НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО

Кафедра прикладной математики и информатики

МАТЕМАТИКА

Контрольные задания и методические указания
для студентов заочного отделения
экономических специальностей

Часть 1

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД
2017

Р е ц е н з е н т
канд. физ.-мат.наук, доцент кафедры
алгебры и геметрии Неусторoев Н.В.

Математика: Контрольные задания и метод. указания для студентов заочного отделения экономических специальностей / Сост. В.А. Едемский, С.В. Неустроева, Ю.Ю. Петрова, М.В. Ракова; НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2017. – 45с.

Пособие является руководством по выполнению контрольных работ по курсу высшей математики для студентов-заочников экономических специальностей. Оно содержит вопросы и теоретические сведения, необходимые для выполнения контрольных работ по данной теме, примеры решения задач, контрольные задания и список литературы.

Введение

При изучении курса высшей математики студент-заочник должен выполнить ряд контрольных работ. Решения задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. Все решения надо приводить полностью, чертежи и графики должны быть выполнены четко, с указанием масштаба и названий координатных осей. Обозначения к задачам должны соответствовать указаниям на чертежах и графиках. К выполнению контрольного задания следует приступать после изучения теоретического материала по учебникам и решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию.

Настоящее пособие является руководством по выполнению контрольных работ по курсу высшей математики для студентов-заочников экономических специальностей НовГУ. Оно содержит вопросы и теоретические сведения, необходимые для выполнения контрольных работ по данной теме, примеры решения задач, контрольные задания и список литературы.

Студент выполняет тот вариант контрольной работы, номер которого совпадает с последней цифрой его зачетной книжки.

Номер варианта	Номера задач для контрольных работ	
	Работа № 1	Работа № 2
1	1,11,21,31	41,51,61,71,81
2	2,12,22,32	42,52,62,72,82
3	3,13,23,33	43,53,63,73,83
4	4,14,24,34	44,54,64,74,84
5	5,15,25,35	45,55,65,75,85
6	6,16,26,36	46,56,66,76,86
7	7,17,27,37	47,57,67,77,87
8	8,18,28,38	48,58,68,78,88
9	9,19,29,39	49,59,69,79,89
0	10,20,30,40	50,60,70,80,90

Рабочая программа курса «МАТЕМАТИКА» для учебного модуля по экономическим направлениям подготовки бакалавров

Учебный модуль «Математика» относится к Математическому и естественнонаучному циклу ФГОС ВПО и ООП по экономическим направлениям подготовки бакалавров и базируется на знаниях по математике в объеме программы средней школы.

Учебный модуль обеспечивает математическую подготовку бакалавров и необходим для освоения учебной программы ряда учебных модулей естественнонаучного и профессионального циклов, в частности для изучения учебных элементов и разделов по теории вероятностей, статистики, информатики, а также многих разделов экономики, например, таких как бухгалтерский учет, менеджмент, экономика организации, разделов финансовой математики.

Содержание и структура разделов учебного модуля

1. Линейная алгебра. Матрицы и определители. Свойства определителей. Операции над матрицами. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений. Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера и метод Гаусса. Применение элементов линейной алгебры в экономике.

Теоретические вопросы

1. Матрицы и действия над ними.
2. Определители второго и третьего порядков, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения.
3. Обратная матрица.
4. Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Крамера. Матричный способ решения алгебраических уравнений. Метод Гаусса.
5. Собственные числа и векторы матрицы.

1.1. Матрицы и действия над ними

Таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов вида

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{m,n},$$

называется матрицей порядка $m \times n$. Матрица порядка $n \times n$ называется *квадратной* матрицей порядка n ($A=\left(a_{ij}\right)_n$).

Две матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m,n}$ называются *равными* (A=B), если равны их соответствующие элементы, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$ (i=1,…,m; j=1,…,n).

Суммой двух матриц $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m,n}$ одинакового порядка называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m,n}$ (C = A+B), элементы которой определяются как

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \ (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n).$$

Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ на число α называется матрица $B=\left(b_{ij}\right)_{m,n}$ *(*$B=\alpha A$ или $B=A\alpha$*)*, элементы которой определяются как

$$b_{ij}=\alpha \cdot a_{ij} \ (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n).$$

Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m,p}$ на матрицу $B=\left(b_{ij}\right)_{p,n}$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m,n}$ (C = AB), элементы которой определяются равенствами

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ip}b_{pj}$$

$$\left(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n\right).$$

Заметим, что умножение матрицы A на матрицу B определяется только при условии, что число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В.

Пример 1. Выполним действия над матрицами A и B*:(2A-B)(A+3B)*, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Данное выражение содержит следующие операции над матрицами:

1) произведение матрицы на число.
2) сумма двух матриц;
3) произведение двух матриц.

Используя определения, данные выше, получим:

$$2A-B=2A+(-1)B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 2\\ 4 & 0 & 8\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -2\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 2\\ 3 & 1 & 6\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix};$$

$$A+3B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ 3 & -3 & 6\\ 9 & 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 6 & 1\\ 5 & -3 & 10\\ 10 & 8 & 6\end{pmatrix};$$

$$(2A-B)\cdot(A+3B)=\begin{pmatrix}0 & 5 & 2\\ 3 & 1 & 6\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 6 & 1\\ 5 & -3 & 10\\ 10 & 8 & 6\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0\cdot7+5\cdot5+2\cdot10 & 0\cdot6+5\cdot(-3)+2\cdot8 & 0\cdot1+5\cdot10+2\cdot6\\ 3\cdot7+1\cdot5+6\cdot10 & 3\cdot6+1\cdot(-3)+6\cdot8 & 3\cdot1+1\cdot10+6\cdot6\\ (-1)\cdot7+2\cdot5+5\cdot10 & (-1)\cdot6+2\cdot(-3)+5\cdot8 & (-1)\cdot1+2\cdot10+5\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45 & 1 & 62\\ 86 & 63 & 49\\ 53 & 28 & 49\end{pmatrix}.$$

1.2. Определители второго и третьего порядка. Обратная матрица

Определителем второго порядка, соответствующим матрице $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ называется число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначают $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ или Δ.

Следовательно, согласно определению $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, называется число, обозначаемое $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ или Δ и определяемое как

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Для запоминания этого определения существует простое правило, которое называется *«правилом треугольников»*. Каждое слагаемое, стоящее в правой части со знаком плюс, представляет собой произведение трех элементов определителя, взятых, как показано на схеме 1. Каждое слагаемое, стоящее со знаком минус, представляет собой произведение трех элементов определителя, взятых, как показано на схеме 2.

