

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО**

**ПРОВЕДЕНИЕ
РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА
И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ
ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
С ПОМОЩЬЮ ПЭВМ**

**ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2017**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО

**ПРОВЕДЕНИЕ
РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА
И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ
ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
С ПОМОЩЬЮ ПЭВМ**

*Методические указания
к практическим занятиям*

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2017

Рецензенты:

кандидат технических наук, доцент **А. Н. Чадин**
кандидат технических наук, доцент **И. И. Зубрицкас**

П78 **Проведение** регрессионного анализа и решение задач оптимизации функций одной и нескольких переменных с помощью ПЭВМ: метод. указания к практ. занятиям / авт.-сост. С. В. Гудилов; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2017. – 29 с.

Даются указания к практическим занятиям по курсу “Основы инженерных расчетов”. Изложены основные задачи и правила обработки экспериментальных данных с целью построения регрессионных моделей изучаемых процессов. Приводятся необходимые примеры определения коэффициентов регрессии для различных функциональных зависимостей. Рассмотрены вопросы нахождения экстремумов функций одной и нескольких переменных с помощью ПЭВМ. Приводятся примеры расчета.

Предназначено для студентов специальности 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов.

УДК 621.002: 658.512

© Новгородский государственный
университет, 2017

© С. В. Гудилов, составление, 2017

Практическое занятие 1

ПРОВЕДЕНИЕ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА С ПОМОЩЬЮ ПЭВМ

ВВЕДЕНИЕ

Для разработки рекомендаций по оптимизации организации и управления системами поддержания работоспособности автомобиля и возможности прогнозирования его состояния необходимо знать закономерности изменения технического состояния автомобилей (или его отдельных систем, агрегатов, механизмов) в процессе эксплуатации.

С этой целью проводят специальные исследования, позволяющие установить функциональную зависимость рассматриваемого параметра, определяющего работоспособность объекта от различных факторов. Эти функциональные зависимости принято называть математическими моделями, дающими возможность на основе данных об изменении регулируемых параметров прогнозировать техническое состояние автомобиля в целом или его отдельных систем.

Для определения основных функциональных зависимостей, описывающих основные закономерности применения технического состояния автомобиля от различных факторов, а также для оценки точности составляющих параметров этих зависимостей применяют регрессионный анализ. Рассматриваемая в данных методических указаниях методика проведения регрессионного анализа с использованием ПЭВМ позволяет повысить уровень определения технического состояния агрегатов автомобиля, автоматизировать получение и хранение информации о техническом состоянии автомобилей и их агрегатов, выдачу результатов прогнозирования удельных затрат на поддержание работоспособности автомобиля в заданных эксплуатационных условиях.

При изложении материала особое внимание уделено тому, чтобы дать студентам более точное представление о подготовке и постановке решения задач определения регрессионных моделей на ПЭВМ.

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Основная цель работы: научиться правилам обработки экспериментальных данных с целью построения регрессионных моделей.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Основная задача регрессионного анализа – установление вида и параметров зависимости математического ожидания отклика $M(Y)$ от уровней одного или нескольких факторов X , когда результаты эксперимента представлены в виде независимой выборки пар $X_1, Y_1; X_2, Y_2; \dots; X_n, Y_n$. Искомая функция называется моделью регрессионного анализа или регрессионной моделью Y на X , а ее параметры – коэффициентами регрессии.

Не существует стандартных, формализованных методов, позволяющих только на основании результатов эксперимента установить теоретическую регрессию – истинную функциональную зависимость, отражающую действительную связь между откликом и контролируемыми факторами, не искаженную влиянием погрешностей измерения и неконтролируемых факторов. Если нет теоретических соображений о виде регрессионной модели, то ее обычно представляют в виде

$$Y = \sum_{j=0}^d \beta_j f_j(\tilde{X}) + e, \quad (1)$$

где $\tilde{X} = [X_1, X_2, \dots, X_k]$ – вектор значений факторов; β_j – коэффициенты регрессии; $f_j(\tilde{X})$ – базисные функции; e – аддитивная погрешность, подчиняющаяся нормальному распределению с математическим ожиданием, равным нулю, и с постоянной дисперсией, не зависящей от уровней фактора.

Вид регрессионной модели определяется по результатам проведения эксперимента. После реализации предварительного эксперимента по графику в координатах X – Y (см. приложение) высказывается гипотеза о виде модели.

Неизвестные коэффициенты регрессии определяются методом наименьших квадратов – путем минимизации суммы квадратов откло-

нений измеренных значений отклика от получаемых с помощью регрессионной модели, т. е. путем минимизации функции:

$$S = \sum_{g=1}^n \left[Y_g - \sum_{j=0}^d \theta_j f_j(\tilde{X}_g) \right]^2, \quad (2)$$

где $\hat{\beta}_j$ – оценка коэффициента регрессии β_j ; n – число наблюдений (опытов).

Рассматривая φ_j как переменные величины, приравниваем к нулю частные производные:

$$\frac{dS}{db_i} = -z \sum_{g=1}^n \left[Y_g - \sum_{j=0}^d \beta_j f_j(\tilde{X}_g) \right] f_j(\tilde{X}_g) = 0. \quad (3)$$

После преобразования получаем систему линейных уравнений относительно искомых оценок \hat{v}_j :

[illegible]

где суммирование производится по всем n опытам:

$$f_i = f_i(\tilde{X}_g); \quad Y = Y_g.$$

Решение системы нормальных уравнений (4) можно проводить любым известным способом (метод Гаусса и т.д.). Для оценки доверительного интервала и значимости полученных методов наименьших квадратов оценок коэффициентов регрессии $\hat{\beta}_j$ необходимо определить дисперсию воспроизводимости и дисперсию оценок $\hat{\beta}_j$.

Дисперсию воспроизводимости определяют обычно постановкой дублирующих опытов по формуле

$$S_B^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{y}_i)^2, \quad (5)$$

где $\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i$.

Дисперсия оценок j -го коэффициента регрессии:

$$S^2(b_j) = S_B^2 C_{jj}, \quad (6)$$

где S_B^2 – оценка дисперсии воспроизводимости; C_{jj} – элемент матрицы Φ^{-1} , обратной информационной. Информационная матрица Φ составляется из коэффициентов системы нормальных уравнений (4).

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sum f_0^2 & \sum f_0 f_1 & \cdots & \sum f_0 f_d \\ \sum f_0 f_1 & \sum f_1^2 & \cdots & \sum f_1 f_d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum f_0 f_d & \sum f_1 f_d & \cdots & \sum f_d^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Для проверки значимости полученных коэффициентов регрессии вычисляются наблюдаемые значения критерия Стьюдента:

$$t_{nj} = |b_j| / S(b_j). \quad (8)$$

Эти значения критерия Стьюдента сравниваются с критическим t_κ (табл. 1) в соответствии с числом степеней свободы $f = m - 1$, если опыты по определению остаточной дисперсии дублировались в одной из точек факторного пространства m раз, или $f = n(m - 1)$, если в каждой из n точек факторного пространства дублирование проводилось одинаковое число раз. Если при выбранной доверительной вероятности $P t_{nj} \geq t_\kappa$, то коэффициент b_j считается статистически значимым.

Таблица 1

Критические значения критерия Стьюдента ($P = 0,95$)

m	t_κ	m	t_κ	m	t_κ	m	t_κ
3	4,303	9	2,306	15	2,145	25	2,064
4	3,183	10	2,262	16	2,132	30	2,045
5	2,776	11	2,228	18	2,110	40	2,021
6	2,571	12	2,201	20	2,093	60	2,000
7	2,447	13	2,179	22	2,080	120	1,980
8	2,365	14	2,160	24	2,069		1,960

Так как коэффициенты регрессии бывают связаны между собой, то после отбрасывания незначимого коэффициента b_j необходимо провес-

ти коррекцию оценок остальных коэффициентов и их дисперсий в соответствии с формулами

$$b_j^* = b_j - \frac{C_{jg}}{C_{gg}} b_g; C_{jk}^* = C_{jk} - \frac{C_{gj} C_{gk}}{C_{gg}}; S^2(b_j^*) = S_B^2 C_{jj}^* \quad (9)$$

Доверительные интервалы для значимых коэффициентов регрессии определяются неравенством

$$b_j^* - t_k S(b_j^*) < \beta_j < b_j^* + t_k S(b_j^*). \quad (10)$$

Проверка адекватности полученной регрессионной модели и функции отклика позволяет оценить правильность выбора вида модели. Для этого сопоставляется дисперсия воспроизводимости, полученная путем реализации дублирующих опытов, и остаточная дисперсия:

$$S_0^2 = \frac{1}{n - (d + 1)} \sum_{g=1}^n (Y_g - \hat{Y}_g)^2, \quad (11)$$

где \hat{Y}_g – полученное по уравнению регрессии значение отклика в g -м опыте; Y_g – измеренное значение отклика в том же опыте.

Сопоставление производится путем проверки гипотезы о равенстве дисперсий по критерию Фишера. Наблюдаемое значение критерия Фишера $F_n = S_0^2 / S_g^2$ сравнивается с табличным F_k (табл. 2), которое определяется в соответствии с выбранным значением доверительной вероятности и числами степеней свободы $f_1 = n - d$ и $f_2 = m - 1$, где d – число параметров модели, m – число дублирующих опытов при определении S_g^2 . Условием адекватности модели и функции отклика является $F_n < F_k$.

