
| тепловые – $(10^{-3}-0,5)$ эВ           |                                          |
| резонансные – $(0,5-10^4)$ эВ           |                                          |

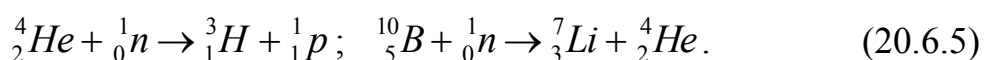
В *замедлителях* (графит, тяжёлая вода  $D_2O$ ,  $HDO$ , соединения бериллия) быстрые нейтроны рассеиваются на ядрах и их энергия переходит в энергию теплового движения атомов вещества-замедлителя.

Медленные нейтроны эффективны для возбуждения ядерных реакций, поскольку они относительно долго могут находиться вблизи атомного ядра, а поэтому вероятность захвата нейтрона ядром очень большая.

Для медленных нейтронов характерны *упругое рассеяние на ядрах* (реакция типа  $(n, n)$ ) и *радиационный захват* (реакция типа  $(n, \gamma)$  – приводит к образованию нового изотопа исходного вещества):

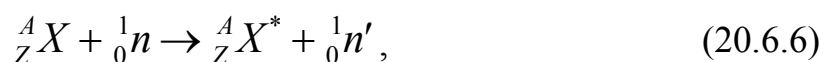


Под действием тепловых нейтронов на легких ядрах наблюдаются реакции захвата нейтронов с испусканием протонов и  $\alpha$ -частиц (реакции типа  $(n, p)$  и  $(n, \alpha)$ ):



ЯР типа  $(n, p)$  и  $(n, \alpha)$  происходят под действием быстрых нейтронов, т. к. в этом случае энергия достаточна для преодоления потенциального барьера, препятствующего вылету протонов и  $\alpha$ -частиц.

Неупругое рассеяние быстрых нейтронов  $(n, n')$ :

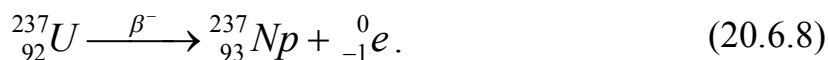


${}_0^1n'$  имеет энергию, меньшую энергии  ${}_0^1n$ .

Когда энергия нейтронов достигает 10 МэВ, становятся возможными реакции типа  $(n, 2n)$ , например в ЯР:

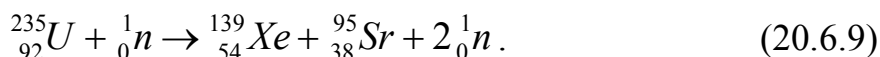


образуется  $\beta^-$ -активный изотоп:



**Реакции деления ядра.** Тяжёлое компаунд-ядро, возбуждённое при резонансном захвате нейтрона, может разделиться на две приблизительно равные части (*реакция деления тяжёлых ядер*). Образовавшиеся части называются *осколками деления*. Неустойчивость тяжёлых ядер обусловлена *взаимным отталкиванием* большого числа протонов, находящихся в ядрах.

Пример реакции деления:



Деление тяжёлого ядра на два осколка сопровождается *выделением энергии* порядка 1 МэВ на каждый нуклон, так как удельная энергия связи для ядер средней массы составляет примерно 8,7 МэВ, в то время как для тяжёлых ядер она равна 7,6 МэВ (см. рисунок 20.2.1). Например, при делении ядра урана  ${}_{92}^{238}\text{U}$ , содержащего 238 нуклонов, выделяется энергия порядка 200 МэВ.

В основу теории деления атомных ядер положена *капельная модель ядра*. Ядро рассматривается как капля электрически заряженной несжимаемой жидкости (рисунок 20.6.1, *а*) с плотностью, равной ядерной. При захвате нейтрона ядро приходит в возбуждённое состояние: попеременно то вытягивается, то сжимается.

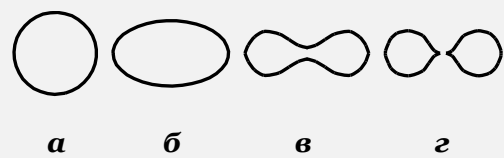


Рисунок 20.6.1

Возможность деления ядер зависит от соотношения энергии возбуждения и *минимальной энергии*, необходимой для осуществления реакции деления ядра (определяется *энергией активации*). При энергиях возбуждения,

*меньших*, чем энергия активации деления, деформация ядра-капли не достигает критической (рисунок 20.6.1, *б*), и ядро, испустив  $\gamma$ -квант, возвращается в основное энергетическое состояние без деления.

При энергиях возбуждения *больше* энергии активации деления деформация капли достигает критического значения (рисунок 20.6.1, в), формируется и развивается «перетяжка» в капле (рисунок 20.6.1, г) и наступает деление.

Тяжёлые ядра способны к делению, если для них параметр деления  $Z^2 / A \geq 17$ . Это условие выполняется для всех ядер, начиная с серебра  $^{108}_{47}\text{Ag}$ , для которого  $Z^2 / A \approx 20$ .

Ядра с параметром деления от **критического значения**  $Z^2 / A = 49$  и более совершенно неустойчивы относительно деления. Такие ядра, если и возникают, то существуют в течение промежутка времени порядка  $(10^{-23} - 10^{-24})$  с, после чего претерпевают деление.

Установлено, что **самопроизвольное (спонтанное) деление ядер** имеет место и при  $Z^2 / A < 49$ . Но в этом случае деление ядер осуществляется за счёт туннельного эффекта аналогично  $\alpha$ -распаду и период полураспада в таких случаях составляет  $(10^{16} - 10^{17})$  лет.

Продукты деления тяжёлых ядер («осколки» деления) имеют избыток нейтронов, поскольку для средних ядер число протонов приблизительно равно числу нейтронов  $N / Z \approx 1$ , а у исходных тяжёлых ядер число нейтронов значительно превышает число протонов  $N / Z \approx 1,6$ . Это приводит к тому, что осколки деления испускают в среднем 2,5 на каждый акт деления избыточных нейтронов (**нейтроны деления**). **Процессы испускания нейтронов деления осуществляются, как правило, в два этапа: большинство из них (мгновенные нейтроны) испускаются в течение промежутка времени около  $t \leq 10^{-14}$  с; меньшая часть ( $\sim 0,7\%$ ) испускается спустя некоторое время после деления ( $0,05 \leq t \leq 60$  с) – запаздывающие нейтроны.**

**Цепная реакция деления.** Наличие избыточных нейтронов при делении тяжёлых ядер может привести к возникновению *цепной реакции*. В частности, при делении ядра урана-235, поглотившего нейтрон, испускается 2 или 3 нейтрона, которые при соответствующих условиях могут попасть в другие ядра урана и вызвать их деление и привести к возникновению новых нейтронов, способных вызвать новые распады ядер урана, и т. д. Нейтроны деления ядра урана-235 имеют энергию около 2 МэВ (этому соответствуют скорости нейтронов  $\sim 2 \cdot 10^7$  м/с), что может привести к развитию очень быстрого лавинообразного процесса, называемого **цепной реакцией**. Возможность осуществления цепной реакции зависит от многих

факторов и оценивается **коэффициентом размножения нейтронов**  $k$ , который определяется как отношение числа нейтронов, возникающих на некоторой стадии (поколении) реакции, к числу таких нейтронов в предшествующей стадии (поколении).

При  $k > 1$  реакция развивается (**развивающаяся реакция**), при  $k = 1$  реакция поддерживается (**самоподдерживающаяся** цепная реакция) и при  $k < 1$  затухает (**затухающая** цепная реакция).

Не все нейтроны деления приводят к последующему делению ядер. Часть таких нейтронов может поглощаться другими ядрами или выходить из зоны реакции. Для осуществления нового процесса деления ядра необходимо, чтобы нейтрон деления ядра урана-235 вновь поглотился ядром урана-235, на долю которого в природном уране приходится всего лишь 0,7%. В итоге в природном уране цепная реакция не может осуществиться. Изотоп  ${}^{238}_{92}\text{U}$  также может поглощать нейтроны, но при этом не возникает цепной реакции.

Коэффициент размножения зависит от природы делящегося вещества, а для данного изотопа – от его количества, а также размеров и формы **активной зоны** – пространства, где происходит цепная реакция.

Минимальные размеры активной зоны, при которых возможно осуществление цепной реакции, называется **критическими размерами**.

Минимальная масса делящегося вещества, находящегося в системе критических размеров, необходимая для осуществления цепной реакции, называется **критической массой**.

В небольших кусках урана большинство нейтронов, не попав ни в одно ядро, вылетают наружу. Для чистого урана-235 критическая масса составляет около 50 кг. Если взять два куска такого вещества, масса каждого из которых менее критической массы, но суммарная масса превышает критическую массу, то после соединения этих кусков может начаться неуправляемая ядерная реакция (**ядерный взрыв**). Процесс соединения указанных кусков должен быть очень быстрым, и соединение кусков должно быть очень плотным в ограниченном пространстве, иначе ядерный заряд разлетится на части, прежде чем прореагирует значительная часть этого ядерного заряда. Для обеспечения указанных условий части ядерного заряда с массами менее критической помещаются внутри очень прочного корпуса и соединяются при помощи взрыва обычно взрывчатого вещества.

Управляемая цепная реакция деления ядер используется в ядерных реакторах. В качестве делящегося вещества в ядерных реакторах используется природный уран (состоит из смеси трёх изотопов:  $^{238}_{92}\text{U}$  ((99,2742 ± 0,0010)%,  $T_{1/2} = (4,468 \pm 0,003) \times 10^9$  лет;  $^{235}_{92}\text{U}$ , (0,7204 ± 0,0006)%,  $T_{1/2} = (7,04 \pm 0,01) \times 10^8$  лет;  $^{234}_{92}\text{U}$  (0,0054 ± 0,0005)%,  $T_{1/2} = (2,455 \pm 0,006) \times 10^5$  лет)<sup>16</sup> или уран, несколько обогащённый изотопом  $^{235}_{92}\text{U}$ .

