

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

Степенные ряды. Ряды Тейлора

В. Новгород
2011

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

Степенные ряды. Ряды Тейлора

Методические указания

В. Новгород
2011

УДК 517.2
С79

Печатается по решению
РИС НовГУ

Рецензенты

доктор ф.-м. наук, доцент Т.Г. Сукачева
кандидат ф.-м. наук, доцент А.В. Ласунский

Степенные ряды. Ряды Тейлора: метод. указания. - 2-е изд., исправ. и доп./ Авт.-сост. С.А. Цапаева; ФГБОУ ВПО «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», Великий Новгород, 2011– 36с.

Рассматриваются основные теоретические сведения, связанные с теорией степенных рядов, в частности, рядов Тейлора, подробно разобраны практические примеры.

Приведены задания для самостоятельной работы.

Методические указания предназначены для студентов инженерно-технических специальностей I-II курсов.

УДК 517.2

© ФГБОУ ВПО «Новгородский
государственный университет
имени Ярослава Мудрого», 2011
© Цапаева С.А., составление 2011

§1. ПОНЯТИЕ СТЕПЕННОГО РЯДА. ИНТЕРВАЛ СХОДИМОСТИ

Определение. Степенным рядом действительной переменной x называется функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (1.1)$$

где x_0 - некоторое заданное действительное число,

$c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ - действительные числа, называемые коэффициентами ряда.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ называется также рядом по степеням разности $(x - x_0)$.

Отметим, что областью определения степенного ряда является вся числовая прямая. Степенной ряд, как представитель функциональных рядов, имеет область сходимости и область расходимости. Эти множества для степенных рядов имеют довольно простую структуру. Заметим, что область сходимости любого степенного ряда всегда не пуста, так как любой степенной ряд сходится при $x = x_0$ и имеет сумму $s(x_0) = c_0$.

Теорема Абеля

1) Если степенной ряд (1.1) сходится при $x = x_1$, то он сходится (и притом абсолютно) при всяком значении x , удовлетворяющем неравенству $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$;

2) Если ряд (1.1) расходится при некотором значении x'_1 , то он расходится при всяком x , для которого $|x - x_0| > |x'_1 - x_0|$.

Доказательство.

1) Так как, по предположению, числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x_1 - x_0)^n$ сходится, то его общий член $c_n(x_1 - x_0)^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это значит, что существует такое положительное M , что все члены ряда по абсолютной величине меньше M .

Перепишем ряд (1.1) в виде

$$c_0 + c_1(x_1 - x_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \dots + c_n(x_1 - x_0)^n \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n + \dots \quad (1.2)$$

и рассмотрим ряд из абсолютных величин

$$|c_0| + |c_1(x_1 - x_0)| \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| + \dots + |c_n(x_1 - x_0)^n| \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n + \dots \quad (1.3)$$

Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда

$$M + M \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| + M \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n + \dots \quad (1.4)$$

При $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ последний ряд представляет геометрическую прогрессию со знаменателем $\left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| < 1$ и, следовательно, сходится.

Так как члены ряда (1.3) меньше соответствующих членов ряда (1.4), то ряд (1.3) тоже сходится, а это значит, что ряд (1.2) или (1.1) сходится абсолютно.

2) Пусть в точке x'_1 ряд (1.1) расходится. Тогда он будет расходиться в любой точке x , удовлетворяющей условию $|x - x_0| > |x'_1 - x_0|$. Действительно, если бы в какой-либо точке x , удовлетворяющей этому условию, ряд сходил, то, в силу первой части теоремы, он должен был бы сходиться и в точке x'_1 , так как $|x'_1 - x_0| < |x - x_0|$. Но это противоречит условию, что в точке x'_1 ряд расходится. Следовательно, ряд расходится и в точке x .

Таким образом, теорема доказана.

Теорема Абеля позволяет судить о расположении точек сходимости и расходимости степенного ряда. Действительно, если x_1 есть точка сходимости, то весь интервал $(x_0 - |x_1 - x_0|; x_0 + |x_1 - x_0|)$ заполнен точками абсолютной сходимости; при всех значениях x вне этого интервала ряд (1.1) расходится.

Следующая теорема позволяет определить интервал сходимости степенного ряда.

Теорема (об интервале сходимости степенного ряда)

Пусть существует предел $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$, тогда степенной ряд (1.1):

1) сходится абсолютно при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < R$;

2) расходится при любом $x: |x - x_0| > R$.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда.

Интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда.

Замечание. Если $|x - x_0| = R$, то заранее о сходимости или расходимости ряда определённо сказать нельзя и необходимо дополнительное исследование на сходимость в точках $x = x_0 \pm R$.

