

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессио-
нального образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

Числовые ряды

В. Новгород

2011

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессио-
нального образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»

Числовые ряды

Методические указания

В. Новгород

2011

УДК 389.17

Печатается по решению

РИС НовГУ

Рецензенты

Канд. ф.-м. наук, доцент В.А. Едемский

Числовые ряды: метод. указания. - 2-е. изд., стер. / Авт.-сост. С.А. Цапаева; ФГБОУ ВПО «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», Великий Новгород, 2011. – 49с.

Рассматриваются основные теоретические сведения, связанные с теорией числовых рядов, подробно разобраны практические примеры.

Приведены задания для самостоятельной работы.

Методические указания предназначены для студентов 2-го курса технических специальностей.

УДК 389.17

© ФГБОУ ВПО «Новгородский
государственный университет
имени Ярослава Мудрого», 2011
© Цапаева С.А., составление 2011

ВВЕДЕНИЕ

Теория числовых рядов является одной из основных тем в математическом образовании инженера, особенно электротехнических и радиотехнических специальностей.

Методические указания содержат основные теоретические сведения по теории числовых рядов и подробные решения задач по всем разделам данной темы.

Приведены задания для расчетно-графических работ по изучаемой теме для самостоятельной работы студентов.

§1. Основные положения теории числовых рядов

Основные понятия

Определение 1. Пусть задана бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. Выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

называется числовым рядом, а сами числа $u_1, \dots, u_n$ — членами ряда.

Вместо (1), пользуясь символом суммы, пишут $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где n пробегает все значения от 1 до ∞ (нумерацию членов ряда иногда удобнее начинать не с единицы, а с нуля или с какого-либо натурального числа, большего единицы).

Определение 2. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется n -ой частичной суммой ряда:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Рассмотрим частичные суммы:

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1, \\ S_2 &= u_1 + u_2, \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n. \end{aligned}$$

Определение 3. Если $\exists$ конечный предел $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, то его называют суммой ряда (1) и говорят, что ряд сходится.

В противном случае (т.е. если $s \rightarrow \pm\infty$ при $n \rightarrow \infty$ или предел не существует) ряд называется расходящимся и суммы не имеет.

Пример1. Простейшим примером ряда является геометрическая прогрессия с первым членом a ($a \neq 0$) и знаменателем q

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (2)$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна (при $q \neq 1$)

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} \text{ или } s_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

$$1) \text{ Если } |q| < 1, \text{ то } q^n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}.$$

Значит, при $|q| < 1$ ряд (2) сходится и его сумма равна $s = \frac{a}{1 - q}$.

$$2) \text{ Если } |q| > 1, \text{ то } |q^n| \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ и тогда } \frac{a - aq^n}{1 - q} \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ т.е.}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ не существует. Значит, при $|q| > 1$ ряд (2) расходится.

3) Если $q = 1$, то ряд (2) имеет вид

$$a + a + \dots + a + \dots$$

В этом случае $s_n = na$; $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

4) Если $q = -1$, то ряд (2) имеет вид

$$a - a + a - a + \dots$$

В этом случае

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном;} \\ a & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Значит, s_n предела не имеет и ряд (2) расходится.

Таким образом, геометрическая прогрессия (с первым членом, отличным от нуля) сходится тогда и только тогда, когда знаменатель прогрессии по абсолютной величине меньше единицы.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ где } u_n = \frac{1}{n(n+1)}. \quad (3)$$

Частичная сумма этого ряда (т.к. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$)

$$\begin{aligned} s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

имеет предел при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, ряд (3) сходится.

Пример 3. Рассмотрим гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (4)$$

(каждый член его, начиная со второго, представляет собой среднее гармоническое двух соседних членов).

Рассмотрим частичную сумму этого ряда с номером 2^k :

$$s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k}.$$

Разобьем ее на части и применим к каждой из них очевидное неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

получим:

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}^{2 \text{ слагаемых}} + \overbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}^{4 \text{ слагаемых}} + \dots + \overbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}^{2^{k-1} \text{ слагаемых}} > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k-1} = 1 + \frac{k}{2} = \frac{k+2}{2}. \end{aligned}$$

Мы видим, что частичные суммы образуют возрастающую неограниченную сверху последовательность и, значит, гармонический ряд расходится.

Основные теоремы

I. Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Доказательство. Так как ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

сходится, то имеют место равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s, \text{ где } s - \text{сумма ряда.}$$

Вычитая из первого равенства второе почленно, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0.$$

Так как $s_n - s_{n-1} = u_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Подчеркнем, что рассмотренный признак не является достаточным, т.е. из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ не следует, что ряд сходится, — он может и расходиться.

Примером этого служит рассмотренный выше гармонический ряд: он расходится, хотя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Следствие. Если n -ый член ряда не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то ряд расходится.

II. Критерий сходимости ряда

Определение. k - остаточным рядом для ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ называется ряд, который получается в результате отбрасывания k первых его членов:

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n + \dots$$

Теорема. Для того, чтобы сходился ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился любой его k - остаточный ряд

$$u_{k+1} + \dots + u_n + \dots$$

Иными словами, отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение в начале его нескольких новых членов не отражается на поведении ряда в смысле его сходимости или расходимости.

Доказательство. Пусть $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ – частичная сумма ряда (1), c_k – сумма k отброшенных членов, σ_{n-k} – сумма членов ряда, входящих в s_n и не входящих в c_k . Тогда имеем

$$s_n = c_k + \sigma_{n-k},$$

где c_k – постоянное число, не зависящее от n .

Из последнего соотношения следует, что:

$$1) \text{ если } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k}, \text{ то } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

$$2) \text{ если } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \text{ то } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k},$$

что доказывает справедливость теоремы.

III. Если ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (5)$$

сходится и его сумма равна s , то ряд

$$cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots, \quad (6)$$

где c – какое либо число, также сходится и его сумма равна cs .

Доказательство. Обозначим n -ую частичную сумму ряда (5) через s_n , а ряда (6) через σ_n . Тогда

$$\sigma_n = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = cs_n.$$

Значит, предел n -ой частичной суммы σ_n существует, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cs_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = cs.$$

Ряд (6) сходится и его сумма равна cs .

