МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЭВМ

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЭВМ

Методические указания
к практическим занятиям

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2017

УДК 629.113:004(075.8)
ББК 39.33я73+32.97я73
С78

Печатается по решению
РИС НовГУ

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент **И. И. Зубрицкас**
кандидат технических наук, доцент **А. Н. Чадин**

С78 **Статистическая** обработка результатов эксперимента с использованием ПЭВМ: метод. указания к практ. занятиям / авт.-сост. С. В. Гудилов; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2017. – 23 с.

Рассмотрены вопросы организации практических занятий модуля «Основы инженерных расчетов».

Предназначено для студентов специальности 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов

УДК 629.113:004(075.8)
ББК 39.33я73+32.97я73

ВВЕДЕНИЕ

Эксперимент – это система операций и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте исследования. Составной частью эксперимента является опыт – воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях при возможности регистрации и количественной оценки состояния или результатов функционирования исследуемого объекта. При этом механизм изучаемого процесса обычно известен лишь частично или совсем неизвестен. Известны лишь переменные величины, воздействующие на объект исследования, и величины, характеризующие его состояние или результаты функционирования. Первые называют входными величинами или факторами, а вторые – выходными или обликом.

Основная цель обработки экспериментальных данных – получение результата измерения и оценка его погрешности.

Выбор метода обработки зависит от числа экспериментальных данных (многократные и однократные измерения), вида распределения погрешностей измерения, вида измерений и требований к быстроте вычислений, их трудоемкости.

Для определения результата многократных измерений и оценки их погрешностей широкое распространение получили вероятностно-статистические методы. Выбор метода зависит от распределения исходных данных. Замечено, что в большинстве случаев распределение случайных погрешностей не противоречит нормальному распределению. Методы обработки данных при предположении нормальности распределения погрешностей тщательно обработаны. В качестве значения измеряемой величины при использовании этих методов принимают среднее арифметическое ряда экспериментальных данных, а в качестве характеристики ее погрешности – оценку параметра нормального распределения (среднее квадратичное отклонение). Если распределение погрешностей измерений не противоречит другим видам распределений (например, равномерному, экспоненциальному, показательному и т.д.), значение измеряемой величины и характеристика ее погрешностей отличаются от среднего арифметического и среднего квадратичного отклонения. Поэтому, чтобы правильно выбрать методы вычислений измеряемой величины и ее погрешностей, производят проверку гипотезы о виде распределения экспериментальных данных.

Внедрение ПЭВМ позволяет повысить быстроту получения и эффективности оценки результатов измерений и их погрешностей, снизить трудоемкость вычислений. Однако следует отметить, что результаты вычислений, полученные на ПЭВМ, должны подвергаться тщательному контролю. Неточности программиста, ошибочный ввод данных в ПЭВМ и другие недостатки могут привести к неверным выводам. В подобной ситуации экспериментатор обязан проверить каждый этап ввода данных в ПЭВМ, а также последовательность выполнения программы на контрольном примере.

Точность получаемых экспериментальных данных и последующих вычислений при обработке данных должна быть согласована с требуемой точностью результата измерения. Промежуточные вычисления при обработке экспериментальных данных на ПЭВМ выполняют с таким числом цифр, чтобы погрешности вычислений не могли исказить последнюю значащую цифру результата. Для этого число цифр в результатах промежуточных расчетов обычно берут на единицу или две больше, чем в окончательном результате.

1. ЦЕЛЬ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ

Цель расчетной работы (РР) – освоение методологии и стратегии статистической обработки экспериментальных данных с использованием ПЭВМ.

Расчетная работа позволяет решить следующие основные задачи:

– закрепить и углубить теоретические знания, полученные при изучении соответствующего курса;

– усвоить методику предварительного анализа экспериментальных данных, статистической проверки гипотез о виде распределения экспериментальных данных, о равенстве средних значений и дисперсий, методику дисперсионного анализа;

– развить навыки составления и отладки вычислительных программ на ПЭВМ;

– привить навыки самостоятельного пользования специальной литературой при решении конкретных вопросов;

– подготовить студентов к выполнению выпускной квалификационной работы (ВКР).

2. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ

Расчетная работа состоит из пояснительной записки, распечатки составленной программы и результатов расчетов.

Состав и порядок расположения материалов в пояснительной записке должен быть следующий:

1. Титульный лист.
2. Задание на расчетную работу.
3. Содержание пояснительной записки (ПЗ).
4. Введение.
5. Расчетная часть.
6. Выводы.
7. Библиография.
8. Приложение.

Объем ПЗ – 10–15 листов. Текст и приложения ПЗ должны оформляться согласно ГОСТу 2.105–95 ЕСКД, ГОСТу 2.004–88 ЕСКД. СТО 1.701–2010. Распечатки программы на ПЭВМ необходимо располагать в приложении ПЗ.

3. ОРГАНИЗАЦИЯ И ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ

Прежде чем приступить к выполнению расчетной работы, студент должен:

1. Изучить теоретическую часть учебной дисциплины, пользуясь при этом, кроме лекций, источниками, предлагаемыми рабочей программой и данными методическими указаниями.

2. Изучить настоящие методические указания и ознакомиться с ГОСТами и другими нормативными документами, указанными в методических указаниях.

