

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА КУЛОНОВСКИМ ПОЛЕМ

Я.И.Грановский

POLARIZATION OF VACUUM BY COULOMB FIELD

Ya.I.Granovsky

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, yagran1931@gmail.com

В работе получены формулы для двух важных функций в теории поляризации вакуума: это преобразование Лапласа плотности индуцированного заряда и полный индуцированный заряд. Обе формулы имеют простой вид интегралов от гипергеометрических функций. Этот факт не случаен — в нем отражена структура пропагатора электрона, движущегося в кулоновском поле.

Ключевые слова: электронный вакуум, индуцированная плотность заряда, кулоновская проблема

Для цитирования: Грановский Я.И. Поляризация вакуума кулоновским полем // Вестник НовГУ. Сер.: Технические науки. 2020. №5(121). С.8-9. DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2020.5\(121\).8-9](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2020.5(121).8-9).

In this work, formulas are obtained for two important functions in the theory of vacuum polarization: these are the Laplace transform of the density of the induced charge and the total induced charge. Both formulas have a simple form of integrals of hypergeometric functions. This fact is not accidental — it reflects the structure of propagator of an electron moving in a Coulomb field.

Keywords: electron vacuum, induced charge density, Coulomb problem

For citation: Granovsky Ya.I. Polarization of vacuum by Coulomb field // Vestnik NovSU. Issue: Engineering Sciences. 2020. №5(121). P.8-9. DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2020.5\(121\).8-9](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2020.5(121).8-9).

Введение

Поляризация вакуума, пожалуй, самая первая задача, вставшая перед квантовой электродинамикой. Она возникла вслед за идеей П.Дирака о «море» электронов с отрицательной энергией — такое море *обязано* поляризоваться под действием внешнего электромагнитного поля.

После первоначальных набросков Дирака [1] и В.Гейзенберга [2] уже в 1935 г. Р.Сербер выводит формулу [3] для индуцированной плотности заряда

$$\rho(q^2) = -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \ln(1 + L \cos^3 \theta) d\theta, \quad L = q^2/4m^2, \quad (1)$$

которая в различных формах сохранилась до 1951 г., когда Ю.Швингер придал ей вид [4]

$$\rho(q^2) = -\frac{\alpha q^2}{3\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dx(x+2m^2)}{x^2(x+q^2)} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{x}}. \quad (2)$$

Все эти годы электроны вакуума рассматривались как свободные, и только в 1956 г. Э.Викманн и Н.Кролл сумели учесть [5] воздействие кулоновского поля на их движение. Формула, полученная ими, слишком сложна, чтобы выписывать ее здесь, но 20 лет спустя группе Л.Брауна удалось записать ее в приемлемом виде [6-8]. Через год мне удалось дать этой формуле очень простой вывод [9], основанный на метасимметрии кулоновской задачи, вскрытой в работе Ю.Б.Румера [10].

Плотность заряда

В предлагаемой работе я излагаю другой способ решения задачи о поляризации электронного вакуума кулоновским полем. Подобно Серберу и его

последователям я вывожу формулу для лапласова образа индуцированной плотности*

$$\rho(p) = \int_0^{\infty} e^{-pr} \rho(r) dr. \quad (3)$$

Сама же плотность $\rho(r)$ задается как след электронного пропагатора $\rho(p) = e \text{Sp} G(r, r|E)$. В качестве его я пользуюсь формулой Л.Хостлера [11]

$$G(r, r|E) = \sum_j \int_1^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right)^{\gamma} e^{2ikr\zeta} I_{2\gamma+1} \left(-2ikr\sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (4)$$

После замены $\zeta = \cosh u$ и взятия следа это приводит к формуле

$$\rho(r) = \sum_j (2j+1) \int_0^{\infty} du \frac{e^{2uv}}{\text{sh} u} e^{2ikr \cosh u} I_{2\gamma+1} \left(-\frac{2ikr}{\text{sh} u} \right). \quad (3a)$$

