КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 530.12

DOI: https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.2(123).87-88

К РАСЧЕТУ ДВИЖЕНИЯ ПЕРИАСТРА

Я.И.Грановский

ON THE CALCULATION OF THE PERIASTRON'S MOTION

Ya.I.Granovsky

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, yagran1931@gmail.com

Для цитирования: Грановский Я.И. К расчету движения периастра // Вестник НовГУ. Сер.: Технические науки. 2021. №2(123). С.87-88. DOI: https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.2(123).87-88

For citation: Granovsky Ya.I. On the calculation of the periastron's motion // Vestnik NovSU. Issue: Engineering Sciences. 2021. №2(123). P.87-88. DOI: https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.2(123).87-88

В гравитационном поле сферически-симметричной звезды планета движется по плоской, вообще говоря, незамкнутой кривой. Если положить $x = a\cos(\omega t)$, $y = b\sin(\omega' t)$, то орбита замкнется при равенстве частот $\omega = \omega'$ и окажется эллипсом*. В противном случае траектория представляется фигурой Лиссажу, чем-то вроде вращающегося эллипса. Уравнение орбиты при этом выражается двоякопериодической функцией.

Согласно 1-му закону И.Кеплера орбитой планеты является неподвижный эллипс — его периастр (точка орбиты, ближайшая к звезде) после полного оборота** остается на том же месте. Однако в 1859 г. французский ученый У.Леверье [1] обнаружил, что орбита Меркурия медленно (около 40 угловых секунд за 100 лет) поворачивается, причем влиянием остальных тел Солнечной системы этот поворот объяснить невозможно. Вскоре выяснилось, что этот эффект присущ всем планетам, но особенно он заметен у внутренних, близких к Солнцу планет.

Объяснение пришлось ждать более полувека: в 1915 г. А.Эйнштейн показал [2], что созданная им теория тяготения (известная сегодня как общая теория относительности, ОТО) без дополнительных гипотез объясняет эффект Леверье. Великий математик Д.Гильберт тут же написал Эйнштейну «Я не могу так быстро вычислять!» — он, видимо, забыл, что адресат думал и работал над ОТО долгих 10 лет после создания специальной теории относительности (СТО).

В качестве уравнения движения ОТО предлагает принцип геодезической, кратчайшей линии в пространстве-времени. То, что это предложение — гипотеза, которая не противоречит уравнениям Эйнштейна (определяющим геометрию Мира), было установлено (в первом приближении) группой Эйнштейна [3] и независимо от нее акад. Фоком В.А. [4] и Петровой Н.М. [5] (во втором приближении). Другой путь — использование гамильтонова метода — был предложен Л.Ландау и Е.Лифшицем [6]. Во всех этих работах гравитация считалась слабой. Хотя все исследователи, включая Эйнштейна, согласно считали траекторию эллиптической кривой, но только С.Вейнберг выписал интегральное уравнение орбиты [7], одако и он вместо точного решения перешёл к приближениям, как и все коллеги.

Мы получим формулу орбиты и сдвиг периастра с помощью функции действия $S(r,\varphi;t)$. Согласно гамильтоновой механике, уравнение траектории имеет вид $\varphi = \partial S/\partial L$ (φ — угол, L — момент). Ввиду симметрии по φ и t эти переменные входят в действие линейно: $S = -Et + L\varphi + \int dr\,\partial S/\partial r.$ Производную $\partial S/\partial r$ (т. е. импульс p_r) определяет уравнение Гамильтона—Якоби $g^{\mu\upsilon} p_\mu p_\upsilon = m^2$. В явном виде оно гласит

$$g^{tt}(p_t)^2 - g^{rr}(p_r)^2 - g^{\varphi\varphi}(p_\varphi)^2 = m^2, \qquad (1)$$

причем метрические коэффициенты $g^{\mu\upsilon}$ центрально-симметричного гравитационного поля задаются формулами К.Шварцшильда

$$g^{rr} = (g^{tt})^{-1} = e^{\upsilon} = 1 - R/r;\ g^{\varphi\varphi} = r^{-2}. \qquad (2)$$

Здесь $R = 2GM/c^2$ — гравитационный радиус центральной звезды. Следует подчеркнуть, что кроме массы звезды M и мировых констант (постоянной тяготения G и скорости света c) никаких других параметров ОТО не вводит. Именно это я имел в виду, говоря «без дополнительных гипотез».

