

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

Токмачёв М. С.

ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

*Пособие для студентов физико - математических
специальностей*

**Великий Новгород
2003**

УДК 519.2

Печатается
по решению РИС НовГУРецензент
доктор технических наук, профессор Б. Ф. Кирьянов

ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН: Пособие для студентов физико-математических специальностей / Авт. М. С. Токмачёв; НовГУ им. Ярослава Мудрого.- Великий Новгород, 2003. - 74 стр.

В пособии подробно рассматривается один из важнейших разделов теории вероятностей: функции случайных величин. Доказательно представлены соответствующие теоретические сведения. Разобраны характерные примеры, как для различных функций одной переменной, так и для ряда основных функций нескольких переменных. Для самостоятельной проработки предлагается комплект задач, снабжённых ответами. Пособие предназначено для углублённого изучения теории вероятностей.

© Новгородский государственный
университет, 2003
© Токмачёв М. С., 2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

§1 Введение	4
§2 Функции дискретных случайных величин	7
§3 Линейная функция одной случайной величины	17
§4 Произвольная функция одной случайной величины	20
§5 Примеры функций одной случайной величины	22
§6 Линейная функция двух случайных величин	30
§7 Линейная функция гауссовских случайных величин	33
§8 Произведение двух случайных величин	36
§9 Частное двух случайных величин	39
§10 Примеры функций нескольких случайных величин	41
Задания для самостоятельной работы	54
Приложения	62
Лемма ABC	62
Плотность системы гауссовских случайных величин	63
Специальные функции	64
Ответы	67
Литература.....	74

§1. Введение

Прежде чем перейти к рассмотрению функций случайных величин, напомним некоторые понятия, необходимые для дальнейшего изложения.

Совокупность n случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ называют системой случайных величин или n -мерной случайной величиной.

Значения случайных величин условимся обозначать соответствующими малыми буквами с соответствующими индексами. Таким образом, переменная x_k определяет множество значений случайной величины X_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Система случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ определяет множество точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в n -мерном пространстве. В соответствии с законами распределения системы, а также ограничениями на значения случайных величин, в n -мерном пространстве формируются некоторые области. Например, совместные условия $X_1 < x_1, X_2 < x_2$ (произведение двух случайных событий) определяют на плоскости XOY прямоугольник с бесконечными сторонами (см. рис. 1).

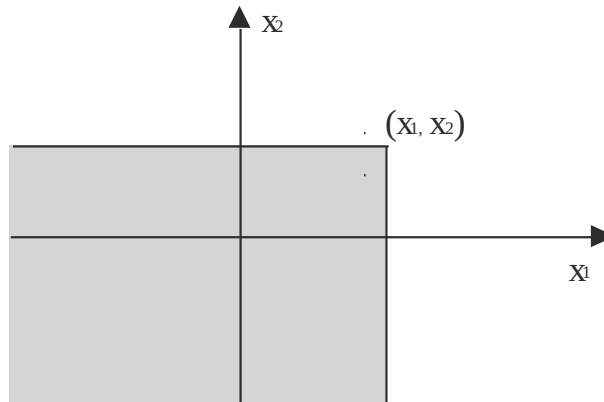


Рис. 1

Определение. Функцией распределения системы случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ называют функцию n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, а именно: функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, связанную с рассматриваемыми случайными величинами следующим образом

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n), \quad (1)$$

где в правой части равенства записана вероятность произведения случайных событий вида $X_i < x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Разумеется, при $n = 1$ определение соответствует определению для функции распределения одной случайной величины:

$$F(x_1) = P(X_1 < x_1).$$

Следовательно, геометрически функция распределения $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ означает

вероятность попадания n -мерной точки системы в n -мерный параллелепипед (которому при $n = 2$ соответствует область, отмеченная на рис. 1).

Определение. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n переменных называется плотностью распределения системы случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, если выполнены условия

1. функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена во всём n -мерном пространстве, т.е. $x_k \in (-\infty, +\infty)$ при $k = 1, 2, \dots, n$;
2. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ во всей области определения;
3. для любой области τ_n n -мерного пространства справедливо соотношение

$$P((x_1, x_2, \dots, x_n) \in \tau_n) = \int \dots \int_{\tau_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (2)$$

Далее будем предполагать, что для рассматриваемой системы случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ обязательно существуют как функция совместной плотности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, так и функции плотности каждой случайной величины $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

Известно, что для функции плотности с необходимостью выполнено условие нормировки

$$\int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1. \quad (3)$$

Функция распределения и функция плотности распределения связаны взаимными соотношениями

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n; \quad (4)$$

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}. \quad (5)$$

Также известно, что для *независимых* случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ выполнены соотношения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1) F(x_2) \dots F(x_n), \quad (6)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n), \quad (7)$$

где $F(x_k)$ – функция распределения одной случайной величины X_k , а $f(x_k)$ – соответствующая плотность распределения случайной величины X_k .

Справедливо и обратное свойство: для независимости случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ достаточно выполнения любого из последних двух равенств (6)-(7). Эти утверждения легко доказываются.

Плотность распределения одной случайной величины X_k , где $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, выражается через совместную плотность $f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ по формуле

$$f(x_k) = \int_{-\infty}^{-\infty} \dots \int_{-\infty}^{-\infty} f(t_1, \dots, t_{k-1}, x_k, t_{k+1}, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_n. \quad (8)$$

Заметим, что интеграл имеет кратность $n - 1$, т. е. интегрирование осуществляется по всем переменным кроме x_k . В частности, для системы двух случайных величин X, Y с совместной плотностью $f(x, y)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ f_2(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее рассмотрим функцию от случайных величин: $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Для значений этих случайных величин $y, x_1, x_2, \dots, x_n$ соответственно имеем $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функцию распределения случайной величины Y обозначим $G(y)$, а плотность распределения - соответственно $g(y)$. Тогда по определению плотности (см. (2)) получаем

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y < y) = P(\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) < y) = \\ &= \int_{\tau_n} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \end{aligned} \quad (10)$$

где область τ_n определяется из соотношения $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) < y$. Заметим также, что для интеграла в (10) переменными являются $x_1, x_2, \dots, x_n$, а переменная y интегралом воспринимается как *const* (параметр).

Разумеется, $g(y) = G'(y)$.

Пусть система случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ имеет плотность распределения $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Задана функция $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Тогда математическое ожидание функции вычисляется по формуле

$$M(Y) = M(\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (11)$$

Исходя из данного соотношения (11), можно вычислить, например, дисперсию случайной величины Y по формуле

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y),$$

при этом

$$M(Y^2) = M(\varphi^2(X_1, X_2, \dots, X_n)).$$

Разумеется, если известна плотность распределения случайной величины Y , то для вычисления математического ожидания можно воспользоваться соответствующими определениями для одной случайной величины:

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y g(y) dy, \quad M(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 g(y) dy.$$

§2. Функции дискретных случайных величин

Пусть известен закон распределения дискретной случайной величины X . Для определённости рассмотрим случай конечного числа значений *:

x_m	x_1	x_2	...	x_n	
p_m	p_1	p_2	...	p_n	$\Sigma p_m = 1$

Введём функцию $Y = \varphi(X)$. Требуется найти закон распределения случайной величины Y . Рассмотрим два случая.

а) Случайные величины X и Y связаны взаимно однозначным соответствием.

Тогда множество значений X взаимно однозначно отображается на множество возможных значений $Y: y_m = \varphi(x_m)$, $m = \overline{1, n}$. Получаем набор значений $y_1, y_2, \dots, y_n$. Найдём соответствующие вероятности:

$$P(Y = y_m) = P(X = x_m) = p_m.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины Y можно записать в виде

y_m	y_1	y_2	...	y_n
p_m	p_1	p_2	...	p_n

где $y_m = \varphi(x_m)$. Т. е. значения случайной величины изменились согласно формуле $y_m = \varphi(x_m)$, а соответствующие вероятности остались те же.

б) Значения функции $\varphi(x)$ могут совпадать при разных значениях аргумента.

Пусть среди возможных значений X найдутся такие x_i, x_j ($i \neq j$), что $\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$, т. е. разным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции, обозначим его y_j . Получаем

$$P(Y = y_j) = P(X = x_i \text{ или } X = x_j) = P(X = x_i) + P(X = x_j) = p_i + p_j.$$

* В случае бесконечного (счётного) множества возможных значений все основные соотношения сохраняют свой вид. Также следует заметить, что в этом случае вместо конечных сумм рассматриваются числовые ряды и возникает необходимость контроля за сходимостью этих рядов.

В данном выражении использовано свойство вероятности суммы *несовместных* событий.

Аналогично поступаем, когда количество чисел x_i среди $\{x_m\}$, удовлетворяющих соотношению $y_i = \varphi(x_i)$, больше чем 2.

Таким образом, количество значений Y в этом случае уменьшается. Вероятности p_m для взаимно однозначного соответствия пары значений x_m, y_m остаются неизменными, $P(X = x_m) = P(Y = y_m) = p_m$, а для кратных значений таких, что $\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$, соответствующие вероятности складываются, $P(Y = y_j) = p_i + p_j$.

Пример1. Задан закон распределения дискретной случайной величины X :

x_m	0	1	2
p_m	0.2	0.3	0.5

Найти распределение случайной величины Y , где $Y = 3X + 2$.
Вычислить $M(Y), D(Y)$.

Решение. Возможные значения Y :

$$y_1 = 3 \cdot 0 + 2 = 2; \quad y_2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5; \quad y_3 = 3 \cdot 2 + 2 = 8.$$

Соответствующие вероятности:

$$P(Y = y_1) = P(X = 0) = 0.2;$$

$$P(Y = y_2) = P(X = 1) = 0.3;$$

$$P(Y = y_3) = P(X = 2) = 0.5.$$

Запишем закон распределения Y :

y_m	2	5	8
p_m	0.2	0.3	0.5

Найдём $M(Y)$ и $D(Y)$ двумя способами.

1) Используя закон распределения Y , получаем

$$M(Y) = 2 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.3 + 8 \cdot 0.5 = 5.9;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = (2^2 \cdot 0.2 + 5^2 \cdot 0.3 + 8^2 \cdot 0.5) - (5.9)^2 = 5.49.$$

2) Используя свойства математического ожидания и дисперсии и закон распределения X , получаем

$$M(X) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 = 1.3;$$

$$D(X) = (0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.5) - (1.3)^2 = 0.61;$$

$$M(Y) = M(3X + 2) = 3M(X) + 2 = 3 \cdot 1.3 + 2 = 5.9;$$

$$D(Y) = D(3X + 2) = 9D(X) = 9 \cdot 0.61 = 5.49.$$

Пример2. Задан закон распределения дискретной случайной величины X :

x_m	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
p_m	0.10	0.20	0.25	0,30	0,05	0,10

Найти распределение случайной величины Y , где $Y = \cos X$.

Решение. Вычислим значения Y , соответствующие всем возможным значениям X :

$$y_1 = \cos x_1 = \cos 0 = 1; \quad y_2 = \cos x_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$y_3 = \cos x_3 = \cos \pi = -1; \quad y_4 = \cos x_4 = \cos \frac{3\pi}{2} = 0;$$

$$y_5 = \cos x_5 = \cos 2\pi = 1; \quad y_6 = \cos x_6 = \cos \frac{5\pi}{2} = 0.$$

Среди найденных значений случайной величины Y есть одинаковые, а различных значений всего три: -1; 0; 1. Вычислим соответствующие вероятности:

$$P(Y = -1) = P(X = x_3) = P(X = \pi) = 0.25;$$

$$P(Y = 0) = P(X = x_2 \text{ или } X = x_4 \text{ или } X = x_6) = 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.6;$$

$$P(Y = 1) = P(X = x_1 \text{ или } X = x_5) = 0.1 + 0.05 = 0.15.$$

Полученные значения заносим в таблицу закона распределения Y :

y_j	-1	0	1
p_j	0.25	0.60	0.15

Распределение случайной величины Y найдено.

Далее рассмотрим линейную функцию независимых случайных величин X, Y : $Z = aX + bY + c$. Законы распределения X, Y известны. Требуется найти закон распределения случайной величины Z .

Если случайные величины X, Y имеют малое количество значений, то, перебирая все возможные комбинации значений X и значений Y , можно найти все соответствующие значения Z : $z_k = ax_i + by_j + c$. Вероятности событий $(Z = z_k)$ получаются при совместном осуществлении событий $(X = x_i)$ и $(Y = y_j)$. Тогда

$$P(Z = z_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_{ij}.$$

Если конкретное значение $Z = z_k$ получается разными способами, то вероятность осуществления события $(Z = z_k)$ оказывается равной вероятности суммы несовместных событий вида $(X = x_i)(Y = y_j)$ т. е.

$$P(Z = z_k) = P\left(\sum_{i,j} (X = x_i)(Y = y_j)\right) = \sum_{i,j} P((X = x_i)(Y = y_j)) = \sum_{i,j} p_{ij},$$

где суммирование проводится по всем парам значений x_i, y_j , для которых выполнено равенство $z_k = ax_i + by_j + c$.

Аналогично можно рассмотреть и линейную функцию с числом аргументов, большим, чем 2, и нелинейную функцию. Также аналогично можно найти распределение функции $Z = \varphi(X, Y)$ и для зависимых X, Y , если известно их совместное распределение.

Разберём конкретные примеры.

Пример 3. Известны законы распределения независимых случайных величин X и Y :

x_i	-1	0	1
p_i	0.2	0.3	0.5

y_j	1	2	3
p_j	0.4	0.5	0.1

Найти закон распределения случайной величины $Z = 2X - Y + 1$.

Решение. Для данного количества значений всего возможно 9 комбинаций. Вычислим все значения случайной величины Z , пронумеровав их по порядку индексов, и вычислим соответствующие вероятности:

$$z_{11} = 2x_1 - y_1 + 1 = 2(-1) - 1 + 1 = -2, \quad p_{11} = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08;$$

$$z_{12} = 2x_1 - y_2 + 1 = 2(-1) - 2 + 1 = -3, \quad p_{12} = 0.2 \cdot 0.5 = 0.10;$$

$$z_{13} = 2x_1 - y_3 + 1 = 2(-1) - 3 + 1 = -4, \quad p_{13} = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02;$$

$$z_{21} = 2x_2 - y_1 + 1 = 2 \cdot 0 - 1 + 1 = 0, \quad p_{21} = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12;$$

$$z_{22} = 2x_2 - y_2 + 1 = 2 \cdot 0 - 2 + 1 = -1, \quad p_{22} = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15;$$

$$z_{23} = 2x_2 - y_3 + 1 = 2 \cdot 0 - 3 + 1 = -2, \quad p_{23} = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03;$$

$$z_{31} = 2x_3 - y_1 + 1 = 2 \cdot 1 - 1 + 1 = 2, \quad p_{31} = 0.5 \cdot 0.4 = 0.20;$$

$$z_{32} = 2x_3 - y_2 + 1 = 2 \cdot 1 - 2 + 1 = 1, \quad p_{32} = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25;$$

$$z_{33} = 2x_3 - y_3 + 1 = 2 \cdot 1 - 3 + 1 = 0, \quad p_{33} = 0.5 \cdot 0.1 = 0.05.$$

Как легко проверить, $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$.

Заметим, что среди перечисленных возможных значений Z имеются одинаковые: $z_{11} = z_{23} = -2$; $z_{21} = z_{33} = 0$. Для этих значений вероятности вычисляются суммированием, а именно:

$$P(Z = -2) = p_{11} + p_{23} = 0.08 + 0.03 = 0.11;$$

$$P(Z = 0) = p_{21} + p_{33} = 0.12 + 0.05 = 0.17.$$

Для всех остальных (единственных) значений z_{ij} вероятностями являются соответствующие значения p_{ij} .

Итак, записывая значения в порядке их возрастания и соответствующие им вероятности, получим закон распределения случайной величины Z :

z_k	-4	-3	-2	-1	0	1	2
p_k	0.02	0.10	0.11	0.15	0.17	0.25	0.20

Пример 4. Задано совместное распределение случайных величин X и Y :

$X \backslash Y$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
-1	0.1	0.3	0.2
1	0.2	0.15	0.05

Найти закон распределения случайной величины $Z = \frac{\cos Y}{X}$.