Таблица 2

Критические значения критерия Фишера (P = 0,95)

m_2	m_1								
	4	6	8	10	15	20	30	40	60
4	9,28	9,10	8,89	8,81	8,70	8,86	8,62	8,59	8,57
6	5,41	5,05	4,88	4,77	4,62	4,56	4,50	4,46	4,43
8	4,35	3,87	3,79	3,64	3,51	3,44	3,38	3,34	3,32
10	3,86	3,48	3,29	3,18	3,01	2,94	2,86	2,83	2,79

Продолжение табл. 2

15	3,34	2,85	2,76	2,65	2,46	2,39	2,31	2,27	2,22
20	3,13	2,74	2,54	2,42	2,23	2,16	2,07	2,03	1,98
30	2,92	2,53	2,33	2,21	2,01	1,93	1,84	1,79	1,74
40	2,84	2,45	2,25	2,12	1,92	1,84	1,74	1,69	1,64
60	2,76	2,37	2,17	2,04	1,84	1,75	1,65	1,59	1,53

Пример. Определить коэффициенты регрессионной модели, отражающей зависимость радикальной силы $F_y(H)$ от поперечной подачи S (мм/дв. ход).

В результате реализации эксперимента получены следующие данные:

$$S \cdot 10^2 = 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5; 7; 7,5; 8; 8,5; 9; 9,5.$$

$$F_y = 50; 60; 67; 75; 85; 86; 93; 95; 100; 98; 104; 103; 106; 107; 108.$$

При каждом значении S проводился один опыт. Пять дублирующих опытов для оценки дисперсии воспроизводимости проводились при $S = 0,05$ мм/дв. ход. Получено, что $S_B^2 = 0,032$.

Решение. По виду кривой на рисунке предполагаем, что регрессионная модель имеет вид (см. приложение).

$$Y = \epsilon_0 + \epsilon_1 X + \epsilon_2 X^2,$$

где $Y = F_y \cdot 10^{-1}$; $x = S \cdot 10^2$.

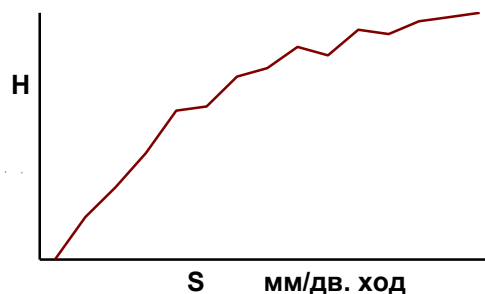


Рис. 1. Вид регрессионной модели

Базисные функции в данном случае имеют вид

$$f_0 = 1; f_1 = X; f_2 = X^2.$$

Тогда согласно (4) можем записать систему нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} b_0 n + b_1 \sum x_i + b_2 \sum x_i^2 &= \sum Y_i, \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 + b_2 \sum x_i^3 &= \sum (YX)_i, \\ b_0 \sum x_i^2 + b_1 \sum x_i^3 + b_2 \sum x_i^4 &= \sum (YX^2)_i. \end{aligned} \right\}$$

После вычисления сумм получим

$$\left. \begin{aligned} 15b_0 + 90b_1 + 610b_2 &= 133,7; \\ 90b_0 + 610b_1 + 4500b_2 &= 856,35; \\ 610b_0 + 4500b_1 + 35144b_2 &= 6051,925. \end{aligned} \right\}$$

Решение системы дает: $b_0 = 0,0177$; $b_1 = 2,4028$; $b_2 = -0,1358$.

Информационная матрица в данном случае имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} 15 & 90 & 610 \\ 90 & 610 & 4500 \\ 610 & 4500 & 35144,5 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица Φ^{-1} :

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 4,389 & 1,544 & 0,122 \\ 1,544 & 0,573 & 0,047 \\ 0,122 & 0,047 & 0,004 \end{pmatrix}.$$

Согласно (6) получаем:

$$\begin{aligned} S^2(b_0) &= 0,032 \cdot 4,389 = 0,14; & S(b_0) &= 0,375; \\ S^2(b_1) &= 0,032 \cdot 0,573 = 0,018; & S(b_1) &= 0,135; \\ S^2(b_2) &= 0,032 \cdot 0,0039 = 0,000125, & S(b_2) &= 0,0111. \end{aligned}$$

Согласно (8) получаем:

$$\begin{aligned} t_{n0} &= 0,01175 / 0,375 = 0,047; & t_{n1} &= 2,4029 / 0,135 = 17,7; \\ t_{n2} &= 0,1358 / 0,0111 = 12,19. \end{aligned}$$

Для $P = 0,95$ и $m = 5$ (табл. 1) находим $t_k = 2,776$. Поскольку $t_{n0} < t_k$, то коэффициент регрессии b_0 незначим и можно считать $\beta_0 = 0$. Остальные коэффициенты являются значимыми. По формулам (9) получаем скорректированные значения коэффициентов регрессии:

$$\beta_1^* = 2,4029 - \frac{1,544}{4,389} \cdot 0,0175 = 2,397;$$

$$\beta_2^* = -0,1358 - \frac{0,122}{4,389} \cdot 0,0175 = -0,1363;$$

$$C_{11}^* = C_{11} \frac{C_{10}^2}{C_{00}} = 0,573 - \frac{1,544^2}{4,389} = 0,0298;$$

$$C_{22}^* = 0,0039 - \frac{0,122^2}{4,389} = 0,0005;$$

$$S^2(\epsilon_1^*) = 0,032 \cdot 0,0298 = 0,00095298; \quad S(\epsilon_1^*) = 0,031;$$

$$S^2(\epsilon_2^*) = 0,032 \cdot 0,0005 = 1,6 \cdot 10^{-5}; \quad S(\epsilon_2^*) = 0,004.$$

Согласно (10), $2,311 < \beta_1 < 2,483$; $-0,1474 < \beta_2 < -0,1252$. Остаточная дисперсия, определяемая по (11), составляет $S_0^2 = 0,051$. Наблюдаемое значение критерия Фишера $F_n = 1,589$. Табличное значение критерия определялось при $f_1 = 15 - 2 = 13$; $f_2 = 5 - 1 = 4$. В нашем случае $m_1 = 14$ и $m_2 = 5$. Критическое значение $F_k = 6,68$ определяется из табл. 2 методом интерполяции.

Поскольку $F_n < F_k$, то полученная модель $F_y = 2,397 \cdot S - 0,1363 \cdot S^2$ адекватно описывает зависимость радиальной составляющей силы от поперечной подачи.

Программа позволит проводить регрессионный анализ для следующих 16-ти зависимостей (табл. 3). При этом сведение нелинейной регрессии к линейной выполняется с помощью линеаризующих преобразований в ходе ввода X_i и Y_i и при выводе ϵ_0 и ϵ_1 (табл. 3).

Таблица 3

Преобразования, сводящие нелинейную регрессию к линейной

№	Вид зависимости $Y(X)$	X'	Y'	ϵ_0	ϵ_1
1	2	3	4	5	6
1	$\epsilon_0 + \epsilon_1 X$	X	Y	ϵ_0'	ϵ_1'
2	$1 / (\epsilon_0 + \epsilon_1 X)$	X	$1/Y$	ϵ_0'	ϵ_1'
3	$\epsilon_0 + \epsilon_1 / X$	$1/X$	Y	ϵ_0'	ϵ_1'
4	$x / (\epsilon_0 + \epsilon_1 X)$	X	x/Y	ϵ_0'	ϵ_1'

Продолжение табл. 3

1	2	3	4	5	6
5	$\epsilon_0 B_1^X$	X	$\lg Y$	$10\epsilon'_0$	$10\epsilon'_1$
6	$\epsilon_0 e^{(1x)}$	X	$\ln X$	$\epsilon\epsilon'_0$	ϵ'_1
7	$\epsilon_0 10^{(\epsilon 1x)}$	X	$\lg Y$	$10\epsilon'_0$	ϵ'_1
8	$1/(\epsilon_0 + \epsilon_1 e^{-x})$	e^{-x}	$1/Y$	ϵ'_0	ϵ'_1
9	$\epsilon_0 X^{(\epsilon 1x)}$	$\lg X$	$\lg Y$	$10\epsilon'_0$	ϵ'_1
10	$\epsilon_0 + \epsilon_1 \lg X$	$\lg X$	Y	ϵ'_0	ϵ'_0/ϵ'_1
11	$\epsilon_0 + \epsilon_1 \ln X$	$\ln X$	Y	ϵ'_0	ϵ'_0/ϵ'_1
12	$\epsilon_0/(\epsilon_1 + X)$	X	$1/Y$	$1/\epsilon'_0$	ϵ'_1
13	$\epsilon_0 X/(\epsilon_1 + X)$	$1/X$	$1/Y$	$1/\epsilon'_0$	ϵ'_1
14	$\epsilon_0 e^{(\epsilon 1/x)}$	$1/X$	$\ln X$	$\epsilon\epsilon'_0$	ϵ'_1
15	$\epsilon_0 10^{(\epsilon 1/x)}$	$1/X$	$\lg X$	$10\epsilon'_0$	ϵ'_1
16	$\epsilon_0 + \epsilon_1 X^n$	X^n	Y	ϵ'_0	ϵ'_1

Порядок работы с программой следующий:

1. Вводятся значения X_i , Y_i и c . Постоянная c задается равной 1, если ввод X_i и Y_i будет продолжен. При вводе последней пары X_i и Y_i задается $c = 0$.