Не слишком быстрые нейтроны деления с энергией порядка 2 МэВ, которые образуются при делении ядер  $^{235}_{92}\text{U}$ , в подавляющем большинстве захватываются не ядрами  $^{235}_{92}\text{U}$ , а ядрами  $^{238}_{92}\text{U}$  без деления, и цепная реакция в природном уране не развивается. Для того чтобы предотвратить захват нейтронов деления ядрами  $^{238}_{92}\text{U}$ , используют замедлители нейтронов. Дело в том, что нейтроны, рождающиеся при распаде ядер  $^{235}_{92}\text{U}$ , имеют слишком большие скорости, а вероятность захвата медленных тепловых нейтронов ядрами этого изотопа примерно в две сотни раз больше, чем быстрых (настолько превышает *эффективное сечение* захвата тепловых нейтронов ядер урана-235 эту величину для ядер урана-238). Поэтому, несмотря на то, что столкновения нейтронов с ядрами урана-235 осуществляются намного реже, нежели с ядрами урана-238, захват нейтронов ядрами  $^{238}_{92}\text{U}$  без деления осуществляется реже, чем захват нейтронов ядрами  $^{235}_{92}\text{U}$  с делением. Наилучшим замедлителем нейтронов является тяжёлая вода  $D_2O$ . Обычная вода при взаимодействии с нейтронами сама превращается в тяжёлую воду. Хорошим замедлителем является также графит, ядра которого не поглощают нейтронов. При упругом взаимодействии с ядрами дейтерия или углерода нейтроны замедляются до тепловых скоростей. Применение замедлителей нейтронов и специальной оболочки из бериллия, которая отражает нейтроны, позволяет снизить критическую массу до 250 г.

Другой фактор повышения коэффициента эффективности размножения нейтронов – *увеличение геометрических размеров* зоны реакции. Вероятность взаимодействия нейтронов с ядрами пропорциональна объёму зоны реакции.

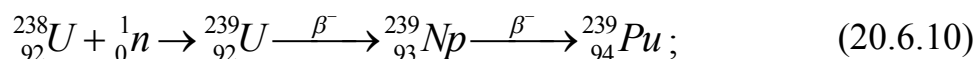
---

<sup>16</sup> Сведения приведены из обзора: *Ииханов Б. С., Третьякова Т. Ю.* Путь к сверхтяжёлым элементам // Вестник Московского университета. Сер. 3: Физика. Астрономия. 2017. № 3. С. 3.

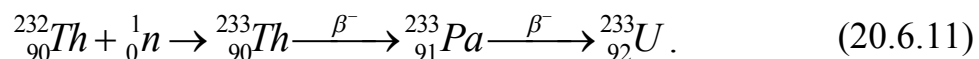
**Понятие о ядерной энергетике. Ядерный реактор.** В природе имеется три изотопа урана и тория, которые могут служить ядерным топливом или сырьём для его получения:

1)  ${}^{235}_{92}\text{U}$  – в естественном уране его содержится примерно 0,7%;

2)  ${}^{238}_{92}\text{U}$  – в естественном уране его содержится примерно 99,3% – используется для получения трансуранового элемента плутония по схеме:



3)  ${}^{232}_{90}\text{Th}$  – служит сырьём для получения искусственного ядерного топлива  ${}^{233}_{92}\text{U}$  по схеме:



Устройство, в котором поддерживается управляемая реакция деления ядер, называется ядерным (или атомным) реактором.

Ядерная реакция протекает в активной зоне реактора, которая заполнена замедлителем и пронизана стержнями, содержащими обогащённую смесь изотопов урана с повышенным содержанием урана-235 (до 3%). В активную зону вводятся регулирующие стержни, содержащие кадмий или бор, которые интенсивно поглощают нейтроны. Введение стержней в активную зону позволяет управлять скоростью цепной реакции.

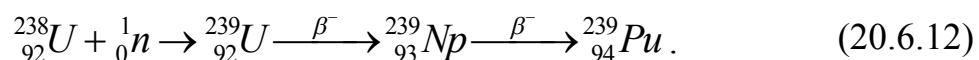
Активная зона охлаждается с помощью прокачиваемого теплоносителя, в качестве которого может применяться вода или металл с низкой температурой плавления (чаще всего это натрий, имеющий температуру плавления 98 °С). В парогенераторе теплоноситель передаёт энергию теплового движения воде, превращая её в пар высокого давления, который направляется в турбину, соединённую с электрогенератором, а из турбины поступает в конденсатор. Во избежание утечки радиации контуры теплоносителя и парогенератора работают по замкнутым циклам.

Турбины современных атомных электростанций имеют коэффициент полезного действия около 1/3. Следовательно, 2/3 энергии, вырабатываемой в реакторе этой электростанции, уносится водой в водоёмы, которые располагается рядом с электростанцией (искусственные либо естественные), вызывая их перегрев и возникновение экологических проблем.

Кроме того, на атомных электростанциях должна обеспечиваться радиационная безопасность людей, работающих на атомных электростанци-

ях, и исключаться возможность случайных выбросов радиоактивных веществ, которые в большом количестве накапливаются в активной зоне реактора.

Имеются и ядерные реакторы, работающие на быстрых нейтронах (без замедлителя). Однако для работы таких реакторов требуется, чтобы ядерное топливо было обогащено изотопом урана-235 не менее чем до 15%. Самое существенное преимущество реакторов на быстрых нейтронах заключается в том, что бесполезные в описанных выше реакторах на медленных нейтронах ядра изотопа урана-238 в процессе работы этих реакторов превращаются в ядра плутония-239, который затем можно использовать в качестве ядерного топлива. Такой процесс происходит по схеме:



В реакторах на быстрых нейтронах на 1 кг урана-235 получается до 1,5 кг плутония-239, который получается и в реакторах на медленных нейтронах, но в очень незначительных количествах.

Первый ядерный реактор был построен в 1942 году в США под руководством Э. Ферми. В нашей стране первый реактор был построен в 1946 году под руководством И. В. Курчатова.

**Термоядерные реакции.** При слиянии легких ядер и образовании нового ядра должно выделяться большое количество энергии. Выделением энергии должен сопровождаться синтез ядер с  $A < 60$  из более легких ядер. Энергия в таких реакциях синтеза будет выделяться за счёт того, что общая масса продуктов реакции будет меньше массы первоначальных частиц.

Для обеспечения условий протекания реакций слияния легких ядер требуется преодолеть потенциальный барьер кулоновского отталкивания взаимодействующих ядер и сблизить эти ядра так, чтобы стали проявляться ядерные силы притяжения, то есть на расстояние порядка  $\sim 10^{-15}$  м, что требует очень высоких температур.

Действительно, энергия кулоновского отталкивания взаимодействующих ядер равна:  $E = (1 / 4\pi\epsilon_0) \cdot (Z_1 Z_2 e^2 / r_{\text{я}})$ . Если даже взять самые малые  $Z_1 = Z_2 = 1$ , то при  $r_{\text{я}} \approx 10^{-15}$  м получаем  $E \approx 0,57 \cdot 10^{-13}$  Дж  $\approx 0,35$  МэВ. На долю каждой из взаимодействующих частиц приходится половина этой энергии.

Для преодоления потенциального барьера такой величины нужно сообщить взаимодействующим ядрам энергию теплового движения  $\frac{1}{2}kT$ ,

что соответствует температуре  $T = 0,5 \cdot 0,57 \cdot 10^{-13} / 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ К} \approx 10^9 \text{ К}$ . По указанной причине реакции синтеза лёгких ядер носят название *термоядерных реакций*. При таких температурах вещество находится в полностью ионизированном состоянии, которое называется плазмой.

Оценку энергии, выделяемой при синтезе легких ядер, проведём на примере реакции слияния ядер дейтерия и трития:



Видим, что в данном случае выделяется 17,6 МэВ на 5 нуклонов, то есть примерно 3,52 МэВ на 1 нуклон. Это огромное количество энергии даже по сравнению с энергией, выделяемой в процессе деления ядер тяжёлых элементов. Например, при делении ядра урана  ${}^{235}_{92}\text{U}$ , содержащего 235 нуклонов, выделяется энергия порядка 200 МэВ, то есть около 0,85 МэВ на 1 нуклон.

Если удастся осуществить управляемые термоядерные реакции, то человечество получит новый экологически чистый и практически неисчерпаемый источник энергии. Однако получение сверхвысоких температур и удержание плазмы, нагретой до миллиарда градусов, представляет собой труднейшую научно-техническую задачу на пути осуществления управляемого термоядерного синтеза.

Пока что удаётся осуществить только неуправляемую реакцию синтеза в водородной бомбе. Высокая температура, необходимая для ядерного синтеза, достигается здесь с помощью взрыва обычной урановой или плутониевой бомбы.

Термоядерные реакции играют чрезвычайно важную роль в эволюции Вселенной. Энергия излучения Солнца и звезд имеет термоядерное происхождение.

## 20.7. Частицы и взаимодействия

В настоящее время известно более 400 различных элементарных частиц, и их количество значительно превосходит количество элементов в Периодической системе элементов Менделеева. В такой ситуации теряет смысл понятие «элементарные частицы».

Обилие открытых и вновь открываемых частиц наводит на мысль, что все они построены из каких-то других более простых (бесструктурных) частиц, для которых был введён новый термин — фундаментальные части-



цы. Считается установленным, что всё многообразие форм материи в природе обеспечивается наличием относительного небольшого числа мельчайших фундаментальных частиц вещества, испытывающих взаимные превращения за счёт взаимодействия друг с другом. Современные физические представления основаны на концепции близкодействия. Согласно современной концепции близкодействия, взаимодействия между телами осуществляется с конечной скоростью, не превышающей скорость света в вакууме, посредством обмена соответствующими частицами – переносчиками взаимодействия (квантами взаимодействия). Таким образом, пространство между взаимодействующими телами «заполнено» частицами – переносчиками взаимодействия, или соответствующим взаимодействием полем.