Расчетная работа должна быть выполнена и защищена в сроки, установленные учебным графиком. Оценка качества РР зависит от правильности полученных результатов расчетов и оптимальности реализованного в программе алгоритма.

После защиты пояснительная записка должна быть сдана руководителю расчетной работы.

4. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

4.1. Обнаружение грубых погрешностей

Если в полученной группе результатов измерений $x_{\min}$ и $x_{\max}$ резко отличаются от остальных, следует проверить, не являются ли они грубыми погрешностями, подлежащими исключению. При решении данной задачи предполагается, что результаты наблюдений подчиняются нормальному закону распределения. Для решения задачи имеющиеся результаты измерения располагают в вариационный ряд монотонно возрастающих значений x_i (i = 1, 2, ..., n).

Проверке подлежит наименьший $x_{\min}$ и наибольший $x_{\max}$ член ряда. Сначала вычисляются числовые характеристики результатов наблюдений:

среднее арифметическое

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \; ; \tag{4.1}$$

среднее квадратичное отклонение

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \, . \tag{4.2}$$

Затем определяется наблюдаемое значение критерия Z_H:

$$Z_H = \frac{\left|\overline{X} - x_{экс}\right|}{S} \, . \tag{4.3}$$

Задавшись доверительной вероятностью P, определяем по табл. 4.1 критическое значение критерия Z_K, которое зависит также от числа измерений n. Если $Z_H \leq Z_K$, то все наблюдения проводились в одинаковых условиях и значение $x_{экс}$ составляет с остальными результатами однородную выборку. Если это неравенство нарушается, т.е. $Z_H > Z_K$, то результат $x_{экс}$ следует исключить из дальнейшего рассмотрения.

Таблица 4.1

Критические значения критерия Z_K (P, n)

n	P = 0,9	P = 0,95	n	P = 0,9	P = 0,95
4	1, 645	1,689	16	2,654	2,523
6	1, 894	1,996	20	2,447	2,623
8	2,041	2,172	26	2,553	2,734
10	2,146	2,294	30	2,609	2,792
12	2,229	2,387	40	2,718	2,904
14	2,297	2,461	50	2,800	2,987

Пример 4.1

Результаты измерения износа автомобильных шин образуют следующий ряд значений (мкм): 26, 30, 25, 28, 40, 32, 26, 22, 28, 31. Требуется определить с доверительной вероятностью, равной P = 0,95, являются ли отклонения 22 и 40 мкм грубой погрешностью.

Решение

$$\bar{X} = 288 / 10 = 28{,}8; \quad S^2 = 24{,}4; \quad S = 4{,}9396.$$

$$Z_{H\max} = \left|28{,}8 - 40\right| / \sqrt{24{,}4} = 2{,}267\ .$$

$$Z_{H\min} = \left|28{,}8 - 22\right| / \sqrt{24{,}4} = 1{,}377\ .$$

Согласно табл. 4.1 Z_K = 2,294. Так как $Z_H < Z_K$, то значения износа $x_{\max}$ = 40 мкм и $x_{\min}$ = 22 мкм не являются грубой ошибкой.

4.2. Проверка случайности и независимости результатов измерений в выборке

При статистической обработке результатов измерения отклика необходимо убедиться в том, что они являются стохастически независимыми. Альтернативной гипотезой может быть предположение о наличии монотонного или циклического смещения (дрейфа) значения отклика, вызванного неконтролируемым фактором. Подобный случай может иметь место при анализе размеров деталей, обрабатываемых на настроенном станке, когда вследствие изнашивания инструмента или нагрева станка центр группирования размеров постепенно смещается при неизменной стандартной погрешности. Наиболее мощным критерием проверки нулевой гипотезы является критерий последовательных разностей τ.

Наблюдаемое значение критерия

$$\tau_H = C^2 / S^2, \tag{4.4}$$

$$C^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_{i+1} - x_i\right)^2; \tag{4.5}$$

где n – объем выборки;

i – порядковый номер измерения отклика в выборке;

S^2 – оценка дисперсии, вычисляемая по формуле (4.2).

Критическое значение τ_K определяется по табл. 4.2. Если $\tau_H \le \tau_K$, то гипотеза о независимости и случайности измерений в выборке отвергается.

Таблица 4.2

Критическое значение τ_K (*P*, *n*) (*P* = 0,95)

n	4	6	7	8	10	11	13	14	20	30
τ_K	0,39	0,445	0,468	0,491	0,531	0,548	0,578	0,591	0,65	0,704

Пример 4.2

По результатам измерений деталей, обработанных на станке, необходимо проверить наличие или отсутствие дрейфа размеров:

$$n = 20, \quad x = 45, \quad S^2 = 267{,}95, \quad C^2 = 114{,}74.$$

$$\tau_H = C^2 / S^2 = 114{,}74 / 267{,}95 = 0{,}428.$$

По табл. 4.2 для $n = 20$ получаем $\tau_K = 0{,}65$. Так как $\tau_H < \tau_K$, гипотезу о случайности и независимости следует отклонить.

Следовательно, размер обрабатываемых деталей зависит от неучтенного фактора, вызвавшего циклическое смещение центра группирования размеров.

5. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Проверить гипотезу о том, что распределение экспериментальных данных не противоречит теоретическому распределению, можно по ряду критериев. Наиболее эффективными являются критерий Колмогорова, ω-критерий и χ^2-критерий Пирсона.

При числе экспериментальных данных $n \geq 50$ для проверки критерия согласия теоретического распределения с практическим чаще всего используют критерий Пирсона. Вычисления сводят в таблицу. При этом группируются данные, вычисляют середины интервалов x_{io}, соответствующие им эмпирические частоты, определяют среднее арифметическое X и среднее квадратичное отклонение (СКО) S. Находят число данных, которое должно было быть в интервале, если бы их распределение соответствовало предлагаемому $n_i = n\frac{h}{S}\varphi(Z_i)$. Для каждого интервала вычисляют $\chi^2 = (\tilde{n}_i - n_i)^2 / n_i$.

Просуммировав χ_i^2 по всем N интервалам, получают χ_Σ^2 с определенным числом степеней свободы f. Для нормального распределения $f = N - 3$. Выбрав уровень значимости Q по таблицам распределения χ^2, находят $\chi_н^2$ и $\chi_в^2$ [1]. Гипотезу о соответствии теоретического распределения практическому принимают, если $\chi_н^2 < \chi^2 < \chi_в^2$.

При $n < 10$ проверить гипотезу о виде распределения экспериментальных данных невозможно. С целью установления вида распределения увеличивают число данных и проверяют гипотезу о виде распределения данных. Отдельные группы данных небольшого объема, полученных в аналогичных условиях, считают принадлежащими распределению, вид которого был установлен при большем объеме экспериментальных данных.

При числе данных $11 \leq n \leq 50$ также трудно судить о виде распределения. Поэтому для проверки соответствия распределения данных нормальному распределению используют составной критерий [1]. Если гипотеза о нормальности отвергается хотя бы по одному из критериев, считают, что распределение экспериментальных данных отлично от нормального. Если при проверке гипотезы по одним и тем же данным для критерия 1 выбран уровень значимости Q_1, а для критерия 2 – уровень значимости Q_2, то уровень значимости составного критерия равен

$$Q \leq Q_1 + Q_2. \quad (5.1)$$

Критерий 1

Вычисляют значение d по формуле

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \overline{X} \right|}{n \cdot S^*}, \tag{5.2}$$

где

$$S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X} \right)^2}.$$

Гипотеза о нормальности подтверждается, если

$$d_{100-Q_1/2} < d < d_{Q_1/2}, \tag{5.3}$$

где $d_{100-Q_1/2}$ и $d_{Q_1/2}$ – процентные точки распределения значений d, которые находят по табл. 5.1.

Критерий 2

Гипотеза о нормальности распределения экспериментальных данных подтверждается, если не более m разностей $\left| x_i - \overline{X} \right|$ превзошли значения $S \cdot Z_{p/2}$. S определяется по формуле (4.2), а $Z_{p/2}$ – верхняя $100 \cdot P/2$ – процентная точка нормированной функции Лапласа. В противном случае гипотеза о нормальности должна быть отвергнута.

Для нахождения значения P составлена табл. 5.2 с входами n и Q_2 для значений $m = 1$ и $m = 2$. При числе данных $11 \le n \le 20$ принимают $m = 1$, при $20 \le n \le 50$ принимают $m = 2$.

Таблица 5.1

Значения процентных точек Q_1 для распределения d

Уровень значимости Q_1		Число результатов измерений, n								
		11	16	21	26	31	41	51	61	71
$100-Q_1/2$	99%	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,73	0,74
	95%	0,72	0,72	0,73	0,74	0,74	0,75	0,75	0,76	0,76
	90%	0,74	0,74	0,75	0,75	0,76	0,76	0,76	0,77	0,77
$Q_1/2$	10%	0,89	0,87	0,86	0,86	0,85	0,84	0,84	0,83	0,83
	5%	0,91	0,89	0,88	0,87	0,86	0,85	0,85	0,84	0,84
	1%	0,94	0,91	0,90	0,89	0,88	0,87	0,86	0,86	0,85

Таблица 5.2

Значения доверительной вероятности *P*

n		11–14	15–20	21–23	24–27	28–32	33–35	36–49
Q_2	1%	0,99	0,99	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99
	2%	0,98	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,99
	5%	0,97	0,98	0,96	0,97	0,97	0,98	0,98

Пример 5.1

Для экспериментальных данных при n = 11 получены следующие значения: S = 3,245, S^* = 3,127, d = 0,88.

Примем уровень значимости критерия 1 Q_1= 2%. Из табл. 5.1 найдем $d_{1\%}$ = 0,94 и $d_{99\%}$ = 0,67.

Так как 0,67 < 0,88 < 0,94, то критерий 1 выполняется.

Проверим выполнение критерия 2. Выбрав уровень значимости Q_2 = 5% для n = 11 из табл. 5.2, найдем P = 0,97.

Из табл. 5.3 определим $Z_{p/2}$ = 2,17. Тогда S $\cdot Z_{p/2}$ = 3,245 $\cdot$2,17 = 7,042.