Схема 1

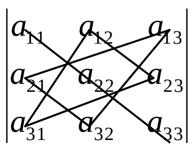
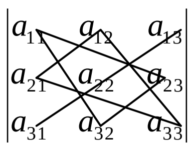


Схема 2



Минором элемента a_{ij} (i =1,2,3; j =1,2.3) определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получающийся из данного определителя третьего порядка вычеркиванием i-той строки j-того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Минор элемента a_{ij} обозначают M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется произведение минора M_{ij} этого элемента на число $(-1)^{i+j}$, где i -

номер строки, j - номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначают A_{ij}.

Таким образом,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Справедливы следующие соотношения.

Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\begin{array}{l} \Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \\ \Delta = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} \\ ------------------ \\ \Delta = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} \end{array}.$$

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей* для матрицы $A = (a_{ij})_3$, если выполняется условие: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица.

Если определитель матрицы *A* отличен от нуля, то существует единственная обратная матрица A^{-1}, которая находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где Δ - определитель матрицы *A*, $\Delta \neq 0$, A_{ij} - алгебраические дополнения элементов матрицы *A*.

Пример 2. Найдем матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1) Вычислим определитель матрицы А:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&2&2\\1&3&1\\5&3&4\end{vmatrix}=3\cdot3\cdot4+5\cdot2\cdot1+2\cdot3\cdot1-5\cdot3\cdot2-1\cdot2\cdot4-3\cdot3\cdot1=5.$$

$\Delta\neq0$, следовательно, обратная матрица существует и единственна.

2) Находим алгебраические дополнения элементов определителя матрицы А.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3&1\\3&4\end{vmatrix}=9,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=-2,\ A_{31}=\begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1&1\\5&4\end{vmatrix}=1,\ A_{22}=\begin{vmatrix}3&2\\5&4\end{vmatrix}=2,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1&3\\5&3\end{vmatrix}=-12,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}3&2\\5&3\end{vmatrix}=1,\ A_{33}=\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=7.$$

3) Составим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}9&-2&-4\\1&2&-1\\-12&1&7\end{pmatrix}.$$

4) Проверим правильность нахождения матрицы A^{-1}, исходя из определения обратной матрицы.

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}9&-2&-4\\1&2&-1\\-12&1&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&2\\1&3&1\\5&3&4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Аналогично $A^{-1}\cdot A=E$. Следовательно, обратная матрица вычислена верно.

1.3. Системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\qquad(1)$$

Здесь x_1, x_2, x_3 - неизвестные, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}, b_1, b_2, b_3$ - заданные числа. Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ называют определителем системы (1).

Система называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение.

Формулы Крамера

Если определитель системы (1) отличен от нуля, то система (1) совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

(формулы Крамера).

Матричный способ решения системы линейных алгебраических уравнений

Систему (1) можно записать в матричном виде

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Если определитель матрицы *A* отличен от нуля, то система (1) совместна и имеет единственное решение: $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} - матрица, обратная к *A*.

<u>Пример 3</u>. Дана система:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases} \qquad (2)$$

Решим ее двумя способами:

1) по формулам Крамера;
2) матричным способом.

Решение.

1. Вычислим определитель системы (2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

$\Delta \neq 0$, следовательно, система (2) совместна и имеет единственное решение. Находим его, используя формулы Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 7 \\ 10 & 3 & -3 \\ 17 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 10 & -3 \\ 3 & 17 & 5 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 5,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

2. Перепишем систему (2) в виде $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Решение системы ищем в виде $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} - матрица, обратная к A.

Найдем A^{-1} (см. пример 2):

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 19 & -18 \\ -19 & -16 & 17 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 19 & -18 \\ -19 & -16 & 17 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

1.4. Метод Гаусса решения произвольных систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (3)$$

Матрица

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad (4)$$

называется *расширенной матрицей* системы (3).

Элементарными преобразованиями матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$ называются следующие действия:

1) перестановка строк (столбцов);
2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

С помощью элементарных преобразований любая матрица может быть приведена к трапециевидному виду.

Метод Гаусса заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапециевидному виду с помощью элементарных преобразований, выполняемых над строками матрицы. Таким образом, расширенная матрица (4) может быть приведена к виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array}\right), \qquad (5)$$

где $r \le \min(m, n)$.

Матрица (5) является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1r}x_r + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2r}x_r + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b'_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b'_m \end{cases} . \qquad (6)$$

Система (6) эквивалентна исходной системе (3).

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1}, \dots, b'_m$ отлично от нуля, то система (6), а, следовательно, и исходная система (3) не совместна, то есть не имеет решений.

Если же $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$, то система (6) совместна. Следовательно, совместна и исходная система (3).

Пример 4. Найдем решение системы методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -10 \end{cases} . \qquad (7)$$

Решение.

Расширенная матрица системы (7) имеет вид:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & -10 \end{array}\right)$$

Приведем эту матрицу к трапециевидному виду с помощью элементарных преобразований. Для этого умножим элементы первой строки матрицы $\overline{\overline{A}}$ на (-3) и сложим с соответствующими элементами второй строки. Затем умножим элементы первой строки матрицы $\overline{\overline{A}}$ на (-4) и сложим с соответствующими элементами третьей строки. В результате получим:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & -18 \end{array}\right).$$

Теперь умножим элементы второй строки матрицы A_1 на (-3) и сложим с соответствующими элементами третьей строки. Получим:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{8}$$

Матрица $\tilde{A}$ является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2 \\ \quad - x_2 - 6x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}. \tag{9}$$

Система (9) эквивалентна исходной системе (7). Система (9) содержит два уравнения с 4-мя неизвестными, следовательно, две неизвестные могут быть выбраны произвольно. Придавая неизвестным x_3 и x_4 произвольные значения $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$, получаем решение системы (7) в виде

$$\begin{cases} x_1 = -10 + 8\alpha - 7\beta, \\ x_2 = 6 - 6\alpha + 5\beta, \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = \beta, \end{cases}$$

где α, β - любые числа.

1.5. Собственные числа и собственные векторы матрицы

Число λ называется *собственным числом* матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, если существует ненулевой вектор X такой, что

$$A \cdot X = \lambda \cdot X .$$

При этом вектор X называется *собственным вектором* матрицы A, соответствующим собственному числу λ.