IV. Если ряды

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (7)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (8)$$

сходятся и их суммы, соответственно, равны $\bar{s}$ и $\bar{s}$, то ряды

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots, \quad (9)$$

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \dots + (u_n - v_n) + \dots \quad (10)$$

также сходятся и их суммы, соответственно, равны

$$\bar{s} + \bar{s} \quad \text{и} \quad \bar{s} - \bar{s}.$$

Доказательство. Обозначая частичную сумму ряда (9) через σ_n , а частичные суммы рядов (7) и (8) через $\bar{s}_n$, $\bar{s}_n$, получим

$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) = (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \bar{s}_n + \bar{s}_n.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{s}_n + \bar{s}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_n = \bar{s} + \bar{s}.$$

Таким образом, ряд (9) сходится и его сумма равна $\bar{s} + \bar{s}$.

Аналогично доказывается, что ряд (10) сходится и его сумма равна $\bar{s} - \bar{s}$.

§ 2. Положительные ряды

Рассмотрим вопрос о сходимости рядов, члены которых неотрицательны, для краткости такие ряды будем называть просто положительными.

Признаки сравнения рядов с положительными членами

Пусть даны два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (2)$$

Теорема 1. Если, начиная с некоторого n , выполняется неравенство

$$0 \leq a_n \leq b_n,$$

то: 1) из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1);

2) из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство. На основании того, что отбрасывание конечного числа начальных членов ряда не отражается на его поведении, мы можем считать, не нарушая общности, что $a_n \leq b_n$ при всех значениях $n = 1, 2, 3, \dots$

Обозначим через s_n и σ_n , соответственно, частичные суммы первого и второго рядов:

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i; \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^n b_i$$

1) Из условия (3) следует, что

$$s_n \leq \sigma_n. \quad (4)$$

Так как ряд (2) сходится, то существует предел σ последовательности частичных сумм $\{\sigma_n\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma.$$

Из того, что члены рядов (1) и (2) $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, следует, что $\sigma_n \leq \sigma$, и тогда в силу неравенства (4)

$$s_n \leq \sigma.$$

Мы показали, что частичные суммы s_n ограничены. При увеличении n частичная сумма s_n не убывает. А из того, что последовательность частичных сумм не убывает и ограничена сверху, следует, что она имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Это означает, что ряд (1) сходится; причем очевидно, что $s \leq \sigma$.

2) Так как члены ряда (1) $a_n \geq 0$, то его частичная сумма s_n не убывает при возрастании n , а так как он расходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

В силу условия (4) и последовательность частичных сумм ряда (2) $\{\sigma_n\}$ неограничена. Значит, ряд (2) расходится.

Пример 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

сходится, т.к. его члены при $\forall n \geq 2$ не больше соответствующих членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Последний ряд сходится, так как его члены образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Для исследования на сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

сравним его с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ при любом натуральном n и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то расходящимся является и данный ряд.

Теорема 2. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \quad (0 < A < +\infty),$$

то оба ряда (1) и (2) ведут себя одинаково, т.е. либо сходятся, либо расходятся одновременно. (Предполагаем, что $b_n \neq 0$).

Доказательство.

1) Пусть существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

По определению предела: для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N , зависящее от ε , что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - A \right| < \varepsilon. \quad (5)$$

Перепишем неравенство (5) в виде

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - A < \varepsilon \quad \text{или}$$

$$(A - \varepsilon)b_n < a_n < (A + \varepsilon)b_n.$$

Пусть ряд (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и $A < +\infty$, тогда сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A + \varepsilon)b_n,$$

полученный умножением его членов на постоянное число $A + \varepsilon$. Отсюда по теореме 1 следует сходимость ряда (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Пусть ряд (2) расходится и $A > 0$. В этом случае отношение $\frac{b_n}{a_n}$ имеет

конечный предел.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, так как в противном случае, если бы он сходил, то

сходил бы и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n+3}.$$

Решение. Сравним его с расходящимся гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{5n+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{5n+3} = \frac{2}{5}$, то по теореме 2 данный ряд расходится.

Теорема 3. Если, начиная с некоторого номера n , выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (6)$$

(предполагаем, что $a_n \neq 0$; $b_n \neq 0$), то

- 1) из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1);
- 2) из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство. Предположим, что неравенство (6) выполняется при любом n , тогда

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}; \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1} \text{ или } a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n \quad (n=1,2,\dots).$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$ получается из ряда (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ умножением его членов на постоянную $\frac{a_1}{b_1}$, то он одновременно с рядом (2) или сходится или расходится.

Применяя теперь теорему 1, убеждаемся в справедливости доказываемой теоремы.

Признаки Даламбера

Теорема 1. Рассмотрим ряд с положительными членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (a_n > 0).$$

1) Если, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, то ряд сходится.

2) Если, начиная с некоторого номера, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.

Доказательство.

1) Предположим, что неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$$

выполняется с $n=1$, так как отбрасывание первых членов ряда не влияет на сходимость.

Запишем это неравенство для разных значений n :

$$\frac{a_2}{a_1} \leq q \text{ или } a_2 \leq a_1 q;$$

$$\frac{a_3}{a_2} \leq q \text{ или } a_3 \leq a_2 q \leq a_1 q^2;$$

... ..

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq q \text{ или } a_n \leq a_{n-1} q \leq \dots \leq a_1 q^{n-1}.$$

Рассмотрим два ряда:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (1)$$

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots \quad (2)$$

Ряд (2) есть геометрическая прогрессия с положительным знаменателем $q < 1$. Следовательно, этот ряд сходится. Члены ряда (1) не больше соответствующих членов ряда (2). На основании первого признака сравнения следует, что ряд (1) сходится.

2) Если же $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ при любом n , то

$$a_2 \geq a_1,$$

$$a_3 \geq a_2 \geq a_1,$$

... ..

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_1.$$

Значит, a_n не может стремиться к 0. Нарушается необходимое условие сходимости ряда. Ряд (1) расходится.

Теорема 2 (предельный признак Даламбера). Если в ряде (1) с положительными членами отношение $(n+1)$ -ого члена к n -ому при $n \rightarrow \infty$ имеет конечный предел l , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, \text{ то} \quad (3)$$

- 1) ряд сходится в случае $l < 1$;
- 2) ряд расходится в случае $l > 1$;
- 3) в случае $l = 1$ ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда теорема не дает.

Доказательство.

- 1) Пусть $l < 1$. Рассмотрим число q , удовлетворяющее соотношению

$$l < q < 1.$$

Из определения предела и соотношения (3) следует, что для всех n , начиная с некоторого номера N , будет иметь место неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q. \quad (4)$$

Действительно, так как величина $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ стремится к пределу l , то разность между величиной $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ и числом l может быть сделана (начиная с некоторого номера N) по абсолютному значению меньше любого положительного числа, в частности меньше $q - l$, т.е.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < q - l.$$

Из последнего неравенства и следует неравенство (4). В силу предыдущей теоремы, так как $q < 1$, следует сходимость ряда (1).