Важнейшую роль в наших представлениях об окружающем нас мире играют законы сохранения. Каждый закон сохранения связан с какой-либо симметрией (теорема Нётер (Амáлия Ёмми Нётер, нем., 1882–1935)). Так, законы сохранения энергии и импульса связаны с однородностью времени и пространства. Закон сохранения момента количества движения связан с симметрией пространства относительно вращений. Законы сохранения зарядов связаны с симметрией физических законов относительно специальных преобразований, описывающих частицы.

Имеются обширные материалы о состоянии современных представлений о частицах и их взаимодействиях. Изложенные в данном разделе сведения на эту тему носят краткий обзорный характер и основаны в основном на материалах, расположенных на сайтах <http://nuclphys.sinp.msu.ru> и <https://ru.wikipedia.org/wiki>.

В таблице 20.7.1 собраны сведения о том, какие величины сохраняются в различных взаимодействиях. Знак «+» («–») показывает, что данная величина сохраняется (не сохраняется). В аддитивных законах сохраняется сумма величин, в мультипликативных законах – произведение величин, которые могут быть равны +1 или –1.

Таблица 20.7.1. Законы сохранения

| Характеристика                      | Взаимодействие |                  |        |
|-------------------------------------|----------------|------------------|--------|
|                                     | сильное        | электромагнитное | слабое |
| <b>Аддитивные законы сохранения</b> |                |                  |        |
| Электрический заряд, $Q$            | +              | +                | +      |
| Энергия, $E$                        | +              | +                | +      |
| Импульс, $p$                        | +              | +                | +      |
| Угловой момент, $J$                 | +              | +                | +      |

Продолжение таблицы 20.7.1

|                                            |   |   |   |
|--------------------------------------------|---|---|---|
| Барионный заряд, $B$                       | + | + | + |
| Лептонные заряды, $L_e, L_\mu, L_\tau$     | + | + | + |
| Странность, $s$                            | + | + | – |
| Очарование, $c$                            | + | + | – |
| Красота, $b$                               | + | + | – |
| Истина, $t$                                | + | + | – |
| Изоспин, $I$                               | + | – | – |
| Проекция изоспина, $I_3$                   | + | + | – |
| <b>Мультипликативные законы сохранения</b> |   |   |   |
| Пространственная чётность, $P$             | + | + | – |
| Зарядовая чётность, $C$                    | + | + | – |
| Временная чётность, $T$                    | + | + | – |
| Комбинированная чётность, $CP$             | + | + | – |
| $CPT$ -чётность                            | + | + | + |
| $G$ -чётность                              | + | – | – |

Фундаментальные частицы делятся на частицы вещества (**фундаментальные фермионы**), имеющие полуцелый спин  $J = 1/2$ , и на переносчиков взаимодействий между частицами вещества (**калибровочные бозоны**), имеющие целый спин.

Фундаментальные фермионы – **кварки** и **лептоны** (в физике элементарных частиц спин принято обозначать  $J$  вместо  $L_s$ ).

Имеется всего по 6 типов (ароматов) кварков и лептонов, которые объединены в три семейства (поколения):

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{1 поколение} & \text{2 поколение} & \text{3 поколение} \\
 \text{Кварки} & \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}
 \end{array} \quad (3.7.1a)$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{1 поколение} & \text{2 поколение} & \text{3 поколение} \\
 \text{Лептоны} & \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}
 \end{array} \quad (3.7.1б)$$

Кварки верхнего ряда ( $u, c, t$ ) имеют электрический заряд  $Q = +(2/3)e$ , нижнего ряда ( $d, s, b$ ) имеют электрический заряд  $Q = -(1/3)e$ , где  $e$  – абсолютная величина заряда электрона. Кварки имеют названия: верхний (up), нижний (down), очарованный (charm), странный

(strange), истинный (truth), прелестный (beauty). Свойства кварков определяют квантовые числа: спин  $1/2$ , чётность  $P$ , барионное число  $B$ , изоспин  $I$ , проекция изоспина  $I_3$ , указанные в таблице 20.7.1, и квантовые числа, введённые специально для того, чтобы объяснять особенности в свойствах кварков: странность  $s$ , очарование (шарм)  $c$ , красота (bottomness или beauty)  $b$ , верхний (topness)  $t$ . Совокупность этих квантовых чисел, характеризующих определенный тип кварка, называется также «ароматом» кварка.

Каждый кварк, не изменяя своего типа (аромата), может находиться в трёх состояниях, которые принято различать по **цвету** и которые введены для того, чтобы обеспечивалось выполнение принципа Паули при объединении кварков в барионы, состоящих из 3-х тождественных кварков, какими являются, например, барионы  $\Omega^-$ ,  $\Lambda^{++}$ ,  $\Delta^-$  (см. ниже). Изменение цвета кварка без изменения его аромата осуществляется за счёт обмена **глюонами** – частицами-переносчиками сильного взаимодействия.

Кварки связаны внутри адронов за счёт обмена глюонами и в свободном состоянии не наблюдаются. Тем не менее вводят понятие массы «свободного» кварка. Под массой «свободного» кварка понимают массу, которую имели бы кварки, если бы не были связаны друг с другом. В итоге, массу кварка в составе адрона даёт сумма масс «свободного» кварка, сложенная с энергией взаимодействия кварка с другими кварками в адроне. Массы кварков в настоящее время получены в результате теоретического анализа экспериментальных данных.

Таблица 20.7.2. Основные характеристики кварков

| Характеристика                       | Тип (аромат) кварка |        |        |        |         |                 |
|--------------------------------------|---------------------|--------|--------|--------|---------|-----------------|
|                                      | $d$                 | $u$    | $s$    | $c$    | $b$     | $t$             |
| Электрический заряд, $Q$             | $-1/3$              | $+2/3$ | $-1/3$ | $+2/3$ | $-1/3$  | $+2/3$          |
| Барионное число, $B$                 | $1/3$               | $1/3$  | $1/3$  | $1/3$  | $1/3$   | $1/3$           |
| Спин, $J$                            | $1/2$               | $1/2$  | $1/2$  | $1/2$  | $1/2$   | $1/2$           |
| Чётность, $P$                        | $+1$                | $+1$   | $+1$   | $+1$   | $+1$    | $+1$            |
| Изоспин, $I$                         | $1/2$               | $1/2$  | $0$    | $0$    | $0$     | $0$             |
| Проекция изоспина, $I_3$             | $-1/2$              | $+1/2$ | $0$    | $0$    | $0$     | $0$             |
| Странность, $s$                      | $0$                 | $0$    | $-1$   | $0$    | $0$     | $0$             |
| Очарование (charm), $c$              | $0$                 | $0$    | $0$    | $+1$   | $0$     | $0$             |
| Красота (bottomness или beauty), $b$ | $0$                 | $0$    | $0$    | $0$    | $-1$    | $0$             |
| Верхний (topness), $t$               | $0$                 | $0$    | $0$    | $0$    | $0$     | $+1$            |
| Масса в составе адрона, ГэВ          | 0,33                | 0,33   | 0,51   | 1,8    | 5       | 180             |
| Масса «свободного» кварка, ГэВ       | 0,007               | 0,005  | 0,15   | 1,3    | 4,1–4,4 | $178,0 \pm 4,3$ |

Кроме упомянутого выше сильного взаимодействия, кварки участвуют в электромагнитных и в слабых взаимодействиях.

При излучении или поглощении  $\gamma$ -кванта (электромагнитное взаимодействие) кварки не изменяют ни цвет, ни аромат.

При излучении или поглощении  $W^\pm$  или  $Z$ -бозона (слабое взаимодействие) кварки могут изменять аромат кварка, но цвет кварка при этом остаётся без изменения.

Установлено, что для каждой частицы имеется **античастица**. Первой античастицей оказался **позитрон**, существование которого чисто теоретически предсказал в 1928 году П. Дирак (Поль Адриен Морис Дира́к, *Paul Adrien Maurice Dirac*, англ., 1902–1984, лауреат Нобелевской премии по физике 1933 года) на основании анализа релятивистского уравнения Шрёдингера. В 1932 году позитрон был обнаружен в космических лучах. Частицы и античастицы имеют одинаковые массы, спины, изоспины, времена жизни; противоположные знаки у электрических зарядов, магнитных моментов, барионных и лептонных зарядов, проекций изоспина, чётности и др. В качестве примеров можно привести пары «частица – античастица» у лептонов ( $\mu^+, \mu^-$ ) и мезонов ( $\pi^+, \pi^-$ ). Античастицы имеются и у бозонов, в том числе у протона – антипротон, и у нейтрона – **антинейтрон**. Параметры некоторых частиц и соответствующих им античастиц приведена в таблице 20.7.3.

Таблица 20.7.3. Связь характеристик частиц и античастиц

| Характеристика      | Частица                 | Античастица             |
|---------------------|-------------------------|-------------------------|
| Масса               | $m$                     | $m$                     |
| Электрический заряд | $+(-)Q$                 | $-(+ )Q$                |
| Спин                | $J$                     | $J$                     |
| Магнитный момент    | $+(-)\mu$               | $-(+ )\mu$              |
| Барионное число     | $+B$                    | $-B$                    |
| Лептонное число     | $+L_e, +L_\mu, +L_\tau$ | $-L_e, -L_\mu, -L_\tau$ |
| Странность          | $+(-)s$                 | $-(+ )s$                |
| Очарование (Charm)  | $+(-)c$                 | $-(+ )c$                |
| Bottomness          | $+(-)b$                 | $-(+ )b$                |
| Topness             | $+(-)s$                 | $-(+ )t$                |

Продолжение таблицы 20.7.3

|                   |                                         |                                                                          |
|-------------------|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Изоспин           | $J$                                     | $J$                                                                      |
| Проекция изоспина | $+(-)I_3$                               | $-(+)I_3$                                                                |
| Чётность          | $+(-)$                                  | $-(+)$                                                                   |
| Время жизни       | $\tau$                                  | $\tau$                                                                   |
| Схема распада     | $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$ | зарядово сопряжённая:<br>$\tilde{n} \rightarrow \tilde{p} + e^+ + \nu_e$ |

Имеются некоторые частицы, для которых частица и античастица тождественны, например  $\gamma$ ,  $\pi^0$ ,  $\eta^0$ . Такие частицы называют истинно нейтральными.