Доказательство. При конкретном x ряд (1.1) является числовым знакопеременным рядом $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, где

$$u_n = c_n (x - x_0)^n. \quad (1.5)$$

Исследуем его на сходимость. Применим признак Даламбера к ряду, составленному из модулей членов ряда (1.5). Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{c_n (x - x_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} (x - x_0) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |x - x_0| = \\ &= |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{|x - x_0|}{R} = \alpha. \end{aligned}$$

Рассмотрим возможные случаи.

1) Пусть $\alpha < 1$, тогда ряд (1.5) абсолютно сходится. Значит, при $|x - x_0| < R$ и ряд (1.1) сходится абсолютно.

2) Пусть $\alpha > 1$, тогда ряд (1.5) расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Следовательно, при $|x - x_0| > R$ расходится и ряд (1.1).

3) При $\alpha = 1$ проводится специальное исследование сходимости ряда (1.1) в точках $x = x_0 \pm R$.

Таким образом, ряд (1.1) сходится абсолютно внутри интервала $(x_0 - R, x_0 + R)$ и расходится вне его.

Замечание 1. Можно показать, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = 0$, то ряд (1.1) абсолютно сходится на всей числовой прямой. В этом случае $R = \infty$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \infty$, то ряд сходится только при $x = x_0$, то есть $R = 0$.

Замечание 2. Радиус сходимости степенного ряда можно также находить по формуле $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Замечание 3. Во всех случаях (в частности, если ряд является неполным) интервал сходимости можно находить, применяя признак Даламбера или признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$. Здесь $c_n = \frac{1}{n}$, $c_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, поэтому

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится при

$$|x-1| < 1, \text{ то есть при } x \in (0;2).$$

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, то есть в точках $x=0$ и $x=2$.

При $x=2$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Известно, что он расходится.

При $x=0$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится в силу признака Лейбница.

Таким образом, данный ряд сходится при любом $x \in [0;2)$, и расходится вне этого промежутка.

Пример 2. Определить интервал сходимости ряда

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Имеем

$$c_n = \frac{1}{n!}, \quad c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Значит, данный ряд сходится при всех значениях x .

Пример 3. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (n(x-2))^n$ расходится при всех значениях x , кроме $x=2$, так как его радиус сходимости

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = 0.$$

Пример 4. Найти интервал сходимости ряда

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Решение. Заданный ряд неполный. Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$u_n = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad u_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}(2n-1)}{x^{2n-1}(2n+1)} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$.
Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ имеем ряд $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$, который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$ имеем ряд $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Это тоже сходящийся ряд.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1; 1]$.

§2. СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Теорема 1. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad (2.1)$$

мажорируем на любом отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости.

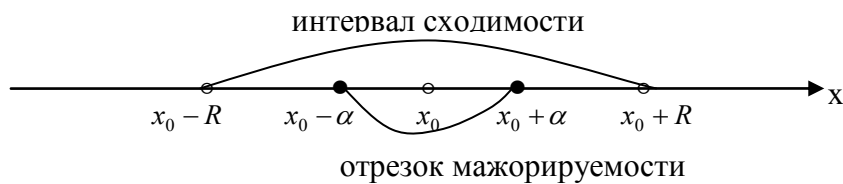


Рис.1

Доказательство. Не нарушая общности, рассмотрим отрезок $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, $\alpha > 0$. По условию $\alpha < R$, поэтому числовой ряд с положительными членами

$$|c_0| + |c_1|\alpha + |c_2|\alpha^2 + \dots + |c_n|\alpha^n + \dots \quad (2.2)$$

сходится. Но при $|x - x_0| \leq \alpha$ члены ряда (2.1) по абсолютной величине не больше соответствующих членов ряда (2.2). Значит, ряд (2.1) мажорируем на отрезке $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$.

Следствие 1. На всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости, сумма степенного ряда есть непрерывная функция.

Действительно, на этом отрезке ряд мажорируем, а члены его являются непрерывными функциями от x . Следовательно, по теореме о непрерывности суммы ряда сумма рассматриваемого ряда есть непрерывная функция.

Следствие 2. Интеграл по любому отрезку, лежащему внутри интервала сходимости, от суммы степенного ряда равен сумме интегралов по этому отрезку от членов ряда.

Это следует из теоремы о почленном интегрировании функционального ряда, так как на отрезке интегрирования степенной ряд мажорируем.