- 2) Пусть $q > 1$. Тогда из равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad (l > 1)$$

следует, что, начиная с некоторого номера N , т.е. для $n > N$, будет иметь место неравенство

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < l - 1 \quad \text{или} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

По теореме 1 это означает, что ряд (1) расходится.

Замечание. Ряд (1) расходится и в том случае, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty.$$

Это следует из того, что в этом случае, начиная с некоторого $n > N$, будет иметь место неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Решение. Так как $a_n = \frac{1}{n!}$; $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, то

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$, ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}.$$

Решение. Так как $a_n = \frac{2^n}{n}$; $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2 > 1.$$

Ряд расходится.

Пример 3. Применяя предельный признак Даламбера к гармоническому

ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, имеем

$$a_n = \frac{1}{n}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Значит, на основании предельного признака Даламбера нельзя установить сходимость или расходимость рассматриваемого ряда. Ранее было установлено, что этот ряд расходится.

Пример 4. Предельный признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

так как

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

Ранее было показано, что частичная сумма n первых членов этого ряда равна

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

и имеет предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, значит, ряд сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} = 1.$

Предельный признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда, но так как

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1 \text{ для всех } n,$$

то данный ряд расходится.

Признаки Коши

Теорема 1. Пусть имеется ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (a_n \geq 0).$$

1) Если, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,$$

то ряд сходится.

2) Если, начиная с некоторого номера,

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1,$$

то ряд расходится.

Доказательство.

1) Предположим, что неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

выполняется с $n = 1$.

Запишем это неравенство для разных значений n :

$$\begin{aligned} a_1 &\leq q; \\ \sqrt{a_2} &\leq q \text{ или } a_2 \leq q^2; \\ \sqrt[3]{a_3} &\leq q \text{ или } a_3 \leq q^3; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ \sqrt[n]{a_n} &\leq q \text{ или } a_n \leq q^n. \end{aligned}$$

Рассмотрим два ряда:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (1)$$

$$q + q^2 + \dots + q^n + \dots \quad (2)$$

Ряд (2) есть геометрическая прогрессия с положительным знаменателем $q < 1$. Следовательно, этот ряд сходится. Члены ряда (1) не больше соответствующих членов ряда (2). На основании первого признака сравнения приходим к выводу, что ряд (1) сходится.

2) Если при любом n выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то

$$\begin{aligned} a_1 &\geq 1; \\ \sqrt{a_2} &\geq 1 \text{ или } a_2 \geq 1; \\ \sqrt[3]{a_3} &\geq 1 \text{ или } a_3 \geq 1; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ \sqrt[n]{a_n} &\geq 1 \text{ или } a_n \geq 1. \end{aligned}$$

Ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

Теорема 2 (предельный признак Коши). Если для ряда с положительными членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

величина $\sqrt[n]{a_n}$ имеет конечный предел l при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l, \quad (3)$$

то:

- 1) в случае $l < 1$ ряд сходится;
- 2) в случае $l > 1$ ряд расходится;
- 3) в случае $l = 1$ требуются дополнительные исследования.

Доказательство.

1) Пусть $l < 1$. Рассмотрим число q , удовлетворяющее соотношению $l < q < 1$.

По определению предела и из соотношения (3) имеем: $\forall \varepsilon > 0$ (в том числе и $\varepsilon = q - l$) $\exists N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| < \varepsilon \text{ или } \left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| < q - l.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\sqrt[n]{a_n} < q.$$

В силу теоремы 1, т.к. $q < 1$, следует сходимость ряда (1).

2) Пусть $l > 1$. Тогда из равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

следует, что, начиная с некоторого номера N , т.е. для всех $n > N$, выполняется неравенство

$$\left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| < l - 1.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt[n]{a_n} > 1.$$

По теореме 1 это означает, что исходный ряд расходится.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^n.$$

Решение. Применим предельный признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Значит, ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

Решение. По предельному признаку Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1,$$

ряд расходится.

Пример 3. Как и в признаке Даламбера, случай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

требует дополнительных исследований. Среди рядов, удовлетворяющих этому условию, могут быть как сходящиеся, так и расходящиеся ряды.

Так, для гармонического ряда (известно, что он расходится)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ также имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

но он сходится, так как, если отбросим первый член, то члены оставшегося ряда будут меньше соответствующих членов сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Отметим, что во всех случаях, когда признак Даламбера дает ответ на вопрос о поведении ряда, ответ может быть получен и с помощью признака Коши. Обратное утверждение неверно: признак Коши сильнее признака Даламбера.

Интегральный признак сходимости ряда

Пусть члены ряда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \tag{1}$$

положительны и не возрастают, т.е.

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots,$$

и пусть $f(x)$ – такая непрерывная невозрастающая функция, что

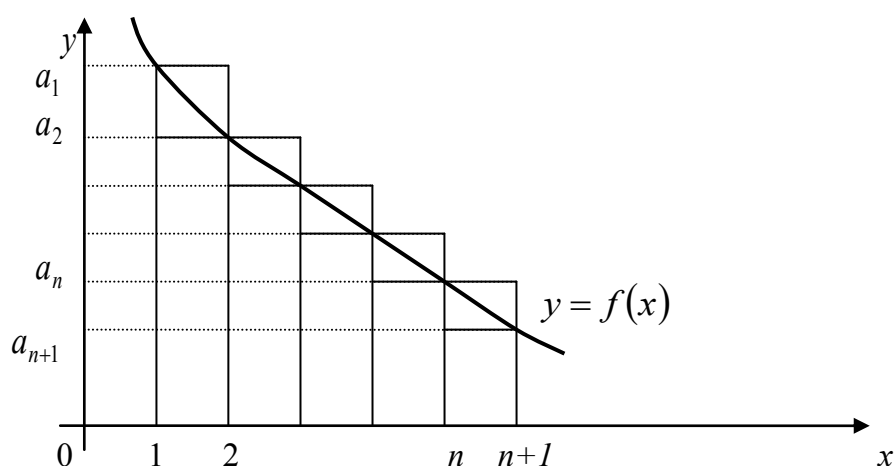
$$f(1) = a_1; \quad f(2) = a_2; \quad \dots; \quad f(n) = a_n, \dots \tag{2}$$

Тогда:

- 1) если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд (1);
- 2) если этот интеграл расходится, то расходится и ряд (1).

Доказательство. Изобразим члены ряда геометрически, откладывая по оси абсцисс номера $1, 2, \dots, n, n+1$ членов ряда, а по оси ординат – значения членов ряда $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$.