2. Регрессия с заданной зависимостью $Y(X)$ проводится после указания кода k в виде номера соответствующей зависимости. При задании $k = 0$ на дисплей выводится перечень кодов и формул для $Y(X)$. Результатами расчетов являются параметры A и B ($A = \epsilon_0$), ($B = \epsilon_1$), а также коэффициент парной корреляции R .

3. После проведения расчетов A и B задается значение X и код ($c = 1$, если будут вычисляться значения $Y(X)$ по заданным X , и $c = 0$, если – нет). В последнем случае вычисления можно начать с п. 2 (т.е. рассчитать другой вид зависимости).

Таким образом, программы позволяют определять с помощью ПЭВМ большинство используемых в инженерных расчетах регрессионных моделей.

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с теоретическими положениями (разд. 2).
2. Ознакомиться с работой программ на контрольных примерах.
3. Получить у преподавателя индивидуальное задание.
4. В соответствии с заданием, используя приложение и внося необходимые изменения в программу, определить коэффициенты регрессионной модели.
5. Разработать программу проверки адекватности полученной регрессионной модели.

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Текст исходного задания.
2. Полученные коэффициенты и вид регрессионной модели.
3. Распечатка разработанной программы проверки адекватности регрессионной модели.

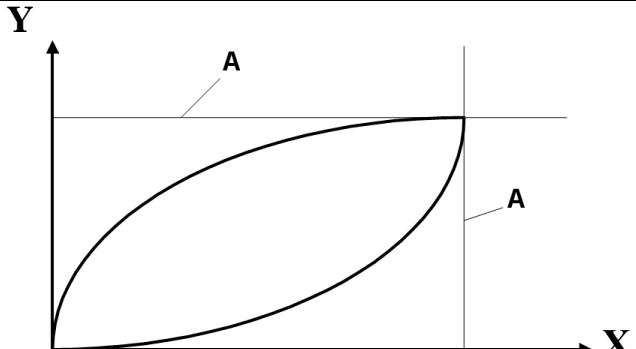
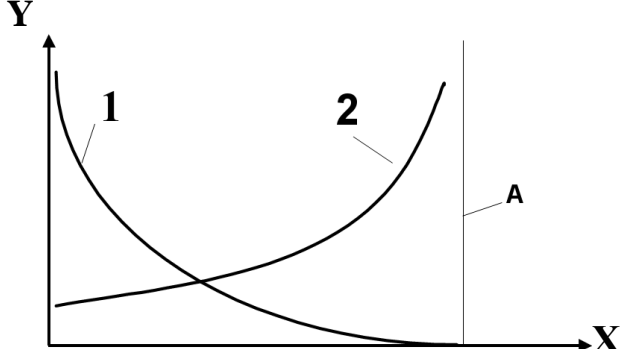
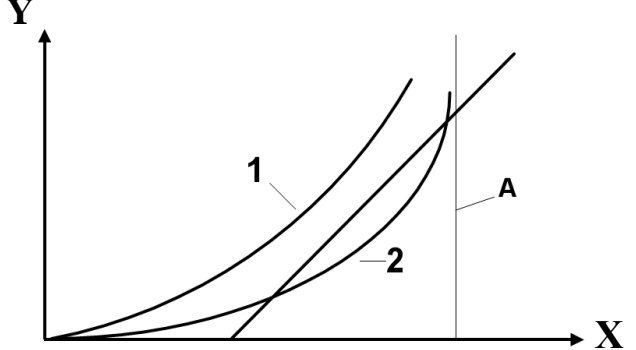
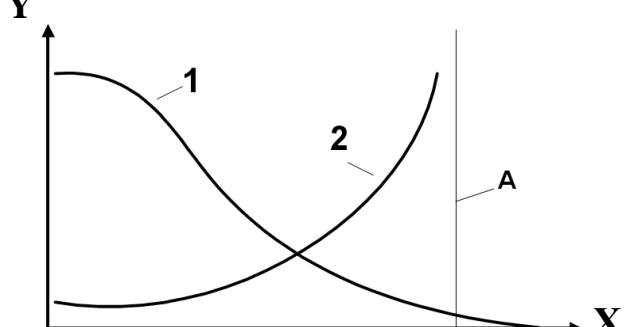
5. ТЕХНИКА БЕЗОПАСНОСТИ

1. При выполнении лабораторной работы необходимо соблюдать требования техники безопасности, распространенные при работе с электрическими приборами с напряжением до 220 В.
2. В случае обнаружения неисправности ПЭВМ **необходимо сообщить об этом преподавателю.**

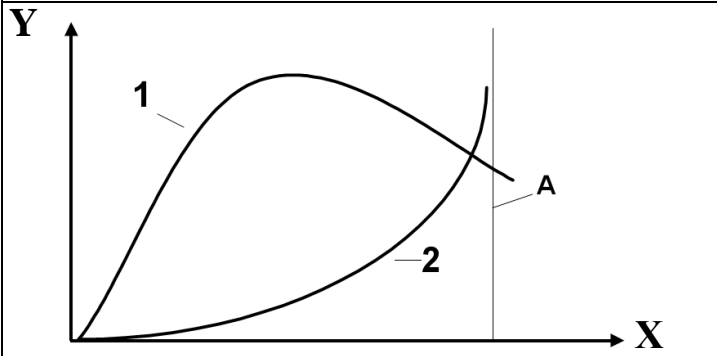
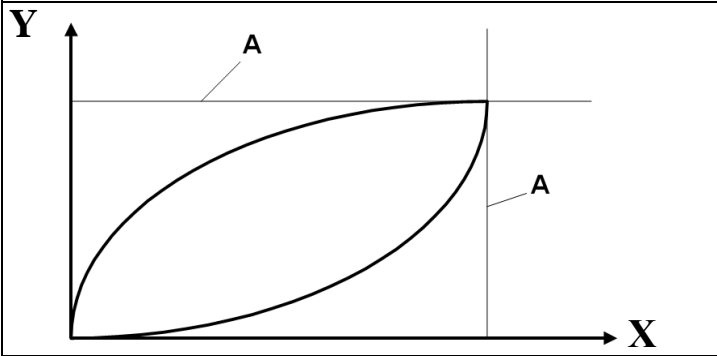
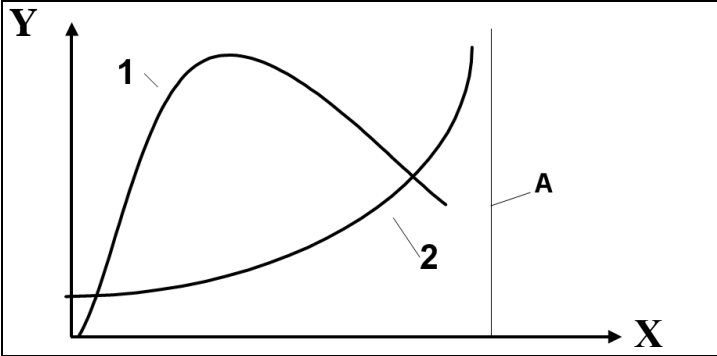
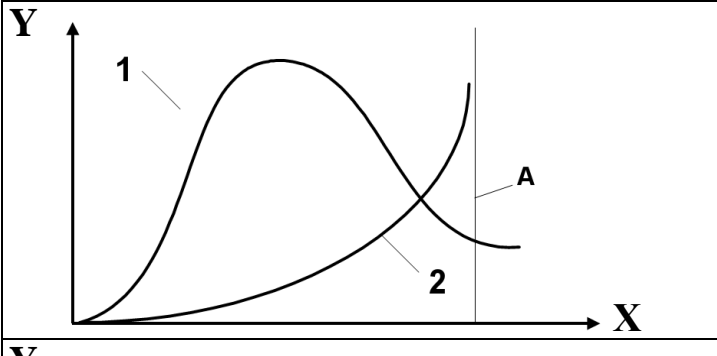
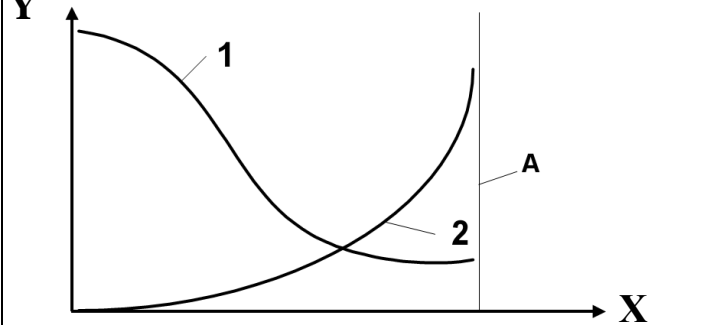
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ящерицын, Г.И.* Планирование эксперимента в машиностроении / Г.И. Ящерицын, Е.И. Махаринский. – Минск: Вышэйш. шк., 1985. – 286 с.
2. *Дьяконов, В.П.* Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ПЭВМ / В.П. Дьяконов. – М.: Наука, 1987. – 240 с.