Подставив в (1) $p_t = \dfrac{\partial S}{\partial t} = -E$ и $p_\varphi = \dfrac{\partial S}{\partial \varphi} = L,$ найдем

$$p_r = \sqrt{e^{-2\upsilon}E^2 - e^{-\upsilon}(m^2 + L^2 r^{-2})} = e^{-\upsilon}\sqrt{E^2 - e^{\upsilon}(m^2 + L^2 r^{-2})}. \qquad (3)$$

* Это произойдет также в случае соизмеримых частот.

** В данном случае это пери*гелий*, ведь нашу звезду, Солнце, греки называли *Гелиос*.

Таким образом, уравнение орбиты принимает вид

$$\varphi=\frac{\partial}{\partial L}\int dre^{-\nu}\sqrt{E^2-e^{\nu}(m^2+L^2r^{-2})} \quad (4)$$

и после дифференцирования под знаком интеграла приводится к

$$\varphi=\int\frac{-Ldrr^{-2}}{\sqrt{E^2-e^{\nu}(m^2+L^2r^{-2})}}=\int\frac{dv}{\sqrt{v^3-v^2+(v+\varepsilon^2-1)\gamma^{-2}}} \quad (5)$$

(сделана очевидная замена $\frac{R}{r}=v$ и введены два безразмерных параметра $\gamma=L/mR$ и $\varepsilon=E/m$)

Этот интеграл можно выразить через эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(z)$, если предварительно положить $v=t+\frac{1}{3}$ и получить под корнем t^3-at-b. Подстановка $t=\wp(z|\omega,\omega')$ приводит этот полином к $[\wp'(z)/2]^2$, а так как $dv=\wp'(z)dz$, то $\varphi=2z$.

Таким образом,

$$\frac{R}{r}=\wp\left(\frac{\varphi}{2}|\omega,\omega'\right)+\frac{1}{3.} \quad (6)$$

Функция $\wp(z)$ имеет два периода: вещественный 2ω и мнимый $2\omega'$. Поэтому вещественная функция $r(\varphi)$ имеет период $4\omega=4K(\lambda)(e_1-e_3)^{-1/2}$.

Здесь $K(\lambda)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода (с модулем λ), равный $\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1|\lambda\right)$, или приближенно $\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)$. Константы λ и $\sqrt{e_{13}}$ найдены в *Приложении* и равны $\frac{2R\in}{\rho}$ и $1-\frac{R}{2\rho}(3-\in)$ ($\in$ — эксцентриситет, $\rho=b^2/2a$ — фокальный параметр кеплерова эллипса).

В 1-м порядке по $\in$

$$4\omega=2\pi\left[1+\frac{\lambda}{4}\right]\left[1+\frac{R}{2\rho}(3-\in)\right]=$$
$$=2\pi\left[1+\frac{R\in}{2\rho}+\frac{R}{2\rho}(3-\in)\right]=2\pi+3\pi\frac{R}{\rho} \quad (7)$$

сдвиг периастра равен***

$$\Delta=3\pi\frac{R}{\rho}. \quad (8)$$

В Солнечной системе наибольший эффект наблюдается у Меркурия, чей параметр ρ наименьший. Гравитационный радиус Солнца $R=\frac{2GM}{c^2}=2{,}953$ км, фокальный параметр орбиты Меркурия $\rho=55{,}46\cdot10^6$ км. За один оборот Δ = 0,1034″, но за 100 лет он делает 415 оборотов, и сдвиг достигает величины 42,91″. Наблюдаемая величина сдвига равна $\Delta_{наб}$ = 43,11″±0,45″. Разность между теоретической и наблюдаемой величиной равна 1/2 стандартной ошибки.