На этом же чертеже построим график непрерывной невозрастающей функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условию (2).



Найдем площади построенных ступенчатых фигур. Площадь ступенчатой фигуры над графиком функции $y = f(x)$ равна сумме площадей прямоугольников, у которых основания равны 1, и высоты a_n . Сумма площадей этих n прямоугольников равна сумме s_n первых n членов ряда. Площадь области, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = 1$; $x = n + 1$; $y = 0$; равна

$\int_1^{n+1} f(x)dx$. Следовательно,

$$s_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx. \quad (3)$$

Площадь ступенчатой фигуры, содержащейся внутри криволинейной фигуры, равна сумме площадей прямоугольников с основаниями 1 и высотами $a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$, т.е. равна $s_{n+1} - a_1$. Следовательно,

$$s_{n+1} - a_1 \leq \int_1^{n+1} f(x) dx,$$

$$s_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x) dx + a_1. \quad (4)$$

1) Пусть $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, т.е. имеет конечное значение.

Так как

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < \int_1^{+\infty} f(x) dx,$$

то в силу неравенства (4)

$$s_n \leq s_{n+1} < \int_1^{+\infty} f(x) dx + a_1.$$

Значит, s_n ограничена при любом n . При возрастании n частичная сумма возрастает, так как члены ряда положительны. Следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

т.е. ряд (1) сходится.

2) Если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то $\int_1^{n+1} f(x) dx$ неограниченно возрастает при возрастании n .

В силу неравенства (3) s_n также неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$, т.е. ряд (1) расходится.

Замечание. Теорема остается справедливой, если условия $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ выполняются, начиная с некоторого N .

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$.

Решение. Применим интегральный признак, положив $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

Все условия теоремы выполнены. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^b = \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - 1) & \text{при } p \neq 1; \\ \ln x \Big|_1^b = \ln b & \text{при } p = 1. \end{cases}$$

Устремим b к бесконечности, выясним, сходится ли несобственный интеграл, а вместе с ним и ряд, при различных p .

1) Если $p > 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$, т.е. интеграл сходится, и, следовательно, ряд

сходится.

2) Если $p < 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty$, следовательно, и ряд расходится.

3) При $p = 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, ряд также расходится.

§ 3. Знакопеременные ряды

Определение. Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные члены.

Теорема 1. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Если знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

удовлетворяет условию, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (2)$$

сходится, то и данный ряд также сходится.

Доказательство. Обозначим через s_n и σ_n частичные суммы n первых членов ряда (1) и (2).

Пусть s'_n – сумма всех положительных, s''_n – сумма абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов данного ряда (1), тогда

$$s_n = s'_n - s''_n; \quad \sigma_n = s'_n + s''_n.$$

По условию, так как ряд (2) сходится, σ_n имеет предел σ . Последовательности s'_n, s''_n являются возрастающими последовательностями, очевидно, меньшими σ . Следовательно, они имеют пределы s' и s'' .

Из соотношения $s_n = s'_n - s''_n$ следует, что s_n имеет предел, равный $s' - s''$, т.е. знакопеременный ряд (1) сходится.

Определение. Знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2)$$

Если же знакопеременный ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то данный ряд (1) называется условно или неабсолютно сходящимся.

С помощью понятия абсолютной сходимости теорему 1 можно сформулировать следующим образом: любой абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.

Для исследования на абсолютную сходимость ряда (1) можно использовать для ряда (2) известные признаки сходимости положительных рядов. В частности, ряд (1) сходится абсолютно, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1,$$

В общем случае из расходимости ряда (2) не следует расходимость ряда (1). Но, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1 \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} > 1$$

то расходится не только ряд (2) но и ряд (1).

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}, \quad \alpha - \text{любое число.}$$

Решение. Рассмотрим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right|.$$

Так как $\left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ при любом n , а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right|$. Следовательно, данный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Отметим без доказательства свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Теорема 2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, то ряд, полученный при любой перестановке его членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму, что и первоначальный ряд.

Теорема 3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то в результате перестановки его членов можно получить ряд, сумма которого равна любому наперед заданному числу. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что полученный ряд окажется расходящимся.

§ 4. Знакопередающие ряды

Рассмотрим теперь ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, т.е. ряды вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots,$$

где $u_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Знакопередающие ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

Теорема Лейбница

Знакопередающийся ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots \quad (u_n \geq 0) \quad (1)$$

сходится, если абсолютные величины его членов не возрастают, а общий член стремится к нулю, т.е. если выполняются следующие два условия:

$$1) u_1 \geq u_2 \geq \dots u_n \geq \dots, \quad (2)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Частичную сумму четного порядка s_{2m} первых $2m$ членов ряда (1) можно записать в виде:

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Из условия (2) следует, что выражение в каждой скобке есть неотрицательное число. Значит, сумма s_{2m} неотрицательна и с возрастанием m не убывает.

Перепишем s_{2m} так:

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Так как каждая из скобок неотрицательна, то, следовательно $s_{2m} \leq u_1$.

Итак, s_{2m} при возрастании m не убывает и ограничена сверху. Значит, существует конечный предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = s.$$

Мы доказали, что последовательность четных частичных сумм имеет предел, равный s . Покажем, что частичные суммы нечетного порядка также стремятся к пределу s .

Частичная сумма $2m+1$ первых членов ряда равна

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}.$$

По условию (3) теоремы, $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$, поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = s.$$

Доказано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ как при четном, так и при нечетном n . Значит, ряд (1) сходится.

Замечание 1. Теорема Лейбница остается справедливой, если неравенства (2) выполняются начиная с некоторого номера N .

Замечание 2. При доказательстве теоремы мы видели, что четные частичные суммы s_{2m} приближаются к сумме s ряда не убывая.

Написав s_{2m-1} в виде

$$s_{2m-1} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}),$$

легко установить, что нечетные частичные суммы стремятся к s не возрастаая.

Таким образом,

$$s_{2m} \leq s \leq s_{2m-1}.$$

В частности,

$$0 \leq s \leq u_1.$$

Замечание 3. Дадим оценку для n -остаточного ряда рассматриваемого ряда.

Нетрудно видеть, что

$$R_n = (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots).$$

Таким образом, остаток ряда лейбницевского типа имеет знак своего первого члена и не больше его по абсолютной величине. Ошибка, совершаемая при замене s на s_n , не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов.