Дробно-рациональные модели с двумя параметрами

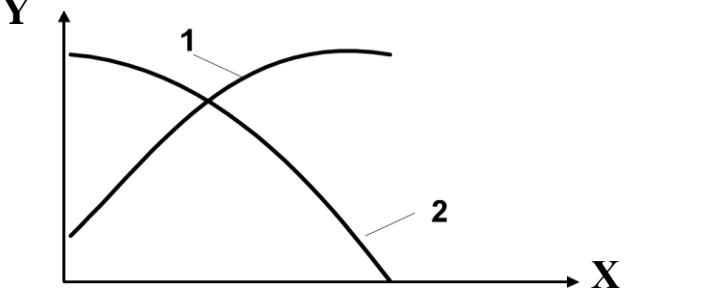
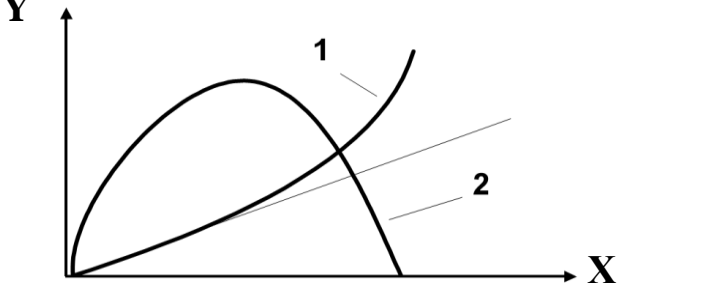
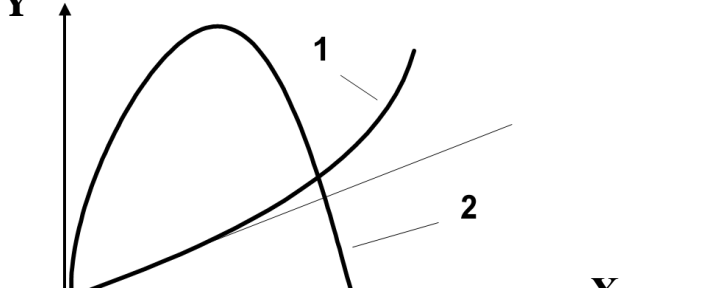
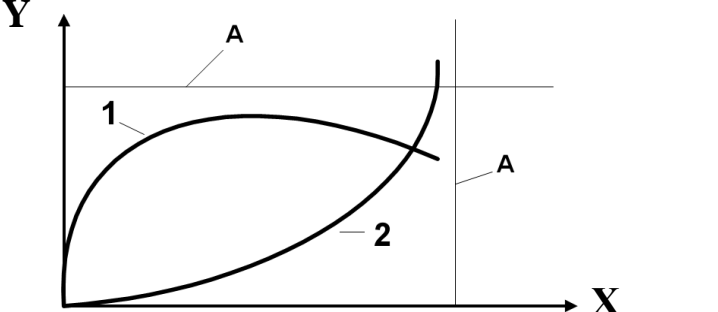
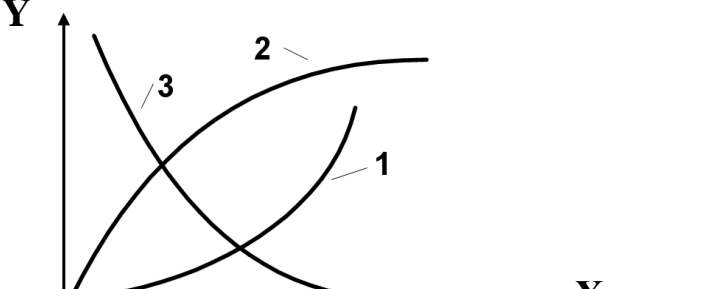
Графики модели	Вид модели и спрямляющая подстановка
<p style="text-align: center;">1</p> 	<p style="text-align: center;">2</p> $Y = \frac{x}{\vartheta_0 + \vartheta_1 X};$ $Z = X/Y; \quad U = X;$ <p>1 – $\vartheta_0 > 0; \quad \vartheta_1 > 0;$ 2 – $\vartheta_0 > 0; \quad \vartheta_1 < 0.$</p>
	$Y = \frac{1}{\vartheta_0 + \vartheta_1 X};$ $Z = 1/Y; \quad U = X;$ <p>1 – $\vartheta_0 > 0; \quad \vartheta_1 > 0;$ 2 – $\vartheta_0 > 0; \quad \vartheta_1 < 0.$</p>
	$Y = \frac{X^2}{\vartheta_0 + \vartheta_1 X};$ $Z = X^2/Y; \quad U = X;$ <p>1 – $\vartheta_0 > 0; \quad \vartheta_1 > 0;$ 2 – $\vartheta_0 > 0; \quad \vartheta_1 < 0.$</p>
	$Y = \frac{1}{\vartheta_0 + \vartheta_1 X^2};$ $Z = 1/Y; \quad U = X^2;$ <p>1 – $\vartheta_0 > 0; \quad \vartheta_1 > 0;$ 2 – $\vartheta_0 > 0; \quad \vartheta_1 < 0.$</p>

Продолжение приложения

1	2
	$Y = \frac{X}{\epsilon_0 + \epsilon_1 X^2};$ $Z = X/Y; U = X^2;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \quad \epsilon_1 > 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \quad \epsilon_1 < 0.$</p>
	$Y = \frac{X^2}{\epsilon_0 + \epsilon_1 X^2};$ $Z = X^2/Y; U = X^2;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \quad \epsilon_1 > 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \quad \epsilon_1 < 0.$</p>
	$Y = \frac{X^2}{\epsilon_0 + \epsilon_1 X^3};$ $Z = X^2/Y; U = X^3;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \quad \epsilon_1 > 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \quad \epsilon_1 < 0.$</p>
	$Y = \frac{X}{\epsilon_0 + \epsilon_1 X^3};$ $Z = X/Y; U = X^3;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \quad \epsilon_1 > 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \quad \epsilon_1 < 0.$</p>
	$Y = \frac{1}{\epsilon_0 + \epsilon_1 X^3};$ $Z = 1/Y; U = X^3;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \quad \epsilon_1 > 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \quad \epsilon_1 < 0.$</p>

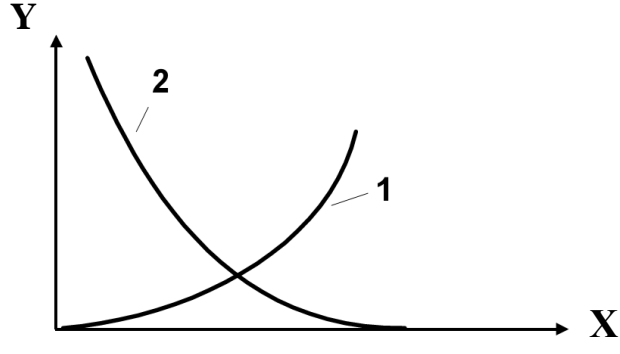
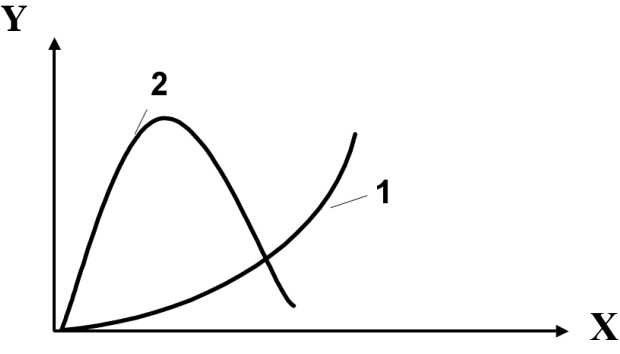
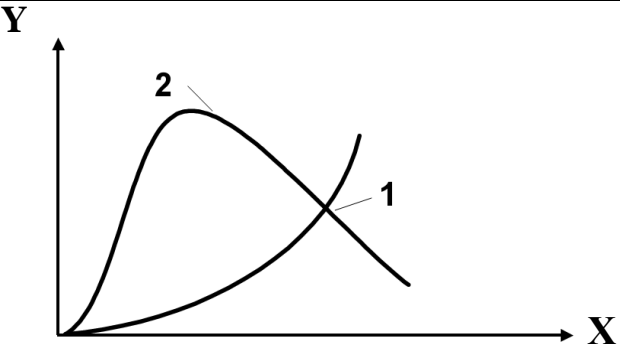
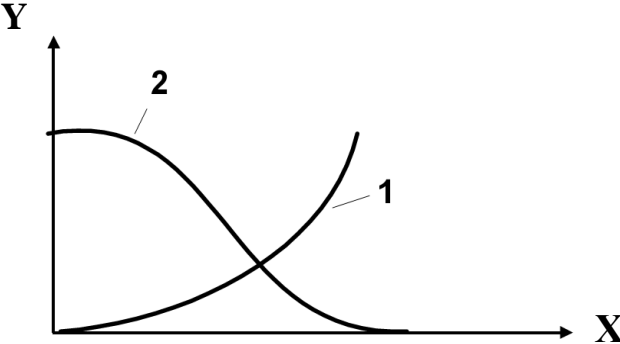
Продолжение прил.