Решение. Вычислим все возможные значения Z :

$$z_{11} = \frac{\cos y_1}{x_1} = \frac{\cos 0}{-1} = -1, \quad p_{11} = 0.1;$$

$$z_{12} = \frac{\cos y_2}{x_1} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{-1} = 0, \quad p_{12} = 0.3;$$

$$z_{13} = \frac{\cos y_3}{x_1} = \frac{\cos \pi}{-1} = 1, \quad p_{13} = 0.2;$$

$$z_{21} = \frac{\cos y_1}{x_2} = \frac{\cos 0}{1} = 1, \quad p_{21} = 0.2;$$

$$z_{22} = \frac{\cos y_2}{x_2} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{1} = 0, \quad p_{22} = 0.15;$$

$$z_{23} = \frac{\cos y_3}{x_2} = \frac{\cos \pi}{1} = -1, \quad p_{23} = 0.05.$$

Учитывая одинаковые значения $z_{11} = z_{23} = -1$; $z_{12} = z_{22} = 0$;
 $z_{13} = z_{21} = 1$, и суммируя их вероятности, приходим к закону
 распределения Z :

z_k	-1	0	1
p_k	0.15	0.45	0.40

Распределение случайной величины Z найдено.

В рассмотренных примерах значения функций и их вероятности формировались в зависимости от конкретных чисел. Однако в некоторых случаях можно найти и более общие закономерности нахождения законов распределения функций.

Пусть X, Y - неотрицательные, целочисленные, независимые случайные величины с соответствующими вероятностями $P(X = j) = a_j$ и $P(Y = j) = b_j$, где $j = 0, 1, 2, \dots$. Если случайная величина не принимает какие-то из значений, то соответствующие вероятности полагаются равными нулю. Так как X, Y - независимые случайные величины, то событие $(X = i, Y = j)$ имеет вероятность $a_i b_j$. Введём случайную величину $Z = X + Y$. Оказывается, что Z - неотрицательная, целочисленная величина. Тогда событие $(Z = k)$ - это сумма несовместных событий:

$$(Z = k) = (X = 0, Y = k) + (X = 1, Y = k - 1) + \dots + (X = k, Y = 0).$$

Поскольку X, Y - независимые случайные величины, то

$$P(Z = k) = c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \dots + a_k b_0. \quad (12)$$

Определение. Пусть $\{a_k\}, \{b_k\}$ - числовые последовательности. Последовательность $\{c_k\}$, определяемая формулой (12), называется *свёрткой* последовательностей $\{a_k\}, \{b_k\}$.

Обозначается операция свёртки следующим образом

$$\{c_k\} = \{a_k\} * \{b_k\}.$$

Зная последовательности вероятностей случайных величин X и Y , используя свёртку, можно вычислить соответствующие вероятности значений суммы $Z = X + Y$ и тем самым найти закон распределения Z .

Операцию свёртки можно обобщить на большее число последовательностей: $\{a_k\} * \{b_k\} * \{p_k\}$ означает, что взята свёртка последовательностей: $\{a_k\} * \{b_k\} = \{c_k\}$, а затем вычислена свёртка последовательностей: $\{c_k\} * \{p_k\}$. Также отметим коммутативность и

ассоциативность операции свёртки, т. е. в записи свёртки (и при вычислении) порядок последовательностей и способ их группировки не имеют значения.

Для суммы одинаково распределённых независимых случайных величин $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ с последовательностью вероятностей $\{a_j\}$ можно ввести операцию кратной свёртки $\{a_j\}^{n*}$. Тогда

$$\begin{aligned} \{a_j\} * \{a_j\} &= \{a_j\}^{2*}, \\ \{a_j\}^{2*} * \{a_j\} &= \{a_j\}^{3*}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \{a_j\}^{(n-1)*} * \{a_j\} &= \{a_j\}^{n*}. \end{aligned}$$

По аналогии также можно ввести

$$\{a_j\}^{1*} = \{a_j\}, \quad \{a_j\}^{0*} = (1, 0, 0, 0, \dots).$$

Проиллюстрируем применение свёртки на простом примере.

Пример 5. Пусть независимые случайные величины X, Y и T имеют распределения

x_k	0	2	3	4
a_k	0.3	0.4	0.1	0.2

y_k	0	2	5
b_k	0.2	0.7	0.1

t_k	2	3
p_k	0.4	0.6

Найти распределение суммы а) $Z = X + Y$; б) $U = X + Y + T$.

Решение. а). Значениями случайной величины Z являются целые числа от 0 (минимальное значение: $0+0$) до 9 (максимально возможное значение: $4+5$), причём может оказаться, что какие-то из этих чисел имеют вероятность 0.

Для вычисления вероятностей закона распределения Z используем операцию свёртки. Вначале запишем последовательности вероятностей $\{a_k\}, \{b_k\}$, в которых индексы соответствуют значениям случайных величин, например, $a_3 = P(X=3)$. Если случайная величина не принимает какое-либо значение m , то $a_m = 0$.

Итак,

$$\begin{aligned} \{a_k\} &= (a_0; a_1; a_2; \dots; a_9) = (0.3; 0; 0.4; 0.1; 0.2; 0; 0; 0; 0; 0), \\ \{b_k\} &= (b_0; b_1; b_2; \dots; b_9) = (0.2; 0; 0.7; 0; 0; 0.1; 0; 0; 0; 0). \end{aligned}$$

Последовательность вероятностей для Z обозначим $\{c_k\}$, тогда $\{c_k\} = \{a_k\} * \{b_k\}$.

Находим конкретные значения по формуле (12):

$$c_0 = a_0 b_0 = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06;$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0.3 \cdot 0 + 0 \cdot 0.2 = 0;$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0.3 \cdot 0.7 + 0 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.29;$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 0.3 \cdot 0 + 0 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.02;$$

$$c_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = 0.32;$$

$$c_5 = a_0 b_5 + a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1 + a_5 b_0 = 0.10;$$

$$c_6 = a_0 b_6 + a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 + a_4 b_2 + a_5 b_1 + a_6 b_0 = 0.14;$$

$$c_7 = a_0 b_7 + a_1 b_6 + a_2 b_5 + a_3 b_4 + a_4 b_3 + a_5 b_2 + a_6 b_1 + a_7 b_0 = 0.04;$$

$$c_8 = a_0 b_8 + a_1 b_7 + a_2 b_6 + a_3 b_5 + a_4 b_4 + a_5 b_3 + a_6 b_2 + a_7 b_1 + a_8 b_0 = 0.01;$$

$$c_9 = a_0 b_9 + a_1 b_8 + a_2 b_7 + a_3 b_6 + a_4 b_5 + a_5 b_4 + a_6 b_3 + a_7 b_2 + a_8 b_1 + a_9 b_0 = 0.02.$$

Так как вероятность $P(Z=1) = c_1 = 0$, то значение $Z=1$ не включается в распределение. Далее записываем закон распределения случайной величины Z :

z_i	0	2	3	4	5	6	7	8	9	
c_i	0.06	0.29	0.02	0.32	0.10	0.14	0.04	0.01	0.02	$\sum c_i = 1$

б). Заметим, что $U = (X + Y) + T = Z + T$. Тогда значения случайной величины U - целые числа от 0 до 12. Вероятности этих значений $\{u_k\}$ обозначим $\{q_k\}$, тогда $\{q_k\} = \{a_k\} * \{b_k\} * \{p_k\} = \{c_k\} * \{p_k\}$.

Последовательности $\{c_k\}$ и $\{p_k\}$ известны:

$$\{c_k\} = (0.06; 0; 0.29; 0.02; 0.32; 0.10; 0.14; 0.04; 0.01; 0.02; 0; 0; 0);$$

$$\{p_k\} = (0; 0; 0.4; 0.6; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0).$$

Находим вероятности $\{q_k\}$, используя формулу (12). Получаем последовательность

$$\{q_k\} = (0; 0; 0.024; 0.036; 0.116; 0.182; 0.140; 0.232; 0.116; 0.100; 0.028; 0.014; 0.012).$$

Таким образом, распределение U имеет вид

u_i	2	3	4	5	6	7	8
q_i	0.024	0.036	0.116	0.182	0.140	0.232	0.116

9	10	11	12	
0.100	0.028	0.014	0.012	$\sum q_i = 1$

Задача решена.

Операцию свёртки можно применять не только для суммы независимых целых неотрицательных случайных величин, но и для некоторых линейных функций этих величин. Например, в случае $Z = aX + bY + c$, где a, b, c - целые положительные, можно переобозначить слагаемые $U = aX$, $V = bY + c$, при этом изменятся лишь значения U по сравнению с X и V по сравнению с Y , а последовательности вероятностей сохранятся. Далее для вероятностей суммы $U + V$ независимых неотрицательных целочисленных случайных величин можно использовать операцию свёртки.

Также отметим, что в ряде простых случаев операцию свёртки удобно применять и для дробных значений и не обязательно положительных. Так как оказывается нарушенной зависимость «вероятность p_k соответствует значению k », то в этом случае при вычислении необходимо уделить дополнительное внимание соответствию значений и вероятностей случайных величин.

Пример 6. Пусть независимые случайные величины X, Y имеют распределения

x_k	0,5	1	1,5
a_k	0.3	0.5	0.2

y_k	-1	0	1
b_k	0.1	0.6	0.3

Найти закон распределения случайной величины $Z = 2X - Y^2 + 3$.

Решение. Рассмотрим случайную величину Z как сумму двух независимых слагаемых $Z = U + V$, где $U = 2X$ и $V = -Y^2 + 3$. Тогда законы распределения U и V имеют вид

u_i	1	2	3
a_i	0.3	0.5	0.2

v_k	2	3
p_k	0.4	0.6

Все возможные значения Z являются целыми числами от 3 до 6, а соответствующие вероятности c_3, c_4, c_5, c_6 вычисляем, используя операцию свёртки.

$$c_3 = a_0 p_3 + a_1 p_2 + a_2 p_1 + a_3 p_0 = 0 + 0.3 \cdot 0.4 + 0 + 0 = 0.12;$$

$$c_4 = a_0 p_4 + a_1 p_3 + a_2 p_2 + a_3 p_1 + a_4 p_0 = 0 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.4 + 0 + 0 = 0.38;$$

$$c_5 = a_0 p_5 + a_1 p_4 + a_2 p_3 + a_3 p_2 + a_4 p_1 + a_5 p_0 = 0 + 0 + 0.5 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 + 0 + 0 = 0.38;$$

$$c_6 = a_0 p_6 + a_1 p_5 + a_2 p_4 + a_3 p_3 + a_4 p_2 + a_5 p_1 + a_6 p_0 = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12.$$

Записываем закон распределения случайной величины Z :

z_i	3	4	5	6	
c_i	0.12	0.38	0.38	0.12	$\sum c_i = 1$

Пример 7. Заданы распределения независимых случайных величин X, Y :

x_k	0.2	0.3	0.5
a_k	0.3	0.5	0.2

y_k	-0.3	0	0.1
b_k	0.1	0.5	0.4

Используя операцию свёртки, найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Преобразуем сумму $Z = X + Y$ так, чтобы новые слагаемые оказались целыми неотрицательными числами:

$$10Z + 3 = 10X + 10Y + 3.$$

Обозначим

$$W = 10Z + 3, \quad U = 10X, \quad V = 10Y + 3,$$

тогда $W = U + V$. Случайные величины U и V имеют распределения

u_i	2	3	5
p_i	0.3	0.5	0.2

v_k	0	3	4
m_k	0.1	0.5	0.4

Для случайной величины W последовательность вероятностей $\{c_k\}$ вычисляется как свёртка последовательностей вероятностей для случайных величин U и V :

$$\{c_k\} = \{p_k\} * \{m_k\}.$$

Каждому значению k соответствует вероятность c_k . Все значения случайной величины W являются целыми числами и располагаются в интервале от 2 до 9. Вычислим соответствующие вероятности.

$$c_2 = p_0 m_2 + p_1 m_1 + p_2 m_0 = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03;$$

$$c_3 = p_3 m_0 = 0.5 \cdot 0.1 = 0.05;$$

$$c_4 = 0;$$

$$c_5 = p_2 m_3 + p_5 m_0 = 0.3 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.17;$$

$$c_6 = p_2 m_4 + p_3 m_3 = 0.3 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.37;$$

$$c_7 = p_3 m_4 = 0.5 \cdot 0.4 = 0.20;$$

$$c_8 = p_5 m_3 = 0.2 \cdot 0.5 = 0.10;$$

$$c_9 = p_5 m_4 = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08.$$

Для W закон распределения имеет вид:

w_i	2	3	5	6	7	8	9	
c_i	0.03	0.05	0.17	0.37	0.20	0.10	0.08	$\sum c_i = 1$

Возвращаемся к старой случайной переменной Z : $Z = \frac{W-3}{10}$.

Получаем искомый закон распределения:

z_i	-0.1	0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
c_i	0.03	0.05	0.17	0.37	0.20	0.10	0.08

Задача решена.

§3. Линейная функция одной случайной величины

Вначале рассмотрим функции одной случайной величины. Наиболее простая зависимость - это линейная $Y = aX + b$, где X, Y – случайные величины; a, b – постоянные, $a \neq 0$.

Полагаем, что случайная величина X является непрерывной, т.е. всюду имеющей плотность. Пусть $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X . Требуется найти функцию $g(y)$ – плотность распределения случайной величины Y .

Рассмотрим функцию распределения $G(y)$. В соответствии с условием (10) получаем

$$G(y) = \int_{ax+b < y} f(x) dx. \quad (13)$$

Для рассматриваемого интеграла переменной является переменная интегрирования x , а переменная y воспринимается интегралом как константа. Исходя из неравенства $ax + b < y$, уточним пределы изменения x (т.е. область интегрирования). При этом возникают два различных возможных случая: если $a > 0$, то

$x < \frac{y-b}{a}$; если $a < 0$, то $x > \frac{y-b}{a}$. В соответствии с вышесказанным из (13) получаем

$$G(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} f(x)dx & \text{при } a > 0, \\ \int_{\frac{y-b}{a}}^{+\infty} f(x)dx & \text{при } a < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Зная функцию распределения $G(y)$, легко находим функцию плотности распределения вероятностей $g(y)$. При этом, исходя из (14), придётся дифференцировать по переменной y интеграл с переменным верхним пределом, причём верхний предел – это функция переменной y . Таким образом, вычисляем производную сложной функции. Воспользуемся теоремой Барроу о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом:

$$\begin{aligned} g(y) = G'(y) &= \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} f(x)dx \right)' & \text{при } a > 0, \\ \left(- \int_{+\infty}^{\frac{y-b}{a}} f(x)dx \right)' & \text{при } a < 0. \end{cases} = \\ &= \begin{cases} f\left(\frac{y-b}{a}\right) \left(\frac{y-b}{a}\right)' & \text{при } a > 0, \\ -f\left(\frac{y-b}{a}\right) \left(\frac{y-b}{a}\right)' & \text{при } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} f\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a} & \text{при } a > 0, \\ f\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{(-a)} & \text{при } a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь, используя для числа a определение модуля и объединяя оба выражения, получаем окончательно

$$g(y) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}. \quad (15)$$

Формула (15) служит для нахождения плотности распределения линейной функции вида $Y = aX + b$ при произвольных

коэффициентах a и b ($a \neq 0$) и любом законе распределения случайной величины X .

Замечание. Заметим, что в формуле (15) аргумент $\frac{y-b}{a}$ – функция, обратная функции $y = ax + b$, а множитель $\frac{1}{|a|}$ – модуль производной этой обратной функции.

Далее рассмотрим линейные функции конкретных распределений.

а) *линейная функция равномерно распределённой случайной величины.*

Пусть случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[\alpha; \beta]$, т.е. имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{при } x \in [\alpha; \beta], \\ 0 & \text{при } x \notin [\alpha; \beta]. \end{cases} \quad (16)$$

Случайная величина Y связана с X соотношением $Y = aX + b$, причём $a \neq 0$. Требуется найти плотность распределения $g(y)$. Введённая линейная функция преобразует отрезок $[\alpha; \beta]$ в отрезок $[y_\alpha; y_\beta]$ следующим образом $y_\alpha = a\alpha + b$, $y_\beta = a\beta + b$. Функция $f(x)$ остаётся постоянной при любом значении аргумента.