Таблица 5.3

Значения *P*-процентных точек нормированной функции Лапласа

$P \cdot 100\%$	90	95	96	97	98	99
$Z_{p/2}$	1,65	1,96	2,06	2,17	2,33	2,58

Согласно критерию 2 не более одной разности $\left|x_i - \overline{X}\right|$ может превзойти 7,042. Расчет значений $\left|x_i - \overline{X}\right|$ показывает, что ни одно отклонение $\left|x_i - \overline{X}\right|$ не превосходит 7,042. Следовательно, гипотеза о нормальности распределения данных подтверждается. Уровень значимости составного критерия: $Q \le 2\% + 5\% = 7\%$, т.е. гипотеза о нормальности распределения данных подтверждается при уровне значимости не более Q = 7%.

Для приближенной проверки гипотезы о нормальном распределении экспериментальных данных x_i можно также использовать коэффициенты α и β:

$$\alpha = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}\,; \tag{5.4}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}\,. \tag{5.5}$$

Если A < α / (2...3) и E < β / (2...3), то распределение массива x_i можно считать нормальным.

A – коэффициент асимметрии:

$$A = \frac{1}{nD^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X} \right)^3; \tag{5.6}$$

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X} \right)^2. \tag{5.7}$$

Коэффициент асимметрии характеризует скошенность графической функции плотности распределения вероятностей $P(x)$.

При $A = 0$ она симметрична, при $A > 0$ вытянут правый, а при $A < 0$ – левый участок спада кривой $P(x)$.

E – коэффициент эксцесса:

$$E = \frac{1}{nD^2} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X} \right)^4 - 3. \tag{5.8}$$

Коэффициент эксцесса характеризует степень остроты пика кривой $P_H(x)$ в сравнении с $P(x)$ для нормального распределения.

6. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

6.1. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий

При обработке экспериментальных данных часто требуется выяснить вопрос об однородности выборочных дисперсий, т.е. их равенстве.

Пусть для двух независимых выборок из нормальной генеральной совокупности с объемами n_1 и n_2 определены оценки S_1^2 и S_2^2.

Требуется проверить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий.

Проверка проводится при помощи критерия Фишера F.

Наблюдаемое значение критерия:

$$F_H = S_1^2 / S_2^2, \ (S_1^2 > S_2^2). \tag{6.1}$$

F_H сравнивается с критическим F_k, которое определяется из табл. 6.1 для выбранной доверительной вероятности и n_1 и n_2.

Если $F_H < F_k$, то выборочные данные не противоречат нулевой гипотезе.

Таблица 6.1

Критические значения критерия Фишера (P = 0,95)

n_2	n_1								
	4	6	8	10	15	20	30	40	60
4	9,28	9,10	8,89	8,81	8,70	8,66	8,62	8,59	8,57
6	5,41	5,05	4,88	4,77	4,62	4,56	4,50	4,46	4,43
8	4,35	3,87	3,79	3,64	3,51	3,44	3,38	3,34	3,32
10	3,86	3,48	3,29	3,18	3,01	2,94	2,86	2,83	2,79
15	3,34	2,85	2,76	2,65	2,46	2,39	2,31	2,27	2,22
20	3,13	2,74	2,54	2,42	2,23	2,16	2,07	2,03	1,98
30	2,92	2,53	2,33	2,21	2,01	1,93	1,84	1,79	1,74
40	2,84	2,45	2,25	2,12	1,92	1,84	1,74	1,69	1,64
60	2,76	2,37	2,17	2,04	1,84	1,75	1,65	1,59	1,53
120	2,68	2,29	2,09	1,96	1,75	1,66	1,55	1,47	1,40

При анализе выборочных данных могут выдвигаться гипотезы об однородности дисперсий в нескольких выборках. В этом случае можно использовать критерий Кохрена.

Наблюдаемое значение критерия G_H определяется по формуле

$$G_H = S_1{}^2{}_{\max} \Big/ \sum_{i=1}^{n} S_i{}^2 \tag{6.2}$$

где $S_1{}^2{}_{max}$ – максимальная оценка дисперсии среди n сравниваемых дисперсий (все n выборок имеют одинаковый объем m).

Критическое значение критерия определяется из табл. 6.2 в зависимости от принятой доверительной вероятности P, объема выборок m и их числа n.

Таблица 6.2

Критическое значение критерия Кохрена (P = 0,95)

n	m						
	4	5	6	7	8	10	17
3	0,798	0,746	0,707	0,677	0,653	0,617	0,547
4	0,684	0,629	0,589	0,560	0,537	0,502	0,437
5	0,589	0,544	0,507	0,478	0,456	0,424	0,376
6	0,532	0,480	0,445	0,418	0,398	0,368	0,314
7	0,480	0,431	0,397	0,373	0,354	0,326	0,281
8	0,438	0,391	0,359	0,336	0,319	0,293	0,246
10	0,373	0,331	0,303	0,282	0,267	0,244	0,203
15	0,276	0,242	0,219	0,203	0,191	0,144	0,143
20	0,220	0,192	0,174	0,160	0,150	0,136	0,111

Пример 6.1

Проверить гипотезу о равенстве дисперсий в примере 6.3.