Иррациональные модели с двумя параметрами

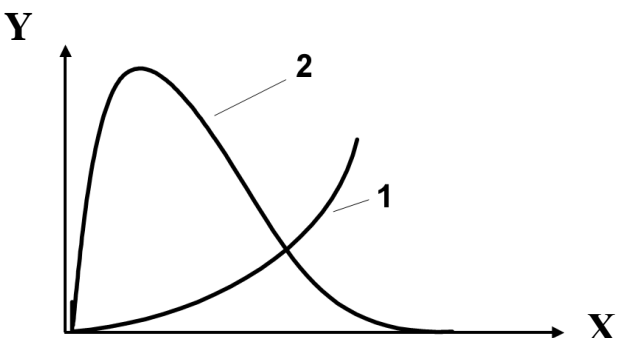
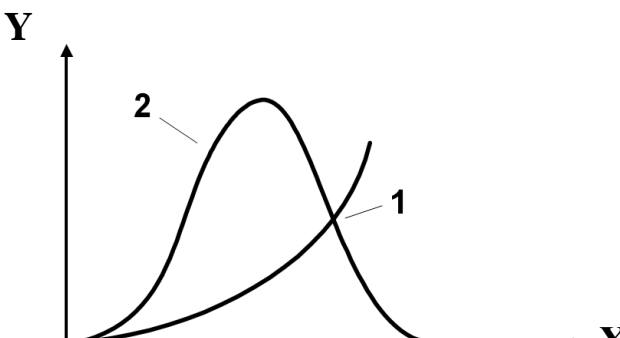
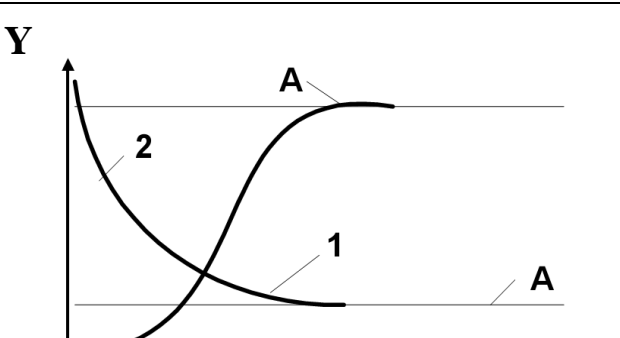
Графики модели	Вид модели и спрямляющая подстановка
	$Y = \sqrt{\epsilon_0 + \epsilon_1 X};$ $Z = Y^2; U = X;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 > 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 < 0.$</p>
	$Y = X\sqrt{B_0 + B_1 X^2};$ $Z = (Y/X)^2; U = X^2;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 > 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 < 0.$</p>
	$Y = X\sqrt{B_0 + B_1 X};$ $Z = (Y/X)^2; U = X;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 > 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 < 0.$</p>
	$Y = \sqrt{\frac{X}{B_0 + B_1 X}};$ $Z = X/Y^2; U = X;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 > 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 < 0.$</p>
	$Y = B_0 X^{B_1};$ $Z = \ln Y; U = \ln X; \epsilon_0 > 0;$ <p>1 – $\epsilon_1 > 1;$ 2 – $0 < \epsilon_1 < 1;$ 3 – $\epsilon_1 < 0.$</p>

Продолжение прил.

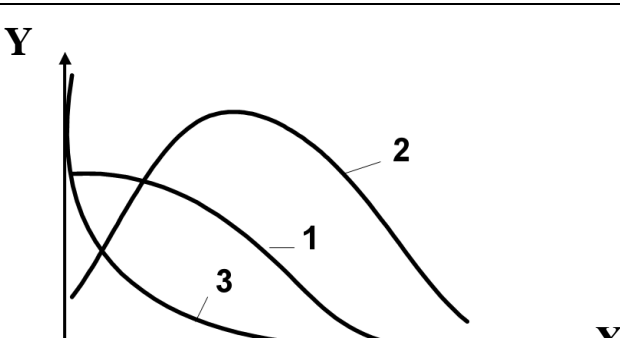
Показательные модели с двумя параметрами

Графики модели	Вид модели и спрямляющая подстановка
1	2
	$Y = b_0 e^{b_1 X};$ $Z = \ln Y; \quad U = X; \quad b_0 > 0;$ <p>1 – $b_1 > 0$; 2 – $b_1 < 0$.</p>
	$Y = b_0 X e^{b_1 X};$ $Z = \ln (Y / X); \quad U = X; \quad b_0 > 0;$ <p>1 – $b_1 > 0$; 2 – $b_1 < 0$.</p>
	$Y = b_0 X^2 e^{b_1 X};$ $Z = \ln (Y / X^2); \quad U = X; \quad b_0 > 0;$ <p>1 – $b_1 > 0$; 2 – $b_2 < 0$.</p>
	$Y = b_0 e^{b_1 X^2};$ $Z = \ln Y; \quad U = X^2; \quad b_0 > 0;$ <p>1 – $b_1 > 0$; 2 – $b_1 < 0$.</p>

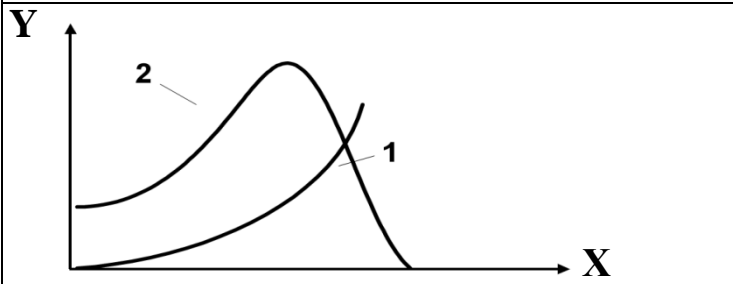
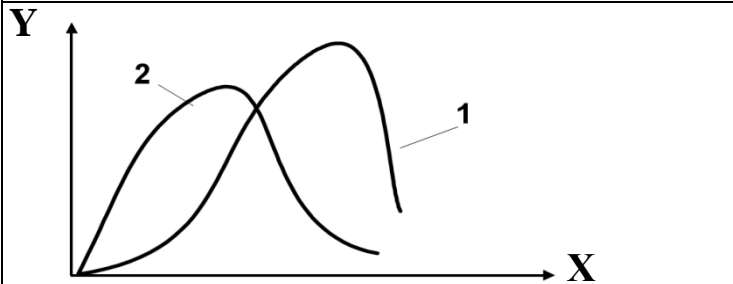
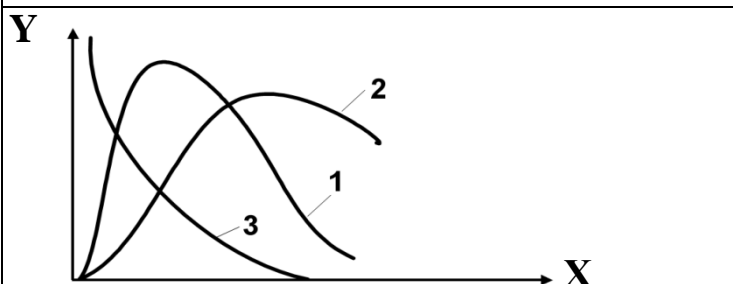
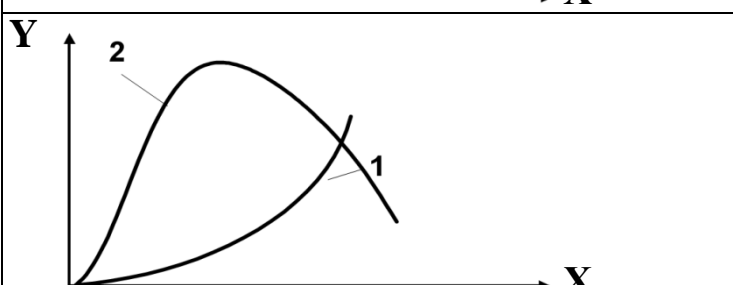
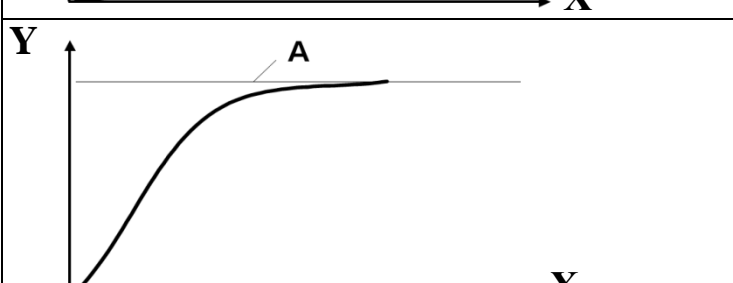
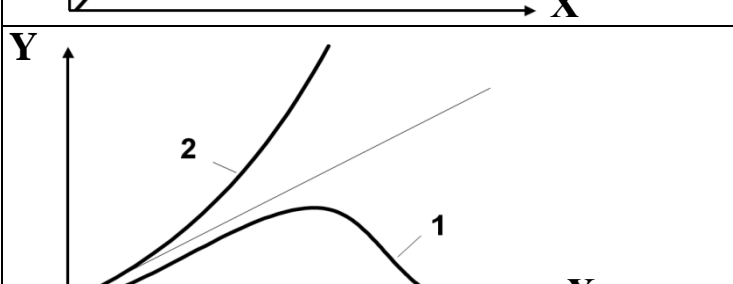
Продолжение прил.