Значения квантовых чисел кварков и антикварков приведено таблице 20.7.4.

Таблица 20.7.4. Характеристики кварков

| Кварк                                           | Символ<br>кварка<br>(антикварка)                         | Электриче-<br>ский заряд, Q<br>[e] | Барионное<br>число, B        | Спин,<br>[ħ]   | Стран-<br>ность, S   |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|------------------------------------|------------------------------|----------------|----------------------|
| Верхний (up)<br>Нижний (down)                   | $\begin{pmatrix} u(\bar{u}) \\ d(\bar{d}) \end{pmatrix}$ | $+2/3(-2/3)$<br>$-1/3(+1/3)$       | $+1/3(-1/3)$<br>$+1/3(-1/3)$ | $1/2$<br>$1/2$ | $0$<br>$0$           |
| Очарованный<br>(charm)<br>Странный<br>(strange) | $\begin{pmatrix} c(\bar{c}) \\ s(\bar{s}) \end{pmatrix}$ | $+2/3(-2/3)$<br>$-1/3(+1/3)$       | $+1/3(-1/3)$<br>$+1/3(-1/3)$ | $1/2$<br>$1/2$ | $-1(+1)$<br>$-1(+1)$ |
| Истинный (truth)<br>Прелестный<br>(beauty)      | $\begin{pmatrix} t(\bar{t}) \\ b(\bar{b}) \end{pmatrix}$ | $+2/3(-2/3)$<br>$-1/3(+1/3)$       | $+1/3(-1/3)$<br>$+1/3(-1/3)$ | $1/2$<br>$1/2$ | $0$<br>$0$           |

Лептонов, как и кварков, тоже 6 типов. Они также объединены в 3 семейства (поколения) (см. (3.7.16)). Три лептона – электрон  $e$ , мюон  $\mu$  и тау-лептон (таон)  $\tau$  – имеют одинаковые электрические заряды, равные  $-e$ , и соответствующие им нейтрино – электронное нейтрино  $\nu_e$ , мюонное нейтрино  $\nu_\mu$  и тау-нейтрино  $\nu_\tau$ , электрический заряд которых равен 0.

Лептоны участвуют в *слабых взаимодействиях* и в *электромагнитных взаимодействиях* (за исключением нейтрино), но не участвуют в сильных взаимодействиях, и поэтому у них нет цвета (цветовых состояний). Лептоны наблюдаются в свободном состоянии как отдельные частицы.

В различных процессах взаимодействия с другими частицами вещества нейтрино обычно появляется в паре с соответствующим лептоном верхней строки. Каждому поколению лептонов приписывается своё лептонное число, которые в большинстве процессов сохраняются.

Три поколения античастиц для лептонов приведены ниже:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{1 поколение} & \text{2 поколение} & \text{3 поколение} \\
 \begin{pmatrix} e^+ \\ \tilde{\nu}_e \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mu^+ \\ \tilde{\nu}_\mu \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tau^+ \\ \tilde{\nu}_\tau \end{pmatrix}
 \end{array} \quad (3.7.2)$$

Ориентировочные значения верхних границ масс нейтрино приведены в табл. 20.7.5.

Таблица 20.7.5. Массы лептонов

| Тип лептона                      | $e$  | $\mu$ | $\tau$ | $\nu_e$             | $\nu_\mu$ | $\nu_\tau$ |
|----------------------------------|------|-------|--------|---------------------|-----------|------------|
| Масса лептона МэВ/с <sup>2</sup> | 0,51 | 105,6 | 1777   | $< 5 \cdot 10^{-6}$ | $< 0,17$  | $< 24$     |

Частицы с целым спином, посредством которых осуществляется взаимодействие между фундаментальными фермионами (кварками и лептонами), называются *калибровочными бозонами*.

**Фундаментальные взаимодействия** отличаются частицами – переносчиками взаимодействия и интенсивностью воздействия. Для количественного описания интенсивности фундаментальных взаимодействий пользуются константами *связи*  $g$ , и в порядке возрастания интенсивности этих взаимодействий располагаются следующим образом: *гравитационное, слабое, электромагнитное и сильное*. Кроме того, фундаментальные взаимодействия описываются характерными *радиусами действия*  $r$ . Виды взаимодействий и соответствующие им параметры приведены в таблице 20.7.6.

Таблица 20.7.6. Фундаментальные взаимодействия

| Взаимодействие   | На какие частицы действует                          | Калибровочные бозоны                                                                        | Радиус действия                      | Константа взаимодействия | Характерное время жизни, с                                                                   | Характерное сечение, мб                                                     |
|------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Сильное          | Все цветные частицы                                 | 8 глюонов, спин $J = 1$ , безмассовые.                                                      | $1 \text{ Фм} = \frac{1}{m_\pi}$     | 1                        | $10^{-23}$<br>$\Delta \rightarrow N\pi$                                                      | 10<br>$\pi p \rightarrow \pi p$                                             |
| Электромагнитное | Все электрически заряженные частицы                 | Фотон, спин $J = 1$ , безмассовый.                                                          | $\infty$                             | $(1/137)^{1/2}$          | $10^{-20} - 10^{-16}$<br>$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$<br>$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda\gamma$ | $10^{-3}$<br>$\gamma p \rightarrow p\pi^0$                                  |
| Слабое           | Кварки, лептоны, электрослабые калибровочные бозоны | $W^+$ , $W^-$ , $Z$ спин $J = 1$ , $m(W^\pm) = 80 \text{ ГэВ}$<br>$m(Z) = 91 \text{ ГэВ}$ . | $10^{-2} \text{ Фм} = \frac{1}{m_W}$ | $10^{-6}$                | $> 10^{-12}$<br>$\Sigma^- \rightarrow n\pi^-$<br>$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$     | $10^{-14}$<br>$\nu p \rightarrow \nu p$<br>$\nu p \rightarrow \mu^- p\pi^+$ |
| Гравитационное   | Все массивные частицы                               | Гравитон, спин $J = 2$ , безмассовый                                                        | $\infty$                             | $10^{-38}$               | —                                                                                            | —                                                                           |

**Сильное взаимодействие.** В сильном взаимодействии участвуют частицы, называемые *адронами*. Характерный радиус сильного взаимодействия  $\sim 10^{-15} \text{ м}$ . В результате сильного взаимодействия появляются частицы, имеющие характерное время жизни  $\sim (10^{-20} - 10^{-23}) \text{ с}$ . Сильное взаимодействие проявляется исключительно в качестве *сил притяжения*.

**Электромагнитное взаимодействие.** Переносчиками электромагнитного взаимодействия являются фотоны, которые участвуют в *электромагнитных взаимодействиях*, но не участвуют в сильном и слабом взаимодействиях. Константа связи электромагнитного взаимодействия обозначается  $\alpha^{1/2} = (e^2 / \hbar c)^{1/2} = (1/137)^{1/2} \approx 8,54 \cdot 10^{-2}$  и называется постоянной тонкой структуры. То есть электромагнитное взаимодействие значительно слабее сильных взаимодействий. Константа электромагнитного взаимодействия определяет вероятность испускания или поглощения фотона частицей с зарядом  $\pm e$ . В результате электромагнитного взаимодействия появляются частицы, имеющие характерное время жизни  $\sim (10^{-16} - 10^{-20}) \text{ с}$ . Силы электромагнитного взаимодействия обуславливают разлёт осколков, образующихся при делении атомных ядер. Все электрические и магнитные явления, наблюдаемые нами в различных явлениях (оптических, механических, тепловых, химических и т. д.), обусловлены электромагнитными си-

лами, которые могут быть как *силами притяжения*, так и *силами отталкивания*.

**Слабое взаимодействие.** Этот вид взаимодействия проявляется во всех видах  $\beta$ -распада ядер, а также в процессах взаимодействия нейтрино с веществом и многих распадах элементарных частиц. Константа слабого взаимодействия  $\sim 10^{-6}$ . Переносчиками слабого взаимодействия являются промежуточные бозоны  $W^{\pm}$  и  $Z$ -бозоны. Маленький радиус слабого взаимодействия  $\sim 10^{-18}$  м обусловлен большими массами промежуточных бозонов. Слабое взаимодействие гораздо слабее электромагнитного взаимодействия. В результате слабого взаимодействия появляются частицы, имеющие времена жизни  $> 10^{-12}$  с. Единственными частицами, участвующими только в слабых и гравитационных взаимодействиях, являются нейтрино.

**Гравитационное взаимодействие.** В гравитационном взаимодействии участвуют все частицы. Радиус действия гравитационного взаимодействия бесконечен.

Сравнение гравитационного и электромагнитного взаимодействия двух протонов, находящихся на расстоянии друг от друга  $\sim 10^{-15}$  м приводит к соотношению  $F_{гр} / F_{э.м} \sim 10^{-36}$ . Гравитационное взаимодействие является универсальным и самым слабым. Однако, из-за малости масс фундаментальных и элементарных частиц, в процессах микромира гравитационное взаимодействие несущественно. Гравитационные силы играют решающую роль при взаимодействии космических объектов (звезд, планет и т. п.) с их огромными массами. Гравитационные силы проявляются только как *силы притяжения*.

Предполагается, что переносчиками гравитационного взаимодействия являются *гравитоны*. Однако на опыте гравитоны пока не обнаружены.

Считается, что современными технологиями найти гравитоны невозможно. Но их существование можно косвенно подтвердить с помощью LIGO (*лазерно-интерферометрическая гравитационно-волновая обсерватория*).