Характеристическим уравнением матрицы A называется уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 . \qquad (10)$$

Корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ этого уравнения являются собственными числами матрицы *A*.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

в которой λ принимает одно из значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Определитель этой системы в силу (10) равен нулю. Следовательно, система определяет с точностью до постоянного множителя собственный вектор (x_1, x_2, x_3), соответствующий данному собственному числу.

<u>Пример 5.</u> Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение.</u> Составим характеристическое уравнение матрицы *A*.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$ являются собственными числами матрицы *A*.

Для отыскания собственных векторов матрицы *A* используем систему уравнений

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + (5-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

полагая в ней поочередно $\lambda = \lambda_i, i = 1,2,3$.

1. Пусть $\lambda = \lambda_1 = -2$. Тогда система (11) примет вид:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}. \qquad (12)$$

Полученную систему решим методом Гаусса. Расширенная матрица $\overline{A}$ системы (12) имеет вид:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Приведем матрицу $\overline{A}$ к трапециевидному виду с помощью элементарных преобразований. Для этого умножим элементы первой строки матрицы $\overline{A}$ на (-3) и сложим с соответствующими элементами второй строки. Получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

которая является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ -20x_2 = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, $x_2 = 0, x_1 = -x_3$, то есть система имеет бесчисленное множество решений, определяемых равенством $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, -x_1)$.

Таким образом, собственным вектором матрицы *A,* соответствующим собственному числу $\lambda = -2$, является ненулевой вектор, определяемый совокупностью чисел $(x_1, x_2, x_3) = (t,0,-t) = (1,0,-1)\cdot t$, где t - любое число, отличное от нуля.

2. Пусть $\lambda = \lambda_2 = 3$. Тогда система (11) примет вид:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}. \qquad (13)$$

Решим систему (13) методом Гаусса.

Расширенная матрица системы (13) имеет вид:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Приведем матрицу $\overline{A}$ к трапециевидному виду с помощью элементарных преобразований. Для этого, сначала переставим первую строку матрицы $\overline{A}$ со второй строкой. Получим:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Теперь умножим элементы первой строки матрицы A_1 на 2 и сложим с соответствующими элементами второй строки. Затем умножим элементы первой строки матрицы A_1 на (-3) и сложим с соответствующими элементами третьей строки. В результате получим:

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Далее, сложим элементы второй строки матрицы A_2 *с* соответствующими элементами третьей строки. Получим матрицу:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

которая является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0\\ \quad 5x_2+5x_3=0\end{cases}.$$

Следовательно, $x_2=-x_3, x_1=x_3$, то есть система имеет бесконечное множество решений, определяемых равенством $(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-x_1,x_1)$.

Таким образом, собственным вектором матрицы *A,* соответствующим собственному числу $\lambda_2=3$, является ненулевой вектор, определяемый совокупностью чисел $(x_1,x_2,x_3)=(t,-t,t)=(1,-1,1)\cdot t$, где t - любое число, отличное от нуля.

1) Пусть $\lambda=\lambda_3=6$. Тогда система (11) примет вид:

$$\begin{cases} -5x_1+x_2+3x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\\ 3x_1+x_2-5x_3=0\end{cases} \tag{14}$$

Решим систему (14) методом Гаусса. Расширенная матрица системы (14) имеет вид:

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-5 & 1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -5 & 0\end{array}\right).$$

Приведем матрицу $\bar{A}$ *к* трапециевидному виду с помощью элементарных преобразований. Сначала поменяем первую строку матрицы $\bar{A}$ со второй строкой. Получим:

$$A_1=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ -5 & 1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & -5 & 0\end{array}\right).$$

Умножим теперь элементы первой строки матрицы A_1 на 5 и сложим с соответствующими элементами второй строки. Затем умножим элементы первой строки матрицы A_1 на (-3) и сложим с соответствующими элементами третьей строки. В результате получим:

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right).$$

Далее, сложим элементы второй строки матрицы A_2 соответственно с элементами третьей строки. Тогда получим матрицу:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

которая является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, $x_2 = 2x_3, x_1 = x_3$, то есть система имеет бесчисленное множество решений, определяемых равенством $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_1, x_1)$.

Таким образом, собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному числу $\lambda = 6$, является ненулевой вектор, определяемый совокупностью чисел $(x_1, x_2, x_3) = (t, 2t, t) = (1,2,1) \cdot t$, где t - любое число, отличное от нуля.

2. Аналитическая геометрия и основы векторного анализа. Векторы и операции над ними. Линейная зависимость и независимость системы векторов.Уравнения прямых и плоскостей на плоскости и в пространстве. Прямые и плоскости в R^2и R^3, их уравнения. Применение элементов векторного анализа и аналитической геометрии в экономике.

Теоретические вопросы

1. Векторы и линейные действия над ними.
2. Скалярное и векторное произведения двух векторов и их свойства.
3. Смешанное произведение трех векторов и его свойства.
4. Плоскость.

5. Прямая в пространстве.
6. Прямая на плоскости.

2.1. Векторы и операции над ними

Любой вектор $\bar{a}$ в декартовой системе координат может быть представлен в виде

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k},$$

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\bar{a}$, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты координатных осей.

Вектор $\bar{a} = \overline{AB}$ с началом в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $B(x_2, y_2, z_2)$ имеет вид:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \bar{i} + (y_2 - y_1) \cdot \bar{j} + (z_2 - z_1) \cdot \bar{k},$$

то есть $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$.

Длина отрезка AB называется *длиной (модулем)* вектора, обозначается $|\bar{a}| = |\overline{AB}|$ и вычисляется по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Сумма векторов $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ и $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$ определяется как

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x)\bar{i} + (a_y + b_y)\bar{j} + (a_z + b_z)\bar{k}.$$

Произведение вектора $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ *на число* α определяется как

$$\alpha \cdot \bar{a} = (\alpha \cdot a_x)\bar{i} + (\alpha \cdot a_y)\bar{j} + (\alpha \cdot a_z)\bar{k}.$$

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a} \wedge \bar{b}).$$

Скалярное произведение векторов $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ и $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$ вычисляется по формуле:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, обозначаемый $\bar{a}\times\bar{b}$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1) длина вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\bar{a}\wedge\bar{b}\right)$;
2) вектор $\bar{a}\times\bar{b}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
3) векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{a}\times\bar{b}$ образуют правую тройку, то есть они ориентированы по отношению друг к другу соответственно как орты $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$.

Модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = S_{\bar{a},\bar{b}}$$

Векторное произведение векторов $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ и $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$ вычисляется по формуле:

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Смешанным произведением векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется скалярное произведение вектора $\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$, то есть $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$.

Модуль смешанного произведения векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$\left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right| = V_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}}$$

Пусть $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},\ \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k},\ \bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}.$ Тогда

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Вышеприведенные формулы остаются справедливыми для векторов на плоскости XOY при замене третьей координаты вектора нулем ($a_z = 0, b_z = 0, c_z = 0$).

2.2. Уравнения прямых на плоскости

Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$Ax + By + C = 0\text{, где } A^2 + B^2 \neq 0.$$

Вектор $\overline{N} = A\,\overline{i} + B\,\overline{j}$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором прямой на плоскости.*

Уравнение вида $y = kx + b$, где $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$, $B \neq 0$, называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ *с заданным угловым коэффициентом*, имеет вид:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0).$$

Угол между прямыми $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$ определяется следующим образом:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Пример 1. Даны вершины треугольника ABC: $A(0,1), B(3,5), C(1,3)$. Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнение стороны AB; 3) длину медианы AM; 4) уравнение медианы AM; 5) уравнение высоты CD; 6) длину высоты CD; 7) площадь ΔABC; 7) угол BAC; 8) уравнение прямой параллельной стороне BC и проходящей через точку A.

Решение. 1) Для определения длины AB найдем координаты вектора $\overline{AB}$: $\overline{AB} = 3 \cdot \bar{i} + 4 \cdot \bar{j} = (3,4)$. Тогда длина ребра AB будет равна длине вектора $\overline{AB}$:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

2) Составим уравнения прямой AB. Для этого воспользуемся уравнениями прямой, проходящей через две заданные точки A и B:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}.$$

Получаем:

$$\frac{x-0}{3}=\frac{y-1}{4}.$$

3) Найдем координаты точки M: $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=2$, $y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=4$, так как точка M делит отрезок BC пополам. Тогда $\left|\overline{AM}\right|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

4) Как и в пункте 2) получаем, что

$$AM:\frac{x-x_A}{x_M-x_A}=\frac{y-y_A}{y_M-y_A} \text{ или } \frac{x-0}{2}=\frac{y-1}{3}.$$

5) Высота CD перпендикулярна стороне AB, а потому их угловые коэффициенты k_{CD} и k_{AB} удовлетворяют условию: $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}$. Из уравнения прямой AB следует, что $k_{AB}=4/3$. Тогда $k_{CD}=-\frac{3}{4}$.

Напишем уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Подставив в это уравнение координаты точки C и угловой коэффициент k_{CD} ,получим уравнение высоты CD:

$$y-3=-\frac{3}{4}(x-1)$$

или

$$3x+4y-15=0.$$

6) Координаты точки D можно определить из условия пересечения прямых AB и CD:

$$\begin{cases} 4x-3y+3=0 \\ 3x+4y-15=0 \end{cases}.$$

Решение полученной системы и есть координаты D, а именно $D\left(\frac{33}{25}, \frac{69}{25}\right)$. Тогда $CD=\sqrt{\left(\frac{33}{25}-1\right)^2+\left(\frac{69}{25}-3\right)^2}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$.

7) Площадь $\Delta ABC=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{2}{5}=1$.

Замечание. Площадь треугольника ΔABC и длину высоты CD также можно найти, используя векторное произведение, а именно:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0\end{matrix}\right\|=\left|\frac{1}{2}\cdot 2\,\bar{k}\right|=1 \text{ и } CD=2\Delta ABC/AB=\frac{2}{5}.$$

8) Найдем угол между сторонами AB и AC. Для этого, как и раньше, найдем координаты вектора AC. Получаем, что $\overline{AC}=(1,2)$ и $\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Тогда угол между сторонами AB и AC можно найти из определения скалярного произведения двух векторов (вектор $\overline{AB}=(3,4)$ и его длина были вычислены ранее):

$$\cos\varphi=\cos(\overline{AB},\overline{AC})=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\frac{3\cdot 1+4\cdot 2}{5\cdot\sqrt{5}}=\frac{11}{5\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{25}.$$

Следовательно, $\varphi=\arccos\frac{11\sqrt{5}}{25}$.

9) Прежде всего, составим уравнения прямой BC. Как и в пункте 2) получаем, что

$$BC: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}.$$

Тогда угловой коэффициент $k_{BC}=1$. Так как прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны. Следовательно, урвнение искомой прямой, проходящей через точку $A(0,1)$ параллельно прямой BC, то есть с угловым коэффициентом $k=1$, имеет вид: $y-1=x$.

2.3. Плоскость и прямая в пространстве

Уравнение любой плоскости в пространстве может быть записано в виде:

$$Ax+By+Cz+D=0, \text{ где } A^2+B^2+C^2\neq 0.$$

Вектор $\overline{N}=A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}$, перпендикулярный плоскости, называется *нормальным вектором плоскости.*

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и *перпендикулярной вектору* $\overline{N}=A\bar{i}+B\bar{j}+C\bar{k}$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Угол между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяется следующим образом:

$$cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *до плоскости*, определяемой уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Прямая в пространстве может быть задана уравнениями двух плоскостей

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases},$$

пересекающихся по этой прямой, или *каноническими уравнениями прямой*

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

которые определяют прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельную вектору $\bar{l} = m \cdot \bar{i} + n \cdot \bar{j} + p \cdot \bar{k}$. Вектор $\bar{l}$ называется *направляющим вектором прямой.*

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Угол между двумя прямыми $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ и $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ определяется следующим образом:

$$cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Угол между прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется следующим образом:

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Если *точка* $M(x, y, z)$ *делит отрезок АВ*, где $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, в *отношении* $\lambda = AM : MB$, то координаты точки М определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (\lambda \neq -1).$$

3. Математический анализ (часть 1). Элементы теории множеств. Множество вещественных чисел. Введение в математический анализ. Числовые последовательности и их сходимость. Функции, их графики. Предел и непрерывность. Экстремальные задачи, основные понятия. Задачи линейного программирования. Основы дифференциального исчисления. Исследование функций. Экономические приложения. Функции нескольких переменных. Частные производные и дифференциалы. Градиент. Экстремумы и условные экстремумы.