Следовательно, используя формулу (15), из (16) получаем

$$\begin{aligned} g(y) &= \begin{cases} f\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|} & \text{при } x \in [\alpha; \beta], \\ 0 & \text{при } x \notin [\alpha; \beta] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{|a|(\beta - \alpha)} & \text{при } y \in [a\alpha + b; a\beta + b], \\ 0 & \text{при } y \notin [a\alpha + b; a\beta + b]. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, линейная функция $Y = aX + b$ равномерно распределённой случайной величины X не изменяет тип распределения, но преобразует интервал, в котором сосредоточены значения случайной величины Y : осуществляет сдвиг на b единиц и изменяет длину интервала в $|a|$ раз. Соответственно и значение постоянной $g(y)$ в новом интервале изменяется в $|a|$ раз.

б) *линейная функция гауссовской случайной величины*

Пусть случайная величина $X \sim N(m_x; \sigma_x)$, т.е. имеет плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Рассмотрим функцию $g(y)$ – плотность распределения случайной величины Y , где $Y = aX + b$, $a \neq 0$.

Согласно (15) получаем

$$\begin{aligned} g(y) &= f\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{|a|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma_x} e^{-\frac{(y-(am_x+b))^2}{2a^2\sigma_x^2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Выразим параметры распределения случайной величины Y через соответствующие параметры X :

$$M(Y) = M(aX + b) = a M(X) + b = a m_x + b;$$

$$D(Y) = D(aX + b) = a^2 D(X) + b^2 D(1) + 2ab \operatorname{cov}(X; 1).$$

Учитывая, что неслучайная величина всегда имеет нулевую дисперсию, и ковариация случайной и неслучайной величин также равна нулю, получаем

$$D(Y) = a^2 D(X) = a^2 \sigma_x^2.$$

Таким образом, вводя новые обозначения, имеем

$$m_y = a m_x + b, \quad (19)$$

$$\sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2, \quad \sigma_y = |a| \sigma_x. \quad (20)$$

Используя эти величины в соотношении (18), приходим к плотности нормального распределения

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Следовательно, линейная функция гауссовской случайной величины также является гауссовской случайной величиной с соответствующими параметрами вида (19), (20): $Y \sim N(m_y; \sigma_y)$.

В частном случае стандартного нормального распределения случайной величины X , т.е. $X \sim N(0; 1)$, и линейной функции $Y = aX + b$ ($a \neq 0$) следует $Y \sim N(b; |a|)$.

§4. Произвольная функция одной случайной величины

Пусть X – случайная величина непрерывного типа с плотностью распределения $f(x)$. Пусть $Y = \varphi(X)$ – некоторая заданная на R_1

непрерывно дифференцируемая функция, устанавливающая взаимно однозначное соответствие между переменными x и y . Обозначим

$$\inf_{-\infty < x < +\infty} \varphi(x) = m,$$

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \varphi(x) = M,$$

при этом допустимо, что $m = -\infty$ и (или) $M = +\infty$. Следовательно, $y \in (m; M)$.

Обозначим обратную $\varphi(x)$ функцию, определённую на $(m; M)$, посредством $\psi(y)$, т.е.

$$x = \varphi^{-1}(y) = \psi(y).$$

Теорема 4.1. Случайная величина $Y = \varphi(X)$ при сформулированных выше обозначениях имеет плотность распределения

$$g(y) = \begin{cases} f(\psi(y)) |\psi'(y)| & \text{при } y \in (m; M) \\ 0 & \text{при } y \notin (m; M). \end{cases} \quad (21)$$

Доказательство. Найдём функцию распределения $G(y)$:

$$g(y) = P(Y < y) = P(\varphi(x) < y) = \int_{\varphi(x) < y} f(x) dx, \quad (22)$$

где $m < y < M$.

Введём в интеграле замену переменной $x = \psi(y)$, тогда множество значений $\{x : \varphi(x) < y\}$ взаимно однозначно отобразится на интервал $(m; y)$. Получаем

$$G(y) = \int_m^y f(\psi(y)) |\psi'(y)| dy = \int_m^y f(\psi(t)) |\psi'(t)| dt$$

(отметим, что замена переменной интегрирования y на t проведена исключительно ради удобства). Плотность распределения $g(y)$ найдём из последнего выражения дифференцированием, используя теорему Барроу о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом:

$$g(y) = G'(y) = \left(\int_m^y f(\psi(t)) |\psi'(t)| dt \right)' = f(\psi(y)) |\psi'(y)|.$$

Данное выражение для плотности получено при $y \in (m; M)$. Так как случайная величина Y не принимает значений вне промежутка $(m; M)$, то естественно, что $g(y) = 0$ при $y \leq m$ или $y \geq M$.

Тем самым получено соотношение (21), и теорема доказана.

Замечание. Формула (21), будучи применена к линейной функции $Y = \varphi(X) = aX + b$ (следовательно, $X = \frac{Y-b}{a}$), приводит

к формуле (15), уже выведенной ранее. В данном случае $m = -\infty$, $M = +\infty$.

Анализируя условия доказанной теоремы, отметим, что ввиду взаимно однозначного соответствия переменных X и Y теорема, применимая к монотонным функциям (например, $Y = aX + b$, $Y = \sqrt{X}$, $Y = \ln X$), неприменима ко многим другим важным функциям (например, $Y = X^2$).

Усилим теорему, распространив её на случай кусочно-монотонных функций.

Теорема 4.2. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$. Задана зависимость $Y = \varphi(X)$, где $\varphi(X)$ – непрерывно дифференцируемая, кусочно-монотонная функция. Область определения переменной x можно разбить на конечное число непересекающихся областей $I_1, I_2, \dots, I_n$ с соответствующими областями $J_1, J_2, \dots, J_n$ из области изменения y (возможно, пересекающимися). Обозначим $x = \psi_k(y)$ обратное преобразование из J_k в I_k ; $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда плотность распределения случайной величины Y имеет вид

$$g(y) = \sum_{k=1}^n \delta_k f(\psi_k(y)) |\psi'_k(y)|, \quad (23)$$

где

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{при } y \in J_k, \\ 0 & \text{при } y \notin J_k. \end{cases}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы, требуется лишь в соотношении (22) интеграл представить в виде суммы интегралов по непересекающимся областям $I_1, I_2, \dots, I_n$ при справедливости условия $\varphi(x) < y$, что возможно в силу свойства аддитивности интеграла.

§5. Примеры функций одной случайной величины

Пример 1. Пусть случайная величина X распределена по закону Коши с плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Случайная величина Y связана со случайной величиной X соотношением $Y = e^{\alpha X}$, где α – действительный параметр ($\alpha \neq 0$). Требуется найти плотность распределения Y .

Так как экспоненциальная зависимость Y от X влечет взаимно однозначное соответствие X и Y , и экспонента всюду имеет непрерывную производную, то функцию плотности $g(y)$ можно найти, исходя из теоремы 4.1, т.е. по формуле (21). В данном случае Y изменяется от 0 до $+\infty$, следовательно, $m = 0$, $M = +\infty$.

Выразим X через Y :

$$X = \frac{1}{\alpha} \ln Y.$$

Значит,

$$x = \psi(y) = \frac{1}{\alpha} \ln y, \quad \psi'(y) = \frac{1}{\alpha y}.$$

Тогда

$$f(\psi(y)) |\psi'(y)| = \frac{1}{\pi(1 + \frac{1}{\alpha^2} \ln^2 y) |\alpha| y} = \frac{|\alpha|}{\pi y(\alpha^2 + \ln^2 y)}$$

и окончательно получаем

$$g(y) = \begin{cases} \frac{|\alpha|}{\pi y(\alpha^2 + \ln^2 y)} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y \leq 0. \end{cases} \quad (24)$$

Пример 2. Пусть случайная величина X равномерно распределена на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Задана функция $Y = \cos X$.

Требуется определить плотность распределения случайной величины Y .

В данном случае

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{при } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{при } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

На рассматриваемом отрезке изменения переменной x , $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, случайные величины X и Y не связаны взаимно однозначным соответствием: каждому значению y из интервала $[0; 1]$ соответствуют два значения переменной x . Однако, если весь интервал изменения x разбить на два интервала:

$$\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \quad \text{и} \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

то имеет место взаимно однозначное соответствие для каждого из полученных интервалов. В обоих интервалах изменения x , переменная y изменяется от 0 до 1, т. е. $m=0$, $M=1$. Итак, для кусочно-монотонной функции $Y = \varphi(X) = \cos X$, имеющей непрерывную производную, применяем теорему 4.2. На интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ обратная функция имеет вид

$$x = \Psi_1(y) = -\arccos y, \quad \Psi_1'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (0 \leq y < 1).$$

Аналогично на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ получаем

$$x = \Psi_2(y) = \arccos y, \quad \Psi_2'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (0 \leq y < 1).$$

При $y \in [0;1)$ по формуле (23) находим

$$\begin{aligned} g(y) &= f(\Psi_1(y))|\Psi_1'(y)| + f(\Psi_2(y))|\Psi_2'(y)| = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}} & \text{при } y \in [0;1), \\ 0 & \text{при } y \notin [0;1). \end{cases} \quad (25)$$

Замечание. Разбивая интервал $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ на два интервала, мы исключили из рассмотрения точку $x=0$, что повлекло для случайной величины Y исключение значения $y=1$, при котором функция плотности $g(y)$ оказывается неопределенной. Как известно, для непрерывных распределений одна точка не влияет на закон распределения, и подобное действие не влечет никаких последствий. Тем самым оно вполне оправдано.

Пример 3. Пусть задана случайная величина $X : X \sim N(m; \sigma)$. Введем функцию $Y = X^2$. Требуется найти плотность распределения случайной величины Y и при $m=0$ определить $M(Y)$ и $D(Y)$.

Как известно, плотность распределения гауссовской случайной величины X с параметрами $M(X)=m$, $D(X)=\sigma^2$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Функция $Y = X^2$ обладает двумя интервалами монотонности, $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, и удовлетворяет всем условиям теоремы 4.2.

В первом интервале, $x \in (-\infty; 0)$, обратная функция

$$x = \Psi_1(y) = -\sqrt{y}, \quad \Psi_1' = -\frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad y \in (0; +\infty);$$

во втором интервале, $x \in (0; +\infty)$, соответственно

$$x = \Psi_2(y) = \sqrt{y}, \quad \Psi_2' = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad y \in (0; +\infty).$$

При $y \in (0; +\infty)$ по формуле (23) получаем:

$$\begin{aligned} g(y) &= f(\Psi_1(y))|\Psi_1'(y)| + f(\Psi_2(y))|\Psi_2'(y)| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(-\sqrt{y}-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sqrt{y}-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}\sigma} \left(e^{-\frac{(-\sqrt{y}-m)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{y}-m)^2}{2\sigma^2}} \right). \end{aligned}$$

Включая тривиальный случай плотности для значений $y \in (-\infty; 0]$, получаем функцию плотности распределения случайной величины Y :

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}\sigma} \left(e^{-\frac{(-\sqrt{y}-m)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{y}-m)^2}{2\sigma^2}} \right) & \text{при } y \in (0; +\infty), \\ 0 & \text{при } y \in (-\infty; 0], \end{cases} \quad (26)$$

При $m = 0$ из (26) получаем

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, & \text{если } y > 0 \\ 0, & \text{если } y \leq 0 \end{cases}.$$

В этом случае вычислим $M(Y)$ и $D(Y)$.

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yg(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} dy.$$

Замена переменной $t = \frac{y}{2\sigma^2}$ преобразует интеграл следующим образом:

$$M(Y) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{3}{2}-1} dt.$$

Последний интеграл является Γ -функцией* аргумента $3/2$, следовательно,

$$M(Y) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi}\right) = \sigma^2.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой $D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y)$.

Значение $M(Y^2)$ находим аналогично вычислению $M(Y)$:

$$M(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 g(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} y^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} dy =$$

$$\left| \begin{array}{l} t = \frac{y}{2\sigma^2} \\ y = 2\sigma^2 t \\ dy = 2\sigma^2 dt \end{array} \right| = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) =$$

$$\frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\right) = 3\sigma^4$$

Следовательно, $D(Y) = 3\sigma^4 - (\sigma^2)^2 = 2\sigma^4$.

Замечание. Для стандартного нормального распределения $X \sim N(0;1)$ и функции $Y = X^2$ плотность распределения случайной величины Y , согласно (24), приобретает вид

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} & \text{при } y \in (0; +\infty), \\ 0 & \text{при } y \in (-\infty; 0]. \end{cases} \quad (27)$$

Соответственно, в данном случае $M(X) = 1$, $D(X) = 2$.

Распределение с плотностью (27) известно как распределение χ^2 (распределение «хи-квадрат»**) с одной степенью свободы.

* Определение и свойства Γ -функции см. Приложение.

** Указанное распределение также называют распределением Хельмерта-Пирсона или распределением Пирсона.

Пример 4. Пусть случайная величина X имеет показательное распределение с соответствующей плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где λ – положительный параметр.

Задана функция $Y = -2\sqrt{X} + 5$. Требуется найти плотность распределения случайной величины Y .

Заметим, что случайная величина Y задана как линейная функция от $\sqrt{X}$. Таким образом, преобразование сложной функции от X к Y осуществляется в два этапа: от X можно перейти к промежуточной переменной Z , где $Z = \sqrt{X}$ (операция извлечения квадратного корня из X), а затем от Z перейти к $Y = -2Z + 5$ (линейная функция).

Итак, на первом шаге выражаем плотность распределения Z через плотность распределения X (согласно теореме 4.1). Обозначая искомую плотность посредством $h(z)$, получаем

$$h(z) = f(z^2) \cdot |2z| = \begin{cases} 2\lambda z e^{-\lambda z^2} & \text{при } z \geq 0, \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases} \quad (28)$$

Далее выражаем плотность $g(y)$ через плотность $h(z)$, исходя из линейной связи $Y = -2Z + 5$. Используем формулу вида (15):

$$g(y) = h\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|} = h\left(\frac{y-5}{-2}\right) \frac{1}{|-2|}.$$

Согласно (28), находим при $z \geq 0$

$$g(y) = 2\lambda \left(\frac{y-5}{-2}\right) e^{-\lambda \left(\frac{y-5}{-2}\right)^2} \frac{1}{2} = \lambda \frac{5-y}{2} e^{-\frac{\lambda(y-5)^2}{4}}.$$

Условие $z \geq 0$ равносильно $\frac{y-5}{-2} \geq 0$, т.е. $y \leq 5$.

Следовательно, окончательно получаем функцию плотности распределения случайной величины Y :

$$g(y) = \begin{cases} \lambda \frac{5-y}{2} e^{-\frac{\lambda(y-5)^2}{4}} & \text{при } y \leq 5, \\ 0 & \text{при } y > 5. \end{cases} \quad (29)$$

Пример 5. Известна функция распределения дискретной случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,2 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,5 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Задана зависимость $Y = -2X + 1$. Найти значения функции распределения $G(-2)$, $G(-3)$.

Решение. Укажем два способа решения задачи.

1 способ. Можно по функции распределения $F(x)$ восстановить распределение случайной величины X :

x_i	1	2	3
p_i	0.2	0.3	0.5

Затем найдём распределение случайной величины $Y = -2X + 1$:

y_j	-5	-3	-1
p_j	0.5	0.3	0.2

По известному закону распределения случайной величины Y легко найти $G(y)$ и, в частности,

$$G(-3) = P(X < -3) = P(X = -5) = 0.5$$

$$G(-2) = P(X < -2) = P(X = -5) + P(X = -3) = 0.5 + 0.3 = 0.8.$$

2 способ. Найдём соотношение между функциями распределения, искомой $G(y)$ и известной $F(x)$:

$$G(y) = P(Y < y) = P(-2X + 1 < y) = P\left(X > \frac{1-y}{2}\right) =$$

$$1 - P\left(X \leq \frac{1-y}{2}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1-y}{2}\right) - P\left(X = \frac{1-y}{2}\right).$$

Следовательно,

$$G(y) = 1 - F\left(\frac{1-y}{2}\right) - P\left(X = \frac{1-y}{2}\right).$$

Тогда

$$G(-2) = 1 - F\left(\frac{3}{2}\right) - P\left(X = \frac{3}{2}\right) = 1 - 0.2 - 0 = 0.8.$$

$$G(-3) = 1 - F(2) - P(X = 2) = 1 - 0.2 - 0.3 = 0.5.$$

Отметим, что в точке $X=2$ сосредоточена вероятностная масса $P(X=2)=0.3$ в отличие от точки $X = \frac{3}{2}$, где $P\left(X = \frac{3}{2}\right) = 0$. Соответственно, при $X=2$ функция распределения $F(x)$ терпит разрыв непрерывности, а при $X = \frac{3}{2}$ функция $F(x)$ непрерывна.