1	2
	$Y = b_0 X e^{b_1 X^2};$ $Z = \ln(Y/X); U = X^2; b_0 > 0;$ <p>1 – $b_1 > 0;$ 2 – $b_1 < 0.$</p>
	$Y = b_0 X^2 e^{b_1 X^2};$ $Z = \ln(Y/X^2); U = X^2; b_0 > 0;$ <p>1 – $b_1 > 0;$ 2 – $b_1 < 0.$</p>
	$Y = b_0 e^{b_1/X};$ $Z = \ln Y; U = 1/X; b_0 > 0;$ <p>1 – $b_1 > 0;$ 2 – $b_1 < 0.$</p>

Комбинированные модели с двумя параметрами

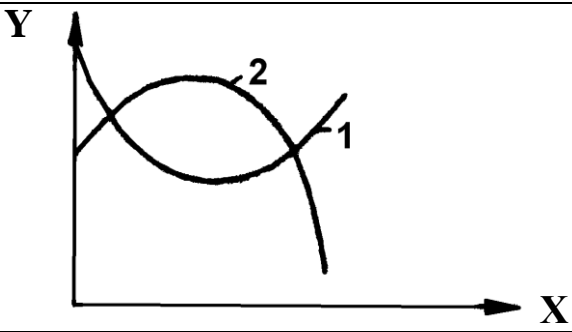
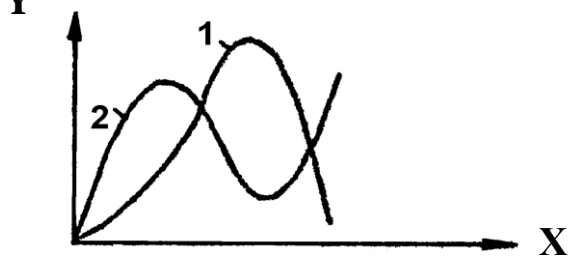
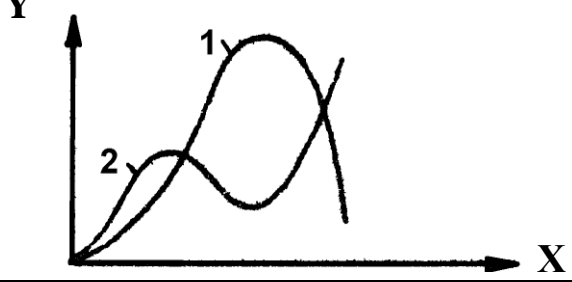
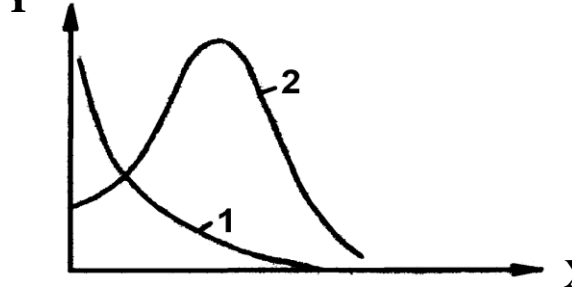
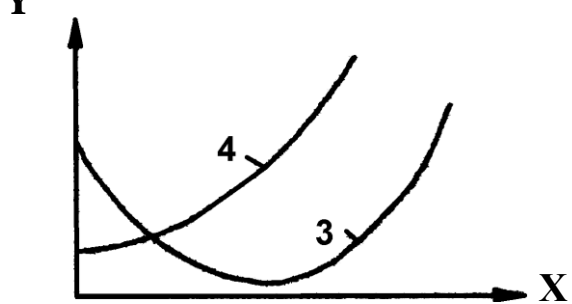
Графики модели	Вид модели и спрямляющая подстановка
1	2
	$Y = (b_0 + b_1 X) e^{-X};$ $Z = Y e^X; U = X; b_0 > 0;$ <p>1 – $b_0 > b_1 > 0;$ 2 – $b_0 < b_1 > 0;$ 3 – $b_1 < 0.$</p>

Продолжение прил.

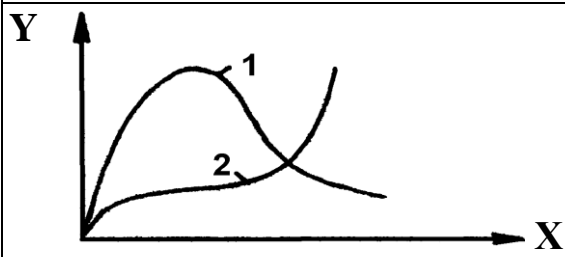
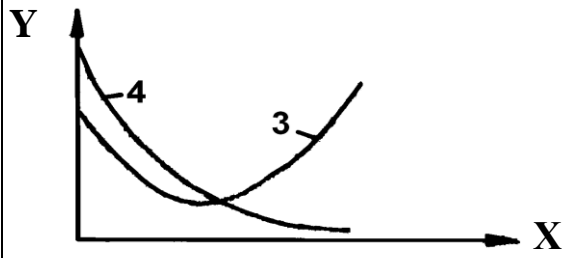
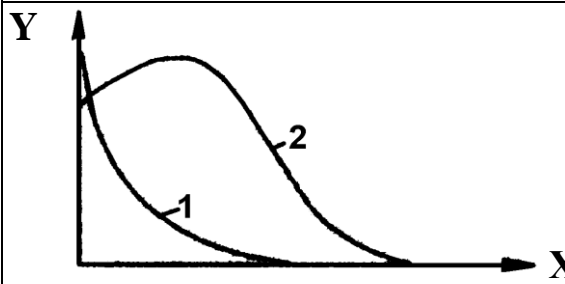
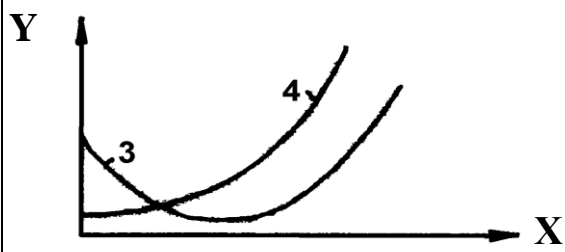
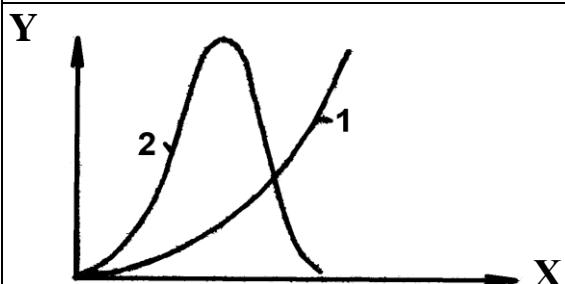
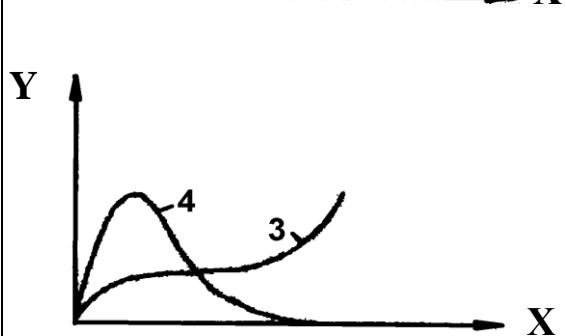
1	2
	$Y = (\epsilon_0 + \epsilon_1 X) e^X;$ $Z = Y e^{-X}; U = X; \epsilon_0 > 0;$ <p>1 – $\epsilon_1 > 0;$ 2 – $\epsilon_1 < 0.$</p>
	$Y = B_0 X^{B_1} e^{-X};$ $Z = X + \ln Y; U = \ln X; \epsilon_0 > 0; 1 \leq B_1$ <p>– $\epsilon_1 > 1;$ 2 – $0 < \epsilon_1 < 1.$</p>
	$Y = B_0 X^{1-B_1} e^{-B_1 X};$ $Z = \ln(Y/X);$ $U = \ln X - X; \epsilon_0 > 0;$ <p>1 – $0 < \epsilon_1 < 1;$ 2 – $\epsilon_1 > 1.$</p>
	$Y = (\epsilon_0 + \epsilon_1 X) \ln(1 + X);$ $Z = Y / \ln(1 + X); U = X;$ $\epsilon_0 > 0;$ <p>1 – $\epsilon_1 > 0;$ 2 – $\epsilon_1 < 0.$</p>
	$Y = B_0 (1 - e^{-B_1 X});$ $Z_i = \ln(Y_{2i} / Y_i - 1); U_i = X_i;$ $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 > 0.$
	$Y = \frac{X}{1 + B_0 X^{B_1}};$ $Z = \ln(X/Y - 1); U = \ln X;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 > 1;$ 2 – $\epsilon_0 < 0; \epsilon_1 > 0.$</p>

Продолжение прил.

Модели с тремя параметрами

Графики модели	Вид модели и спрямляющая под- становка
1	2
	$Y = \epsilon_0 + \epsilon_1 X + \epsilon_2 X^2;$ $Z = (Y - Y_0) / (X - X_0); U = X;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 < 0; \epsilon_2 > 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 > 0; \epsilon_2 < 0.$</p>
	$Y = X(\epsilon_0 + \epsilon_1 X^2 + \epsilon_2 X^4);$ $Z = \frac{Y/X - Y_0/X_0}{X^2 - X_0^2}; U = X^2;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 > 0; \epsilon_2 < 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 < 0; \epsilon_2 > 0.$</p>
	$Y = X^3(\epsilon_0 + \epsilon_1 X + \epsilon_2 X^2);$ $Z = \frac{Y/X^3 - Y_0/X_0^3}{X - X_0}; U = X;$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 > 0; \epsilon_2 < 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 < 0; \epsilon_2 > 0.$</p>
	$Y = \frac{1}{B_0 + B_1 X + B_1 X^2};$ $Z = \frac{1/Y - 1/Y_0}{X - X_0}; U = X;$
	<p>1 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 > 0; \epsilon_2 > 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 < 0; \epsilon_2 > 0;$ 3 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 > 0; \epsilon_2 < 0;$ 4 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 < 0; \epsilon_2 < 0.$</p>

Окончание прил.