Правило множителей Лагранжа. Применение в задачах экономики. Метод наименьших квадратов.

Теоретические вопросы

1. Понятие функции одной переменной.
2. Предел функции.
3. Непрерывность функции.
4. Бесконечно малые функции и их свойства.
5. Бесконечно большие функции и их свойства.
6. Односторонние пределы.
7. Производная функции.
8. Таблица производных.
9. Правила дифференцирования.
10. Производная сложной функции.
11. Производные высших порядков. Правило Лопиталя.
12. Исследование функций с помощью производных.
13. Производные высших порядков.

3.1. Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $x: 0 < |x - x_0| < \delta$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Если $x \to x_0$ и $x < x_0$, то используют запись $x \to x_0 - 0$; если $x \to x_0$ и $x > x_0$, то $x \to x_0 + 0$.

Числа $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ называются соответственно *левосторонним и правосторонним пределами функции* $f(x)$ в точке x_0.

Если существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\right]=\alpha\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\beta\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, где $\alpha,\beta-const$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\quad\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0\right)$.

При решении задач полезно знать следующие “замечательные” пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$.

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к неопределенностям вида $\dfrac{\infty}{\infty},\dfrac{0}{0},1^\infty,\infty-\infty$, и т.д.

Существуют различные приемы раскрытия данных неопределенностей:
деление числителя и знаменателя на старшую степень переменной (при $x\to\infty$); сокращение на множитель, создающий неопределенность; применение “замечательных” пределов и т.п.

Пример 1. Найдем пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$

Решение. При $x\to\infty$ получаем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Чтобы найти предел данной дробно - рациональной функции, необходимо предварительно разделить числитель и знаменатель дроби на x^2, т.к. степень x^2 - наивысшая степень многочленов, определяющих данную рациональную функцию. Применяя основные теоремы о пределах и свойства бесконечно малых величин, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=2$$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}$

<u>Решение.</u> Непосредственная подстановка предельного значения аргумента $x=1$ приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{2x-1}+1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}=1$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$

<u>Решение</u> Здесь имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Вычисление данного предела основано на применении первого " замечательного" предела ($\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$).Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{x^2}=\frac{25}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}=\frac{25}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x$

<u>Решение</u>. При $x\to\infty$ данная функция представляет собой степень, основание которой стремится к 1, а показатель – к ∞ (неопределенность вида 1^∞). Преобразуем функцию так, чтобы использовать второй "замечательный" предел ($\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$). Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{10}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{10}}\right]^{\frac{10x}{x-2}}.$$

Так как $\frac{10}{x-2}\to 0$ при $x\to\infty$,то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{10}}=e$. Учитывая, что

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x}{x-2}=10$, находим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x}=e^{10}$.

3.2. Основы дифференциального исчисления.

Производной $y'=\frac{dy}{dx}$ *функции* $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, при условии, что Δx стремится к нулю.

То есть:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Основные правила нахождения производной

Если c,α,β - *const* и $\varphi(x),\psi(x)$- дифференцируемые функции в точке x, (т.е. функции, имеющие производные в точке x), то:

1) $(c)'=0$;

2) $(\alpha\cdot\varphi(x)+\beta\cdot\psi(x))'=\alpha\cdot(\varphi(x))'+\beta\cdot(\psi(x))'$;

3) $(\varphi(x)\cdot\psi(x))'=(\varphi(x))'\cdot\psi(x)+\varphi(x)\cdot(\psi(x))'$

4) $\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)'=\frac{(\varphi(x))'\cdot\psi(x)-\varphi(x)\cdot(\psi(x))'}{\psi^2(x)}$.

Таблица производных основных функций

1. $(x^n)'=nx^{n-1}$
2. $(\sin x)'=\cos x$
3. $(\cos x)'=-\sin x$
4. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$
9. $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$
10. $(a^x)'=a^x\ln a\quad (a>0, a\neq 1)$
11. $(e^x)'=e^x$

5. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

12. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ $(x>0, a>0, a\neq 1)$

6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$

13. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x>0)$

7. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$

Правило дифференцирования сложной функции. Если $y = f(u)$ и $u=\varphi(x)$, т.е. $y = f[\varphi(x)]$, где y и u имеют производные, то

$$y_x' = y_u' \cdot u_x'.$$

Пример 2. Найдем производные следующих функций.

1) $y = 3\sin x - \dfrac{1}{2}x^2$

Решение. Применяя правило 2 нахождения производных и формулы 1 и 2 таблицы производных, получаем:

$$y' = \left(3\sin x - \frac{1}{2}x^2\right)' = 3(\sin x)' - \frac{1}{2}\left(x^2\right)' = 3\cos x - \frac{1}{2}(2x) = 3\cos x - x.$$

2) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Решение. Применяя правило 4 нахождения производных и формулы 1 и 13 таблицы производных, получаем:

$$y' = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(\ln x)'\sqrt{x} - \ln x\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\ln x}{2x^{3/2}}.$$

3) $y = e^x ctgx.$

Решение. Применяя правило 3 нахождения производных и формулы 5 и 11 таблицы производных, получаем:

$$y' = \left(e^x ctgx\right)' = \left(e^x\right)' ctgx + e^x (ctgx)' = e^x ctgx + e^x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = e^x\left(ctgx - \frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

4) $y = \sin 4x$

Решение. Полагая $y = \sin u$, где $u = 4x$, согласно формуле нахождения производной сложной функции, получим:

$$y_x' = (\sin u)_u' (4x)_x' = \cos u \cdot 4 = 4\cos 4x.$$

Производные высших порядков. Правило Лопиталя.

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т.е. $(y')'$. Для второй производной используются следующие обозначения: y'' или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, или $f''(x)$.

Производной n*- го порядка от функции* $y = f(x)$ называется производная от ее производной $(n-1)$-го порядка. Для производной n-го порядка используются следующие обозначения: $y^{(n)}$ или $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, или $f^{(n)}(x)$.

Правило Лопиталя. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0, причем производная $\varphi'(x)$ не обращается в нуль. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются одновременно либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to x_0$, и при этом существует предел отношения $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to x_0$, то существует также и предел отношения $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \to x_0$. Причем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Правило применимо и в случае, когда $x_0 = \infty$.

Заметим, что в некоторых случаях раскрытие неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ может потребовать неоднократного применения правила Лопиталя.