Следует, однако, иметь в виду, что наблюдения орбит двойных пульсаров PSR B1913 и PSR J0737 показали, что сдвиг их периастров выражается не в секундах, а в градусах дуги, соответственно 4,2° и 17° *за год*, что в тысячи раз больше эйнштейновской величины. Впечатляет также недавно опубликованный результат 30-летних наблюдений за звездой S2 в созвездии Стрельца, чей сдвиг равен 12,1’ *за оборот* (более 7000 меркурианских).

В этих условиях необходимо пользоваться уже не приближенной формулой (8), а точным выражением $4K/\sqrt{e_{13}}$.

***Эйнштейн* [3] записывал эту формулу как $24\pi^3(a/cT)^2(1-\in^2)^{-1}$.

Приложение. Корни полинома *P*(*v*)

Как видно из уравнения (7), все три корня a_k пропорциональны R = 2,95 км, тогда как размер планетных орбит – миллионы километров. Это значит, что корни малы, и мы можем для их определения воспользоваться ньютоновым приближением: наименьший корень равен $e_3=\frac{R}{a+c}=\frac{R}{\rho}(1-\in)$; средний $e_2=\frac{R}{\rho}(1+\in)$ и старший $e_1=1-2\frac{R}{\rho}$. Разности: $e_{23}=2\in\frac{R}{\rho}$ и $e_{13}=1-\frac{R}{\rho}(3-\in)$. С точностью $\sim\in$: $\lambda=\frac{e_{23}}{e_{13}}\approx2\in\frac{R}{\rho}$ и $\sqrt{e_{13}}\approx1-\frac{R}{2\rho}(3-\in)$.

1. Le Verrier U.-J. Théorie et tables de mouvement de Mercure // Annales de L’Observatoire Imperial de Paris. 1859. T.5. P.1-195.
2. Einstein A. Erklärung der Perihelsbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie // Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1915. Band 47. Heft 2. S.831-839.
3. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. The Gravitational Equations and the Problem of Motion // Annals Math. Second series. 1938. Vol.39. No.1. P.65–100.
4. Фок В.А. О движении конечных масс в общей теории относительности // ЖЭТФ. 1939. Т. 9. № 4. С.375-410.
5. Петрова Н.М. Об уравнении движения и тензоре материи для системы конечных масс в общей теории относительности // ЖЭТФ. 1949. Т.19. №4. С.929-946.
6. Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Физматлит, 2001. 534 с.
7. Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.

References

1. Le Verrier U.-J. Théorie et tables de mouvement de Mercure // Annales de L’Observatoire Imperial de Paris. 1859. T.5. P.1-195.
2. Einstein A. Erklärung der Perihelsbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie // Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1915. Band 47. Heft 2. S. 831-839.
3. Einstein, A., Infeld, L., Hoffmann, B. The Gravitational Equations and the Problem of Motion // Annals Math. Second series. 1938. Vol. 39. No.1. P.65–100.
4. Fok V.A. O dvizhenii konechnykh mass v obshchey teorii otnositel'nosti [On the motion of finite masses after the Einstein theory of gravitation]. Journal of Experimental and Theoretical Physics (JETP), 1939, vol.9, no.4, pp.375-410.
5. Petrova N.M. Ob uravnenii dvizheniya i tenzore materii dlya sistemy konechnykh mass v obshchey teorii otnositel'nosti [On equations of motion and tensor of matter for a system of finite masses in general theory of relativity]. Journal of Experimental and Theoretical Physics (JETP), 1949, v.19, no.4, pp.929-946.
6. Landau L.D, Lifshits E.M. Teoriya polya [The Classical Theory of Fields]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 510 p.
7. Veynberg S. Gravitatsiya i kosmologiya [Gravitation and cosmology]. Moscow, Mir, 1975. 696 p.