О первом прямом детектировании гравитационных волн коллаборациями **LIGO** и **VIRGO** (*франко-итальянский детектор гравитационных волн, расположенный в EGO (Европейская гравитационная обсерватория)*) было объявлено 11 февраля 2016 года (*THURSDAY: Scientists to provide update on the search for gravitational waves. ligo.org. Архивировано 2016.02.24*). Результаты опубликованы в журнале



Physical Review Letters (B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2016). «Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger». Physical Review Letters 116 (6)) и ряде последующих статей. Событие получило обозначение GW150914[4]. За экспериментальное обнаружение гравитационных волн в 2017 году была присуждена Нобелевская премия по физике (The Nobel Prize in Physics 2017. [www.nobelprize.org](http://www.nobelprize.org)).

**Строение и характеристики элементарных частиц.** Все обнаруженные в настоящее время элементарные частицы разделены на следующие классы и подклассы в зависимости от типов фундаментальных взаимодействий, в которых эти частицы участвуют:

**Адроны** – многочисленная группа частиц (свыше 400 – элементарные частицы, которые участвуют в *сильных взаимодействиях*. Кроме того, адроны могут участвовать и в *электромагнитном*, и в *слабом взаимодействиях*). Адроны подразделяют на мезоны и барионы.

**Мезоны** – это адроны с нулевым или целочисленным спином (*бозоны*). К ним относятся  $\pi$ -,  $K$ -, и  $\eta$ -мезоны, а также множество мезонных резонансов (мезонов с временем жизни  $\sim 10^{-23}$  с).

**Барионы** – это адроны с полуцелым спином (*фермионы*). Они имеют спин  $1/2$ , за исключением  $\Omega$ , спин которого  $3/2$ ). Массы барионов не менее массы протона. К ним относятся *нуклоны* (протоны и нейтроны), *гипероны* и множество *барионных резонансов*. Все барионы, кроме протона, нестабильны. Нестабильные барионы с массами, большими массы протона и большим временем жизни (сравнительно с ядерным  $\sim 10^{-23}$  с) называют *гиперонами* (гипероны  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$  и  $\Omega$ ). За время  $\tau \sim (10^{-10} - 10^{-19})$  с они распадаются на нуклоны и лёгкие частицы ( $\pi$ -мезоны, электроны, нейтрино,  $\gamma$ -кванты).

**Адроны** состоят из кварков, участвующих во всех видах взаимодействий. Адроны подразделяются на **барионы**, состоящие из трех кварков и имеющие барионный заряд  $B=1$ , и **мезоны**, состоящие из кварка и антикварка, для которых  $B=0$ . Кроме того, адроны описываются квантовыми числами  $s$  (странность),  $c$  (очарование),  $b$  (красота),  $t$  (истина), изоспином  $I$  и его третьей проекцией  $I_3$ .

В таблице 20.7.7 приведены кварковые составы и характеристики некоторых адронов.

Таблица 20.7.7. Кварковый состав некоторых адронов

| Мезоны      |            | Барионы    |                         |
|-------------|------------|------------|-------------------------|
| частица     | состав     | частица    | состав                  |
| $\pi^+$     | $u\bar{d}$ | $p$        | $uud$                   |
| $\pi^-$     | $\bar{u}d$ | $\bar{p}$  | $\bar{u}\bar{u}\bar{d}$ |
| $K^+$       | $u\bar{s}$ | $n$        | $udd$                   |
| $K^-$       | $\bar{u}s$ | $\bar{n}$  | $\bar{u}\bar{d}\bar{d}$ |
| $K^0$       | $d\bar{s}$ | $\Sigma^+$ | $uus$                   |
| $\bar{K}^0$ | $\bar{d}s$ | $\Sigma^-$ | $dds$                   |

Внутренняя чётность адрона равна произведению чётностей, входящих в его состав кварков, умноженному на  $(-1)^{\sum L}$ , где  $L$  – орбитальные моменты кварков в составе адрона. При этом чётность кварка равна +1 и не зависит от типа кварка, чётность антикварка равна –1 и не зависит от типа кварка.

Выполнения принципа Паули при построении адронов обеспечивается **бесцветностью** этих адронов за счёт различия цвета тождественных кварков, входящих в их состав. Например, барионы  $\Omega^-(sss)$ ,  $\Lambda^{++}(uuu)$ ,  $\Delta^-(ddd)$  являются бесцветными частицами за счёт того, что смесь всех трех цветов (**красный** – к, **синий** – с и **зелёный** – з) даёт бесцветное («белое») состояние. Кроме того, чтобы объяснить бесцветность мезонов, состоящих из кварка и антикварка, вводится понятие **антицвет**, так что любой цвет компенсируется **антицветом**.

Предсказанные теоретически в 1957 году промежуточные  $W^\pm$  и  $Z$ -бозоны были обнаружены в 1983 году в экспериментах на ускорителе на встречных пучках протонов и антипротонов с высокой энергией. Это открытие подтвердило справедливость теории, объединившей электромагнитное и слабое взаимодействия в единое, так называемое электрослабое взаимодействие, и рассматривает электромагнитное поле и поле слабого взаимодействия как разные компоненты одного поля, в котором наряду с квантом участвуют векторные бозоны.

После этого в современной физике значительно возросла уверенность в том, что все виды взаимодействий тесно связаны между собой и,

по существу, являются различными проявлениями некоторого единого поля. Теория, объединяющая электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия, получила название Великого объединения. Учёные предполагают, что и у гравитационного взаимодействия должен быть свой переносчик – гипотетическая частица, названная гравитоном. Однако эта частица до сих пор не обнаружена.

В настоящее время считается доказанным, что единое поле, объединяющее все виды взаимодействия, может существовать только при чрезвычайно больших энергиях частиц, недостижимых на современных ускорителях. Такими большими энергиями частицы могли обладать только на самых ранних этапах существования Вселенной, которая возникла в результате так называемого Большого взрыва (Big Bang). Космология – наука об эволюции Вселенной – предполагает, что Большой взрыв произошёл 18 миллиардов лет тому назад. В Стандартной модели эволюции Вселенной предполагается, что в первый период после взрыва температура могла достигать  $10^{32}$  К, а энергия частиц  $E = kT$  достигать значений  $10^{19}$  ГэВ. В этот период материя существовала в форме кварков и нейтрино, при этом все виды взаимодействий были объединены в единое силовое поле. Постепенно по мере расширения Вселенной энергия частиц уменьшалась, и из единого поля взаимодействий сначала выделилось гравитационное взаимодействие (при энергиях частиц  $\leq 10^{19}$  ГэВ), а затем сильное взаимодействие отделилось от электрослабого (при энергиях порядка  $10^{14}$  ГэВ). При энергиях порядка  $10^3$  ГэВ все четыре вида фундаментальных взаимодействий оказались разделёнными. Одновременно с этими процессами шло формирование более сложных форм материи – нуклонов, лёгких ядер, ионов, атомов и т. д. Космология в своей модели пытается проследить эволюцию Вселенной на разных этапах её развития от Большого взрыва до наших дней, опираясь на законы физики элементарных частиц, а также ядерной и атомной физики.

Для получения ответов на актуальные физические вопросы был построен Большой адронный коллайдер (БАК или LHC – Large Hadron Collider), первая очередь которого запущена в сентябре 2008 года. Основные задачи БАК – достоверно обнаружить хоть какие-нибудь отклонения от Стандартной модели – совокупности теорий, составляющих современное представление о фундаментальных частицах и взаимодействиях. Несмотря на свои преимущества, она имеет и трудности: не описывает гравитационное взаимодействие, не объясняет существования тёмной материи и тёмной энергии.

Одной из основных целей строительства ЛНС являлось также доказательство существования бозона Хиггса. В Стандартной модели фундаментальные частицы являются безмассовыми, поскольку законы симметрии теорий микромира запрещают фундаментальным частицам иметь массы. Массы частиц появляются в результате их взаимодействия со специальным полем, которое было предсказано Энглером, Браутом, Хиггсом и называется полем Хиггса. Согласно Стандартной модели, пространство заполнено однородным скалярным полем Хиггса, которое возникает при охлаждении Вселенной после Большого взрыва.

Суть проблемы о возникновении массы состоит в следующем. Существует два типа элементарных частиц:

1. Сложные частицы, имеющие внутреннюю структуру и видимый размер, например адроны, состоящие из двух или трёх кварков.
2. Бесструктурные, не имеющие размер частицы, – это кварки, лептоны и кванты физических полей. Они ведут себя как материальные точки, и их называют фундаментальными.

Масса сложного объекта (адрона) формируется из масс покоя составляющих его фундаментальных частиц, а также энергий движения и взаимодействия этих частиц внутри адрона. При этом связь энергии и массы даётся соотношением  $E = mc^2$ . Возьмём, например, протон. Он состоит из двух  $u$ -кварков и одного  $d$ -кварка, взаимодействующих между собой посредством сильного поля, переносчиками которого являются безмассовые глюоны. Суммарная масса покоя невзаимодействующих (голых) кварков протона равна  $(2m_u + m_d) \approx (2 \cdot 2,2 + 4,7) \text{ МэВ}/c^2$ , что составляет  $\approx 1\%$  массы протона –  $938,3 \text{ МэВ}/c^2$ . То есть около 99% массы протона формируется за счёт кинетической энергии кварков и энергии глюонного поля. И то, и другое – результат сильного взаимодействия. Однако остаётся вопрос о природе суммарной массы покоя «голых» кварков. Они не имеют внутренней структуры, и поэтому их массы не могут возникать за счёт кинетической и потенциальной энергии объектов этой структуры. Аналогичный вопрос о массе относится не только к кваркам, но и к другим фундаментальным, т. е. бесструктурным, частицам (лептонам и квантам полей).

Ответ на вопрос о природе масс фундаментальных частиц был дан Стандартной моделью. Согласно ей, массы фундаментальных частиц являются результатом их взаимодействия с хиггсовским полем. Квантом этого поля является бозон Хиггса. Это поле присутствует всюду во Вселенной. Главная роль поля Хиггса – обеспечить массы всем фундаментальным частицам. Хиггсовское поле нарушает симметрии фундаментальных ча-

стиц и обеспечивает возможность существования масс у этих частиц. В этом главная роль хиггсовского поля. Бозон Хиггса (Пётр Уэр Хиггс, англ., 1929) – последняя из фундаментальных частиц, предсказываемых Стандартной Моделью элементарных частиц, которую до 2012 г. не наблюдали.