Замечание 4. 1) Для сходимости знакопеременующегося ряда не достаточно, чтобы его общий член стремился к нулю. Признак Лейбница утверждает лишь, что знакопеременующийся ряд сходится, если абсолютная величина общего члена ряда стремится к нулю монотонно.

Так, например, ряд

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{3^n} + \dots$$

расходится, несмотря на то, что его общий член стремится к нулю.

Действительно, $s_{2n} = s'_n + s''_n$, где

$$s'_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$s_n'' = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}\right),$$

причем

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n' = \infty$ (s_n' – частичная сумма гармонического ряда);

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n''$ существует и конечен (s_n'' – частичная сумма сходящейся геометрической прогрессии).

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \infty$.

2) Для сходимости знакочередующегося ряда выполнение признака Лейбница не необходимо: знакочередующийся ряд может сходиться, если абсолютная величина его общего члена стремится к нулю не монотонно.

Например, ряд

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \dots$$

сходится абсолютно, но признак Лейбница не выполнен: абсолютная величина общего члена ряда стремится к нулю, но не монотонно.

Пример 1. Знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

является условно сходящимся, так как ряд, составленный из абсолютных величин, есть гармонический ряд, который расходится. Сам же ряд согласно признаку Лейбница сходится, так как

$$1) \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \text{ при любом } n,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{10^n}\right).$$

Решение.

1) Первое условие в теореме Лейбница выполняется, т.к. $1,1 > 1,01 > 1,001 > \dots$;

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{10^n} \right) = 1 \neq 0.$$

Ряд расходится, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

§ 5. Ряды с комплексными членами

Определение 1. Рассмотрим последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, \dots$, где $z_n = a_n + ib_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Комплексное число $c = a + bi$ называется пределом последовательности $z_1, z_2, \dots$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что все значения z_n с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $|z_n - c| < \varepsilon$.

Пишем в этом случае: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$.

Необходимое и достаточное условие существования предела последовательности комплексных чисел состоит в следующем: число $c = a + ib$ является пределом последовательности комплексных чисел

$$a_1 + ib_1, \quad a_2 + ib_2, \quad \dots, \quad a_n + ib_n, \quad \dots$$

тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$; $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Определение 2. Ряд

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots,$$

членами которого являются комплексные числа, называется сходящимся, если частичная сумма ряда s_n при $n \rightarrow \infty$ имеет конечный предел. В противном случае ряд называется расходящимся.

Так же как и для рядов с вещественными членами, легко установить следующие теоремы.

1. Сходимость ряда не изменится, если отбросить конечное число его начальных членов или присоединить в начале его несколько членов.

2. Остаток сходящегося ряда стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

3. Общий член z_n сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

4. Если все члены сходящегося ряда умножить на одно и тоже число, то новый ряд будет сходиться, а его сумма будет равна сумме данного ряда, умноженной на это же число.

5. Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ и их суммы равны s_1 и s_2 , то сходятся и

ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n)$ и их суммы равны $s_1 \pm s_2$.

Исследование сходимости ряда с комплексными членами можно свести к исследованию сходимости двух рядов с вещественными членами на основании следующей теоремы.

Теорема. Для сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \text{ где } z_n = a_n + ib_n \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots, \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots \quad (3)$$

Если суммой ряда (2) является число s' , а суммой ряда (3) число s'' , то суммой ряда (1) служит комплексное число $s = s' + is''$.

Действительно, $s_n = s'_n + is''_n$, где

$$s'_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad s''_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

и теорема следует из теоремы о пределе последовательности комплексных чисел.

Теорема. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, составленный из модулей членов ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, то и данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится.

Доказательство. Имеем

$$|a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |z_n|; \quad |b_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |z_n|.$$

По признаку сравнения заключаем, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ сходятся. Но

тогда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Теорема доказана.

Определение. Если сходится не только ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, но и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, то данный ряд называется абсолютно сходящимся.

Определение. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ расходится, то данный ряд называется условно или неабсолютно сходящимся.

Для исследования на сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ используются признаки сходимости положительных рядов.

Приложение

Задание 1. Найти сумму ряда.

1.1
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$$

1.2
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}$$

1.3
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$$

1.4
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}$$

1.5
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15}$$

1.6
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 7n - 12}$$

1.7
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$$

1.8
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$$

1.9
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$$

1.10
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}$$

1.11
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}$$

1.12
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}$$

1.13
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}$$

1.14
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$

1.15
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2^{n+1}}}$$

1.16
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}$$

1.17
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35}$$

1.18
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 6^n}{(3 \cdot 4)^{2n}}$$

1.19
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20}$$

1.20
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 - 5n - 6}$$

1.21
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15}$$

1.22
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}$$

1.23
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

1.24
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}$$

1.25
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 35n - 6}$$

1.26
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}$$

$$1.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 5^n}{10^n}$$

$$1.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12}$$

$$1.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 - 12n - 35}$$

$$1.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}$$

Задание 2. Найти сумму ряда.

$$2.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$2.3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n-1)(n+2)}$$

$$2.5 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-2}{(n-1)(n+2)n}$$

$$2.7 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+5}{(n+2)(n^2-1)}$$

$$2.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-n}{(n+3)(n+1)n}$$

$$2.11 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+5}{(n+2)(n^2-1)}$$

$$2.13 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m-1}{m} \right)^n$$

$$2.15 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-5}{n(n^2-1)}$$

$$2.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+3)(n+2)}$$

$$2.19 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$$

$$2.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$$

$$2.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$$

$$2.4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$$

$$2.6 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-4)}$$

$$2.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

$$2.14 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n+1}{(n-1)n(n+1)}$$

$$2.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$2.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$$

$$2.22 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n^2-1)}$$

$$2.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$$

$$2.25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n(n+1)(n+3)}$$

$$2.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n(n-1)(n+1)}$$

$$2.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2.30 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n-1)(n-2)}$$

Задание 3. Доказать расходимость ряда, используя необходимое условие сходимости.