Неопределенности вида $0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}$ и т.д. с помощью элементарных преобразований легко сводятся к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}$, пользуясь правилом Лопиталя.

Решение Здесь мы имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, т.к. $\ln^2 x\to+\infty$ при $x\to+\infty$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}.$$

После применения правила Лопиталя мы снова получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, т.к. $\ln x\to+\infty$ при $x\to+\infty$. Применяя снова правило Лопиталя повторно, получим:

$$2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Исследование функций

а) Возрастание и убывание функций

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на отрезке $[a,b]$, если для любых точек x_1 и x_2 из отрезка $[a,b]$, где $x_1<x_2$, имеет место неравенство $f(x_1)<f(x_2)$. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f'(x)>0$ при $a<x<b$, то $f(x)$ возрастает на отрезке $[a,b]$.

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на отрезке $[a,b]$, если для любых точек x_1 и x_2 из отрезка $[a,b]$, где $x_1<x_2$, имеет место неравенство $f(x_1)>f(x_2)$. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f'(x)<0$ при $a<x<b$, то $f(x)$ убывает на отрезке $[a,b]$.

Если функция $y = f(x)$ является только возрастающей или только убывающей на данном интервале, то она называется *монотонной* на интервале.

b) Экстремумы функций

Если существует δ-окрестность точки x_0 $\left(0 < |x - x_0| < \delta\right)$ такая, что для всех точек x из этой окрестности имеет место неравенство $f(x) > f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$.

Если существует δ-окрестность точки x_0 $\left(0 < |x - x_0| < \delta\right)$ такая, что для всех точек x из этой окрестности имеет место неравенство $f(x) < f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$.

Точки максимума и минимума функции называются ее *точками экстремума.*

Точка $x_0 \in D(f)$ называется *стационарной точкой,* если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Если существует δ-окрестность стационарной точки x_0 такая, что $f'(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 - \delta$, то x_0- точка максимума функции $f(x)$.

Если существует δ-окрестность стационарной точки x_0 такая, что $f'(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 - \delta$, то x_0-точка минимума функции $f(x)$.

а) *Направление выпуклости. Точки перегиба*

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* на интервале (a, b), если он расположен ниже касательной, построенной к графику функции в любой точке этого интервала.

Достаточным условием выпуклости вверх графика функции $y = f(x)$ на интервале (a, b) является выполнение неравенства $f''(x) < 0$ для любого x из рассматриваемого интервала.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз* на интервале (a,b), если он расположен выше касательной, построенной к графику функции в любой точке этого интервала.

Достаточным условием выпуклости вниз графика функции $y = f(x)$ на интервале (a,b) является выполнение неравенства $f''(x) > 0$ для любого x из рассматриваемого интервала.

Точка $M_0(x_0, f(x_0))$, в которой меняется направление выпуклости графика функции $y = f(x)$, называется *точкой перегиба.*

Точка $x_0 \in D(f)$, где $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, является абсциссой точки перегиба, если слева и справа от нее $f''(x)$ имеет разные знаки.

d) Асимптоты

Если расстояние от точки $M(x,y)$ графика функции $y = f(x)$ до некоторой прямой Π стремится к нулю при бесконечном удалении точки M от начала координат, то прямую Π называют *асимптотой графика функции.*

Если существует число a такое, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой.*

Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k, \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$, то прямая $y = kx + b$ является *наклонной (горизонтальной при k=0) асимптотой.*

e) Общее исследование функции

Общее исследование функции рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Область определения функции
2. Точки пересечения графика с осями координат
3. Исследование функции на непрерывность, четность / нечетность и периодичность
4. Интервалы монотонности функции
5. Точки экстремума функции

6. Интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции
7. Асимптоты графика функции
8. График функции.

Пример 4. Исследуем функцию $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ и построим ее график.

Решение. 1) Функция определена на всей числовой оси за исключением точки $x=1$, где знаменатель дроби обращается в нуль.

2) График данной функции пересекает координатную ось Oy в точке $M_0(0,-2)$, т.к. $y=-2$ при $x=0$.

Чтобы найти точки пересечения графика функции с осью Ox, необходимо решить уравнение $x^2-2x+2=0$. Но данное уравнение не имеет действительных корней. Следовательно, у графика данной функции нет точек пересечения с осью Ox.

3) Данная функция непрерывна во всей области своего определения. Для исследования функции на четность проверим выполнение условия $f(-x)=f(x)$; для исследования функции на нечетность проверим выполнение условия $f(-x)=-f(x)$. Имеем:

$$f(-x)=-\frac{x^2+2x+2}{x+1}.$$

Так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, то, следовательно, данная функция не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности.

Исходная функция не периодична, т.к. $f(x+T)\neq f(x)$ для любого $T\neq 0$.

4) Найдем производную данной функции:

$$y'=\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}\right)'=\frac{\left(x^2-2x+2\right)'(x-1)-\left(x^2-2x+2\right)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Определим стационарные точки. Для этого приравняем $y'=0$. Получим:

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x_1=0, x_2=2.$$

Производная y' не существует в точке $x=1$. Но точка $x=1$ не принадлежит области определения данной функции. Следовательно, стационарными точками данной функции являются точки $x_1=0$ и $x_2=2$. Отметим все три точки на числовой оси:

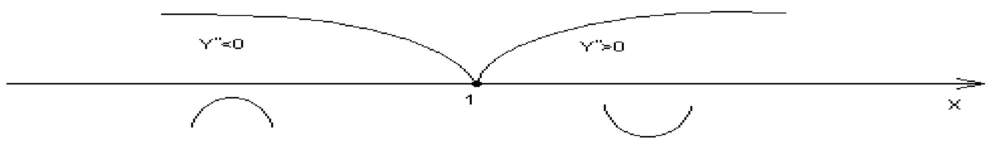
Определим знак производной на каждом интервале. Для этого достаточно подставить в производную любое значение x из рассматриваемого интервала. Результаты указаны на рисунке. Следовательно, исходная функция убывает на интервале $(0,1)\cup(1,2)$, возрастает на интервале $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ (что показано на рисунке).

5) Так как производная меняет знак при переходе через стационарные точки, то эти точки являются точками экстремума. А именно, $x=0$ - точка максимума, $x=2$ - точка минимума. Максимальное значение функции равно $y(0)=-2$, минимальное значение $y(2)=2$.