Вычисление $\rho(p)$ сводится к взятию интеграла

$$J = \int_0^{\infty} e^{-r(p+A)} I_N(Br) dr = \frac{1}{B} \int_0^{\infty} e^{-Lt} I_N(t) dt, \quad N = 2\gamma + 1, \quad (5)$$

зависящего от единственного параметра $L = \frac{p+A}{B} = \cosh u + q \text{sh} u$ (здесь $A = -2ik \cosh u$ и $B = -2ik/\text{sh} u$). Разложение функции Бесселя в ряд

$I_N(t) = \sum_n \frac{(t/2)^{2n+N}}{n! \Gamma(n+N+1)}$ позволяет свести J к сумме $\frac{1}{B} \sum_n \frac{(1/2)^{2n+N}}{n! \Gamma(n+N+1)} \frac{\Gamma(2n+1+N)}{L^{2n+1+N}}$ и в конечном счете — к гипергеометрической функции (ГГФ)**

$$J = \frac{1}{B 2^N} L^{-N-1} F \left(\frac{N+1}{2}, \frac{N+2}{2}; N+1 | L^{-2} \right). \quad (6)$$

* Параметр p (вместо q^2) отражает изотропию плотности, ее независимость от углов.

** Мы дважды воспользовались формулой $\Gamma(2z) = \Gamma(z) \Gamma(z+1/2) 2^{2z-1} / \sqrt{\pi}$.

Таким образом, в результате получаем*

$$\rho(p) = \sum_j \frac{2j+1}{(-2ik)^2} \int_0^\infty du e^{2uv} L^{-(N+1)} F(a, b; c | L^{-2}) \quad (7)$$

(параметры ГГФ равны $a = \frac{N+1}{2}$, $b = a + \frac{1}{2}$, $c = 2a$). Напомним, что $N = 2\gamma + 1$.

Полный заряд

Полный индуцированный заряд $Q = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr$

может быть вычислен как $4\pi \rho''(p)$ при $p = 0$:

$$Q = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = 4\pi \sum_j \frac{2j+1}{(-2ik)^3} \int_0^\infty du e^{2uv} (\text{sh}u)^2 J_2, \quad (8)$$

где $J_2 = \int_0^\infty e^{-Lt} I_N(t) t^2 dt$. Наличие степени t^2 приводит

к замене $\frac{\Gamma(2n+N+1)}{L^{2n+N+1}}$ на $\frac{\Gamma(2n+N+3)}{L^{2n+N+3}}$. Повторение

сделанных выше операций приводит к формуле

$$Q = 4\pi \sum_j \frac{(2j+1)(N+1)(N+2)}{(-2ik)^3 2^{N+2}} \int_0^\infty du e^{2uv} (\text{sh}u)^2 \times \\ \times L^{-(N+3)} F(a', b'; c' | L^{-2}) \quad (9) \\ \left(a' = \frac{N+3}{2}, b' = a' + \frac{1}{2}, c' = 2a' \right).$$

Эта формула отличается от (7): здесь $p = 0$ и $L = \text{ch}u$. Это значительно упрощает ответ.

$$Q = 4\pi \sum_j \frac{(2j+1)(N+1)(N+2)}{(-2ik)^3 2^{N+2}} \int_0^\infty du e^{2uv} (\text{sh}u)^2 \times \\ (\text{ch}u)^{-(N+3)} F(a, b; c | (\text{ch}u)^{-2}) \quad (10)$$

Интеграл по u можно вычислить, он равен обобщенной гипергеометрической функции ${}_3F_2(1)$, но пять ее параметров слишком сложны...

Заключение

Формулы (7) и (10) — это еще не окончательный ответ: необходимо проинтегрировать по энергии и взять сумму парциальных вкладов. Вряд ли это можно сделать без приближений, как это удалось сделать здесь.

1. Dirac P. Theorie du Positron: Rapport et discussion VII Conseil de Physique Solvay: Structure et proprietes des noyaux atomiques, Bruxelles, 22-29 October 1933. Paris: Gauthier-Villars, 1934. P.203-212.