$$3.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2n - 7}{7n^2 + 10n - 1}$$

$$3.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{10}(3n+2)^{20}}{(2n-1)^{30}}$$

$$3.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[9]{n^7} + \sqrt[9]{n^5} + 1}{\sqrt[7]{n^5} + \sqrt[7]{n^3} - 1}$$

$$3.7 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - 3^n + 4^n}{2^{2n} + 2^n + 1}$$

$$3.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2} - n}{\sqrt[3]{n+1} + n}$$

$$3.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3} + \sqrt{n} - 1}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n} + 2}$$

$$3.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$$

$$3.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[7]{n^5} + \sqrt[3]{n+1} + 1}{2\sqrt[3]{n^2} - 1}$$

$$3.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)(n^2+4)}{2n^4+1}$$

$$3.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n + 7^{n-1}}{7^{n+1}}$$

$$3.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^5 - 4n^4 + 1}{1 - 4n^3 + 7n^4}$$

$$3.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^4} + n + 1}{\sqrt[3]{n^2} + 4n - 2}$$

$$3.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{(2n+1)^5}$$

$$3.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{6n^6} + \sqrt{2n^2} + 1}{\sqrt{5n^5} + \sqrt{3n^3} + 3}$$

$$3.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5^n + 3^{2n+1}}{8^n}$$

$$3.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3 + 1}$$

$$3.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 3}{\sqrt[3]{n^4} + 2n - 1 + \sqrt{n}}$$

$$3.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)(3n+1)(4n+1)}{1 - 3n^4}$$

$$3.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt[4]{n} - 2 + \sqrt[6]{n}}{2\sqrt[4]{n} + 1 + \sqrt[7]{n}}$$

$$3.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n - 5^{n+1}}{3^{2n+1}}$$

$$3.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt[3]{2n+1}}$$

$$3.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{3^n + 5^n}$$

$$3.25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[11]{n^8} + \sqrt[9]{n^7} + 1}{\sqrt[10]{n^7} + \sqrt[7]{n^5} - 1}$$

$$3.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \ln 2 + 7}{2n^7 + \ln 7}$$

$$3.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[6]{n^2} - 3n + 2}{\sqrt[4]{n^3} + 3n + 1}$$

$$3.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2^n + 3^n}{2 \cdot 3^n + 2^n + 1}$$

$$3.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}{4n^4 + 1}$$

$$3.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{13^n - 5 \cdot 7^{11}}{4^{2n+1}}$$

$$3.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3} - n + 3}{\sqrt[3]{n^2} + 2n + 3}$$

$$3.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^n + 3 \cdot 5^n}{3^{n-1}}$$

Задание 4. Доказать расходимость ряда, используя необходимое условие сходимости.

$$4.1 \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \sin \frac{1}{\ln n}$$

$$4.3 \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + 1)n$$

$$4.5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{3n-1}$$

$$4.7 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \sin \frac{1}{10n}$$

$$4.9 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{2} \cdot \sin \frac{3}{n^3} \cdot n^3$$

$$4.11 \sum_{n=2}^{\infty} \ln(1+n) \sin \frac{1}{\ln n}$$

$$4.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2}$$

$$4.15 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n - 1}{3^n + 1}$$

$$4.2 \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin \frac{1}{3+10n}$$

$$4.4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^2 + 1}$$

$$4.6 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$4.8 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}$$

$$4.10 \sum_{n=1}^{\infty} (n^3 - 1) \ln \frac{2n^3}{2n^3 + 5}$$

$$4.12 \sum_{n=1}^{\infty} \arccos(-1)^n$$

$$4.14 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n - 3^n}{5^n + 4^n}$$

$$4.16 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{2}$$

$$4.17 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) \ln \left(1 + \frac{1}{3n-1} \right)$$

$$4.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n+1} \sin \frac{\pi n}{2}$$

$$4.21 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{n+10} \cos \frac{\pi n}{6} \right)$$

$$4.23 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2+1) \ln \frac{n^2+1}{n^2}$$

$$4.25 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n - 3^n}{5^n + 3^n}$$

$$4.27 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n-1}{n+2} \sin \frac{\pi n}{2} \right)$$

$$4.29 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{7n-4}$$

$$4.18 \sum_{n=2}^{\infty} \ln n \arcsin \frac{1}{\ln n}$$

$$4.20 \sum_{n=1}^{\infty} 3^{(-1)^n \cdot n}$$

$$4.22 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2+1) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n^2} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$4.24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2} \right)$$

$$4.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin \frac{\pi n}{2}}{3^n + 2^n}$$

$$4.28 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2+1) \arcsin \frac{1}{n^2+1}$$

$$4.30 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+3}{2n+1} \right)^{n+2}$$

Задание 5. Исследовать на сходимость сравнением с геометрической прогрессией.

$$5.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2+2n)}{\pi^n}$$

$$5.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{7^n + \sqrt{n+3}}$$

$$5.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{5^n + 3^n}$$

$$5.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{2^n + \ln n}$$

$$5.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^2 - 2}{4^n + n^2 + 1}$$

$$5.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+3)5^{3n-1}}$$

$$5.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1} + 3}{(2n+3)5^{3n-1}}$$

$$5.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1} - 5}{10^{n+1} - 6}$$

$$5.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^{2n+1}(n^2+2)}$$

$$5.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arccos \frac{2}{2n+3}}{3^n + \sqrt{n}}$$

$$5.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n + 3^{n+1}}{6^n - 2^{n+1}}$$

$$5.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2 + n - 1)}{3^n + n^2}$$

$$5.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2n + 1)}{(1 + \sqrt{3})^{n-1}}$$

$$5.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3}{(n^2 + 1)(0,1)^n}$$

$$5.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(3n - 1)}{(1 + \sqrt{2})^n}$$

$$5.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - n^2 + 4}{6^n + n^2 - 4}$$

$$5.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos n + 3}{2^{n+2}}$$

$$5.25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \ln(n+1)}{5^{n+1}}$$

$$5.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1} \ln(n+1)}$$

$$5.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} + n^2 - 5}{3^n - n^2 + 30}$$

$$5.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - n^2 + 10}{3^n + n^2 - 10}$$

$$5.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{4^{n-1}}$$

$$5.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^{n-1}}{6^n - 2^{n+1}}$$

$$5.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{n^2 + 3}}{7^{n+3}}$$

$$5.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(7 - 4 \sin n)}{5^{n+1}}$$

$$5.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 3 \sin 2n}{(0,2)^n}$$

$$5.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + 4}{(\sqrt{2})^4}$$

$$5.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n - 3^n}{10^{2n} - 3^{2n}}$$

$$5.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^2 + 3)}{4n^2 - 1}$$

$$5.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{5^{2n} \ln(n^2 + 1)}$$

Задание 6. Исследовать на сходимость сравнением с обобщенным гармоническим рядом.