Ответ. $G(-2) = 0.8$, $G(-3) = 0.5$.

Пример 6. Пусть $X \sim N(m; 2m)$, $m > 0$. Задана функция

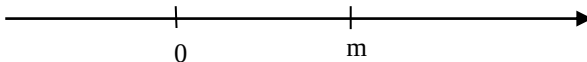
$$Y = \text{sign}X + \text{sign}(X - m), \text{ где } \text{sign}X = \begin{cases} -1 & \text{при } X < 0, \\ 0 & \text{при } X = 0, \\ 1 & \text{при } X > 0. \end{cases}$$

Найти закон распределения случайной величины Y .

Решение. По определению

$$\text{sign}(X - m) = \begin{cases} -1 & \text{при } X < m, \\ 0 & \text{при } X = m, \\ 1 & \text{при } X > m. \end{cases}$$

Запишем значения функций $\text{sign}X$ и $\text{sign}(X - m)$ по интервалам:

$$\begin{array}{lcl} \text{sign}X : & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \text{sign}(X - m) : & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$


$$\text{Тогда } Y = \text{sign}X + \text{sign}(X - m) = \begin{cases} -2 & \text{при } x < 0, \\ -1 & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < m, \\ 1 & \text{при } x = m, \\ 2 & \text{при } x > m. \end{cases}$$

Найдём вероятности найденных возможных значений Y .

$$P(Y = -2) = P(X < 0) = F(0) = \Phi\left(\frac{0-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-m}{2m}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.3085; *$$

$$P(Y = -1) = P(X = 0) = 0;$$

$$P(Y = 0) = P(0 < X < m) = \Phi(0) - \Phi\left(\frac{-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} - \left(1 - \Phi\left(\frac{m}{2m}\right)\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0.1915;$$

$$P(Y = 1) = P(X = m) = 0;$$

$$P(Y = 2) = P(X > m) = 1 - F(m) = 1 - \Phi(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, случайная величина Y оказывается дискретной и имеет закон распределения

y_i	-2	0	2
p_i	0.3085	0.1915	0.5

Как видим из данного примера, функция непрерывной случайной величины X , принимающей значения из интервала $(-\infty; +\infty)$, привела

* Значение $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.6915$ найдено в таблице значений функции Лапласа.

к дискретной случайной величине, имеющей всего три возможных значения.

§ 6. Линейная функция двух случайных величин

Пусть случайные величины X_1 и X_2 имеют совместную плотность распределения $f(x_1, x_2)$. Разумеется, если X_1 и X_2 независимы, то

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2), \quad (30)$$

где $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ – соответствующие одномерные плотности.

Задана линейная функция

$$Y = aX_1 + bX_2 + c, \quad (31)$$

где a, b, c – постоянные, причем обязательно $a, b \neq 0$, так как в противном случае выражение (31) не представляло бы функцию именно двух переменных.

Выразим функцию распределения $G(y)$ и плотность распределения $g(y)$ через $f(x_1, x_2)$.

Согласно соотношению (10), имеем

$$G(y) = \iint_{\tau_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (32)$$

где область интегрирования τ_2 определяется соотношением

$$\tau_2 : ax_1 + bx_2 + c < y.$$

Конкретизируем пределы изменения переменных интегрирования x_1 и x_2 . Разрешая неравенство $ax_1 + bx_2 + c < y$ относительно x_2 , получаем

$$\tau_2 : \begin{cases} x_2 < \frac{y - ax_1 - c}{b} & \text{при } b > 0, \\ x_2 > \frac{y - ax_1 - c}{b} & \text{при } b < 0, \end{cases} \quad (33)$$

где $-\infty < x_1 < +\infty$.

Для наглядности воспользуемся рисунком, представляющим области интегрирования в зависимости от знака коэффициента b^* (см. рис. 2).

Прямая, разделяющая две области, в зависимости от знака b , определяется равенством, $y = ax_1 + bx_2 + c$, т. е.

$$x_2 = \frac{y - ax_1 - c}{b}$$

* Ввиду равноправности X_1 и X_2 в (31) с тем же успехом можно было выделить переменную X_1 как функцию X_2 , и тогда область интегрирования определилась бы знаком коэффициента a .

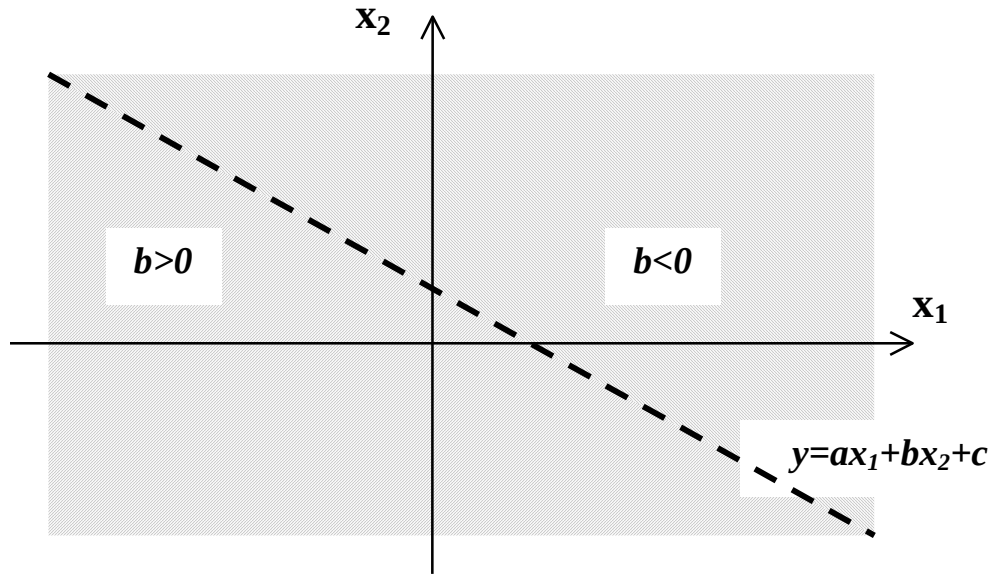


Рис 2.

или, что то же самое,

$$x_2 = -\frac{a}{b}x_1 + \frac{y-c}{b}.$$

Напомним, (см. §1), что для интеграла (32) переменными являются лишь x_1 и x_2 , а переменная y воспринимается как *const*.

Итак, учитывая область изменения переменных x_1 и x_2 (см. рис.2), получаем

$$G(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\frac{y-ax_1-c}{b}} f(x_1, x_2) dx_2 & \text{при } b > 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{\frac{y-ax_1-c}{b}}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 & \text{при } b < 0. \end{cases} \quad (34)$$

Найдем плотность случайной величины Y , дифференцируя функцию распределения (34), как функцию верхнего предела интегрирования. При дифференцировании применяем теорему Барроу. При этом необходимо учесть, что переменным верхним пределом является не y , а функция от y , т.е. $\frac{y-ax_1-c}{b}$,

следовательно, дифференцировать $G(y)$ придется как сложную функцию переменной y . Заметим, что каждый из двойных интегралов в правой части (34) представляет собой именно функцию y , а x_1, x_2 являются переменными лишь для операции интегрирования. В процессе этой операции x_1, x_2 заменяются

соответствующим образом на пределы интегрирования, где и содержится y .

Итак,

$$g(y) = G'(y) = \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\frac{y-ax_1-c}{b}} f(x_1, x_2) dx_2 \right)' & \text{при } b > 0, \\ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{\frac{y-ax_1-c}{b}}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \right)' & \text{при } b < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{+\infty}^{\frac{y-ax_1-c}{b}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \right)' & \text{при } b > 0, \\ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(- \int_{+\infty}^{\frac{y-ax_1-c}{b}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \right)' & \text{при } b < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1, \frac{y-ax_1-c}{b}\right) \frac{1}{b} dx_1 & \text{при } b > 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1, \frac{y-ax_1-c}{b}\right) \frac{1}{(-b)} dx_1 & \text{при } b < 0, \end{cases}$$

где множитель $\frac{1}{b}$ есть не что иное как $\left(\frac{y-ax_1-c}{b} \right)'_y$.

Полученные интегралы отличаются лишь знаком множителя: $\frac{1}{b}$

при $b > 0$ и $\frac{1}{(-b)}$ при $b < 0$. Следовательно, привлекая

определение модуля, оба выражения можно записать в единой форме:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1, \frac{y-ax_1-c}{b}\right) \frac{1}{|b|} dx_1. \quad (35)$$

Отметим, что ввиду симметричности вхождения X_1 и X_2 в функцию $Y = aX_1 + bX_2 + c$, наряду с видом (35) можно получить другой вид функции плотности распределения Y :

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{y - bx_2 - c}{a}, x_2\right) \frac{1}{|a|} dx_2. \quad (36)$$

Сформулируем следствия из формул (35), (36).

Следствие 1. Для независимых случайных величин X_1, X_2 выражения (35), (36) соответственно приобретают вид

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) f_2\left(\frac{y - ax_1 - c}{b}\right) \frac{1}{|b|} dx_1, \quad (37)$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1\left(\frac{y - bx_2 - c}{a}\right) f_2(x_2) \frac{1}{|a|} dx_2. \quad (38)$$

В данном случае использовано соотношение (7) для совместной плотности распределения независимых случайных величин.

Следствие 2. Плотность распределения суммы двух произвольных случайных величин $Y = X_1 + X_2$ имеет вид

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y - x, x) dx. \quad (39)$$

Плотность суммы двух независимых случайных величин имеет вид

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(y - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y - x) f_2(x) dx \quad (40)$$

Соотношения (39), (40) получаются из общих формул (35)–(38) при $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$.

§ 7. Линейная функция гауссовских случайных величин

Пусть случайные величины X_1 и X_2 , являются гауссовскими величинами, т.е. $X_1 \sim N(m_1; \sigma_1)$, $X_2 \sim N(m_2; \sigma_2)$. Соответствующие функции плотности распределения выражаются соотношениями

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad f_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad (41)$$

Как известно, в случае независимости случайных величин X_1 и X_2 их совместная плотность равна произведению плотностей:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2).$$

Для произвольных (не обязательно независимых) гауссовских случайных величин функция плотности $f(x_1, x_2)$ имеет вид (см. Приложение)

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}, \quad (42)$$

где r – коэффициент корреляции случайных величин X_1, X_2 , т. е.

$$r = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_1\sigma_2}. \quad (43)$$

Далее найдем плотность распределения случайной величины Y : $Y = X_1 + X_2$.

Воспользуемся соотношением (39):

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, y-x_1) dx_1. \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x_1-m_1)(y-x_1-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-x_1-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)} dx_1 \end{aligned}$$

Далее введем обозначение $m_1 + m_2 = m$ и новую переменную $x_1 - m_1 = x$, тогда

$$g(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{x(y-x-m)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-x-m)^2}{\sigma_2^2}\right)} dx. \quad (44)$$

Для вычисления интеграла применим лемму АВС (см. Приложение):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha x + \beta) e^{-(Ax^2 + 2Bx + C)} dx = \frac{A\beta - B\alpha}{A} \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{A}}, \quad (45)$$

где $A > 0$.

В нашем конкретном интеграле оказывается

$$\alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

$$A = \frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{2r}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right] = \frac{\sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2\sigma_2^2};$$

$$B = \frac{-(y-m)}{2(1-r^2)} \left[\frac{r}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right];$$

$$C = \frac{(y-m)^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{A\beta - B\alpha}{A} &= 1; \quad \sqrt{\frac{\pi}{A}} = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{2(1-r^2)} \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2}}; \\
-\frac{AC - B^2}{A} &= \frac{B^2}{A} - C = \frac{(y-m)^2}{2^2(1-r^2)^2} \frac{(r\sigma_2 + \sigma_1)^2}{\sigma_2^2(\sigma_1\sigma_2)^2} \frac{2(1-r^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2)} - \\
\frac{(y-m)^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2} &= \frac{(y-m)^2}{2(1-r^2)} \frac{(r\sigma_2 + \sigma_1)^2}{\sigma_2^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2)} - \frac{(y-m)^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2} = \\
\frac{(y-m)^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2} &\left(\frac{(r\sigma_2 + \sigma_1)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2} - 1 \right) = \\
\frac{(y-m)^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2} \frac{r^2\sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2r\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2} &= \\
\frac{(y-m)^2(r^2-1)\sigma_2^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2)} &= -\frac{(y-m)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2)}.
\end{aligned}$$

Учитывая в (44) коэффициент перед интегралом и используя для вычисления интеграла соотношение (45), приходим к выражению

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2}} e^{-\frac{(y-(m_1+m_2))^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2)}}. \quad (46)$$

Вычислим непосредственно $M(Y)$ и $D(Y)$:

$$m_y = M(Y) = M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2) = m_1 + m_2; \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y^2 = D(Y) &= D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2) + 2\text{cov}(X_1, X_2) = \\
&\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2r\sigma_1\sigma_2
\end{aligned} \quad (48)$$

(в последнем равенстве задействовано соотношение (43)).

Таким образом, в формуле (46) можно записать

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} \quad (49)$$

Тем самым доказано утверждение:

Утверждение 1. Сумма гауссовских случайных величин также является гауссовской случайной величиной с соответствующими параметрами (см. (47), (48)).

Более того, учитывая, что линейная функция каждой гауссовской случайной величины сама является гауссовской величиной, получаем более сильное утверждение:

Утверждение 2. Линейная функция $Z = aX_1 + bX_2 + c$ гауссовских случайных величин X_1 и X_2 также является гауссовской случайной величиной с соответствующими параметрами распределения:

$$m_z = am_1 + bm_2 + c,$$

$$\sigma_z^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2rab\sigma_1\sigma_2.$$

Очевидно, что последнее утверждение можно распространить и на линейную функцию любого конечного числа гауссовских случайных величин.

Также очевидно, что доказанное утверждение справедливо как для зависимых, так и для независимых случайных величин (в последнем случае $r = 0$).

§ 8. Произведение двух случайных величин

Пусть X_1, X_2 - произвольные случайные величины с совместной плотностью распределения $f(x_1, x_2)$. Плотности каждой из случайных величин обозначим соответственно $f_1(x_1), f_2(x_2)$. Следовательно, так как X_1, X_2 - независимые случайные величины, должно тождественно выполняться соотношение $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$.

Введем случайную величину Y как произведение $Y = X_1 \cdot X_2$ с функцией распределения $G(y)$ и плотностью распределения $g(y)$.

Тогда по определению

$$G(y) = P(Y < y) = P(X_1 \cdot X_2 < y) = \iint_{x_1 x_2 < y} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Область интегрирования, определяемую условием $x_1 x_2 < y$, зададим соотношением, удобным для интегрирования. Для этого укажем пределы интегрирования персонально для каждой из переменных x_1 и x_2 . Попутно отметим, что рассматриваемая нами переменная y для интеграла переменной не является и потому при интегрировании с y следует обращаться как с обычной константой.

Итак, область интегрирования $x_1 x_2 < y$ представим наглядно на рис.3. Рассмотрим равенство $x_1 x_2 = y$, тогда при $x_1 \neq 0$ следует $x_2 = \frac{y}{x_1}$, т.е. зависимость x_2 от x_1 описывается уравнением гиперболы. Для определенности положим $y > 0$,

следовательно, ветви гиперболы окажутся в первом и третьем квадрантах координатной плоскости. Отметим эти ветви гиперболы на рис. 3. Возвращаясь к неравенству $x_1 x_2 < y$, приходим к выражению

$$\begin{cases} x_2 < \frac{y}{x_1} & \text{при } x_1 > 0, \\ x_2 > \frac{y}{x_1} & \text{при } x_1 < 0. \end{cases}$$

К этим соотношениям следует добавить и множество точек из ограничения ($x_1 = 0, -\infty < x_2 < +\infty$), которое также соответствует неравенству $x_1 x_2 < y$ при $y > 0$. Указанным условиям удовлетворяет множество точек, лежащих между ветвями гиперболы (см. рис. 3).