2. Heisenberg W. Bemerkungen zur Diracschen theorie des positrons // Zeitschrift für Physik. 1934. Band 90. Heft 3–4. S.209–231. DOI: 10.1007/BF01333516.
3. Serber R. Linear modifications in the Maxwell field equations // Physical Review. 1935. Vol.48. No.1. P.49–54. DOI: 10.1103/PhysRev.48.49.
4. Schwinger J. On gauge invariance and vacuum polarization // Physical Review. 1951. Vol.82. No.5. P.664–679. DOI: 10.1103/PhysRev.82.664.
5. Wichmann E.H., Kroll N.M. Vacuum Polarization in a strong coulomb field // Physical Review. 1956. Vol.101. No.2. P.843–859. DOI: 10.1103/PhysRev.101.843.
6. Brown L.S., Cahn R.N., McLerran L.D. Vacuum polarization in a strong Coulomb field. I-III // Physical Review D. 1975. Vol.12. No.2. P.581–595. DOI: 10.1103/PhysRevD.12.581.
7. Ibid. P.596–608. DOI: 10.1103/PhysRevD.12.596.
8. Ibid. P.609–619. DOI: 10.1103/PhysRevD.12.609.
9. Грановский Я.И. О кулоновской поляризации вакуума // Журн. экспериментальной и теоретической физики. 1976. Т.70. Вып.6. С.2035–2040.
10. Дмитриев В.Ф., Румер Ю.Б. Алгебра $O(2,1)$ и атом водорода // Теоретическая и математическая физика, 1970, т.5, вып.2, с.276–280.
11. Hostler L. Coulomb Green's Functions and the Furry Approximation // Journal of Mathematical Physics. 1964. Vol.5. No.5. P.591–611. DOI: 10.1063/1.1704153.

References

1. Dirac P. Théorie du Positron: Rapport et discussion VII Conseil de Physique Solvay: Structure et propriétés des noyaux atomiques, Bruxelles, 22-29 October 1933. Paris: Gauthier-Villars, 1934, pp. 203-212.
2. Heisenberg W. Bemerkungen zur Diracschen Theorie des Positrons. Zeitschrift für Physik. 1934, Band 90, Heft 3–4, pp.209–231. DOI: 10.1007/BF01333516.
3. Serber R. Linear Modifications in the Maxwell Field Equations. Physical Review, 1935, vol.48, no. 1, pp. 49–54. doi: 10.1103/PhysRev.48.49.
4. Schwinger J. On gauge invariance and vacuum polarization. Physical Review, 1951, vol.82, no.5, pp. 664–679. doi: 10.1103/PhysRev.82.664.
5. Wichmann E.H., Kroll N.M. Vacuum Polarization in a Strong Coulomb Field. Physical Review, 1956, vol.101, no. 2, pp. 843–859. doi: 10.1103/PhysRev.101.843
6. Brown L.S., Cahn R.N. McLerran L.D. Vacuum polarization in a strong Coulomb field. I-III. Physical Review D, 1975, vol.12, no. 2, pp. 581–595, doi: 10.1103/PhysRevD.12.581; 10.1103/PhysRevD.12.596; 10.1103/PhysRevD.12.609.
7. Ibid. P.596–608. DOI: 10.1103/PhysRevD.12.596.
8. Ibid. P.609–619. DOI: 10.1103/PhysRevD.12.609.
9. Granovskiy Ya.I. O kulonovskoy polyarizatsii vakuuma [On Coulomb polarization of vacuum]. Zh. Eksperimental'noy i Teoreticheskoy Fiziki, 1976, vol. 70, iss. 6, pp. 2035–2040.
10. Dmitriev V.F., Rumer Yu.B. Algebra $O(2,1)$ i atom vodoroda [$O(2, 1)$ Algebra and the hydrogen atom]. Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika, 1970, vol. 5, iss. 2, pp. 276–280.
11. Hostler L. Coulomb Green's Functions and the Furry Approximation. Journal of Mathematical Physics, 1964, vol. 5, no. 5, pp. 591–611. doi: 10.1063/1.1704153.

* Фактически мы нашли лапласов образ радиальной части электронного пропагатора.