$$6.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$$

$$6.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt[4]{n^5}}$$

$$6.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{n^2 \sqrt[3]{n}}$$

$$6.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1}$$

$$6.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \arcsin \frac{1}{n}}{n}$$

$$6.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{n(n+2)}$$

$$6.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{n^2 \sqrt{n+2}}$$

$$6.11 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{n-1}{n+1}}{n^3 + 2n - 3}$$

$$6.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^3 n + 1}$$

$$6.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin 3n}{2n^2 + 3n - 3}$$

$$6.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^3 + 1}$$

$$6.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$6.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3 - 3n}}$$

$$6.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{(7n^2 + 2n)\sqrt[3]{n}}$$

$$6.25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + 2 \sin 2^n}{n^3 \sqrt{2n+1}}$$

$$6.27 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4 + 1}}$$

$$6.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin \frac{\pi}{2^n}}{\sqrt[4]{3n^4 - 1}}$$

$$6.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + \sin n}{n}$$

$$6.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 2 \cos n}{\sqrt[3]{n}}$$

$$6.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3}{(2n^2 - 1)n^3}$$

$$6.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{n \sqrt{n^3 + n + 1}}$$

$$6.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 + 5^n}$$

$$6.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \sqrt[3]{n^4} + \sqrt{n}}$$

$$6.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n^2 + 3)}}$$

$$6.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$

$$6.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n}$$

$$6.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{n^3 \sqrt{(n^4 + n^2 - 1)}}$$

$$6.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 + 7n - 3}{n^2(\sqrt{n} + 1)}$$

$$6.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{4n}}{n^3 \sqrt{n+2}}$$

$$6.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + 3 \cos n}{n \sqrt{5n^2 + 4n - 1}}$$

Задание 7. Исследовать на сходимость, используя известные эквивалентности.

$$7.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$7.2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{n^2}$$

$$7.3 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 4}{n^2 + 3}$$

$$7.4 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{5}{n^3 + 2n - 1}$$

$$7.5 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2^n + n^2}$$

$$7.6 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3^n}} \right)$$

$$7.7 \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n^3 + 1) - 3 \ln n)$$

$$7.8 \sum_{n=1}^{\infty} 2 \ln \sin \frac{\pi}{1 + \sqrt{n}}$$

$$7.9 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}$$

$$7.10 \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}$$

$$7.11 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln(1 + \sqrt{n}) - \frac{1}{2} \ln n \right)$$

$$7.12 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\sin \pi}{n}} - 1 \right)$$

$$7.13 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) \sin \frac{\pi}{\sqrt[3]{n}}$$

$$7.14 \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n+1}{(n^2 + 3)^3}$$

$$7.15 \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{n^4}}$$

$$7.16 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \sin \frac{1}{n^2 + 3n - 2}$$

$$7.17 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \sin \frac{1}{n-1}$$

$$7.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$$

$$7.19 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4}$$

$$7.20 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n+1)\sqrt[5]{n^2 + 1}}$$

$$7.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$$

$$7.22 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3 - 1}} - 1 \right)$$

$$7.23 \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{(n^2 + 3)^{5/2}}$$

$$7.24 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3 + 1}$$

$$7.25 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{2n+1}{n^2(n^2+1)^3}$$

$$7.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^2+5}$$

$$7.27 \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{3}{n\sqrt{n}}$$

$$7.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$7.28 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2n^2 + 1} \right)$$

$$7.30 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{1}{n}$$

Задание 8. Исследовать на сходимость с помощью признака Даламбера.

$$8.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}$$

$$8.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$8.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0,9^n \cdot n!}{(2n+1)!}$$

$$8.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$$

$$8.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1)}$$

$$8.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n + 2}$$

$$8.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4)2^n}$$

$$8.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(0,2)^{n-1}}$$

$$8.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!}$$

$$8.10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$$

$$8.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{(2n-1)!}$$

$$8.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{(3n+5)2^n}$$

$$8.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}$$

$$8.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}$$

$$8.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

$$8.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{3^n (n-1)!}$$

$$8.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+4)!}$$

$$8.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \dots \cdot (5n-3)}$$

$$8.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

$$8.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+2)! 5^n}$$

$$8.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2 - 1)}{n!}$$

$$8.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} n!}{n^n}$$

$$8.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n+3)}$$

$$8.25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{5^n (n+3)}$$

$$8.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{e^n (n+3)!}$$

$$8.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{(2n+3)!}$$

$$8.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} (n^3 + 1)}{(n+1)!}$$

$$8.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3n)}$$

$$8.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)}$$

$$8.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{1 \cdot 4 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}$$

Задание 9. Исследовать на сходимость с помощью радикального признака Коши.

$$9.1 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^{2n}$$

$$9.3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{n^2 + 3}{n^2 + 4} \right)^n$$

$$9.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{(\ln(1+n))^{n/2}}$$

$$9.7 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} + 1 \right)^{-2n}$$

$$9.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^{-3n}$$

$$9.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(1 + \sqrt{0,1})^n}$$

$$9.13 \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \left(\frac{2n}{3n+4} \right)^n$$

$$9.15 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n-1} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n^2}$$

$$9.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n^2+2n}$$

$$9.2 \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \left(\sqrt[n]{0,2} - 1 \right)^{3n}$$

$$9.4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi n + 1}{4n} \right)^n$$

$$9.6 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} \left(\arcsin \frac{n+1}{2n-1} \right)^n$$

$$9.8 \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\cos \frac{\pi n - 1}{3n+1} \right)^{2n}$$

$$9.10 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{2n+1}$$

$$9.12 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \frac{n}{3^n}$$

$$9.14 \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(5n-1))^{-2n}$$

$$9.16 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\operatorname{arctg} \frac{1-2n}{3-2n} \right)^n$$

$$9.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} \left(\frac{5n-3}{3n+1} \right)^{n+1}$$

$$9.19 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arccos \frac{5n-1}{5n+6} \right)^n$$

$$9.21 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{2} \right)^{5n} \left(\frac{3n+2}{4n+3} \right)^n$$

$$9.23 \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}$$

$$9.25 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) \left(\arcsin \frac{n-1}{n+1} \right)^n$$

$$9.27 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^n$$

$$9.29 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arccos \frac{2n}{4n+3} \right)^{3n}$$

$$9.20 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{2n-1}{2n+1} \right)^n$$

$$9.22 \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(2n+3))^{-n}$$

$$9.24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+5n+5}{6n^2-3n-1} \right)^{n^2}$$

$$9.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(\sqrt{2n+1})^{n-1}} (\sqrt{3})^{n+1}$$

$$9.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}}$$

$$9.30 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}$$

Задание 10. Используя интегральный признак исследовать ряд на сходимость.