6) Вычислим вторую производную данной функции:

$$y''=\left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{\left(x^2-2x\right)'(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)\left[(x-1)^2\right]'}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, но y'' не существует при $x=1$. Точка $x=1$ не принадлежит области определения данной функции. Отметим эту точку на числовой оси:



Определим знак второй производной на каждом интервале. Для этого достаточно подставить во вторую производную любое значение x из рассматриваемого интервала. Результаты указаны на рисунке.

Следовательно, график данной функции является выпуклым вверх в интервале $(-\infty,1)$ и выпуклым вниз в интервале $(1,+\infty)$ (что показано на рисунке).

Так как вторая производная нигде не обращается в нуль и точка $x=1$, где y'' не существует, не принадлежит области определения данной функции, то у исходной функции нет точек перегиба.

7) Найдем предел данной функции при $x\to 1$ слева и справа:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty,\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=+\infty .$$

Следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

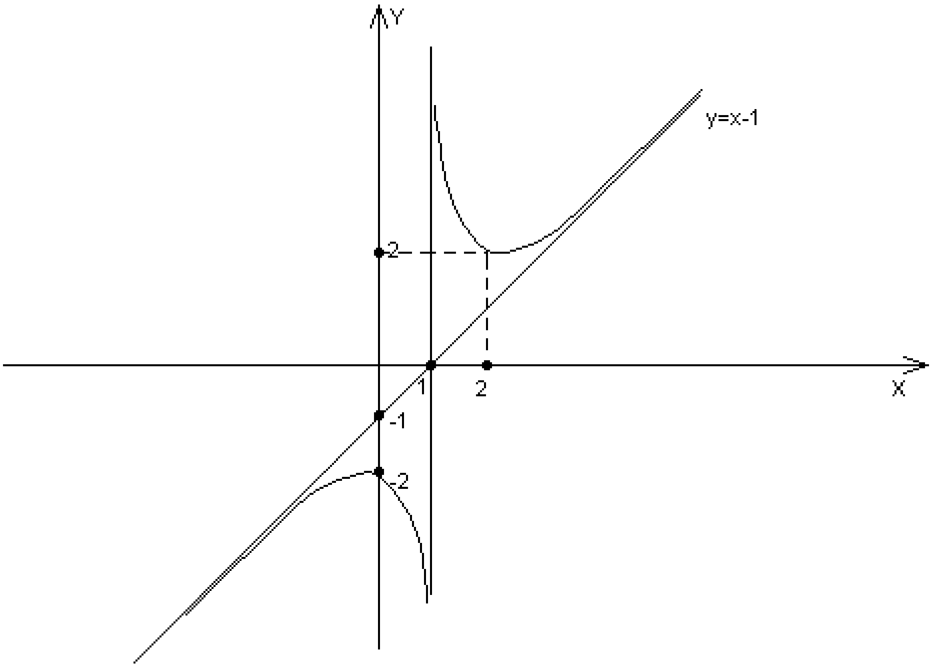
Для нахождения наклонной асимптоты вычислим следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-2x+2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{x^2-x}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x}{x-1}=-1 .$$

Следовательно, наклонная асимптота графика данной функции имеет вид $y=x-1$.

8) Используя полученные данные, построим график исходной функции:



Литература.

1. Высшая математика для экономистов : учеб. для студентов вузов / Н. Ш. Кремер [и др.] ; под ред. Н. Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : ЮНИТИ, 2001. - 471 с.

2. В.А. Едемский, С. В. Неустроева, Ю.Ю. Петрова. Линейная алгебра, 1 часть [электронный ресурс]: метод. указания / ФГБОУ «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», Великий Новгород, 2012 г. – 36 с.-Режим доступа: www.url:novsu.bibliotech.ru

3. Ю.Ю. Петрова. Пределы и непрерывность функции [электронный ресурс]: метод. указания / ФГБОУ «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», Великий Новгород, 2012 г. – 10 с. - Режим доступа: www.url:novsu.bibliotech.ru

Задания для контрольных работ

Контрольная работа №1

В задачах 1-10 решить систему линейных алгебраических уравнений двумя способами: 1) методом Крамера; 2) с помощью обратной матрицы.

1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2 \\ x_1+5x_2-4x_3=-5 \\ 4x_1+x_2-3x_3=-4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1-x_2+x_3=6 \\ x_1+5x_2=-3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3=1 \\ x_1-2x_2+4x_3=3 \\ 3x_1-x_2+5x_3=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3=15 \\ 5x_1-3x_2+2x_3=15 \\ 10x_1-11x_2+5x_3=36 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2 \\ x_1-2x_2+x_3=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-7x_3=16 \\ 5x_1+2x_2+x_3=16 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5 \\ 2x_1-x_2-x_3=1 \\ x_1+3x_2+4x_3=6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1+8x_2+x_3=2 \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7 \\ 2x_1+x_2-x_3=-5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$

В задачах 11-20 решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

11. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1+4x_2+5x_3-3x_4=0 \\ 8x_1-6x_2+3x_3-7x_4=0 \\ 3x_1-5x_2-x_3-2x_4=0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4 \\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1-7x_2-6x_3-3x_4=0 \\ 2x_1-4x_2-x_3+x_4=0 \\ -3x_1+x_2-4x_3-5x_4=0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = 5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$

В задачах 21-30 Даны вершины треугольника ABC.

Найти: 1) длину стороны AB*; 2) уравнение стороны* AB*; 3)длину медианы* AM*; 4) уравнение медианы* AM*; 5) уравнение высоты* BH*; 6) площадь* ΔABC*; 7) угол* BAC *(в градусах); 8) уравнение прямой параллельной стороне* BC *и проходящей через точку* A*; 9) длину высоты* BH.

21. $A(1,5);\quad B(-3,2);\quad C(7,3).$
22. $A(0,5);\quad B(-3,-2);\quad C(8,3).$
23. $A(6,1);\quad B(1,-1);\quad C(-4,5).$
24. $A(-3,1);\quad B(2,3);\quad C(5,2).$
25. $A(7,0);\quad B(-3,1);\quad C(7,2.)$
26. $A(8,3);\quad B(-1,4);\quad C(82).$
27. $A(-1,3);\quad B(6,0);\quad C(3,5).$
28. $A(-4,1);\quad B(2,5);\quad C(-5,2).$
29. $A(6,3);\quad B(-4,1);\quad C(3,4).$
30. $A(-6,2);\quad B(-4,7);\quad C(0,3).$

В задачах 31-40 дана матрица А. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы А.

31. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$ 32. $\begin{pmatrix} 7 & 5 & -7 \\ -6 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$

33. $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 8 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$ 34. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & -8 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

35. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$ 36. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

37. $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

38. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

39. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

40. $\begin{pmatrix} -2 & -7 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

В задачах 41-50 найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

41. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctg\,3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+1}\right)^{2x}$

42. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-6x+7}{x^2+4x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{3x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

43. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-1}{x^2+2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x+8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x^2+5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-10}{x+1}\right)^{3x+1}$

44. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{x^2+3x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{x+4}$

45. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{8-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

46. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{4x^2-14x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+3}\right)^{x+4}$

47. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+8x+1}{2x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{x+8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-7}\right)^{x+1}$

48. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+x-1}{3x^2-2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{7-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,tgx}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{2x}$

49. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+5}{x^3-4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{6-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(8-7x)^{x/x-1}$

50. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+6x-4}{x^2-x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctg\,3x}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{2/x-3}$.

В задачах 51-60 найти производные данных функции.

51. а) $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$; б) $y=\dfrac{1}{2}arctg\,\dfrac{e^x-3}{2}$; в) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

52. а) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$; б) $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(arctg\,e^x\right)^3}$; в) $y=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$;

53. а) $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $y=\dfrac{e^{x^3}}{1+x^3}$; в) $y=2\sqrt{x}-4\ln\left(2+\sqrt{x}\right)$;

54.а) $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$; б) $y=x+\dfrac{8}{1+e^{x/4}}$; в) $y=\ln^2(x+\cos x)$;

55. а) $y=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$; б) $y=\dfrac{e^{x^2}}{1+x^2}$; в) $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$;

56.а) $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$; б) $y=arctg(e^x-e^{-x})$; в) $y=\ln\arccos\sqrt{1-e^{4x}}$;

57. а) $y=3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$; б) $y=\dfrac{1}{\ln 4}\ln\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$; в) $y=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

58. а) $y=\dfrac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$; б) $y=\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2arctg\, e^x$; в) $y=\ln^3(1+\cos x)$;

59. а) $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$; б) $y=e^{\sin x}\left(x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$; в) $y=\log_3\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$;

60. а) $y=\dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$; б) $y=x+\dfrac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$; в) $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$;

В задачах 61-70 провести полное исследование функций и построить их графики.

61. $y=\dfrac{17-x^2}{4x-5}$

62. $y=\dfrac{4x^2+9}{4x+8}$

63. $y=\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}$

64. $y=\dfrac{x^2-6x+4}{3x-2}$

65. $y=\dfrac{2x^2-6}{x-2}$

66. $y=\dfrac{4x^3-3x}{4x^2-1}$

67. $y=\dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$

68. $y=\dfrac{21-x^2}{7x+9}$

69. $y=\dfrac{3x^2-7}{2x+1}$

70. $y=\dfrac{x^2-11}{4x-3}$.

В задачах 71 – 80 для функции z = f(x,y) найти градиент и производную по направлению $\bar{a}$ в точке A.

71. $z=\ln(x^2+5y^2)$, A(-5;1), $\bar{a}=\bar{\imath}-5\bar{\jmath}$.

72. $z=\ln(2x^2+3y^2)$, A(-3;2), $\bar{a}=2\bar{\imath}-3\bar{\jmath}$.

73. $z=\ln(3x^2+2y^2)$, A(-2;3), $\bar{a}=3\bar{\imath}-2\bar{\jmath}$.

74. $z=\ln(4x^2+5y^2)$, A(-5;4), $\bar{a}=4\bar{\imath}-5\bar{\jmath}$.

75. $z = \ln(5x^2 + y^2)$, A(-1;5), $\bar{a} = 5\bar{\imath} - \bar{\jmath}$.

76. $z = \ln(6x^2 + 4y^2)$, A(-4;6), $\bar{a} = 6\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}$.

77. $z = \ln(7x^2 + 5y^2)$, A(-5;7), $\bar{a} = 7\bar{\imath} - 5\bar{\jmath}$.

78. $z = \ln(8x^2 + 2y^2)$, A(-2;8), $\bar{a} = 8\bar{\imath} - 2\bar{\jmath}$.

79. $z = \ln(9x^2 + 3y^2)$, A(-3;9), $\bar{a} = 9\bar{\imath} - 3\bar{\jmath}$.

80. $z = \ln(10x^2 + y^2)$, A(-1;10), $\bar{a} = 10\bar{\imath} - \bar{\jmath}$.

В задачах 81 – 90 найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x,y) в области ограниченной неравенствами.

81. $z = 4x^2 + y^2 - 4x - 10y + 26;$

$x \geq 0; \quad 5x - y \leq 0; \quad x + y - 6 \leq 0.$

82. $z = 4x^2 + y^2 - 8x - 6y + 13;$

$x \geq 0; \quad 3x - 2y \leq 0; \quad x + y - 5 \leq 0.$

83. $z = 4x^2 + y^2 - 12x - 4y + 13;$

$x \geq 0; \quad 2x - 3y \leq 0; \quad x + y - 5 \leq 0.$

84. $z = 4x^2 + y^2 - 16x - 8y + 32;$

$x \geq 0; \quad 4x - 4y \leq 0; \quad x + y - 8 \leq 0.$

85. $z = 4x^2 + y^2 - 20x - 2y + 26;$

$x \geq 0; \quad x - 5y \leq 0; \quad x + y - 6 \leq 0.$

86. $z = 4x^2 + y^2 - 24x - 8y + 52;$

$x \geq 0; \quad 4x - 6y \leq 0; \quad x + y - 10 \leq 0.$

87. $z = 4x^2 + y^2 - 28x - 10y + 74;$

$x \geq 0; \; 5x - 7y \leq 0; \; x + y - 12 \leq 0.$

88. $z = 4x^2 + y^2 - 32x - 4y + 68;$

$x \geq 0; \; 2x - 8y \leq 0; \; x + y - 10 \leq 0.$

89. $z = 4x^2 + y^2 - 36x - 6y + 90;$

$x \geq 0; \; 3x - 9y \leq 0; \; x + y - 12 \leq 0.$

90. $z = 4x^2 + y^2 - 40x - 2y + 101;$

$x \geq 0; \; x - 10y \leq 0; \; x + y - 11 \leq 0.$