Теорема 2. Если степенной ряд

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots = s(x) \quad (2.3)$$

имеет интервал сходимости $(x_0 - R; x_0 + R)$, то ряд

$$c_1 + 2c_2(x - x_0) + \dots + nc_n(x - x_0)^{n-1} + \dots = \varphi(x), \quad (2.4)$$

полученный почленным дифференцированием ряда (2.3), имеет тот же интервал сходимости $(x_0 - R; x_0 + R)$; при этом

$$\varphi(x) = s'(x), \text{ если } |x - x_0| < R.$$

То есть внутри интервала сходимости производная от суммы степенного ряда (2.3) равна сумме ряда, полученного почленным дифференцированием ряда (2.3).

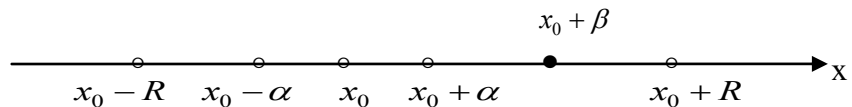


Рис.2

Доказательство.

1) Докажем, что ряд (2.4) мажорируем на любом отрезке $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, целиком лежащем внутри интервала сходимости. Возьмём точку β такую, что $x_0 + \alpha < \beta < x_0 + R$ (см. рис.2). В этой точке ряд (2.3) сходится, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(\beta - x_0)^n = 0,$$

поэтому можно найти такое число M , что

$$|c_n(\beta - x_0)^n| < M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если $|x - x_0| \leq \alpha$, то

$$|nc_n(x - x_0)^{n-1}| \leq |nc_n\alpha^{n-1}| = \frac{n|c_n(\beta - x_0)^n|}{\beta - x_0} \left| \frac{\alpha}{(\beta - x_0)} \right|^{n-1} < \frac{nM}{\beta - x_0} \left| \frac{\alpha}{\beta - x_0} \right|^{n-1}.$$

Величина $\frac{\alpha}{\beta - x_0} = q < 1$. Таким образом, члены ряда (2.4) при $|x - x_0| \leq \alpha$ по абсолютной величине меньше членов числового положительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{\beta - x_0} n q^{n-1} = \frac{M}{\beta - x_0} \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}.$$

Применяя признак Даламбера к последнему ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = q < 1,$$

видим, что он сходится. Следовательно, ряд (2.4) мажорируем на отрезке $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ и по теореме о дифференцировании функционального ряда его сумма есть производная от суммы данного ряда (2.3) на отрезке $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, то есть

$$\varphi(x) = s'(x).$$

Так как всякую внутреннюю точку $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ можно заключить в некоторый отрезок $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, то ряд (2.4) сходится в любой внутренней точке интервала $(x_0 - R; x_0 + R)$.

- 2) Покажем теперь, что вне интервала $(x_0 - R; x_0 + R)$ ряд (2.4) расходится. Предположим, что ряд (2.4) сходится при $x_1 > x_0 + R$.

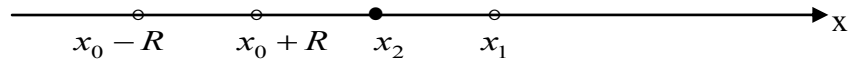


Рис.3

Интегрируя его почленно по отрезку $[x_0; x_2]$, где $x_0 + R < x_2 < x_1$, мы получим, что ряд (2.3) сходится в точке x_2 , что противоречит условию теоремы. Таким образом, интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ есть интервал сходимости ряда (2.4).

Теорема доказана.

Ряд (2.4) можно снова почленно дифференцировать сколь угодно раз. Таким образом, получаем более общую формулировку теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда:

Теорема 3. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ сходится в некотором интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, то его сумма есть функция, имеющая внутри интервала сходимости производные любого порядка, каждая из которых является суммой ряда, получающегося в результате почленного

дифференцирования данного ряда соответствующее число раз; при этом интервал сходимости каждого ряда, получившегося в результате дифференцирования, есть тот же интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Отметим, что при дифференцировании поведение степенного ряда в граничных точках интервала сходимости может измениться. Можно показать, что

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad x \in (-1; 1],$$

но

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad x \in (-1; 1).$$

Теорема 4. Степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$, имеющие радиусы сходимости соответственные R_1 и R_2 , можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2 .

§3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЯДА ТЕЙЛОРА. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Определение. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема бесконечное число раз в окрестности точки x_0 . Степенной ряд вида

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots,$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$$

называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 .

Теорема (необходимый признак представимости функции степенным рядом).

Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в окрестности точки x_0 степенным рядом вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad (3.1)$$

необходимо, чтобы этот ряд являлся рядом Тейлора, то есть чтобы коэффициенты вычислялись по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ представима в окрестности точки x_0 степенным рядом (3.1):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + \dots + c_n (x - x_0)^n + \dots \quad (3.3)$$

Это значит, что ряд (3.1) сходится в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, функция $f(x)$ - его сумма. На основании теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда предыдущего параграфа ряд (3.1) можно почленно дифференцировать на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ любое число раз. Дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2(x - x_0) + 3 \cdot c_3(x - x_0)^2 + \dots + nc_n(x - x_0)^{n-1} + \dots, \\ f''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3(x - x_0) + 3 \cdot 4 \cdot c_4(x - x_0)^2 + \dots + (n-1)nc_n(x - x_0)^{n-2} + \dots, \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c_4(x - x_0) + \dots + (n-2)(n-1)nc_n(x - x_0)^{n-3} + \dots, \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &= n!c_n + 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1)c_{n+1}(x - x_0) + \dots \end{aligned}$$

Полагая в полученных равенствах и в равенстве (3.3) $x = x_0$, имеем

$$f(x_0)=c_0, \quad f'(x_0)=1 \cdot c_1, \quad f''(x_0)=2!c_2, \\ f'''(x_0)=3!c_3, \dots, \quad f^{(n)}(x_0)=n!c_n, \dots,$$

откуда находим

$$c_0 = f(x_0), c_1 = f'(x_0), c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \dots$$

Значит, рассматриваемый ряд (3.1) действительно является рядом Тейлора.

Заметим, что доказанную теорему называют теоремой о единственности разложения функции в степенной ряд.

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка, тогда для неё можно составить формально ряд Тейлора

$$T(f(x), x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n; \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Этот ряд может в окрестности точки x_0 либо расходиться, либо сходиться, причём сходиться может к самой функции $f(x)$ или к какой-то другой функции. Поэтому необходимо иметь условия, при которых составленный ряд Тейлора сходится к самой функции $f(x)$.

Критерий представимости функции рядом Тейлора

Напомним, что для любой бесконечно дифференцируемой в окрестности точки x_0 функции $f(x)$ имеет место формула Тейлора:

$$f(x) = T_n(f(x), x_0) + R_n(f(x), x_0),$$

где

$T_n(f(x), x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ – многочлен Тейлора порядка n ,

$R_n(f(x), x_0)$ – остаточный член.

Отметим, что если функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в некоторой окрестности точки x_0 , то для любого x из этой окрестности существует число c , лежащее между x_0 и x , такое, что справедлива формула

$$R_n(f(x), x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Эту формулу называют остаточным членом формулы Тейлора, записанным в форме Лагранжа. Этой формулой мы будем пользоваться в следующем параграфе, когда будем рассматривать примеры разложений функций в степенные ряды.

Очевидно, многочлен Тейлора порядка n является частичной суммой $s_{n+1}(x)$ ряда Тейлора порядка $n+1$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка. Для того, чтобы в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ была представима своим рядом Тейлора, необходимо и достаточно чтобы остаточный член формулы Тейлора порядка n стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$ для любого x из рассматриваемой окрестности.

Доказательство. Рассмотрим формулу Тейлора

$$f(x) = T_n(f(x), x_0) + R_n(f(x), x_0),$$

где

$$T_n(f(x), x_0) = s_{n+1}(x).$$

Необходимость. По условию функция $f(x)$ представима рядом Тейлора в окрестности точки x_0 . Значит, согласно определению представимости функции функциональным рядом:

1. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$;
2. $s(x) = f(x)$ для любого x из окрестности точки x_0 .

Так как

$$f(x) = s_{n+1}(x) + R_n(f(x), x_0),$$

то

$$R_n(f(x), x_0) = f(x) - s_{n+1}(x).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f(x), x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - s_{n+1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

для любого x из окрестности точки x_0 .

Достаточность. По условию существует $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f(x), x_0) = 0$ для любого x из окрестности точки x_0 . Из формулы Тейлора

$$s_{n+1}(x) = f(x) - R_n(f(x), x_0).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - R_n(f(x), x_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f(x), x_0) = f(x).$$

Это и означает, что функция $f(x)$ представима рядом Тейлора в окрестности точки x_0 .

Теорема доказана.

Замечания.

1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f(x), x_0) \neq 0$, то ряд не представляет данной функции $f(x)$, хотя может и сходиться к другой функции.

2. Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора, который называют рядом Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

3. Если для какой-либо функции формально написан ряд Тейлора $T(f(x), x_0)$, то чтобы доказать, что написанный ряд представляет данную функцию, нужно либо доказать, что остаточный член стремится к нулю, либо каким-нибудь другим способом убедиться, что написанный ряд сходится к данной функции.

§4. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Лемма. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ для любого x .

Доказательство. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Найдём радиус сходимости этого ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Значит, рассматриваемый ряд сходится на всей числовой оси. По необходимому признаку сходимости ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ для любого x .