Решение

По формуле (6.1) определяем наблюдаемое значение Фишера $P = 4{,}76 / 3{,}8 = 1{,}25$. Из табл. 6.1 для $P = 0{,}95$ и $n_1 = n_2 = 20$ находим $F_K = 2{,}16$, а для $n_1 = n_2 = 30$ – $F_K = 1{,}84$. Искомое значение F_K для $n_1 = n_2 = 25$ находим линейной интерполяцией: $F_K = (1{,}84 + 2{,}16) / 2 = 2$, так как $F_H < F_K$, нулевая гипотеза о равенстве дисперсий принимается.

Пример 6.2

С четырех автоматов, настроенных на обработку коренных шеек коленчатых валов автомобиля ЗИЛ-130, взято по одной текущей выборке объемом m = 10. Оценки дисперсий их размеров имели следующие значения: $S_1^2 = 106$ мкм^2, $S_2^2 = 294$, $S_3^2 = 216$, $S_4^2 = 410$. Требуется определить, можно ли принять гипотезу об однородности дисперсий.

Решение

Согласно (6.2) $G_H = 410 / (106 + 294 + 216 + 410) = 0{,}3996$.

По табл. 6.2 для $P = 0{,}95$, $m = 10$ и $n = 4$ находим $G_K = 0{,}502$. Поскольку $G_H < G_K$, то гипотезу о равенстве дисперсий можно принять.

6.2. Проверка гипотезы о равенстве средних значений

Пусть выборки наблюдений объемом n_1 и n_2 берутся из двух генеральных совокупностей с нормальным распределением, причем дисперсии генеральных совокупностей равны. Необходимо проверить гипотезу о равенстве средних (математических ожиданий). По данным выборок определяются оценки математических ожиданий и дисперсий: $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, S_1^2 и S_2^2.

Объединенная оценка дисперсии генеральных совокупностей:

$$S^2 = [S_1^2\,(n_1 - 1) + S_2^2\,(n_2 - 1)] / (n_1 + n_2 - 1). \tag{6.3}$$

Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$t_H = \frac{\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right|}{S}\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}\,. \tag{6.4}$$

Критическое значение критерия определяется для данной доверительной вероятности P и $n = n_1 + n_2$ по табл. 6.3.

При $t_H \le t_k$ гипотеза принимается, при $t_H > n_K$ она отвергается.

Таблица 6.3

Критические значения критерия Стьюдента

t_K при	Объем выборки, n									
	3	5	8	10	15	20	25	30	40	60
P = 0,95	4,303	2,776	2,365	2,262	2,145	2,093	2,064	2,045	2,021	2

Пример 6.3

В одинаковых условиях был исследован износ 25 шин автомобилей ВАЗ-2106 и ВАЗ-2103. Результаты измерений показали: средний износ шин ВАЗ-2106 составляет 10,9 мкм, а ВАЗ-2103 – 9,8 мкм. Оценки дисперсий в обоих случаях соответственно $S_1^2 = 3{,}8$ мкм^2, $S_2^2 = 4{,}76$ мкм^2.

Необходимо установить, влияет ли марка автомобиля на величину износа шин.

Решение

Согласно (6.3): $S^2 = \dfrac{3{,}8 \cdot 24 + 4{,}76 \cdot 24}{49} = 4{,}19$.

Согласно (6.4): $t_H = \dfrac{10{,}9 - 9{,}8}{\sqrt{4{,}19}} \sqrt{\dfrac{25 \cdot 25}{25 + 25}} = 1{,}9.$

По табл. 6.1 при $P = 0{,}95$ и $n = 50$ находим (интерполяцией) $t_K \approx 2{,}0105$. Поскольку $t_H < t_K$, можно считать, что марка автомобиля не оказывает существенного влияния на износ шин.

7. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Дисперсионный анализ предназначен для выявления степени влияния контролируемых факторов на отклик. В зависимости от количества факторов, включаемых в анализ, различают одно-, двух- и многофакторный дисперсионный анализ.

Проведение дисперсионного анализа возможно, если результаты измерений не содержат грубых погрешностей, являются независимыми случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения с одинаковыми дисперсиями.

При однофакторном дисперсионном анализе выявляется степень влияния одного фактора X на математическое ожидание отклика $M(Y)$. Фактор может быть количественным (скорость движения автомобиля, его масса и т. д.) или качественным (модель автомобиля, марка шин и т.д.). В процессе эксперимента фактор поддерживают на n уровнях. На каждом уровне фактора проводится m дублирующих опытов. Значение m может быть одинаковым или разным для каждого из уровней. Результаты всех измерений удобно представлять в виде таблицы, которую называют матрицей наблюдений (табл. 7.1).

Вначале для каждой серии дублирующих опытов вычисляют оценки $M(Y)$, равные $\bar{y}_i$, и дисперсии воспроизводимости S^2_{Bi}:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}\ ;\ S^2_{Bi} = \frac{1}{m_i - 1}\sum_{j=1}^{m_i}\left(Y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2. \tag{7.1}$$

Таблица 7.1

Матрица наблюдений

Номер уровня фактора	Уровень фактора	Результаты наблюдений	Число дублирующих опытов
1	X_1	$Y_{11}, Y_{12}, ..., Y_{1j}, ..., Y_{1m1}$	m_1
2	X_2	$Y_{21}, Y_{22}, ..., Y_{2j}, ..., Y_{2m2}$	m_2
...	.....	....	.....
i	X_i	$Y_{i1}, Y_{i2}, ..., Y_{ij}, ..., Y_{imi}$	m_i
...	.....	....	.....
n	X_n	$Y_{n1}, Y_{n2}, ..., Y_{nj}, ..., Y_{nmn}$	m_n