1	2
 	$Y = \frac{X}{B_0 + B_1 X + B_2 X^2};$ $Z = \frac{X/Y - X_0/Y_0}{X - X_0}; U = X.$ <p>1 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 < 0; \epsilon_2 > 0;$ 2 – $\epsilon_0 > 0; \epsilon_1 > 0; \epsilon_2 > 0;$ 3 – $\epsilon_0 < 0; \epsilon_1 > 0; \epsilon_2 < 0;$ 4 – $\epsilon_0 < 0; \epsilon_1 > 0; \epsilon_2 > 0.$</p>
 	$Y = B_0 e^{(B_1 + B_2 X) X};$ $Z = \frac{\ln Y - \ln Y_0}{X - X_0}; U = X; \epsilon_0 > 0;$ <p>1 – $\epsilon_1 < 0; \epsilon_2 < 0;$ 2 – $\epsilon_1 > 0; \epsilon_2 < 0;$ 3 – $\epsilon_1 < 0; \epsilon_2 > 0;$ 4 – $\epsilon_1 > 0; \epsilon_2 > 0.$</p>
 	$Y = B_0 X e^{(B_1 + B_2 X) X};$ $Z = \frac{\ln(Y/X) - \ln(Y_0/X_0)}{X - X_0};$ $U = X; \epsilon_0 > 0;$ <p>1 – $\epsilon_1 > 0; \epsilon_2 > 0;$ 2 – $\epsilon_1 > 0; \epsilon_2 < 0;$ 3 – $\epsilon_1 < 0; \epsilon_2 > 0;$ 4 – $\epsilon_1 < 0; \epsilon_2 < 0.$</p>

Практическое занятие 2

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ПЭВМ

1. МЕТОДЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Постановка задачи

В задачах экспериментальной оптимизации часто необходимо определить оптимальную точку факторного пространства при помощи предварительно построенной математической (регрессионной) модели процесса, т. е. необходимо найти экстремум (или экстремумы) некоторой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Такая функция описывает $(n + 1)$ – мерную поверхность. Соответственно – функция $F(x)$ одного параметра $x_1 = x$ описывает некоторую кривую на плоскости (рис. 1). Поиск экстремумов функций одной переменной является самостоятельной и часто встречаемой задачей. Кроме того, к нему сводится гораздо более сложная задача поиска экстремумов функций множества переменных.

В общем случае функция $F(x)$ может иметь несколько (максимумов и минимумов). Из них главный (т.е. оптимальное решение для исследуемого факторного пространства) называется глобальным.

Задача поиска экстремумов сводится к их локализации и уточнению значений x и $F(x)$ в точке экстремума. В дальнейшем для функций одной переменной под экстремумом будем подразумевать максимум $F(x)$. Поскольку максимуму функции $F(x)$ соответствует минимум функции $-F(x)$, то, сменив знак у $F(x)$, приведенными программами поиска максимума можно пользоваться и для поиска минимума функций. Будем также полагать, что на изменения переменной x (если это особо не оговорено) накладываются ограничения в виде неравенств $a \leq x \leq b$, где a и b – границы интервала поиска. В пределах отрезка $[a, b]$ функцию считаем унимодальной, т. е. содержащей максимум (рис. 2).

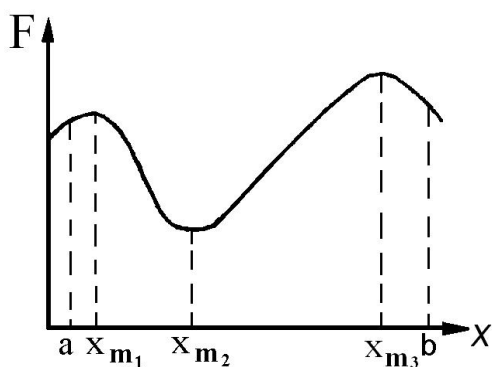


Рис. 1

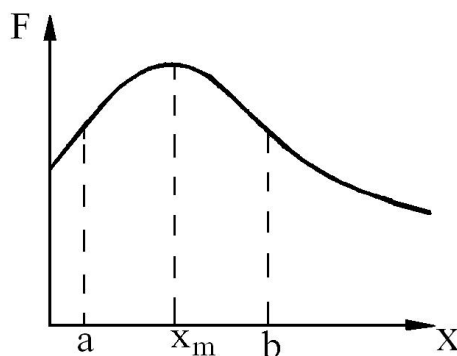


Рис. 2

1.2. Метод равномерного поиска

Метод основан на том, что переменной x присваиваются значения $x + \Delta x$ с шагом $\Delta x = \text{const}$ и вычисляются значения $F(x)$. Если $F(x_{n+1}) > F(x_n)$, переменной x дается новое приращение. Как только $F(x_{n+1})$ станет меньше $F(x_n)$ поиск останавливается. При малой заданной погрешности этот метод неэкономичен по затратам машинного времени.

1.3. Метод поразрядного приближения

Метод является разновидностью метода равномерного поиска и реализуется следующим алгоритмом:

- 1) Задаем начальное приближение $x = x_0$ слева от максимума $F(x)$ и вычисляем $F(x_0)$. Задаем $D = h$, где $h = \Delta x$ – начальный шаг поиска.
- 2) Полагаем $G = F(x_n)$, где вначале $F(x_n) = F(x_0)$, задаем $x = x + D$ и вычисляем $F(x_{n+1}) = F(x)$.
- 3) Проверяем условия $F(x_{n+1}) > G$, если оно выполняется, идем к п.2, если нет – к п. 4.
- 4) Полагаем $D = -D/4$. Проверяем условия $|D| > E/4$, где E – заданная погрешность вычисления x_m в точке максимума. Если оно выполняется, идем к п. 2, т. е. обеспечиваем поиск максимума в другом направлении с шагом в 4 раза меньше прежнего, если данное условие не выполняется, заканчиваем счет.

Пример. Найти максимум функции:

$$F(x) = 0,1 * x^3 - 2 * x^2 + 10 * x \quad (1.1)$$

Задав $h=1$, $E=0,001$ и $x_0=2$ получим $x_m = 3,3335$ и $F(x_m) = 14,8148$,

1.4. Метод дихотомии

Метод дихотомии (деления интервала поиска $[a, b]$ пополам) реализуется следующим алгоритмом;

1) проверяем условие $|b-a| < 2 \cdot E$, где E – заданная погрешность вычисления x_m . Если это условие выполняется, идем к п.6, если не выполняется, идем к п.2;

2) делим интервал поиска $[a, b]$ пополам и вычисляем $x_1 = (a+b-E)/2$ и $x_2 = (a+b+E)/2$;

3) для этих значений вычисляем $F(x_1)$ и $F(x_2)$;

4) проверяем условие $F(x_1) > F(x_2)$. Если оно выполняется, полагаем $b = x_2$ и идем к п. 1, если не выполняется, идем к п. 5;

5) полагаем $a = x_1$ и идем к п. 1;

6) выводим на печать $x_m = (a+b)/2$ и $F(x_m)$.

Пример. Найти максимум функции (1.1).

При $a = 2$ и $b = 6$, $E = 0,001$ получим $x_m = 3,3334$ и $F(x_m) = 14,8148$.

1.5. Метод золотого сечения

Метод основан на делении отрезка $[a, b]$ по правилу золотого сечения. Он позволяет сужать отрезок $[a, b]$, каждый раз вычисляя лишь одно значение $F(x)$, а не два, как в методе дихотомии. Данный метод реализуется по следующему алгоритму:

1) определяем коэффициент $\kappa = (\sqrt{5}-1)/2$ отрезка $[a, b]$;

2) находим абсциссу $x_1 = a + (1-\kappa) \cdot (b-a)$ и вычисляем $F(x_1)$;

3) находим абсциссу $x_2 = a + \kappa \cdot (b-a)$ и вычисляем $F(x_2)$;

4) проверяем выполнение условия $|x_2 - x_1| < E$. Если условие выполняется, вычисляем $x_m = (x_1 + x_2)/2$ и $F(x_m)$. Если данное условие не выполняется, идем к п. 5;

5) проверяем условие $F(x_1) < F(x_2)$. Если оно выполняется, полагаем $a = x_1$, $x_1 = x_2$ и $F(x_1) = F(x_2)$, после чего выполняем п. 3 и п. 4;

6) Если $F(x_1) \geq F(x_2)$, полагаем $b = x_2$, $x_2 = x_1$, $F(x_2) = F(x_1)$ после чего выполняем п. 2 и п. 4.

Пример. Вычисление $F(x)$ функции (1.1). Для $a = 2$, $b = 5$ и $E = 0,001$ получаем $x_m = 3,333495$ и $F(x_m) = 14,8148$.