Основные свойства хиггсовского поля состоят в следующем.

Во-первых, это поле однородно, т. е. равномерно «разлито» по всему пространству, и оно неразрывно связано с понятием физического вакуума. Физический вакуум – это не абсолютная пустота, это наинизшее энергетическое состояние полей, пронизывающих пространство. Это вакуумное поле, обладая некоторыми свойствами обычной материальной среды, не создаёт связанной с ним выделенной системы отсчёта, не мешает движению тел и распространению других физических полей через заполненное им пространство.

Второе уникальное свойство поля Хиггса состоит в том, что его напряжённость всюду отлична от нуля. Для обычных полей (электромагнитного, сильного и слабого) самое низкое энергетическое состояние соответствует нулевой напряжённости поля, т. е. его отсутствию.

Третья особенность поля Хиггса состоит в том, что, взаимодействуя с фундаментальными частицами, оно наделяет их массами, величины которых пропорциональны напряжённости (или потенциалу  $\varphi_0$ ) этого поля, умноженному на силу (интенсивность) взаимодействия. Чем сильнее (интенсивнее) это взаимодействие, тем больше масса частицы.

Существование хиггсовского бозона было предсказано в 1964 году, и его поиск стал одной из основных целей проекта БАК.

Об открытии бозона Хиггса было объявлено 4 июля 2012 г. на семинаре в CERN. До этого времени бозон Хиггса был единственным недостающим звеном в Стандартной модели. Бозон Хиггса был открыт двумя экспериментальными группами, работающими на двух детекторах – ATLAS и CMS.

После долгожданного объявления об открытии этой частицы в 2012 году научная программа LHC предполагает многочисленные задачи по доскональному изучению его свойств. Величина массы частицы определяется интенсивностью этого взаимодействия или константой её связи с этим полем. Отметим, что хиггсовские силы являются очень слабыми и очень короткодействующими вследствие большой массы бозона Хиггса. Константа взаимодействия этих сил на два порядка превосходит константу слабых сил.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Необходимость введения понятия о тензорах и рассмотрение простейших свойств этих объектов поясним на примере о моменте импульса абсолютно твёрдого тела (кратко – твёрдого тела).

Как обычно, воспользуемся представлением о твёрдом теле как системе жёстко связанных материальных точек, имеющих массы  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , импульсы  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , и радиус-векторы  $\vec{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

В соответствии с определением, момент импульса рассматриваемого тела относительно некоторого центра  $O$  есть вектор  $\vec{L}$  (нижний индекс «О» для упрощения записи опустим), определяемый выражением:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (\text{П.1.1})$$

Используя определение импульса материальной точки и учитывая связь между линейной и угловой скоростями материальных точек, можем записать:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i [\vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)]. \quad (\text{П.1.2})$$

Последнее равенство в найденном выражении для момента импульса получено при помощи известной формулы из векторной алгебры:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  (для запоминания этой формулы очень удобно использовать мнемоническое правило «бац минус цаб»). Полученная формула устанавливает искомую связь вектора момента импульса твёрдого тела и вектора его угловой скорости.

Для анализа полученного выражения ведём некоторую декартову прямоугольную систему координат и запишем проекции вектора момента импульса на координатные оси:

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i [\omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)] = \\ &= \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z; \end{aligned} \quad (\text{П.1.3})$$

$$\begin{aligned}
L_y &= \sum_i m_i [\omega_y (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - y_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)] = \\
&= -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i = \\
&= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z;
\end{aligned} \tag{П.1.4}$$

$$\begin{aligned}
L_z &= \sum_i m_i [\omega_z (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - z_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)] = \\
&= -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \\
&= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z.
\end{aligned} \tag{П.1.5}$$

В формулах (П.1.3)–(П.1.5) для краткости введены обозначения  $I_{kl}$ ,  $k, l = x, y, z$  множителей перед проекциями вектора угловой скорости. Полученные результаты позволяют вычислить проекции вектора момента импульса в выбранной системе координат через проекции векторов угловой скорости и материальных точек в данной системе координат. Ясно, что при переходе к другой системе координат произойдёт изменение проекций векторов угловой скорости и материальных точек и, как следствие, изменятся проекции вектора момента импульса.

Набор множителей перед проекциями вектора угловой скорости в (П.1.3)–(П.1.5) обозначают  $I_{kl}$ ,  $k, l = x, y, z$  и записывают в виде квадратной таблицы (матрицы)  $\hat{I} = (I_{kl})$ :

$$\begin{aligned}
\hat{I} &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{П.1.6}$$

Новую величину с девятью компонентами, определяемыми (П.1.6), называют **тензором момента инерции** (кратко – **тензором инерции**) рассматриваемого твёрдого тела. Легко заметить, что  $I_{kl} = I_{lk}$ , то есть тензор

моментов инерции является *симметричным тензором*. Тензор инерции является представителем математических объектов, называемых **тензорами 2-го ранга**. Хотя тензор инерции и записан в виде матрицы и в этом виде подчиняется правилам действий с матрицами, нельзя тензор инерции отождествлять с представляющей его в выбранной системе координат матрицей. Дело в том, что компонентами матрицы могут быть различные математические объекты: числа, векторы, многочлены и т. д. (в том числе и матрицы), законы преобразования которых многообразны. В то же время компоненты тензора инерции (как частного случая тензоров 2-го ранга) должны изменяться при переходе к другой системе координат по вполне определённым правилам, на которых мы здесь не будем останавливаться. При вычислении компонент тензора момента инерции знаки сумм заменяются интегралами (см. комментарий к вычислению момента инерции относительно оси). Например, компонента  $I_{xx}$  вычисляется по формуле:

$$I_{xx} = \int_V \rho(x, y, z)(y^2 + z^2) dV. \quad (\text{П.1.7})$$

Формулы (П.1.3)–(П.1.5) с учётом принятых обозначений можно записать в компактном виде:

$$L_k = \sum_{l=x,y,z} I_{kl} \omega_l; \quad k = x, y, z. \quad (\text{П.1.8})$$

Выражение  $L_k = \sum_{l=x,y,z} I_{kl} \omega_l; \quad k = x, y, z$  означает, что вектор момента

импульса  $\vec{L}$  твёрдого тела и вектор его угловой скорости  $\vec{\omega}$  **не коллинеарны**. Кстати, с точки зрения тензорного исчисления, скаляры – это тензоры нулевого ранга, а векторы – тензоры первого ранга.

Можно доказать, что для твёрдого тела имеются три взаимно перпендикулярные и проходящие через центр масс прямые (оси), при вращении вокруг которых (то есть при коллинеарности вектора угловой скорости и данной оси) направления векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  совпадают. В данной ситуации недиагональные компоненты тензора инерции равны нулю:  $I_{kl} = 0, \quad k \neq l$ . Такие прямые называются **главными осями** инерции твёрдого тела в данной точке, а диагональные компоненты тензора инерции  $I_{xx} = I_x, \quad I_{yy} = I_y, \quad I_{zz} = I_z$  называют **главными моментами инерции** этого тела (а также моментами инерции относительно соответствующих осей). Тело, у которого все главные моменты инерции различны, называется



*асимметричным волчком*. Если два главных момента инерции совпадают, а третий нет (например,  $I_x = I_y \neq I_z$ ), то такое тело называют *симметричным волчком*. Для симметричного волчка, указанного в нашем примере, только выбор оси  $z$  не произволен, а оси  $x$  и  $y$  располагаются в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , и направлены перпендикулярно друг другу, но их выбор произволен. И, наконец, если все главные моменты инерции совпадают, то тело называют *шаровым волчком*. Для шарового волчка выбор всех главных осей произволен (при этом они, конечно, должны проходить через центр инерции и быть взаимно перпендикулярны друг другу). В качестве дополнительных соображений, облегчающих поиск главных осей у твёрдого тела, является наличие у него той или иной степени симметрии. Так, если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр инерции должен лежать в этой плоскости. В ней же лежат и две главные оси инерции, а третья главная ось симметрии перпендикулярна к ней.

Использование букв латинского (или другого) алфавита в качестве индексов у компонент тензоров не всегда удобно, и поэтому для обозначения компонент тензоров (и других объектов с числом индексов более одного) применяют числовые индексы. Это тем более оправдано, если число измерений пространства более трёх (например, в специальной теории относительности (СТО) время рассматривается как четвёртая координата, равноправная с пространственными координатами). В математике размерность пространств вообще, как правило, ничем не ограничена и пространства с числом измерений более трёх – обычная ситуация.

Удобными оказываются обозначения, широко используемые в тензорном исчислении и состоящие в том, что компоненты тензоров обозначают одной и той же буквой с разными числовыми индексами. Например, в выбранной нами декартовой прямоугольной системе координат замена осуществляется по правилу:

$$x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z; \quad \omega_1 = \omega_x; \quad \omega_2 = \omega_y; \quad \omega_3 = \omega_z. \quad (\text{П.1.9})$$

В тензорном исчислении также широко используется специальный тензор второго ранга, называемый символом Кронекера:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}. \quad (\text{П.1.10})$$

Использование этого символа позволяет, например, записать:

$$\omega_l = \sum_k \omega_k \delta_{kl}. \quad (\text{П.1.11})$$

С учётом принятых обозначений выражение (П.1.2) примет вид:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i m_i [\vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)] = \sum_i m_i [\vec{\omega} \sum_q x_{i,q}^2 - \vec{r}_i \sum_k \omega_k x_{i,k}] = \\
&= \sum_i m_i \sum_l \left( \omega_l \left( \sum_q x_{i,q}^2 \right) - x_{i,l} \sum_k \omega_k x_{i,k} \right) \vec{e}_l = \\
&= \sum_i m_i \sum_l \left( \sum_k \omega_k \delta_{kl} \left( \sum_q x_{i,q}^2 \right) - \sum_k x_{i,l} x_{i,k} \omega_k \right) \vec{e}_l = \quad (\text{П.1.12}) \\
&= \sum_i m_i \sum_l \left( \sum_k \omega_k [\delta_{kl} \left( \sum_q x_{i,q}^2 \right) - x_{i,l} x_{i,k}] \right) \vec{e}_l = \\
&= \sum_l \left( \sum_k I_{lk} \omega_k \right) \vec{e}_l = \sum_l L_l \vec{e}_l,
\end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$L_l = \sum_k I_{lk} \omega_k; \quad I_{lk} = \sum_i m_i [\delta_{kl} \left( \sum_q x_{i,q}^2 \right) - x_{i,l} x_{i,k}]. \quad (\text{П.1.13})$$

Полученное выражение, разумеется, идентично системе равенств (П.1.3)–(П.1.5).