Затем проверяют однородность ряда дисперсий S_1^2, S_2^2, ..., S_i^2, ..., S_n^2 для каждой пары при помощи критерия Фишера, если m_i различны, или при помощи критерия Кохрена, если m_i = const (см. п. 6.1). После подтверждения гипотезы об однородности дисперсий можно приступать к анализу. При этом полагают, что результат любого измерения Y_{ij} можно представить моделью:

$$Y_{ij} = \mu + j_i + \varepsilon_{ij}, \tag{7.2}$$

где μ – общая средняя; j_i – отклонение, вызванное изменением контролируемого фактора; ε_{ij} – отклонение, вызванное неконтролируемыми факторами.

Задача дисперсионного анализа состоит в оценке существенности влияния изменения уровня фактора. Влияние неконтролируемых факторов, т.е. вклад ε_{ij}, можно оценить средней дисперсией воспроизводимости:

$$S_B^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{Bi}^2. \tag{7.3}$$

Общее рассеивание значений отклика, вызванное как контролируемым, так и неконтролируемыми факторами, оценивается полной (или общей) дисперсией:

$$S_0^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{mi}\left(Y_{ij} - \mu\right)^2, \tag{7.4}$$

где $N = \sum_{i=1}^{n} m_i$; $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i$.

Рассеивание значений отклика, вызванное контролируемым фактором, оценивается дисперсией:

$$S^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\bar{y}_i - \mu\right)^2. \qquad (7.5)$$

Для выявления степени влияния фактора X и сопоставления ее с разбросом, вызванным случайными, неконтролируемыми причинами, проверяют однородность дисперсий S^2 (X) и S_B^2 по критерию Фишера. Если отношение $F_H = S^2(X) / S_B^2$ окажется меньше критического F_K, найденного для заданной доверительной вероятности P и числа степеней свободы $f_X = n - 1$ и $f_B = N - n$, то влияние фактора X несущественно, и все полученные результаты измерений принадлежат одной генеральной совокупности, распределенной нормально с параметрами σ^2 и $M(Y)$, точечные оценки которых равны соответственно S_0^2 и μ . Чтобы определить F_K по табл. 6.1, следует принять $n_1 = m_1 = f_X + 1$ и $n_2 = m_2 = f_в + 1$. При $F_H > F_K$ влияние фактора существенно. Считается, что в данном случае есть n нормально распределенных совокупностей, каждая из которых имеет одну и ту же дисперсию σ^2 и соответствующее математическое ожидание $\bar{y}_i$.

Пример 7.1

Требуется оценить качество пяти марок автомобильных шин. Критерием качества выбрана величина износа шин, эксплуатируемых в одинаковых условиях.

Решение

Марки шин ранжированы цифрами ряда 1...5. Результаты опытов приведены в матрице наблюдения (табл. 7.2).

Таблица 7.2

Матрица наблюдений

Номер уровня фактора марки шин	Уровень фактора	Значения величин износа в опытах, мм					
		1	2	3	4	5	6
1	X_1	0,72	0,60	0,65	0,32	0,80	0,52
2	X_2	0,15	0,62	0,22	0,40	0,25	0,30
3	X_3	0,45	0,30	0,50	0,58	0,48	0,32
4	X_4	1,20	0,92	0,72	0,80	1,00	0,80
5	X_5	0,58	0,90	0,70	1,00	0,48	0,60

По формулам (7.1) определяем: $\bar{y}_i$ = 0,6; 0,32; 0,44; 0,91; 0,71; S_i^2 = 0,028; 0,028; 0,012; 0,031; 0,04.

Однородность дисперсий проверяем при помощи критерия Кохрена (6.2):

$$G_H = S_{i\max} / \sum_{i=1}^{n} S_i^2 = 0{,}04/(0{,}028 + 0{,}028 + 0{,}012 + 0{,}031 + 0{,}04) = 0{,}291.$$

Согласно табл. 6.2 при m = 6, n = 5 и P = 0,95 G_K = 0,507.

Поскольку $G_H < G_K$, то разницу между дисперсиями можно считать незначимой. Далее определяем:

$$S_B^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} S_i^2 = 0{,}0278;\ \mu = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} \bar{y}_i = 0{,}596;\ S^2(x) = 0{,}313.$$

Наблюдаемое значение критерия Фишера F_H = 0,313/0,02278 = 11,25.

Число степеней свободы f_X = 5 – 1 = 4, f_B = 30 – 5 = 25. По табл. 6.1 при P = 0,95, $n_1 = m_1$ = 5 и $n_2 = m_2$ = 26 находим $F_K \approx$ 2,809. Поскольку $F_H > F_K$, то изменение величины износа при изменении марки шин следует считать значительным.

8. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с теоретическими положениями.
2. Получить задание на расчетную работу.
3. Разработать алгоритм решения поставленной задачи.
4. Составить, набрать и отладить программу на ПЭВМ по разработанному алгоритму.
5. Вывести результаты расчетов на печать.
6. Оформить ПЗ и сдать ее на проверку.