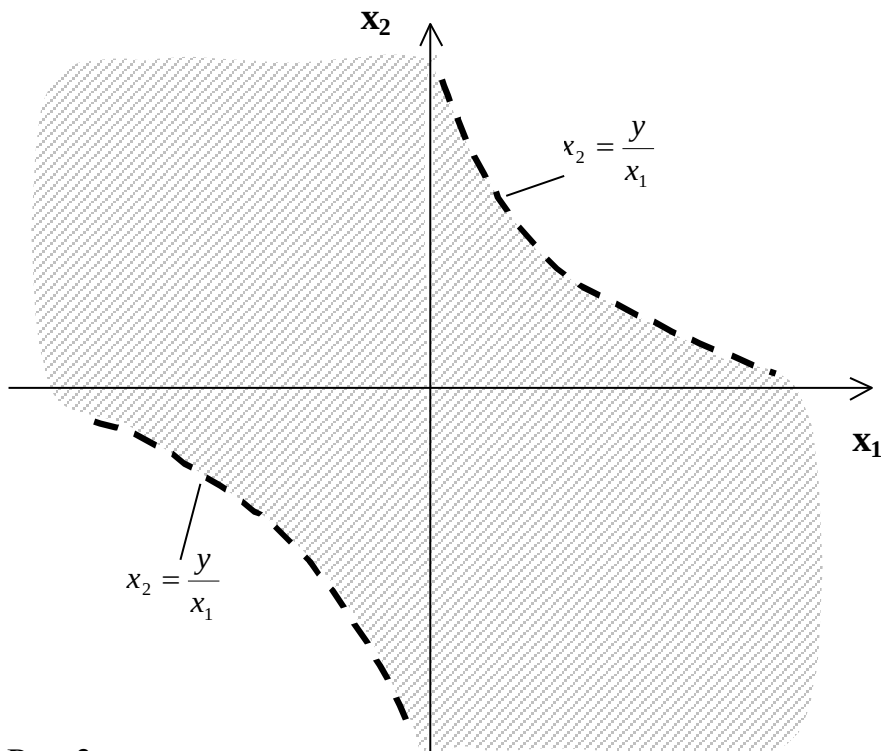


Рис 3.

Таким образом, при $x_1 < 0$ получаем $\frac{y}{x_1} < x_2 < +\infty$, а при $x_1 > 0$ получаем $-\infty < x_2 < \frac{y}{x_1}$.

Следовательно,

$$G(y) = \int_{-\infty}^0 \left(\int_{\frac{y}{x_1}}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 + \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\frac{y}{x_1}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1. \quad (50)$$

Функция распределения найдена.

Далее вычисляем плотность, используя при дифференцировании теорему Барроу.

$$\begin{aligned} g(y) = G'(y) &= \left(\int_{-\infty}^0 \left(- \int_{+\infty}^{y/x_1} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 + \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{y/x_1} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \right)' = \\ &= - \int_{-\infty}^0 f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) \left(\frac{y}{x_1}\right)'_y dx_1 + \int_0^{+\infty} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) \left(\frac{y}{x_1}\right)'_y dx_1. \end{aligned}$$

Поскольку дифференцирование ведется по переменной y , а в верхнем пределе интегрирования записана функция от y , то производится дифференцирование сложной функции.

Итак,

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{-\infty}^0 f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) \frac{1}{-x_1} dx_1 + \int_0^{+\infty} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) \frac{1}{x_1} dx_1 = \\ &= \int_{-\infty}^0 f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) \frac{1}{|x_1|} dx_1 + \int_0^{+\infty} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) \frac{1}{|x_1|} dx_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) \frac{1}{|x_1|} dx_1. \end{aligned}$$

Формула

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right) \frac{1}{|x_1|} dx_1 \quad (51)$$

получена при условии $y > 0$. Полагая $y < 0$, получим область интегрирования иную, чем на рис. 3, однако, проведенные выкладки вновь приводят к формуле (50) для функции распределения $G(y)$ и, разумеется, к формуле (51) для плотности распределения $g(y)$ (проверить!). При этом область значений X_1 и X_2 – это 2-я и 4-я четверти координатной плоскости. Указанные формулы также остаются справедливыми и при $y = 0$.

Следствием факта симметричного вхождения случайных величин X_1 и X_2 в функцию $Y = X_1 X_2$ является формула типа (51), в которой переменные x_1 и x_2 поменялись местами:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{y}{x_2}, x_2\right) \frac{1}{|x_2|} dx_2. \quad (52)$$

Учитывая, что переменную интегрирования можно обозначить любой буквой, из (51), (52) получаем

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{y}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{y}{x}, x\right) \frac{1}{|x|} dx. \quad (53)$$

Для независимых случайных величин X_1 и X_2 соотношения (53) принимают вид

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \cdot f_2\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1\left(\frac{y}{x}\right) \cdot f_2(x) \frac{1}{|x|} dx. \quad (54)$$

Формулы плотности вида (53), (54) представляют структуру для представления ряда важных вероятностных распределений.

§ 9. Частное двух случайных величин

Пусть X_1, X_2 – произвольные случайные величины соответственно с плотностями $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ и с совместной плотностью распределения вероятностей $f(x_1, x_2)$.

Введем случайную величину Y как частное: $Y = \frac{X_2}{X_1}$. Тогда

для функции распределения $G(y)$ по определению следует

$$G(y) = P(Y < y) = P\left(\frac{X_2}{X_1} < y\right) = \iint_{\substack{x_2 < yx_1 \\ x_1}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Исходя из соотношения $\frac{x_2}{x_1} < y$, определяющего область интегрирования, получаем

$$\begin{cases} x_2 > yx_1 & \text{при } x_1 < 0, \\ x_2 < yx_1 & \text{при } x_1 > 0. \end{cases}$$

Область интегрирования представлена на рис. 4 и расположена выше прямой $x_2 = yx_1$ при $x_1 < 0$ и ниже указанной прямой при $x_1 > 0$.

Следовательно,

$$G(y) = \int_{-\infty}^0 \left(\int_{yx_1}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 + \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{yx_1} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1. \quad (55)$$

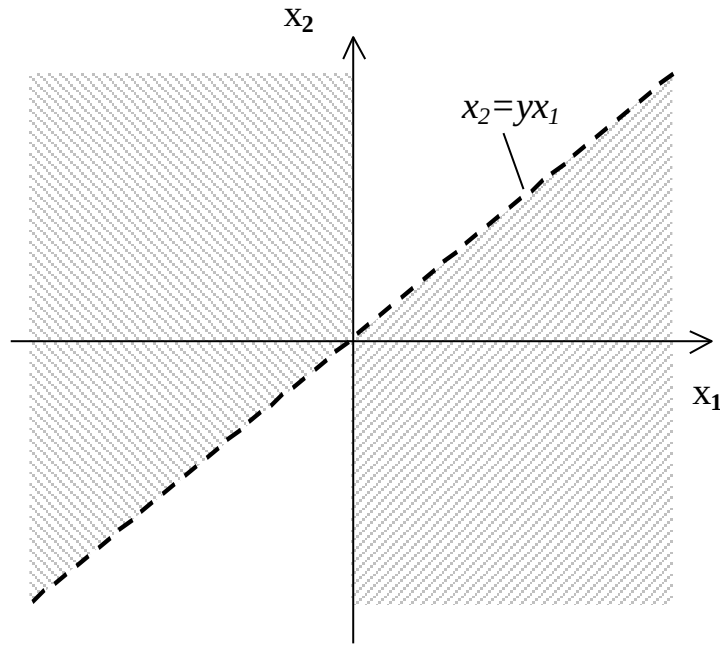


Рис 4.

Плотность распределения $g(y)$ находим, как и в предыдущем параграфе, применяя при дифференцировании теорему Барроу.

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y) = \\ &= \left(\int_{-\infty}^0 \left(- \int_{+\infty}^{yx_1} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 + \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{yx_1} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \right)_y = \\ &= - \int_{-\infty}^0 f(x_1, yx_1) x_1 dx_1 + \int_0^{+\infty} f(x_1, yx_1) x_1 dx_1 = \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x_1, yx_1) |x_1| dx_1 + \int_0^{+\infty} f(x_1, yx_1) |x_1| dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, yx_1) |x_1| dx_1. \end{aligned}$$

Таким образом, заменив переменную интегрирования, получаем

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, yx) |x| dx. \quad (56)$$

Заметим, что в случае частного случайные величины X_1 и X_2 входят в выражение для функции Y не равноправно и перестановка их, как в случае произведения, не допускается. Аргумент yx в выражении (56) представляет ту случайную величину, которая располагается в числителе дроби (в нашем случае это X_2). Аналогично для функции $Z = \frac{X_1}{X_2}$ плотность распределения можно найти по формуле

$$p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(zx, x) |x| dx. \quad (57)$$

Также отметим, что для независимых случайных величин X_1 и X_2 формулы (56), (57) имеют вид

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \cdot f_2(yx) |x| dx, \quad (58)$$

$$p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(zx) f_2(x) |x| dx. \quad (59)$$

Так же как и в случае произведения случайных величин формулы (56) – (59) дают представление о структуре многих важных распределений и позволяют получать новые распределения, исходя из уже известных.

§ 10. Примеры функций нескольких случайных величин

Пример 1. Пусть X_1 и X_2 - гауссовские случайные величины: $X_1 \sim N(1; 2)$, $X_2 \sim N(2; 3)$, $\text{cov}(X_1, X_2) = -3$. Задана линейная функция $Y = 3X_1 - 2X_2 + 5$. Найти плотность распределения случайной величины Y .

Решение. Для нахождения функции плотности $g(y)$ можно воспользоваться стандартными соотношениями вида (35) или (36), для нахождения плотности от линейной функции двух переменных. Однако в нашем случае, случае линейной функции гауссовских случайных величин, можно поступить проще: воспользоваться утверждением 2 из §7. Это утверждение гарантирует, что искомая линейная функция гауссовских случайных величин $Y = 3X_1 - 2X_2 + 5$ также является гауссовской случайной

величиной. Следовательно, чтобы полностью определить распределение Y достаточно знать два параметра, m_y и σ_y , которые находятся непосредственно, исходя из известных свойств математического ожидания и дисперсии:

$$m_y = M(Y) = M(3X_1 - 2X_2 + 5) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 5 = 4;$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= D(3X_1 - 2X_2 + 5) = D(3X_1 - 2X_2) = 3^2 D(X_1) + (-2)^2 D(X_2) \\ &+ 2 \cdot 3 \cdot (-2) \operatorname{cov}(X_1, X_2) = 9 \cdot 4 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot (-3) = 108. \end{aligned}$$

Таким образом, находим искомую плотность распределения случайной величины Y :

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{216}\pi} e^{-\frac{(y-4)^2}{216}}.$$

Пример 2. Пусть X_1, X_2 - независимые случайные величины, которые имеют функции плотности распределения соответственно

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \begin{cases} 2e^{-2x_1} & \text{при } x_1 \geq 0, \\ 0 & \text{при } x_1 < 0, \end{cases} \\ f_2(x_2) &= \begin{cases} 3e^{-3x_2} & \text{при } x_2 \geq 0, \\ 0 & \text{при } x_2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Найти плотность распределения функции $Y = X_1 + X_2$.

Решение. Для нахождения $g(y)$ воспользуемся одной из соответствующих формул плотности вида (40) независимых случайных величин. Выберем для расчета, например, первую из формул (40):

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(y-x) dx.$$

Заметим, что наша конкретная подынтегральная функция $f_1(x) f_2(y-x)$ равна нулю при условиях

$$\begin{cases} x < 0 \\ y-x < 0 \end{cases}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x > y \end{cases}.$$

Также заметим, что случайная величина Y может принимать лишь неотрицательные значения. Следовательно, в указанных интервалах искомый интеграл обращается в нуль, и оказывается

$$g(y) = \int_0^y 2e^{-2x} 3e^{-3(y-x)} dx.$$

Вычисляем

$$g(y) = 6 \int_0^y e^{-2x-3y+3x} dx = 6e^{-3y} \int_0^y e^x dx = 6e^{-3y} (e^y - 1) = 6(e^{-2y} - e^{-3y}).$$

Так как случайная величина Y неотрицательна, то окончательно получаем

$$g(y) = \begin{cases} 6(e^{-2y} - e^{-3y}) & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Правильность вычислений функции $g(y)$ можно проконтролировать, используя условие нормировки для плотности. Легко показать, что для найденного выражения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy = 1.$$

Пример 3. Пусть X_1, X_2 - независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[0; 1]$. Найти плотности распределения функций $Y = X_1 + X_2$ и $Z = 2X_1 - 3X_2 - 1$.

Решение. Плотности распределения независимых случайных величин X_1 и X_2 имеют один и тот же вид:

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_i \in [0; 1], \\ 0 & \text{при } x_i \notin [0; 1], \end{cases} \quad \text{где } i = 1, 2.$$

Для вычисления $g(y)$, как и в предыдущем примере, воспользуемся формулой (40):

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(y - x) dx.$$

Так как подынтегральная функция в разных интервалах задана разными выражениями, то некоторой проблемой является выбор пределов интегрирования. В нашем случае подынтегральная функция отлична от нуля при условиях

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y - x \leq 1 \end{cases},$$

т.е. $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y - 1 \leq x \leq y \end{cases}.$ (60)

Заметим, что каждое из значений случайной величины Y является суммой двух значений, принадлежащих интервалам $[0; 1]$. Следовательно, все возможные значения Y располагаются в промежутке $[0; 2]$. Вне этого промежутка получаем $g(y) = 0$. Найдем пределы изменения X . Во втором из двойных неравенств (60) значения x могут выходить за границы интервала $[0; 1]$ (см. первое из двойных неравенств), а именно: может оказаться, что или $y > 1$, или $y - 1 < 0$. В соответствии с этим рассмотрим два случая: $0 \leq y \leq 1$ и $1 < y \leq 2$. При $0 \leq y \leq 1$ решением системы (60) будет

множество значений x из интервала $[0; y]$ (см. рис. 5а)), а при $1 < y \leq 2$ решение системы (60) – значения x из интервала $[y-1; 1]$ (см. рис. 5б)). Заметим, что при $y < 0$ или $y > 2$ система (60) не совместна.

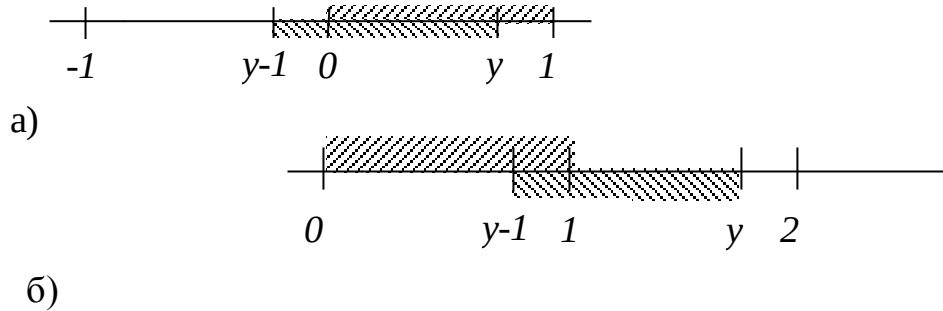


Рис. 5

Вычислим плотность $g(y)$ отдельно для каждого случая. Пусть $0 \leq y \leq 1$, тогда

$$g(y) = \int_0^y f_1(x) f_2(y-x) dx = \int_0^y 1 \cdot 1 dx = y.$$

Пусть $1 < y \leq 2$, тогда

$$g(y) = \int_{y-1}^1 f_1(x) f_2(y-x) dx = \int_{y-1}^1 1 \cdot 1 dx = 1 - (y-1) = 2 - y.$$

В соответствии с найденными значениями окончательно имеем

$$q(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0, \\ y & \text{при } 0 \leq y \leq 1, \\ 2 - y & \text{при } 1 < y \leq 2, \\ 0 & \text{при } y > 2. \end{cases} \quad (61)$$

Распределение с найденной плотностью $g(y)$ вида (61) называют распределением Симпсона (или треугольным распределением). График функции $g(y)$ см. на рис 6. * Далее вычислим $p(z)$ – плотность распределения случайной величины $Z = 2X_1 - 3X_2 - 1$.