Действительно, например, для компоненты  $L_1 = L_x$  имеем:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \sum_k I_{1k} \omega_k; \quad I_{1k} = \sum_i m_i [\delta_{k1} \left( \sum_q x_{i,q}^2 \right) - x_{i,1} x_{i,k}] \Rightarrow \\
L_1 &= \sum_k \left( \sum_i m_i [\delta_{k1} \left( \sum_q x_{i,q}^2 \right) - x_{i,1} x_{i,k}] \right) \omega_k = \\
&= \sum_i m_i \sum_k \left( [\delta_{k1} \left( \sum_q x_{i,q}^2 \right) - x_{i,1} x_{i,k}] \right) \omega_k = \quad (\text{П.1.14}) \\
&= \sum_i m_i \{ [\sum_q x_{i,q}^2 - x_{i,1}^2] \omega_1 - x_{i,1} x_{i,2} \omega_2 - x_{i,1} x_{i,3} \omega_3 \} = \\
&= \sum_i m_i [(x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2) \omega_1 - x_{i,1} x_{i,2} \omega_2 - x_{i,1} x_{i,3} \omega_3].
\end{aligned}$$

Сравнивая (П.1.14) и (П.1.3) (с учётом обозначений (П.1.9)), видим, что эти формулы совпадают. Для компактности записи в тензорном исчислении, кроме использования числовых индексов, применяют и другие

приёмы. Например, отказываются от использования знаков суммирования в формулах, где встречаются пары совпадающих индексов. При этом устанавливается соглашение о том, что по каждому дважды повторяющемуся в одночлене индексу производится суммирование. Поясним сказанное примерами. Выражения  $a_k b_k$ ,  $\omega_k \delta_{kl}$  и  $a_k b_k c_l$  означают, соответственно:  $a_k b_k \equiv \sum_k a_k b_k$ ,  $\omega_k \delta_{kl} \equiv \sum_k \omega_k \delta_{kl}$  и  $a_k b_k c_l \equiv \sum_k a_k b_k c_l = c_l \sum_k a_k b_k$ .

Мы не будем останавливаться на подробном описании символики тензорного исчисления, изучении свойств тензоров и их применении к формулировкам физических законов. Это делается, как правило, в курсах теоретической механики для тех, кто избрал физику своей специальностью.

Чтобы избежать использования тензоров и тензорной символики, в основном тексте курса мы будем упрощать ситуацию путём наложения ограничений, позволяющих исключить необходимость использования тензорного исчисления.

Например, специальный выбор системы координат, при котором координатные оси совпадают с главными осями, приводит к тому, что недиагональные компоненты тензора инерции станут равными нулю  $I_{kl} = 0$ ,  $k \neq l$  и тензор инерции примет диагональный вид:

$$\hat{I} = (I_{kl}) = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}, \quad (\text{П.1.15})$$

а проекции вектора момента импульса и вектора угловой скорости будут связаны соотношением:

$$L_k = \sum_l I_{kl} \omega_l = I_k \omega_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (\text{П.1.16})$$

В частности, если угловая скорость вращения твёрдого тела коллинеарна одной из главных осей, например оси  $x_1$ , то  $\vec{L} = I_1 \omega_1 \vec{i} = L_1 \vec{i}$ , и вместо общего тензорного выражения (П.1.8) или (П.1.12) можно записать скалярное равенство  $L_1 = I_1 \omega_1$  (или  $L_x = I_x \omega_x$ ).

Теперь рассмотрим вопрос о кинетической энергии твёрдого тела, совершающего произвольное движение.

Кинетическую энергию твёрдого тела будем вычислять, в соответствии с определением, как кинетическую энергию системы материальных точек:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \quad (\text{П.1.17})$$

С учётом выражения формула (4.4.3) основного текста  $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$  (опуская штрих у радиус-вектора), получаем:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 + \sum_i m_i [\vec{V}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)] = \\ &= \frac{1}{2} v_0^2 \sum_i m_i + (\vec{V}_0 \times \vec{\omega}) \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i). \end{aligned} \quad (\text{П.1.18})$$

Последнее слагаемое в (П.1.18) можно преобразовать, используя известные свойства смешанного произведения векторов и выражение для преобразования двойного векторного произведения векторов:

$$\begin{aligned} \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}_{\vec{a}} \cdot \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}_{\vec{b}} &= \underbrace{\vec{\omega}}_{\vec{b}} \cdot \underbrace{[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]}_{\vec{c}} = \\ &= \left| \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \Rightarrow \right. \\ &= \left| \underbrace{\vec{r}_i}_{\vec{a}} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}_{\vec{b}} = \underbrace{\vec{\omega}}_{\vec{b}} \underbrace{(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)}_{\vec{c}} - \underbrace{\vec{r}_i}_{\vec{c}} \underbrace{(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})}_{\vec{a}} \right| = \\ &= \vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)] = \vec{\omega}^2 \vec{r}_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2. \end{aligned} \quad (\text{П.1.19})$$

Если выбрать центр масс твёрдого тела в качестве начала отсчёта системы, жёстко связанной с твёрдым телом, то:

$$\vec{r}_C = \vec{r}_0 = \frac{\sum_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i)}{m} \Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i = \vec{0}. \quad (\text{П.1.20})$$

С учётом (П.1.19) и при указанном выборе начала отсчёта системы (см. П.1.20), жёстко связанной с твёрдым телом, для кинетической энергии твёрдого тела имеем:

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega}^2 \vec{r}_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2) = T_{\text{поступ}} + T_{\text{вращ}}. \quad (\text{П.1.21})$$

Из (П.1.21) следует, что кинетическая энергия твёрдого тела равна сумме кинетической энергии его поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс.

Рассмотрим более подробно второе слагаемое в формуле (П.1.21). Здесь воспользуемся упомянутым выше приёмом замены буквенных индексов проекций (координат) радиус-вектора  $\vec{r}_i$  и вектора угловой скорости на координатные оси (П.1.9).

С учётом данной замены в координатном представлении второе слагаемое в (П.1.21) примет вид:

$$T_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( \sum_q x_{i,q}^2 \sum_l \omega_l \omega_l - \sum_k x_{i,k} \omega_k \sum_l x_{i,l} \omega_l \right). \quad (\text{П.1.22})$$

$q, k, l = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, N.$

Для «удобочитаемости» формулы опустим в промежуточных выкладках индекс суммирования  $i$  по «частицам» и вновь его вернём в конечной формуле.

С учётом равенства  $\omega_l = \sum_k \omega_k \delta_{kl}$  имеем:

$$\begin{aligned} \sum_l \omega_l \omega_l &= \sum_l \omega_l \sum_k \omega_k \delta_{kl} = \sum_l \sum_k \omega_l \omega_k \delta_{kl}; \\ \sum_k \omega_k r_k \sum_l \omega_l r_l &= \sum_l \sum_k \omega_k \omega_l r_k r_l, \end{aligned} \quad (\text{П.1.23})$$

и формула (П.1.22) примет вид:

$$\begin{aligned} T_{\text{вращ}} &= \frac{1}{2} \sum m \left( \sum_q x_q^2 \sum_l \omega_l \omega_l - \sum_l x_l \omega_l \sum_k x_k \omega_k \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_l \sum_k \omega_k \omega_l \sum m (\delta_{kl} \sum_q x_q^2 - x_k x_l) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_l \sum_k \omega_k \omega_l \sum_i m_i (\delta_{kl} \sum_q x_{i,q}^2 - x_{i,k} x_{i,l}) = \frac{1}{2} \sum_l \sum_k \omega_k \omega_l I_{kl}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.24})$$

Легко заметить, что обозначенная нами величина  $I_{kl} = \sum_i m_i (\delta_{kl} \sum_q x_{i,q}^2 - x_{i,k} x_{i,l})$ ,  $k, l = 1, 2, 3$ , есть не что иное, как тензор инерции рассматриваемого твёрдого тела (П.1.13).

Если рассматривается вращение твёрдого тела вокруг некоторой неподвижной оси  $x_1 = x$ , то из нашей общей формулы (П.1.24) легко получается её частный случай, записанный в виде формулы (4.2.5) основного текста курса. Действительно, в случае вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси  $x$  тензорная формула (П.1.24) заменяется скалярным равенством:

$$T_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 = \frac{1}{2} \omega_1^2 \underbrace{\sum_i m_i \overbrace{(y_i^2 + z_i^2)}^{r_i^2}}_{I_1} = \frac{1}{2} \omega_1^2 \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{I_1}. \quad (\text{П.1.25})$$

Видим, что результат совпадает с полученной ранее формулой (4.2.5) основного текста курса для вычисления кинетической энергии твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим уравнение для радиальной составляющей  $G(r)$  волновой функции водородоподобного атома:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG(r)}{dr} \right) + \frac{2m_0}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_0 r^2} \right) G(r) = 0. \quad (\text{П.2.1})$$

Если ввести новую функцию

$$R(r) = rG(r), \quad (\text{П.2.2})$$

то с учётом равенства

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right) = \frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dG}{dr} \quad (\text{П.2.3})$$

для  $R(r)$  получим более простое (по форме) дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_0 r^2} \right) R = 0. \quad (\text{П.2.4})$$

Для упрощения формы записи полученного уравнения вводят следующие безразмерные величины:

$$\rho = Z \frac{r}{a}; \quad \varepsilon = -\frac{1}{Z^2} \frac{E}{W}, \quad (\text{П.2.5})$$

где использованы обозначения:  $a$  – для радиуса Бора  $a = (4\pi\epsilon_0 \hbar^2) / (m_0 e^2)$  и  $W$  – для энергии ионизации атома водорода в теории Бора  $W = (m_0 e^4) / (32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2)$ .