9. ТЕХНИКА БЕЗОПАСНОСТИ

1. При наборе и отладке программы на ПЭВМ необходимо соблюдать требования техники безопасности, распространенные на работы с электрическими приборами с напряжением до 220 В.
2. В случае обнаружения неисправности ПЭВМ необходимо сообщить об этом преподавателю.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сидняев, Н. И.* Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных: учеб. пособие для студентов и аспирантов вузов / Н. И. Сидняев. – М.: Юрайт, 2011. – 399 с.

2. *Малкин, В. С.* Техническая эксплуатация автомобилей: Теоретические и практические аспекты: учеб. пособие для вузов / В. С. Малкин. – 2-е изд., стер. – М.: Академия, 2009. – 287 с.

3. *Белолипецкий, А. А.* Экономико-математические методы: учебник для вузов по спец. “Экономика” / А. А. Белолипецкий, В. А. Горелик. – М.: Академия, 2010. – 362 с.

4. *Селиванов, М. Н.* Качество измерений: Метрологическая справочная книга / М. Н. Селиванов, А. Э. Фридман, Ж. Ф. Кудряшов. – Л.: Лениздат, 1987. – 295 с.

5. *Ящерицын, П. И.* Планирование эксперимента в машиностроении / П. И. Ящерицын, Е. И. Махоринский. – Минск: Вышэйш. шк., 1985. – 286 с.

Приложение

Задания на расчетную работу

1. Провести статистическую проверку гипотез о равенстве дисперсий и средних значений

Вариант	Обозначения массива	Исходные данные
1	X1(N) X2(N)	13; 12; 10; 11; 12; 9; 10; 11; 13; 12; 10; 12; 11. 10; 14; 11; 13; 12; 10; 12; 9; 10; 12; 13; 11; 10.
2	A(N) B(N)	80; 77; 79; 82; 80; 81; 78; 79; 80; 82; 80; 83. 79; 80; 83; 82; 79; 80; 82; 78; 80; 81; 79; 82.
3	X(N) B(N)	50; 51; 53; 48; 50; 49; 52; 53; 55; 47; 49; 48; 51; 52. 55; 57; 54; 52; 50; 51; 52; 53; 49; 54; 52; 49; 52; 50.
4	L(N) K(N)	11; 17; 13; 12; 14; 17; 18; 14; 17; 14; 13; 12; 15. 14; 18; 11; 12; 17; 15; 13; 12; 14; 15; 11; 17; 13.
5	X(2,N)	60; 61; 59; 62; 60; 58; 62; 61; 62; 60; 63; 62; 60; 61. 58; 59; 61; 63; 60; 61; 63; 60; 59; 60; 63; 62; 61; 62.
6	Y(2,N)	31; 30; 39; 32; 30; 38; 32; 31; 32; 30; 33; 32; 30. 28; 29; 31; 33; 30; 31; 33; 30; 29; 30; 33; 32; 31.
7	X1(N1) X2(N2)	50; 52; 53; 47; 48; 50; 49; 52; 55; 47; 49; 48; 51; 52. 55; 57; 54; 52; 50; 51; 52; 53; 49; 54; 52; 49; 52.
8	A(N1) B(N2)	80; 82; 83; 77; 78; 80; 79; 82; 85; 77; 79; 78; 81. 78; 82; 80; 81; 80; 79; 83; 82; 81; 84; 81; 82; 83; 80.
9	Y(N1) Y1(N2)	40; 42; 43; 37; 38; 40; 39; 42; 45; 37; 39; 44; 41; 42. 38; 39; 44; 42; 43; 40; 41; 39; 39; 42; 40; 45; 43;42;41.
10	L(N1) K(N2)	22; 23; 22; 28; 24; 25; 28; 26; 22; 24; 23; 24. 19; 21; 24; 20; 18; 22; 20; 21; 23; 22; 24; 22; 20.
11	C(N1) D(N2)	77; 73; 75; 74; 77; 72; 71; 73; 69; 72; 73; 70. 73; 76; 72; 71; 77; 72; 73; 72; 76; 71; 73; 69; 72.