* Заметим, что в общем случае можно было рассмотреть равномерное распределение X_1, X_2 на произвольных одинаковых интервалах $[a, b]$ или различных интервалах: $X_1 \in [a, b], X_2 \in [c, d]$

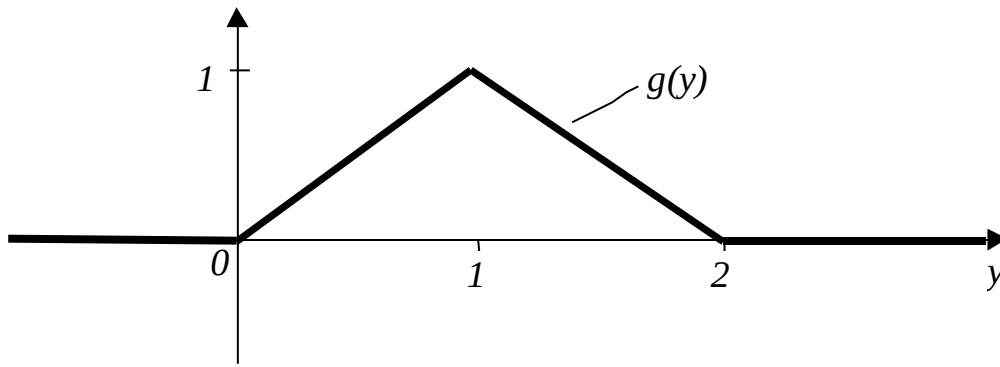


Рис. 6

Согласно формуле (37) получаем

$$p(z) = \int f_1(x) \cdot f_2\left(\frac{z - 2x + 1}{-3}\right) \frac{1}{|-3|} dx. \quad (62)$$

И вновь возникает вопрос нахождения пределов интегрирования, исходя из условия, что подынтегральная функция отлична от нуля. Требуется разобраться с системой неравенств для аргументов подынтегральной функции:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq \frac{z - 2x + 1}{-3} \leq 1 \end{cases}. \quad (63)$$

Заметим, что все возможные значения z находятся в интервале $[-4; 1]$, границы которого можно определить как $z_{\min}$ и $z_{\max}$ при $Z = 2X_1 - 3X_2 - 1$ и $X_1 \in [0; 1]$, $X_2 \in [0; 1]$. Система (63) равносильна системе

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{z+1}{2} \leq x \leq \frac{z+4}{2} \end{cases}. \quad (64)$$

Решения системы (64) зависят от того, как располагаются значения $\frac{z+1}{2}$ и $\frac{z+4}{2}$ по отношению к интервалу $[0; 1]$.

Заметим, что $\frac{z+4}{2}$ и $\frac{z+1}{2}$ различаются на 1,5. Все возможные расположения соответствующих точек относительно рассматриваемого интервала $[0; 1]$ воспроизведены на рис.7.

Очевидно, что в первом а) и последнем д) случаях система (64) решения не имеет. А подынтегральная функция соотношения (62) отлична от нуля:

в случае б) для $\frac{z+1}{2} \leq x \leq 1$;

в случае в) для $0 \leq x \leq 1$;

в случае г) для $0 \leq x \leq \frac{z+4}{2}$.

Значения z , соответствующие б), в), г) можно найти из следующих условий:

в случае б) $0 \leq \frac{z+1}{2} \leq 1$, т.е. $-1 \leq z \leq 1$;

в случае в) $\begin{cases} \frac{z+1}{2} < 0 \\ \frac{z+4}{2} > 1 \end{cases}$, т.е. $-2 < z < -1$;

в случае г) $0 \leq \frac{z+4}{2} \leq 1$, т.е. $-4 \leq z \leq -2$.

Вне найденных границ подынтегральные функции рассматриваемых интегралов оказываются равными нулю.

Далее интегрируем (62) при указанных значениях z :

$$p(z) = \int_{\frac{z+1}{2}}^1 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1-z}{6} \quad \text{при} \quad -1 \leq z \leq 1;$$

$$p(z) = \int_0^1 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \quad \text{при} \quad -2 < z < -1;$$

$$p(z) = \int_0^{\frac{z+4}{2}} 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{z+4}{6} \quad \text{при} \quad -4 \leq z \leq -2.$$

Итак, получен ответ

$$p(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < -4, \\ \frac{z+4}{6} & \text{при } -4 \leq z \leq -2, \\ \frac{1}{3} & \text{при } -2 < z < -1, \\ \frac{1-z}{6} & \text{при } -1 \leq z \leq 1, \\ 0 & \text{при } z > 1. \end{cases} \quad (65)$$

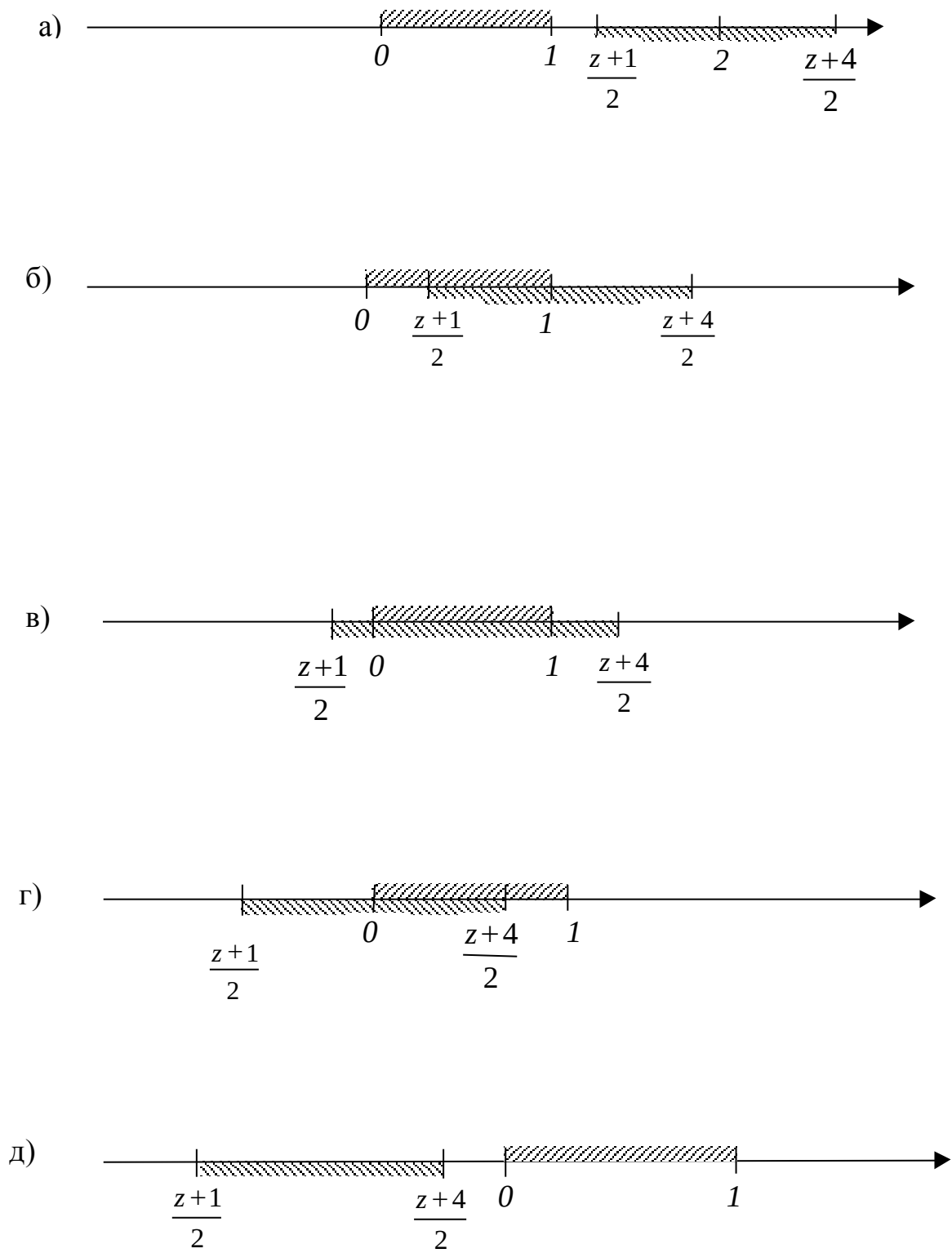


Рис. 7

График плотности распределения $p(z)$ представлен на рис. 8.

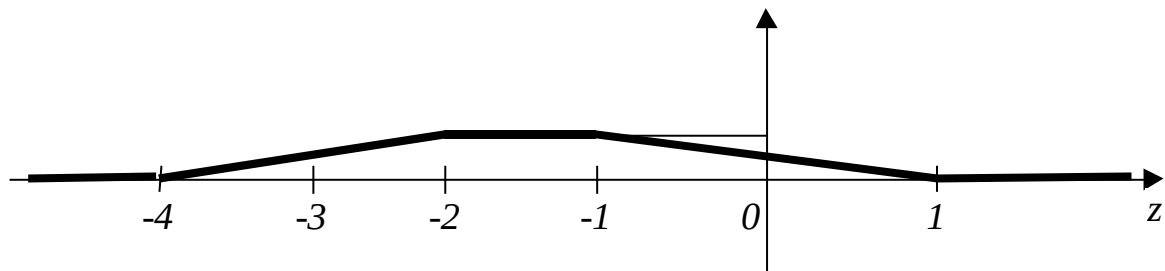


Рис. 8

Легко проконтролировать правильность вычислений с помощью условия нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} p(z) dz = 1$. Отметим, что выписанный интеграл равен площади трапеции на рис. 8.

Замечание. В рассмотренном примере более простым в смысле вычислений является вычисление плотности как производной от функции распределения. Для построения функции распределения также требуется рассмотреть различные случаи соотношения переменных x_1 и x_2 .

Пример 4. Задана совместная плотность распределения системы случайных величин X_1, X_2 :

$$f(x_1, x_2) = \frac{12}{\pi^2(9 + x_1^2)(16 + x_2^2)}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = X_1 \cdot X_2$.

Решение. Так как случайная величина Y является произведением известных (т. е. с заданной плотностью) случайных величин X_1, X_2 , то для нахождения плотности произведения воспользуемся соответствующей формулой. Годится любая из двух формул соотношений (53) (или, что, то же самое, (51), (52)). Возьмем, например, первую из формул (53):

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{y}{x}\right) \frac{1}{|x|} dx.$$

Тогда получаем

$$g(y) = \frac{12}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(9+x^2) \left(16 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right) |x|} = \frac{12}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(9+x^2)(16x^2+y^2)|x|}.$$

Так как подынтегральная функция четная, а промежуток интегрирования симметричен относительно нуля, то, взяв интеграл по половинному промежутку, можно избавиться от модуля, присутствующего в подынтегральной функции:

$$g(y) = \frac{12}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{2x dx}{(x^2+9)(16x^2+y^2)}.$$

Далее введем новую переменную интегрирования $t = x^2$:

$$g(y) = \frac{12}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+9)(16t+y^2)} = \frac{12}{16\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+9) \left(t + \frac{y^2}{16} \right)}.$$

При $y^2 = 144$ подынтегральная функция является простейшей $\frac{1}{(t+9)^2}$. И тогда находим

$$g(\pm 12) = \frac{12}{16\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+9)^2} = \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{-1}{t+9} \right) \Big|_0^{+\infty} =$$

$$\frac{3}{4\pi^2} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{t+9} - \frac{-1}{9} \right) = \frac{3}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{12\pi^2}.$$

Найдем функцию $g(y)$ при $y \neq \pm 12$. Разложив подынтегральную функцию на простейшие, приходим к выражению

$$g(y) = \frac{12}{16\pi^2} \cdot \frac{16}{y^2 - 144} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+9} - \frac{1}{t + \frac{y^2}{16}} \right) dt = \frac{12}{\pi^2(y^2 - 144)} \ln \frac{t+9}{t + \frac{y^2}{16}} \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{12}{\pi^2(y^2 - 144)} \left(\ln \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+9}{t + \frac{y^2}{16}} \right) - \ln \frac{9 \cdot 16}{y^2} \right) = \frac{12}{\pi^2(y^2 - 144)} \left(\ln 1 - \ln \frac{144}{y^2} \right) =$$

$$= \frac{12}{\pi^2(y^2 - 144)} \ln \frac{y^2}{144}, \quad \text{где } y \neq 0.$$

Используя формулу логарифма частного, находим, что при $y \neq \pm 12$ функция плотности случайной величины Y имеет вид

$$g(y) = \frac{12 \ln y^2 - \ln 144}{\pi^2 y^2 - 144}.$$

Объединяя оба случая ($y = \pm 12$ и $y \neq \pm 12$), окончательно получаем

$$g(y) = \begin{cases} \frac{12 \ln y^2 - \ln 144}{\pi^2 y^2 - 144} & \text{при } y \neq \pm 12, \\ \frac{1}{12\pi^2} & \text{при } y = \pm 12. \end{cases}$$

Заметим, что точка $y = 0$ не входит в область определения функции $g(y)$. Отметим также, что $g(y)$ - функция непрерывная в области определения всюду, включая точки $y = \pm 12$.

Соответствующие пределы легко вычисляются:

$$\lim_{y \rightarrow 12} \frac{12 \ln y^2 - \ln 144}{\pi^2 y^2 - 144} = \frac{1}{12\pi^2};$$

$$\lim_{y \rightarrow -12} \frac{12 \ln y^2 - \ln 144}{\pi^2 y^2 - 144} = \frac{1}{12\pi^2}.$$

Пример 5. Задана совместная плотность гауссовских случайных величин

X_1 и X_2 :

$$f(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} e^{-x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2^2}.$$

Найти плотность распределения частного $Y = \frac{X_2}{X_1}$.

Решение. Для нахождения плотности частного двух случайных величин воспользуемся соответствующей формулой (56):

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, yx) |x| dx.$$

В нашем случае получаем

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{\pi} e^{-x^2 - 2x(yx) - 4(yx)^2} |x| dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(4y^2 + 2y + 1)x^2} |x| dx.$$

Так как подынтегральная функция четная, а промежуток интегрирования симметричен относительно нуля, то рассматриваемый интеграл можно упростить:

$$g(y) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \int_0^{+\infty} x e^{-(4y^2 + 2y + 1)x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-(4y^2 + 2y + 1)x^2} dx^2.$$

Для дальнейших преобразований необходимо установить знак выражения в показателе интегрируемой функции. Так как дискриминант квадратного трехчлена $4y^2 + 2y + 1$ отрицателен, то при любых значениях переменной y справедливо неравенство $4y^2 + 2y + 1 > 0$. Продолжаем вычисления.

$$g(y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{-(4y^2 + 2y + 1)} e^{-(4y^2 + 2y + 1)x^2} \Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{-\pi(4y^2 + 2y + 1)} (0 - 1) = \frac{\sqrt{3}}{\pi(4y^2 + 2y + 1)}.$$

Следовательно, функция

$$g(y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi(4y^2 + 2y + 1)}$$

является плотностью распределения рассматриваемой случайной величины Y .

Пример 6. Случайные величины Y, X_1, X_2, X_3 связаны соотношением $Y = \frac{X_1^2 + X_2^2}{2X_3^2} + 3$. Причём известно, что X_1, X_2, X_3 независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины Y .

Решение. Решим задачу за несколько шагов.

Обозначим $Z_i = X_i^2$, тогда $Y = \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_3} + 3$. Заметим, что $Z_i \geq 0$.