После подстановки новых переменных в (П.2.4) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{Z^2}{a^2} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \left( -\frac{2m_0}{\hbar^2} Z^2 W \varepsilon + \frac{Z}{a} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \rho} \frac{2m_0}{\hbar^2} - \frac{Z^2}{a^2} \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_0 \rho^2} \frac{2m_0}{\hbar^2} \right) R = 0 \Rightarrow \\ \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \left( \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_0 e^2} \frac{2m_0 e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \frac{1}{\rho} - \frac{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^4}{m_0^2 e^4} \frac{2m_0}{\hbar^2} \frac{m_0 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \varepsilon - \right. \\ \left. - \frac{a^2}{Z^2} \frac{Z^2}{a^2} \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_0 \rho^2} \frac{2m_0}{\hbar^2} \right) R = 0 \Rightarrow \\ \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \left( \frac{2}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} - \varepsilon \right) R = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2.6})$$

Решение этого уравнения удобнее искать в виде произведения:

$$R(\rho) = \varphi(\rho)e^{-\alpha\rho}; \quad \alpha = \sqrt{\varepsilon}. \quad (\text{П.2.7})$$

Находим производные:

$$\frac{dR}{d\rho} = \frac{d\varphi}{d\rho}e^{-\alpha\rho} - \alpha\varphi e^{-\alpha\rho}; \quad \frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{d^2\varphi}{d\rho^2}e^{-\alpha\rho} - 2\alpha\frac{d\varphi}{d\rho}e^{-\alpha\rho} + \alpha^2\varphi e^{-\alpha\rho};$$

и, подставляя полученное выражение для второй производной  $d^2R/d\rho^2$ , имеем уравнение для функции  $\varphi(\rho)$ :

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} - 2\alpha\frac{d\varphi}{d\rho} + \left(\frac{2}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\varphi = 0. \quad (\text{П.2.8})$$

Решение (П.2.8) ищем в виде степенного ряда:

$$\varphi(\rho) = \rho^{l+1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^{k+l+1}. \quad (\text{П.2.9})$$

Находим производные функции  $\varphi(\rho)$ :

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+l+1) \cdot c_k \rho^{k+l}; \quad \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+l+1) \cdot (k+l) \cdot c_k \rho^{k+l-1}$$

и, подставляя полученные выражения, находим:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (k+l+1)(k+l)c_k \rho^{k+l-1} - \sum_{k=0}^{\infty} 2\alpha(k+l+1)c_k \rho^{k+l} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k \rho^{k+l} - \sum_{k=0}^{\infty} l(l+1)c_k \rho^{k+l-1} = 0. \\ & \sum_{k=0}^{\infty} [(k+l+1) \cdot (k+l) - l(l+1)] \cdot c_k \rho^{k+l-1} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} [2 - 2\alpha(k+l+1)] \cdot c_k \rho^{k+l} = 0. \Rightarrow \\ \Rightarrow & \sum_{k=0}^{\infty} \{[(k+l+2) \cdot (k+l+1) - l(l+1)] \cdot c_{k+1} + [2 - 2\alpha(k+l+1)] \cdot c_k\} \rho^{k+l} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2.10})$$

Из (П.2.10) следует, что должно выполняться условие:

$$[(k+l+2) \cdot (k+l+1) - l(l+1)] \cdot c_{k+1} + [2 - 2\alpha(k+l+1)] \cdot c_k = 0,$$



из которого находим рекуррентную формулу для коэффициентов и их отношение:

$$c_{k+1} = \frac{2\alpha(k+l+1)-2}{(k+l+2) \cdot (k+l+1) - l(l+1)} \cdot c_k; \quad (П.2.11)$$

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2\alpha(k+l+1)-2}{(k+l+2) \cdot (k+l+1) - l(l+1)}.$$

Из (П.2.11) следует, что при больших  $k$  отношение коэффициентов можно записать в виде:  $c_{k+1} / c_k = 2\alpha / k$ .

Чтобы понять характер сходимости ряда (П.2.9) для  $\varphi(\rho)$ , сравним этот ряд с показательной функцией  $\exp(2\alpha\rho)$ , разложение которой в ряд Маклорена имеет вид:

$$e^{2\alpha\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(2\alpha)^k}{k!} \rho^k; \quad a_k = \frac{(2\alpha)^k}{k!},$$

откуда следует, что для функции  $e^{2\alpha\rho}$  отношение последующего коэффициента ряда Маклорена к предыдущему равно  $a_{k+1} / a_k = 2\alpha / k$ , то есть совпадает с отношением соответствующих коэффициентов степенного ряда для функции  $\exp(2\alpha\rho)$ . Поскольку функция  $e^{2\alpha\rho}$  при  $\rho \rightarrow \infty$  неограниченно возрастает, то и функция  $\varphi(\rho)$  ведёт себя аналогично. Умножения  $\varphi(\rho)$  на  $e^{-\alpha\rho}$  даёт радиальную составляющую волновой функции  $R(\rho) = \varphi(\rho)e^{-\alpha\rho}$ . Следовательно, радиальная составляющая  $R(\rho)$  при  $\rho \rightarrow \infty$  будет вести себя, как  $e^{\alpha\rho}$ , то есть неограниченно возрастать при  $\rho \rightarrow \infty$  и, с учётом вида волновой функции рассматриваемой задачи  $\psi(r, \theta, \phi) = G(r)\Gamma(\theta, \phi) = (R(r) / r)\Gamma(\theta, \phi)$ , делает невозможным выполнение нормировки этой волновой функции.

Избавиться от возникшей неприятности можно, если в качестве функции  $\varphi(\rho)$  взять не ряд (П.2.9) по степеням  $\rho$ , а сумму конечного числа слагаемых (многочлен) в этом выражении. В этом случае за счёт множителя  $e^{-\alpha\rho}$  со сходимостью радиальной функции  $R(\rho) = \varphi(\rho)e^{-\alpha\rho}$  будет всё в порядке.

Если обозначить через  $n_r$  номер члена ряда, начиная с которого в (П.2.9) все коэффициенты будут равны нулю, то из (П.2.11) получим выражение:

$$2\alpha(n_r + l + 1) - 2 = 0 \Rightarrow \alpha(n_r + l + 1) = 1.$$

Целое число  $n_r$ ,  $n_r = 0, 1, 2, \dots$ , называют **радиальным** квантовым числом, а целое число  $n = n_r + l + 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , называют **главным** квантовым числом.

С учётом обозначения  $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$  (П.2.7) и (П.2.5) находим:

$$\varepsilon = \frac{1}{n^2}; \quad \varepsilon = -\frac{1}{Z^2} \frac{E}{W}; \quad \Rightarrow E_n = -\frac{Z^2 m_0 e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{П.2.12})$$

где  $W$  для энергии ионизации атома водорода в теории Бора  $W = (m_0 e^4) / (32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2)$ .

Радиальная составляющая волновой функции водородоподобного атома, с учётом всех введённых обозначений, имеет вид:

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{R(r)}{r} = \frac{ZR(a\rho / Z)}{\underbrace{a}_{R(\rho)}} \frac{1}{\rho} \Rightarrow \\ \Rightarrow G(\rho) &= \frac{R(\rho)}{\rho} = \frac{\varphi(\rho)}{\rho} e^{-\alpha\rho} = \\ &= e^{-\alpha\rho} \frac{\rho^{l+1}}{\rho} \sum_{k=0}^{n_r} c_k \rho^k = \rho^l e^{-\frac{\rho}{n}} \sum_{k=0}^{n_r} c_k \rho^k = G_{n,l}(\rho). \end{aligned} \quad (\text{П.2.13})$$

Из (П.2.13) следует, что радиальная составляющая волновой функции водородоподобного атома зависит от двух квантовых чисел  $n$  и  $l$ .

Коэффициент  $c_0$  задаётся произвольно (его конкретное значение находится из условия нормировки волновой функции), а все другие коэффициенты  $c_k, k = 1, 2, \dots$ , находятся по рекуррентной формуле (П.2.11).

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутиков Е. И. Оптика: учебное пособие для вузов. Москва: Высшая школа, 1986. 511 с.: ил.
2. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики: учебное пособие для вузов. Москва: Высшая школа, 1989. 608 с.: ил.
3. Дмитриева В. Ф., Прокофьев В. Л. Основы физики. Москва: Высшая школа, 2001.
4. Леденев А. Н. Физика: учебное пособие для вузов. В 5 кн. Москва: Физматлит, 2005. 240 с.
5. Савельев И. В. Курс общей физики: в 3 т. Москва: Наука, 1989.
6. Сивухин Д. В. Общий курс физики: в 5 т. Москва: Наука, 1979.
7. Bureau international des poids et mesures. Le Système international d'unités (SI) edition 9 (фр.). Bureau International des Poids et Mesures. Международное бюро мер и весов (2019).

*Учебное издание*

# КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ

*Учебное пособие*

Автор-составитель  
**Сабельников Сергей Анатольевич**

Редактор *Е. В. Ефимова*  
Компьютерная верстка *И. В. Люля*

---

Подписано в печать 14.04.2022. Бумага офсетная. Формат 60×84 1/16.

Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 32,8. Уч.-изд. л. 35,3. Тираж 500 экз. Заказ № 140422.

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого.  
173003, Великий Новгород, ул. Б. Санкт-Петербургская, 41.

Отпечатано: ИП Копыльцов П.И.,  
394052, Воронежская область, г. Воронеж,  
ул. Маршала Неделина, д. 27, кв. 56.

Тел.: 89507656959. E-mail: Kopyltsow\_Pavel@mail.ru