Продолжение приложения

2. Провести дисперсионный анализ

Вариант	Обозначения массива	Исходные данные
1	2	3
12	X(4,M)	13; 12; 10; 11; 12; 9; 10; 11; 13; 12; 10; 12; 11. 10; 14; 11; 13; 12; 10; 12; 9; 10; 12; 13; 11; 10. 11; 15; 13; 12; 14; 17; 12; 14; 17; 14; 13; 12; 15. 14; 13; 11; 12; 17; 15; 13; 12; 14; 15; 11; 17; 13.
13	Y(4,M)	80; 77; 79; 82; 80; 81; 78; 79; 80; 82; 80; 83. 79; 80; 83; 82; 79; 80; 82; 78; 80; 81; 79; 82. 80; 82; 83; 77; 78; 80; 79; 82; 85; 77; 79; 78. 78; 82; 80; 81; 80; 79; 83; 82; 81; 84; 81; 82.
14	Z(4,M)	50; 51; 53; 48; 50; 49; 52; 53; 55; 47; 49; 48; 51; 52. 55; 57; 54; 52; 50; 51; 52; 53; 49; 54; 52; 49; 52; 50. 50; 52; 53; 47; 48; 50; 49; 52; 55; 47; 50; 53; 51; 49. 54; 56; 53; 52; 50; 53; 52; 50; 49; 54; 48; 49; 52; 53.
15	X1(4,M)	11; 17; 13; 12; 14; 17; 18; 14; 17; 14; 13; 12; 15. 14; 10; 12; 15; 11; 12; 14; 10; 13; 16; 13; 10; 12. 14; 18; 11; 12; 17; 15; 13; 12; 14; 15; 11; 17; 13. 12; 14; 18; 13; 11; 15; 10; 13; 15; 11; 12; 14; 15.
16	Y1(4,M)	60; 61; 59; 62; 60; 58; 62; 61; 62; 60; 63; 62; 60; 61. 58; 62; 60; 64; 62; 61; 64; 60; 59; 62; 64; 60; 62; 59. 58; 59; 61; 63; 60; 61; 63; 60; 59; 60; 63; 62; 61; 62. 62; 60; 58; 63; 59; 62; 59; 60; 63; 62; 60; 63; 61; 58.
17	Z1(4,M)	31; 30; 39; 32; 30; 38; 32; 31; 32; 30; 33; 32; 30. 28; 29; 31; 33; 30; 31; 33; 30; 29; 30; 33; 32; 31. 32; 33; 32; 38; 34; 35; 38; 36; 32; 34; 33; 34;35. 39; 31; 34; 30; 38; 32; 30; 31; 33; 32; 34; 32; 30.
18	A(4,M)	50; 52; 53; 47; 48; 50; 49; 52; 55; 47; 49; 48; 51; 52. 54; 52; 51; 49; 52; 52; 53; 49; 50; 52; 53; 51; 49; 52. 55; 57; 54; 52; 50; 51; 52; 53; 49; 54; 52; 49; 52; 53. 52; 53; 56; 52; 54; 50; 51; 54; 50; 56; 52; 53; 50; 51.
19	B(4,M)	80; 82; 83; 77; 78; 80; 79; 82; 85; 77; 79; 78; 81; 79. 78; 82; 80; 81; 80; 79; 83; 82; 81; 84; 81; 82; 83; 80. 77; 73; 75; 74; 77; 72; 71; 73; 69; 72; 73; 70; 74; 76. 73; 76; 72; 71; 77; 72; 73; 72; 76; 71; 73; 69; 72; 76.

Окончание приложения

1	2	3
20	C(4,M)	40; 42; 43; 37; 38; 40; 39; 42; 45; 37; 39; 44; 41; 42. 37; 40; 44; 42; 39; 42; 40; 44; 45; 39; 42; 41; 43; 40. 38; 39; 44; 42; 43; 40; 41; 39; 39; 42; 40; 45; 43; 42. 44; 40; 37; 42; 39; 42; 45; 41; 42; 40; 39; 41; 43; 44.
21	C1(4,M)	22; 23; 22; 28; 24; 25; 28; 26; 22; 24; 23; 24; 23. 27; 23; 25; 24; 27; 22; 21; 23; 29; 22; 23; 20; 24. 23; 26; 22; 21; 27; 22; 23; 22; 26; 21; 23; 29; 22. 19; 21; 24; 20; 18; 22; 20; 21; 23; 22; 24; 22; 20.
22	B1(4,M)	77; 73; 75; 74; 77; 72; 71; 73; 69; 72; 73; 70. 78; 79; 74; 72; 73; 70; 71; 79; 79; 72; 70; 75. 74; 70; 77; 72; 79; 72; 75; 71; 72; 70; 79; 71. 73; 76; 72; 71; 77; 72; 73; 72; 76; 71; 73; 69.
23	L(4,M)	92; 93; 92; 98; 94; 95; 98; 96; 92; 94; 93; 94; 93. 97; 93; 95; 94; 97; 92; 91; 93; 99; 92; 93; 90; 94. 93; 96; 92; 91; 97; 92; 93; 92; 96; 91; 93; 99; 92. 99; 91; 94; 90; 98; 92; 92; 91; 93; 92; 94; 92; 90.
24	L1(4,M)	67; 63; 65; 64; 67; 62; 61; 63; 69; 62; 63; 60. 68; 69; 64; 62; 63; 60; 61; 69; 69; 62; 60; 65. 64; 60; 67; 62; 69; 62; 65; 61; 62; 60; 69; 61. 63; 66; 62; 61; 67; 62; 63; 62; 66; 61; 63; 69.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЭВМ

Методические указания
к практическим занятиям

Автор-составитель

Гудилов Сергей Владимирович

Редактор *Л.В. Ванюшина*
Компьютерная верстка *И.В. Люля*

Изд. лиц. ЛР № 020815 от 21.09.98.
Подписано в печать 25.06.2012. Бумага офсетная. Формат 60×84 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,3. Уч.-изд. л. 1,4. Тираж 150 экз. Заказ №
Издательско-полиграфический центр Новгородского
государственного университета им. Ярослава Мудрого.
173003, Великий Новгород, ул. Б. Санкт-Петербургская, 41.
Отпечатано в ИПЦ НовГУ. 173003, Великий Новгород,
ул. Б. Санкт-Петербургская, 41.

24,1,2,23,22,3,4,21,20,5,6,19,18,7,8,17,16,9,10,15,14,11,12,13