1.6. Метод квадратичной интерполяции – экстраполяции

Метод заключается в замене $F(x)$ в промежутке $x_1 \pm h$ квадратической параболой, экстремум которой вычисляется аналитически.

После приближенного нахождения экстремума \bar{x}_m можно задать $x_1 = \bar{x}_m$ и повторить поиск. Таким образом, с помощью итерационной, процедуры значение x_m уточняется до получения его с заданной погрешностью ε . Метод обеспечивает поиск как максимума, так и минимума $F(x)$, в том числе для случая $F(x) = 0$, причем точка x_m может лежать в интервале $x_1 \pm h$ (интерполяция) и быть вне его (экстраполяция). Алгоритм реализации этого метода следующий:

1) задаем начальное приближение x_1 для x_m и вычисляем два смежных значения аргумента $F(x)$;

$x_0 = x_1 - h$ и $x_2 = x_1 + h$, где h – полуинтервал интерполяции – экстраполяции;

2) вычисляем три значения $F(x)$: $F(x_0) = F_0$, $F(x_1) = F_1$ и $F(x_2) = F_2$;

3) находим коэффициенты:

$$c = \frac{F_0}{2h^2} - \frac{F_1}{h^2} + \frac{F_2}{2h^2};$$

$$b = \frac{-F_0(2x_1 + h) + 4F_1x_1 - F_2(2x_1 - h)}{2h^2}$$

параболы $y(x) = x^2 + bx + c$, проходящей через выбранные три узла и по ним вычисляем аналитически положение экстремума

$$\bar{x}_m = -\frac{b}{2c} = \frac{1}{2} \frac{F_0(2x_1 + h) + 4F_1x_1 + F_2(2x_1 - h)}{F_0 - 2F_1 + F_2};$$

4) проверяем выполнение условия $(\bar{x}_m - x_1) < \varepsilon$. Если оно не выполняется, задаем $x_1 = \bar{x}_m$ и идем к п.1. Если выполняется, считаем \bar{x}_m найденным с заданной погрешностью ε , вычисляем $F(x_m)$ и останавливаем счет.

Пример. Вычисление $F(x)$ для функции (1.1). Для $h = 0,1$; $x_1 = 3$ и $\varepsilon = 0,001$ получаем $x_m = 3,3338$ и $F(x_m) = 14,8148$. Для $x_1 = 8$, $x_m = 9,994$ и $F(x_m) = 2,4148 \cdot 10^{-7}$. Значения $F(x_m)$ показывают, что в первом случае обнаружен максимум $F(x)$, а во втором – минимум, причем в обоих случаях экстремумы находились за пределами интервала $x_1 \pm h$.

1.7. Сравнение методов

Сравнение методов одномерной оптимизации показывает, что для простой функции $F(x)$ например вида (1.1), они обеспечивают примерно одинаковое время поиска. Исключением является последний метод, имеющий время поиска примерно в 2,5 раза меньше. В большинстве случаев для гладких $F(x)$ метод квадратичной интерполяции – экстраполяции дает заметный выигрыш во времени вычислений. Удобно и то, что он без

всякой перестройки программ обнаруживает как максимумы, так и минимумы $F(x)$, причем даже за пределами первоначально заданного интервала поиска. Преимущество метода золотого сечения перед методами поразрядного приближения и дихотомии при простых функциях не выявляется, поскольку программная реализация первого метода сложнее и необходимо выполнение ряда вспомогательных операций.

Однако при сложных функциях метод золотого сечения может давать существенный выигрыш во времени.

Для поиска экстремумов пользуются также методом чисел Фибоначчи [2], однако особым преимуществом перед методом золотого сечения он не обладает.

2. МНОГОМЕРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

2.1. Постановка задачи

Многомерная оптимизация заключается в поиске экстремумов функции многих переменных $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Методы такой оптимизации детально описаны в [2,3,4]. Из всего многообразия методов многомерной оптимизации ограничимся рассмотрением трех относительно просто реализуемых на ПЭВМ методов поиска минимума $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2.2. Метод координатного спуска

Метод заключается в поочередном поиске минимума по координате x_1 , затем x_2 и т.д. Поиск ведется с одинаковым шагом, который уменьшается после нахождения всех значений \bar{x}_{1m} , \bar{x}_{2m} , \bar{x}_{nm} . Таким образом, алгоритм реализации этого метода подобен алгоритму метода поразрядного приближения и лишь дополняется циклом задания переменных x_1, x_2, \dots, x_n , внутри которого оценивается погрешность нахождения x_{im} для каждой переменной.

Пример. Найдем минимум функции трех переменных:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{e^{(x_1+x_2+x_3)}}{x_1 * x_2^2 * x_3^3}. \quad (2.1)$$

Для начальных значений $x_{10} = x_{20} = x_{30} = 0,5$, шага $h = 0,5$ и погрешности $\varepsilon = 0,0001$ получаем $x_{1m} = 1,0000$; $x_{2m} = 2,0000$; $x_{3m} = 2,9999$ и $F(x_i)_{min} = 3,7354$.

2.3. Метод спирального координатного спуска

Метод отличается от рассмотренного выше лишь тем, что шаг h меняется каждый раз при переходе от поиска минимума по одной переменной к поиску минимума по другой переменной. В трехмерном пространстве это напоминает спуск во впадину по спирали. Обычно этот метод дает некоторое сокращение времени поиска.

2.4. Метод координатного спуска с квадратичной интерполяцией – экстраполяцией

Метод основан на последовательном поиске минимума каждой переменной с применением для этого метода квадратичной интерполяции - экстраполяции (раздел 1.6).

2.5. Применение методов многомерной оптимизации для решения систем уравнений

Если дана система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_i) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_i) = 0 \\ \vdots \\ f_i(x_1, x_2, \dots, x_i) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

то поиск минимума функций: $F(x_i) = \sum_{i=1}^i |f_i(x_i)|$ или $F(x_i) = \sum_{i=1}^i (f_i(x_i))^2$ дает неизвестные этой системы.

Пример. Найти неизвестные системы из двух нелинейных уравнений;

$$x_1^2 + x_2^2 = 1; \quad x_1^3 - x_2 = 0.$$

Для них имеем:

$$F(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 - (x_1^3 - x_2)^2.$$

Воспользовавшись программой минимизации функции n переменных методом квадратичной интерполяции – экстраполяции при $h = 0,01$, $E = 1 \cdot 10^{-4}$ и $x_{10} = x_{20} = 1$, получаем $x_{1m} = 0,8259$, $x_{2m} = 0,5636$ и $F(x_{1m}, x_{2m}) = 2,2726 \cdot 10^{-4}$. Подстановка x_{1m} и x_{2m} в исходные уравнения дает $x_{1m}^2 + x_{2m}^2 = 0,9998 \approx 1$ и $x_{1m}^3 - x_{2m} = -2 \cdot 10^{-4} \approx 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белолипецкий А. А. Экономико-математические методы : учеб. для вузов по спец. "Экономика" / А. А. Белолипецкий, В. А. Горелик. -

- М. : Академия, 2010. – 362.
2. Дьяконов В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ПЭВМ: М.: Наука, 1987. 240 с.
 3. Ящерицын П. И., Махарйнский Е. И. Планирование эксперимента в машиностроении. Минск: Вышэйш. шк., 1985-286 с.
 4. Батищев Д. И. Методы оптимального Проектирования. М.: Радио и связь, 1984. -214 с.
 5. Щуп Т. Решение инженерных задач на ПЭВМ. М.: Мир, 1982. 186 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Практическое занятие 1	3
ПРОВЕДЕНИЕ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА С ПОМОЩЬЮ ПЭВМ	3
ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ	4
2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА	4
3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	12
4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА.....	12
5. ТЕХНИКА БЕЗОПАСНОСТИ.....	12
БИБЛИОГРАФИЯ.....	12
Практическое занятие 2	21
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ПЭВМ	21
1. МЕТОДЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	21
1.1. Постановка задачи.....	21
1.2. Метод равномерного поиска	22
1.3. Метод поразрядного приближения	22
1.4. Метод дихотомии	23
1.5. Метод золотого сечения	23
1.6. Метод квадратичной интерполяции – экстраполяции	23
1.7. Сравнение методов.....	24
2. МНОГОМЕРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ.....	25
2.1. Постановка задачи.....	25
2.2. Метод координатного спуска.....	25
2.3. Метод спирального координатного спуска	26
2.4. Метод координатного спуска с квадратичной интерполяцией – экстраполяцией.....	26
2.5. Применение методов многомерной оптимизации для решения систем уравнений	26
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	26

Учебно-методическое издание

**ПРОВЕДЕНИЕ РЕГРЕССИОННОГО
АНАЛИЗА И
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬ-
КИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ
ПЭВМ**

Методические указания

Автор-составитель
ГУДИЛОВ
Сергей Владимирович

Редактор Л. Н. Яковлева

Лицензия ЛР № 020815 от 20.09.93.

Подписано в печать. Формат 60 х 84 1/16. Уч.-изд.л. 1,6.

Тираж 150 экз. Заказ №

Издательско-полиграфический центр

Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого.
173003, Великий Новгород, ул. Б. Санкт-Петербургская, 41.

Отпечатано в ИПЦ НовГУ им. Ярослава Мудрого.
173003, Новгород, ул. Б. Санкт-Петербургская, 41.