Плотность распределения каждой случайной величины Z_i можно записать в виде (см. §5, Пример 3, формула (27))

$$g_i(z_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi z_i}} e^{-\frac{z_i}{2}} & \text{при } z_i > 0; \\ 0 & \text{при } z_i \leq 0. \end{cases}$$

Далее найдём плотность суммы $Z = Z_1 + Z_2$, причём Z_1, Z_2 - независимые случайные величины, и $Z \geq 0$. Обозначим $h(z)$ плотность случайной величины Z . Тогда при $z > 0$ получаем

$$h(z) = \int_0^z g_1(z_1) g_2(z - z_1) dz_1 = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi z_1}} e^{-\frac{z_1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi (z - z_1)}} e^{-\frac{z - z_1}{2}} dz_1 =$$

$$= \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{z_1(z - z_1)}} dz_1 = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi} \int_0^z z_1^{-\frac{1}{2}} (z - z_1)^{-\frac{1}{2}} dz_1.$$

Последний интеграл с помощью замены переменной сведём к бэта-функции $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ (см. Приложение)

$$\begin{aligned}
 h(z) &= \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi} \int_0^z z_1^{-\frac{1}{2}} (z - z_1)^{-\frac{1}{2}} dz_1 = \left| \begin{array}{l} \frac{z_1}{z} = t \\ z_1 = zt \\ dz_1 = zdt \end{array} \right| = \\
 &= \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi} \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} z dt = \\
 &= \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \\
 &= \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,
$$h(z) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2} & \text{при } z > 0; \\ 0 & \text{при } z \leq 0. \end{cases}$$

На следующем шаге найдём плотность распределения частного $U = \frac{Z}{Z_3}$. Заметим, что случайные величины Z, Z_3 независимы и неотрицательны. Тогда при $u > 0$ получаем функцию плотности $f(u)$.

$$\begin{aligned}
 f(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(uz_3) g_3(z_3) |z_3| dz_3 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{uz_3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} z_3} e^{-\frac{z_3}{2}} z_3 dz_3 = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z_3^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{z_3}{2}(u+1)} dz_3 = \left| \begin{array}{l} \frac{z_3}{2}(u+1) = t \\ z_3 = \frac{2t}{u+1} \\ dz_3 = \frac{2}{u+1} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{2^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}}{(u+1)^{\frac{1}{2}}} e^{-t} \frac{2}{u+1} dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}} e^{-t}}{(u+1)^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}(u+1)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{3}{2}-1} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}(u+1)^{\frac{3}{2}}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \\
&= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}(u+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2(u+1)^{\frac{3}{2}}} .
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2(u+1)^{\frac{3}{2}}} & \text{при } u > 0; \\ 0 & \text{при } u \leq 0. \end{cases}$$

На последнем этапе получаем $Y = \frac{1}{2}U + 3$ - линейная функция.

Тогда плотность $\varphi(y)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= f\left(\frac{y-3}{\frac{1}{2}}\right) \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 2f(2(y-3)) = \\
&= \frac{2}{2(2(y-3)+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(2y-5)^{\frac{3}{2}}} .
\end{aligned}$$

Последнее соотношение справедливо при $U > 0$, а так как $U = 2(y-3)$, то при $y > 3$. Следовательно, окончательно получаем ответ

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{(2y-5)^{\frac{3}{2}}} & \text{при } y > 3; \\ 0 & \text{при } y \leq 3. \end{cases}$$

Для контроля проверим условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy = \int_3^{+\infty} (2y-5)^{-\frac{3}{2}} dy = \frac{1}{2} \frac{(2y-5)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \Big|_3^{+\infty} = -1(0-1) = 1 .$$

Справедливость условия нормировки косвенно подтверждает правильность найденного значения функции $\varphi(y)$.

Задания для самостоятельной работы

1. Случайная величина X имеет распределение

x_m	-3	-1	1	2	3
p_m	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

Найти распределение случайной величины $Y = -\frac{3}{X}$.

2. Случайная величина X имеет распределение

x_m	-2	-1	0	1	2
p_m	0.2	0.1	0.25	0.3	0.15

Найти распределение случайной величины $Y = \frac{2X+3}{3X+2}$.

3. Случайная величина X имеет распределение

x_m	-2	-1	1	2	3
p_m	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

Найти распределения случайных величин $Y = |X| - 1$, $Z = |X - 1|$.

4. Случайная величина X имеет распределение

x_m	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
p_m	0.05	0.12	0.15	0.03	0.05	0.2	0.23	0.1	0.07

Найти распределение случайной величины $Y = 2 \operatorname{sign}(x - 0.5)$.

5. Известно распределение случайной величины X :

x_m	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
p_m	0.05	0.12	0.15	0.03	0.05	0.2	0.23	0.1	0.07

Найти распределение функций $Y = \sin 2X$, $Z = \cos 2X$. Вычислить $M(Y)$, $M(Z)$.

6. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 2$. Задана функция

$$Y = \begin{cases} k & \text{при } X = 2k, \\ -k & \text{при } X \neq 2k. \end{cases}$$

Найти распределение случайной величины Y .

7. Случайные величины X и Y независимы и имеют законы распределения

x_i	-3	-1	0
a_i	0.2	0.15	0.65

y_i	-0.5	1	2.5
b_i	0.25	0.6	0.15

Найти распределение суммы $Z = X - 2Y + 3$.

8. Независимые случайные величины X и Y имеют законы распределения

x_i	-0.5	0.5	1
a_i	0.3	0.5	0.2

y_i	-2	2
b_i	0.3	0.7

Найти закон распределения $Z = X^Y$. Вычислить $M(X^Y)$.

9. Независимые случайные величины X и Y имеют законы распределения

x_i	-3	-1	1	3
a_i	0.1	0.3	0.2	0.4

y_i	-1	0	1	2
b_i	0.4	0.3	0.2	0.1

Найти распределения случайных величин $Z = \frac{\text{sign}(Y-1)}{\text{sign}X} + 2$;

$T = \text{sign}X + \text{sign}Y$.

10. Случайные величины X и Y имеют совместное распределение

$x_i \backslash y_j$	-4	0	4	6
-3	0.05	0.10	0.15	0.20
0	0.01	0.04	0.07	0.12
3	0.05	0.05	0.06	0.10

Найти распределение случайной величины $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

11. По исходным данным задачи 10 для случайной величины $T = Y - X$ вычислить $M(T)$ и $D(T)$ двумя способами:

а) предварительно установив закон распределения T ; б) не используя закон распределения T .

12. Случайные величины X и Y имеют совместное распределение

$x_i \backslash y_j$	-3	-1	2	3
-2	0.05	0	0.15	0.10
0	0.05	0.10	0.25	0.10
3	0.10	0	0.10	0

Найти распределение случайной величины $Z = |\text{sign}X + \text{sign}Y|$.

13. Случайные величины X и Y имеют совместное распределение

$x_i \backslash y_j$	-1	0	1
-2	0.3	0.15	0.05
-1	0.05	0.20	0.25

Случайная величина Z , попарно независимая от X и от Y , имеет распределение

z_m	-2	-1	0	1
p_m	0.1	0.2	0.3	0.4

Найти распределение суммы $T = X + Y - Z$. Вычислить $M(T)$.

14. Случайные величины X и Y независимы и имеют законы распределения

x_i	0	2	4	6
a_i	0.4	0.2	0.3	0.1

y_i	1	3	5	7
b_i	0.1	0.2	0.3	0.4

Используя операцию свёртки для вероятностных последовательностей, найти распределение суммы $Z = X + Y$.

15. Бросают две стандартных игральных кости. Случайная величина X - сумма выпавших очков. Найти закон распределения X . Вычислить $M(X)$.

16. Случайные величины X_1, X_2, X_3 независимы и имеют распределение Бернулли с параметром $p = 0.2$. Найти распределение суммы $X = X_1 + X_2 + X_3$.

17. Каждая из независимых случайных величин X_1, X_2, X_3, X_4 имеет распределение Бернулли с некоторым параметром p . Для суммы $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ определить тип распределения.

18. Независимые случайные величины X и Y имеют распределения

x_i	-0.2	0	0.3
a_i	0.3	0.5	0.2

y_i	-0.3	-0.1	0.1	0.3
b_i	0.1	0.2	0.4	0.3

Найти закон распределения суммы $Z = X + Y$ двумя способами:
а) непосредственно; б) с помощью линейных функций, преобразуя случайные величины X и Y в целые неотрицательные и используя операцию свёртки.

19. Независимые случайные величины X и Y имеют распределения

x_i	0	2	4
a_i	0.5	0.3	0.2

y_i	1	3	5
b_i	0.2	0.3	0.5

Найти законы распределения случайных величин а) $Z = X + Y$;
б) $U = 0.5X + 0.5Y$; в) $V = 0.5X + Y$; г) $W = X + 0.5Y$; д)
 $T = \frac{1}{3}X + \frac{1}{2}Y + 1$.

Указание (д). Представить исходное равенство в виде $6(T - 1) = 2X + 3Y$.

20. Стандартная игральная кость подбрасывается трижды. Случайные величины X, Y, Z - количество выпавших очков соответственно при каждом подбрасывании. Найти законы распределения случайной величины

$$T = \text{sign}(X - 1) + \text{sign}(Y - 2) + \text{sign}(Z - 3)$$

и случайной величины

$$U = \text{sign}(T + 1).$$

21. Известна плотность распределения случайной величины X (распределение Лапласа)

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Найти плотность распределения случайной величины Y , где
а) $Y = 3X + 5$; б) $Y = -3X + 5$.

22. Известна функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X . Найти функцию распределения $G(y)$ случайной величины Y , где $Y = aX + b$ ($a \neq 0$).

23. Плотность распределения случайной величины X задана функцией (распределение арксинуса)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} & \text{при } x \in (-a; a), \\ 0 & \text{при } x \notin (-a; a). \end{cases}$$

Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y , где $Y=2X+3$. Для Y вычислить двумя способами (исходя из закона распределения X и из закона распределения Y) математическое ожидание и стандартное отклонение.

24. Случайная величина X имеет распределение Коши с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + (x + a)^2)}.$$

Найти плотности распределения случайных величин Y, Z, T , где $Y = X^3$, $Z = e^{-X}$, $T = -2e^{-X} + 1$.

25. Радиус шара R - случайная величина, равномерно распределённая в интервале $(0; a)$. Найти плотность распределения случайной величины V , где V - объём указанного шара.

26. Случайная величина X имеет показательное распределение с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

где $\lambda > 0$. Найти плотность распределения случайных величин Y, Z , где $Y = \frac{1}{X}$; $Z = -\frac{1}{X}$; $T = \frac{1}{X-1}$.

27. Случайная величина T имеет распределение Стьюдента с плотностью

$$s_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Найти распределение случайной величины Y , где $Y = |T|$.

28. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины Y , где $Y = 5X^2$. Вычислить $M(Y), D(Y)$.

29. Известен закон распределения случайной величины X : $X \sim N(0; \sigma)$. Исследуется случайная величина Y , связанная с X соотношением $Y = -3X^2 + 1$. Найти плотность распределения $g(y)$, $M(Y), D(Y)$.

Указание. Вначале найти плотность распределения случайной величины $Z = X^2$, а затем рассмотреть линейную функцию относительно Z : $Y = -3Z + 1$.

30. Случайная величина T имеет распределение Стюдента с плотностью $s_n(t)$ (см. задание 7.). Найти плотность распределения случайной величины Y , где $Y = \sqrt{|T|}$.

31. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0; 2\pi]$. Задана функция $Y = \sin X$. Найти плотность распределения случайной величины Y .

Указание. Отрезок $[0; 2\pi]$ разбить на три интервала монотонности функции $y = \sin x$. Для вычисления $g(y)$ воспользоваться формулой (21), учитывая в каждом из указанных интервалов область изменения y .

32. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \\ 0 & \text{при } x \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Найти $M(Y)$, $D(Y)$ двумя способами: с нахождением функции плотности распределения $g(y)$ и без вычисления $g(y)$.

33. Система случайных величин X , Y задана совместной плотностью распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{2} & \text{при } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin D, \end{cases}$$

где D - квадрат, определяемый соотношениями $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Найти плотность распределения случайных величин Z и T , где $Z = 2X - 1$, $T = -Y + 3$.

34. X , Y - система независимых случайных величин. $X \sim N(0; \sigma_x)$, $Y \sim N(0; \sigma_y)$. Найти плотность распределения случайной величины Z , где $Z = 2X - Y + 1$.

35. X , Y - гауссовские случайные величины. $X \sim N(1; 3)$, $Y \sim N(3; 1)$, $\text{cov}(X; Y) = -1$. Случайная величина Z задана соотношением $Z = X - 3Y + 2$. Найти: а) плотность распределения Z ; б) совместную плотность распределения X, Z .

36. X , Y - система независимых случайных величин, каждая из которых равномерно распределена на отрезке $[1; 3]$. Найти

плотность распределения суммы $Z = X + Y$, а также вычислить $M(Z)$, $D(Z)$.

37. Найти плотность распределения случайной величины Z , где $Z = X_1 + X_2 + X_3$, а все X_i равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$.

38. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение с плотностью

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

случайная величина Y задана плотностью распределения

$$f_2(y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y \leq 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины Z , где $Z = XY$.

39. Случайные величины X, Y независимы и распределены по закону Рэлея с плотностями

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0; \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} \frac{y}{a} e^{-\frac{y^2}{2a}} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y \leq 0, \end{cases}$$

где $a > 0$. Найти плотность распределения частного $Z = \frac{Y}{X}$.

40. Случайные величины X, Y имеют плотности распределения соответственно

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0; \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{16} e^{-\frac{y}{2}} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y \leq 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения частного $Z = \frac{X}{Y}$.

41. Случайные величины X, Y независимы. $X \sim N(0; 1)$. Случайная величина Y задана плотностью распределения

$$g(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Найти плотность распределения частного $Z = \frac{X}{Y}$.

42. X, Y – система независимых случайных величин. $X \sim N(0; \sigma)$, $Y \sim N(0; \sigma)$. Найти плотность распределения случайной величины $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

43. Каждая из независимых случайных величин X_1, X_2, X_3 имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$. Вычислить стандартное отклонение Y .

44. Случайная величина X имеет нормальное распределение: $X \sim N(1; 0,5)$. Задана функция

$$Y = \text{sign}X = \begin{cases} -1 & \text{при } X < 0, \\ 0 & \text{при } X = 0, \\ 1 & \text{при } X > 0. \end{cases}$$

Найти $D(Y)$, $D(Y^2)$, $D(Y^3)$.

45. X, Y – система независимых случайных величин. $X \sim N(m; \sigma)$, случайная величина Y равномерно распределена на отрезке $[0; 2m]$. Задана функция $Z = \text{sign}(X - m) + \text{sign}(m - Y)$. Найти закон распределения случайной величины Z .

46. Случайные величины Y, X_1, X_2, X_3 связаны соотношением $Y = \frac{2X_1^2}{3(X_2^2 + X_3^2)} - 5$. При этом, X_1, X_2, X_3 независимы и $X_i \sim N(0; 1)$.

Найти плотность распределения случайной величины Y .

47. Случайные величины Y, X_1, X_2, X_3 связаны соотношением $Y = \frac{-3X_1}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2}} + 1$. При этом, X_1, X_2, X_3 независимы и $X_i \sim N(0; 1)$.

Найти плотность распределения случайной величины Y .

ПРИЛОЖЕНИЯ.

I Лемма ABC.

Справедлива формула интегрирования

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha x + \beta) e^{-(Ax^2 + 2Bx + C)} dx = \frac{A\beta - B\alpha}{A} \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{A}}, \quad (1п)$$

где постоянные α, β, A, B, C – произвольны, $A > 0$.