$$10.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 6n + 10}$$

$$10.3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{\ln^4 n}}$$

$$10.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1) \ln(n^2+1)}$$

$$10.7 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5n^2-2} \right)^3$$

$$10.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(2n+2)}$$

$$10.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+3)}{n+3}$$

$$10.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$$

$$10.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(3n+2)}{3n+2}$$

$$10.2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot e^{-2^n}$$

$$10.4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^2 + 11}$$

$$10.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(5n-2)^3}}$$

$$10.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3(n+3)}{n+3}$$

$$10.10 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-n\sqrt{n}}$$

$$10.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln^2 n + 5)}$$

$$10.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\sqrt{n}}$$

$$10.16 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{\ln n + 7}}$$

$$10.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(2n+1)}$$

$$10.19 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)e^{-(n+2)^2}$$

$$10.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(2n+1)}$$

$$10.23 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{4n^2+9} \right)^2$$

$$10.25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt{\ln(3n-1)}}$$

$$10.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1) \ln n}$$

$$10.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n + 5)^3}$$

$$10.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000}{(10n-5)^{10}}$$

$$10.20 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2$$

$$10.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \sqrt{\ln^3(n+2)}}$$

$$10.24 \sum_{n=1}^{\infty} (1+n)^2 \cdot 5^{(1+n)^3}$$

$$10.26 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1) \ln n}$$

$$10.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2-6n+4}$$

$$10.30 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5) \ln n}$$

Задание 11. Исследовать на сходимость ряд.

$$11.1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$11.2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^2$$

$$11.3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$$

$$11.4 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n \ln \ln n}$$

$$11.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}$$

$$11.6 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln n}$$

$$11.7 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+2)}$$

$$11.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \sqrt{2n+3}}$$

$$11.9 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{4n}$$

$$11.10 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1) 3^{2n+1}}$$

$$11.11 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$$

$$11.12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$$

$$11.13 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

$$11.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^2}{3^n}$$

$$11.15 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

$$11.16 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$11.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1} n!}$$

$$11.18 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n(n+3)}$$

$$11.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n-1}}$$

$$11.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{2n+1}}$$

$$11.23 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+4}{3n-3} \right)^n$$

$$11.25 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2n}$$

$$11.27 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{n+2} \right)^n$$

$$11.29 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n-1)^n}$$

$$11.20 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n}$$

$$11.22 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3} \right)^{3n+2}$$

$$11.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}$$

$$11.26 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(3n-1)}$$

$$11.28 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$$

$$11.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

Задание 12. Вычислить сумму ряда с точностью α .

$$12.1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^2}; \quad \alpha = 0,01$$

$$12.2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{3^n(n+1)}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)}{n^3 + 1}; \quad \alpha = 0,01$$

$$12.4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.5 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}; \quad \alpha = 0,01$$

$$12.6 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}; \quad \alpha = 0,0001$$

$$12.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2n}; \quad \alpha = 0,1$$

$$12.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{3^n}; \quad \alpha = 0,1$$

$$12.9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.10 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cdot 4^n}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.11 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{7^n}; \quad \alpha = 0,0001$$

$$12.12 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5} \right)^n; \quad \alpha = 0,01$$

$$12.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.14 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}; \quad \alpha = 0,01$$

$$12.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!2n}; \quad \alpha = 0,00001$$

$$12.16 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!n!}; \quad \alpha = 0,00001$$

$$12.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^n}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.23 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n^3+1)^2}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.25 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^3}; \quad \alpha = 0,01$$

$$12.27 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{n^2(n+1)}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.29 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n!}; \quad \alpha = 0,01$$

$$12.18 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n; \quad \alpha = 0,1$$

$$12.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!n!}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)}{n^3}; \quad \alpha = 0,01$$

$$12.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+4)}; \quad \alpha = 0,01$$

$$12.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(1+n^2)^2}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{5^n}; \quad \alpha = 0,001$$

$$12.30 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)^n}; \quad \alpha = 0,001$$

Задание 13. Исследовать сходимость рядов с комплексными членами.

$$13.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2i-1)^n}{3^n}$$

$$13.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}+i}$$

$$13.3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1+i}\right)^n$$

$$13.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$$

$$13.5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^3+1} + \frac{(n+1)^2}{n^3+2}i\right)$$

$$13.6 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} - \frac{i}{3^n}\right)$$

$$13.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$$

$$13.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2+1}$$

$$13.9 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{i}{10^n}\right)$$

$$13.10 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n$$

$$13.11 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n$$

$$13.12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+i)^n}$$

$$13.13 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{i}{n}\right)$$

$$13.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3i+1)^n}{2^n}$$

$$13.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3+i)^n}{2^n}$$

$$13.16 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2} + \frac{n+1}{n+3}i\right)$$

$$13.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n+1}$$

$$13.19 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{i}{(n+1)!} \right)$$

$$13.21 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2} \right)^n$$

$$13.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$$

$$13.25 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} i \right)$$

$$13.27 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 \sqrt{n}} + \frac{i}{3^n} \right)$$

$$13.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+i)^{n+1}}{3^n}$$

$$13.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2i)\sqrt{n}}$$

$$13.20 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right)^n$$

$$13.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (1+i)^{n-1}$$

$$13.24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{i}{2^n} \right)$$

$$13.26 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{i}{2^n} \right)$$

$$13.28 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-i}{2} \right)^n$$

$$13.30 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n-1-i}}$$

Библиографический список

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1и Т.2. /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я.Кожевникова. М.: Наука, 2003.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов/ Б.П. Демидович. М.: АСТ: Астрель, 2003.
3. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие для вузов / Л. А. Кузнецов. - 11-е изд., стер. СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2008.
4. Сборник задач по математике: для вузов : учеб. пособие: в 4 ч. / под ред.: А. В. Ефимова и А. С. Пospelова. - 5-е изд. – М.: Физматлит, 2009.
5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. пособие для вузов. В 2 т. Т.2./ Н.С.Пискунов. М.: Интеграл-Пресс, 2002.
6. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник: в 3-х т. Т.2. / Г. М. Фихтенгольц. - 9-е изд., стер. СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
§ 1. Основные положения теории числовых рядов	3
Основные понятия. Примеры	3
Основные теоремы	6
§ 2. Положительные ряды	8
Признаки сравнения. Примеры	8
Признаки Даламбера. Примеры	12
Признаки Коши. Примеры	17
Интегральный признак. Примеры	20
§ 3. Знакопеременные ряды	23
§ 4. Знакопеременные ряды	25
Теория Лейбница. Примеры	25
§ 5. Ряды с комплексными членами	29
Приложение	32
Литература	47
Содержание	48

Учебно-методическое издание

Числовые ряды

Методические указания

Автор-составитель

Цапаева Светлана Анатольевна

Редактор