Доказательство. Обозначим искомый интеграл буквой J . В показателе подынтегральной функции выделим полный квадрат

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bx + C &= \sqrt{A}x^2 + \frac{2B}{\sqrt{A}}\sqrt{A}x + \frac{B^2}{A} - \frac{B^2}{A} + C = \\ &= \left(\sqrt{A}x + \frac{B}{\sqrt{A}} \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A} \end{aligned}$$

Исходя из полученного выражения, введем переменную интегрирования t :

$$t = \sqrt{A}x + \frac{B}{\sqrt{A}},$$

следовательно,

$$x = \frac{t}{\sqrt{A}} - \frac{B}{A}; \quad dx = \frac{1}{\sqrt{A}} dt.$$

Получаем

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha x + \beta) e^{-(Ax^2 + 2Bx + C)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{A}}t - \frac{B}{A} \right) + \beta \right] \cdot e^{-t^2 - \frac{AC - B^2}{A}} \frac{1}{\sqrt{A}} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{A}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{A}}t + \beta - \frac{B\alpha}{A} \right) e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{A}} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{A}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt + \left(\beta - \frac{B\alpha}{A} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right] \end{aligned}$$

В найденном выражении первый из интегралов в квадратных скобках равен нулю, как интеграл от нечетной функции, взятый по промежутку, симметричному относительно нуля (этот интеграл легко вычислить и непосредственно, вводя t под знак дифференциала). Второй интеграл в квадратных скобках – это известный интеграл Пуассона, равный $\sqrt{\pi}$. Таким образом, следует

$$J = \frac{1}{\sqrt{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{A}} \left[0 + \frac{A\beta - B\alpha}{A} \cdot \sqrt{\pi} \right] = \frac{A\beta - B\alpha}{A} \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{A}}.$$

Лемма доказана.

II Плотность системы гауссовских случайных величин.

Определение. Система случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ имеет нормальное распределение, если плотность распределения системы соответствует формуле

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j)}, \quad (2п)$$

где C – матрица, обратная корреляционной: $C = K^{-1}$;

$c_{i,j}$ – элементы матрицы C ;

$\det C$ – определитель матрицы C ;

m_i, m_j – некоторые постоянные. *

Случайные величины, имеющие нормальное распределение, называют гауссовскими.

Легко проверить, что при $n = 1$ плотность $f(x_1)$, вычисленная по приведенной формуле, соответствует известному соотношению

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}},$$

так как в этом случае корреляционная матрица K состоит лишь из одного элемента:

$$K = (\sigma_1^2).$$

Рассмотрим случай $n = 2$, т.е. для системы случайных величин X_1, X_2 найдем плотность распределения $f(x_1, x_2)$.

Матрица K имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

где $\sigma_1^2 = D(X_1)$, $\sigma_2^2 = D(X_2)$,

r – коэффициент корреляции (следовательно, $r\sigma_1\sigma_2 = \text{cov}(X_1, X_2)$).

Найдем матрицу C , используя алгебраические дополнения. Тогда

$$\det K = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - r^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - r^2);$$

* Можно доказать, что $M(X_i) = m_i$ для всех $i = \overline{1, n}$.

$$C = K^{-1} = \frac{1}{\det K} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -r\sigma_1\sigma_2 \\ -r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -r\sigma_1\sigma_2 \\ -r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-r^2)} & -\frac{r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} \\ -\frac{r}{\sigma_1\sigma_2(1-r^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-r^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель:

$$\det C = \frac{1}{\det K} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2)}.$$

Далее выпишем формулу

$$f(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{\frac{2}{2}}} e^{-\frac{1}{2}[c_{11}(x_1-m_1)^2 + c_{12}(x_1-m_1)(x_2-m_2) + c_{21}(x_2-m_2)(x_1-m_1) + c_{22}(x_2-m_2)^2]}.$$

Подставим найденные конкретные значения. При этом заметим, что $c_{12} = c_{21}$ (т.е. соответствующие слагаемые можно объединить), и каждое слагаемое в показателе имеет сомножитель $\frac{1}{(1-r^2)}$, который можно вынести за скобку. Получаем

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} \quad (3\text{п})$$

Найденная формула представляет плотность распределения системы двух гауссовских случайных величин X_1, X_2 .

Легко проверить, что в случае некоррелированных случайных величин, то есть при $r = 0$, справедливо равенство

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x_2-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} \right) = f_1(x_1)f(x_2)$$

Из этого факта (согласно критерию независимости непрерывных случайных величин) отметим, что для гауссовских случайных величин понятия некоррелированности и независимости совпадают.

III. Специальные функции

Определение. Гамма – функцией (Γ – функция) называют специальную неэлементарную функцию $\Gamma(x)$ вида

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du, \quad \text{где } x > 0. \quad (4\text{п})$$

(интеграл Эйлера второго рода).

Свойства.

- 1) При любых $x > 0$ справедливо равенство
 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$ (5п)

Доказательство. Произведем интегрирование по частям.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^x du = \left| \begin{array}{l} z = u^x \\ dv = e^{-u} du \\ dz = xu^{x-1} du \\ v = -e^{-u} \end{array} \right| =$$

$$z \cdot v \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v dz = -u^x e^{-u} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u} xu^{x-1} du =$$

$$= -\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^x}{e^u} + 0 + x \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du.$$

Применяя правило Лопиталя некоторое количество раз, можно показать, что выписанный в последнем выражении предел равен нулю. Тогда

$$\Gamma(x+1) = x \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du = x\Gamma(x).$$

Свойство доказано.

- 2) При $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливо соотношение
 $\Gamma(n+1) = n!$ (6п)

Данное равенство можно доказать методом математической индукции, используя свойство 1. При этом значение $\Gamma(1) = 1$ вычисляется непосредственно.

- 3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$ (7п)

Доказательство. Вычислим значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

непосредственно, исходя из определения.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du = \left| \begin{array}{l} t = u^{\frac{1}{2}} \\ u = t^2 \\ du = 2tdt \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{-1} \cdot 2tdt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Последний интеграл равен $\sqrt{\pi}$, так как является интегралом Пуассона. Свойство доказано.

- 4) При $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливо соотношение

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \quad (8\text{п})$$

Указанное равенство доказывается методом математической индукции. Отметим, что базис индукции при $n = 0$ представлен в свойстве 3. Пусть соотношение (8п) верно при $n = k - 1$, то есть

$$\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right) = \left(k - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Тогда, используя свойство 1, получаем при $n = k$

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(k - \frac{1}{2} + 1\right) = \left(k - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right) = \left(k - \frac{1}{2}\right) \left[\left(k - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\right]$$

Свойство доказано.

Согласно свойству 4), например, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$,

$$\Gamma(4,5) = 3,5 \cdot 2,5 \cdot 1,5 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{\pi} = 6,5625 \sqrt{\pi}.$$

Определение. Бэ́та-функцией называется функция двух переменных p, q , определяемая при помощи интеграла

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p > 0, \quad q > 0) \quad (9\text{П})$$

(интеграл Эйлера первого рода).

Бэ́та-функция связана с гамма-функцией соотношением

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (10\text{П})$$

Как легко заметить, справедливо равенство $B(p, q) = B(q, p)$.

Формула (10П) позволяет вычислять $B(p, q)$, используя свойства гамма-функции, например,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\pi}}{1} = \pi;$$

$$B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{3}{8} \sqrt{\pi} \sqrt{\pi}}{3!} = \frac{3\pi}{48}.$$

Ответы

1.

y_m	-3	-1.5	-1	1	3
p_m	0.3	0.2	0.1	0.1	0.3

2.

y_m	-1	0.25	0.875	1	1.5
p_m	0.1	0.2	0.15	0.3	0.25

3.

y_m	0	1	2
p_m	0.5	0.4	0.1

z_k	0	1	2	3
p_k	0.3	0.3	0.3	0.1

4.

y_m	-2	0	2
p_m	0.4	0.07	0.53

5.

y_m	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$
a_m	0.58	0.1	0.32

z_k	-1	-0.5	0.5	1
b_k	0.07	0.47	0.43	0.03

$$M(Y) = -0.13 \cdot \sqrt{3}, \quad M(Z) = -0.06.$$

6.

...	-k	...	-2	-1	0	1	2	...	k	...
...	q_k	...	q_2	q_1	$q_0 + p_0$	p_1	p_2	...	p_k	...

$$\text{где } q_k = \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda}, \quad p_k = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

7.

z_k	-5	-3	-2	0	1	3	4
p_k	0.03	0.0225	0.2175	0.09	0.44	0.0375	0.1625

8.

z_k	0.25	1	4
p_k	0.56	0.20	0.24

$$M(X^Y) = 1.3.$$

9.

z_k	1	2	3
p_k	0.46	0.20	0.34

t_k	-2	-1	0	1	2
p_k	0.16	0.12	0.36	0.18	0.18

10.

z_k	0	3	4	5	6	$3\sqrt{5}$
p_k	0.04	0.15	0.08	0.31	0.12	0.30

11. $M(Y - X) = 3.92$; $D(Y - X) = 18.5936$.

12.

z_k	0	1	2
p_k	0.35	0.5	0.15

13.

t_k	-4	-3	-2	-1	0	1	2
c_k	0.12	0.17	0.22	0.245	0.145	0.075	0.025

 $M(T) = -1.55$.

14.

z_k	1	3	5	7	9	11	13
c_k	0.04	0.11	0.20	0.30	0.20	0.11	0.04

15.

x_k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

 $M(X) = 7$.

16.

x_k	0	1	2	3
p_k	0.512	0.384	0.096	0.008

17. $X \sim B(4; p)$.

18.

z_k	-0.5	-0.3	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6
c_k	0.03	0.11	0.22	0.02	0.29	0.04	0.15	0.08	0.06

19. a)

z_k	1	3	5	7	9
c_k	0.10	0.21	0.38	0.21	0.10

б)

u_k	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5
c_k	0.10	0.21	0.38	0.21	0.10

в)

v_k	1	2	3	4	5	6	7
c_k	0.10	0.06	0.19	0.09	0.31	0.15	0.10

г)

w_k	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5
c_k	0.10	0.15	0.31	0.09	0.19	0.06	0.10

д)

t_k	$\frac{9}{6}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{19}{6}$	$\frac{21}{6}$	$\frac{23}{6}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{29}{6}$
c_k	0.10	0.06	0.15	0.04	0.09	0.25	0.06	0.15	0.10

20.

t_k	-2	-1	0	1	2	3
p_k	$\frac{2}{216}$	$\frac{13}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{67}{216}$	$\frac{47}{216}$	$\frac{60}{216}$

u_k	-1	0	1
p_k	$\frac{2}{216}$	$\frac{13}{216}$	$\frac{201}{216}$

21. а) $g(y) = \frac{1}{6} e^{-\left|\frac{y-5}{3}\right|}$; б) $g(y) = \frac{1}{6} e^{-\left|\frac{y-5}{3}\right|}$.

22. $G(y) = \begin{cases} F\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{нпу } a > 0 \\ 1 - F\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{нпу } a < 0. \end{cases}$

$$23. \quad g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{4a^2 - (y-3)^2}} & \text{npu } y \in (3-2a; 3+2a), \\ 0 & \text{npu } y \notin (3-2a; 3+2a). \end{cases}$$

$$M(Y) = 3, \quad \sigma_Y = a\sqrt{2} \quad (a > 0).$$

$$24. \quad g(y) = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}(1+(y^{\frac{1}{3}}+a)^2)};$$

$$g_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi z(1+(a-\ln z)^2)} & \text{npu } z > 0, \\ 0 & \text{npu } z \leq 0 \end{cases};$$

$$g_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-t)(1+(a-\ln \frac{1-t}{2})^2)} & \text{npu } t < 1, \\ 0 & \text{npu } t \geq 1. \end{cases}$$

$$25. \quad g(v) = \begin{cases} \frac{1}{a^3 \sqrt[3]{36\pi} v^{\frac{2}{3}}} & \text{npu } v \in (0; \frac{4}{3}\pi a^3], \\ 0 & \text{npu } v \notin (0; \frac{4}{3}\pi a^3]. \end{cases}$$

$$26. \quad g_1(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{y^2} e^{-\frac{\lambda}{y}} & \text{npu } y > 0, \\ 0 & \text{npu } y \leq 0; \end{cases}$$

$$g_2(z) = \begin{cases} 0 & \text{npu } z \geq 0, \\ \frac{\lambda}{z^2} e^{\frac{\lambda}{z}} & \text{npu } z < 0; \end{cases}$$

$$g_3(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{t^2} e^{-\lambda(\frac{1}{t}+1)} & \text{npu } t \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty), \\ 0 & \text{npu } t \in [-1; 0]. \end{cases}$$

$$27. \quad g(y) = \begin{cases} \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} & \text{npu } y > 0, \\ 0 & \text{npu } y \leq 0 \end{cases}.$$

$$28. \quad g(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\pi} y} e^{\frac{y}{10}} & \text{npu } y > 0, \\ 0 & \text{npu } y \leq 0; \end{cases} \quad M(Y) = 5, \quad D(Y) = 50.$$

29.

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6\pi(1-y)}} e^{\frac{1-y}{6}} & \text{npu } y < 1, \\ 0 & \text{npu } y \geq 1; \end{cases} \quad M(Y) = -2, \quad D(Y) = 18.$$

$$30. \quad g(y) = \begin{cases} \frac{4y \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^4}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} & \text{npu } y > 0, \\ 0 & \text{npu } y \leq 0 \end{cases}.$$

$$31. \quad g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} & \text{npu } y \in (-1; 1), \\ 0 & \text{npu } y \notin (-1; 1). \end{cases}$$

$$32. \quad M(Y) = \frac{\pi^2}{4} - 2; \quad D(Y) = 2(10 - \pi^2).$$

$$33. \quad g(z) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\cos \frac{z+1}{2} + \sin \frac{z+1}{2} \right) & \text{npu } z \in [-1; \pi - 1], \\ 0 & \text{npu } z \notin [-1; \pi - 1]; \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\cos(t-3) - \sin(t-3)) & \text{npu } t \in \left[3 - \frac{\pi}{2}; 3\right], \\ 0 & \text{npu } t \notin \left[3 - \frac{\pi}{2}; 3\right]. \end{cases}$$

$$34. \quad g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(4\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} e^{-\frac{(z-1)^2}{2(4\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}}.$$

$$35. \quad g(z) = \frac{1}{4\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{(z+6)^2}{48}};$$

$$f_2(x, z) = \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{6}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(z+6)^2 + \frac{1}{6}(x-1)(z+6)}.$$

$$36. g(z) = \begin{cases} 0 & \text{npu } z \leq 2, \\ \frac{z-2}{4} & \text{npu } 2 < z \leq 4, \\ \frac{6-z}{4} & \text{npu } 4 < z \leq 6, \\ 0 & \text{npu } z > 6. \end{cases} \quad M(Z) = 4, \quad D(Z) = \frac{2}{3}.$$

$$37. g(z) = \begin{cases} 0 & \text{npu } z \leq 0, \\ \frac{z^2}{2} & \text{npu } 0 < z \leq 1, \\ z^2 - 3(z-1)^2 & \text{npu } 1 < z \leq 2, \\ \frac{(3-z)^2}{2} & \text{npu } 2 < z \leq 3, \\ 0 & \text{npu } z > 3. \end{cases}$$

$$38. g(z) = 0.5e^{-|z|}.$$

$$39. g(z) = \begin{cases} \frac{2z}{(z^2+1)^2} & \text{npu } z > 0, \\ 0 & \text{npu } z \leq 0. \end{cases}$$

$$40. g(z) = \begin{cases} \frac{3}{(z+1)^4} & \text{npu } z > 0, \\ 0 & \text{npu } z \leq 0. \end{cases}$$

$$41. g(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}.$$

$$42. g(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & \text{npu } r > 0, \\ 0 & \text{npu } r \leq 0. \end{cases}$$

$$43. g(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{y}{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} & \text{npu } y > 0, \\ 0 & \text{npu } y \leq 0; \end{cases} \quad \sigma_y = \sqrt{6}.$$

$$44. D(Y) = 0.0891; \quad D(Y^2) = 0; \quad D(Y^3) = 0.0891.$$

45.

z_j	-2	0	2
p_j	0.25	0.50	0.25

$$46. \quad g(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{(3y+17)\sqrt{(3y+17)(y+5)}} & \text{for } y > -5, \\ 0 & \text{for } y \leq -5. \end{cases}$$

$$47. \quad g(y) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{(y-1)^2}{9} \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Литература

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 1998. – 576с.
2. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1973. – 368с.
3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979. – 400с.
4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977. – 480с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. – 832с.
6. Медик В. А., Токмачев М. С., Фишман Б. Б. Статистика в медицине и биологии. – М.: Медицина, 2000 – Т. 1 – 456с.
7. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 496с.
8. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. – М.: Наука, 1968. – 548с.
9. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под ред. А. А. Свешникова. – М.: Наука, 1965. – 632с.