1. Разложение в ряды Тейлора и Маклорена функции $f(x) = e^x$

а) Так как производные любого порядка от функции e^x равны e^x , то $f^{(n)}(x_0) = e^{x_0}$. Составим формально ряд Тейлора для функции $f(x) = e^x$ в окрестности точки x_0 :

$$T(e^x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!} (x - x_0)^n = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

б) Рассмотрим остаточный член формулы Тейлора для функции $f(x) = e^x$ в форме Лагранжа

$$R_n(e^x, x_0) = \frac{e^c}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \text{ где } c \in (x_0; x).$$

Мы пишем $c \in (x_0; x)$, хотя x может быть и меньше x_0 .

Перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в этом равенстве, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(e^x, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^c \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

для любого x , так как e^c - ограниченная, $\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ - бесконечно малая величины при $n \rightarrow \infty$ (см. предыдущую лемму).

Значит, при любом x

$$e^x = T(e^x, x_0), \text{ т.е. } e^x = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

Ряд Маклорена для функции e^x для любого x имеет вид

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (4.1)$$

2. Разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \sin x$

а) Составим ряд Тейлора для функции $f(x) = \sin x$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Так как

$$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \text{ то } f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2}$$

и

$$T(\sin x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n!} x^n.$$

б) Остаточный член формулы Тейлора порядка n в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n(\sin x, 0) = \sin\left(c + \frac{\pi(n+1)}{2}\right) \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right).$$

Так как $\left| \sin\left(c + \frac{\pi(n+1)}{2}\right) \right| \leq 1$ и по лемме $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то при всех значениях x получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f(x), 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(c + \frac{\pi(n+1)}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0.$$

Таким образом, при любом x имеет место разложение

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n!} x^n$$

или

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{-1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 + \frac{-1}{7!}x^7 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Значит, при любом x

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (4.2)$$

3. Разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \cos x$

Предлагаем читателю самостоятельно получить формулу

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ для любого } x. \quad (4.3)$$

4. Разложение в ряд Маклорена функций

$$f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Если в разложении (4.1) в ряд Маклорена функции e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

заменить x на $(-x)$, то получим

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots \quad (4.4)$$

Разложения функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ легко получаются путём вычитания и сложения рядов (4.1) и (4.4) и деления на 2, что можно делать по теореме об арифметических действиях со сходящимися рядами.

Итак,

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

§5. БИНОМИАЛЬНЫЙ РЯД

1. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1+x)^m$, где m - произвольное постоянное число.

а) Составим формально ряд Маклорена $T((1+x)^m, 0)$.

Найдём значение функции $f(x)$ и значения её производных при $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^m, & f(0) &= 1; \\ f'(x) &= m(1+x)^{m-1}, & f'(0) &= m; \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}, & f''(0) &= m(m-1); \\ &\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &= m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, & f^{(n)}(0) &= m(m-1)\dots(m-n+1). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$T((1+x)^m, 0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n \quad (5.1)$$

Этот ряд называют биномиальным, а коэффициенты его - биномиальными коэффициентами.

б) Если m - целое положительное число, то, начиная с члена, содержащего x^{m+1} , все коэффициенты равны нулю, и ряд превращается в многочлен. При m дробном или при m целом отрицательном определим радиус сходимости ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(n+1)!}{n!m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1.$$

Таким образом, ряд сходится при $|x| < 1$. Примем без вывода следующее:

- 1) если $x = 1$, то
 - при $m > 0$ ряд сходится абсолютно,
 - при $-1 < m < 0$ ряд сходится условно,
 - при $m \leq -1$ ряд расходится;
- 2) если $x = -1$, то
 - при $m > 0$ ряд сходится абсолютно,
 - при $m < 0$ ряд расходится.

Исследование остаточного члена $R_n((1+x)^m, 0)$ проведём в предположении, что $|x| < 1$. Так как

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

то имеем остаточный член в форме Коши

$$R_n((1+x)^m, 0) = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n)(1+\Theta x)^{m-n-1}}{n!} (1-\Theta)^n x^{n+1}, \quad \Theta \in (0;1).$$

Перегруппировав множители, запишем его в виде:

$$R_n((1+x)^m, 0) = \frac{(m-1)(m-2)\dots((m-1)-n+1)}{n!} x^n mx(1+\Theta x)^{m-1} \left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta x} \right)^n.$$

Выражение $\frac{(m-1)(m-2)\dots((m-1)-n+1)}{n!} x^n$ представляет собой общий член биномиального ряда с показателем $m-1$. Так как при $|x| < 1$ биномиальный ряд сходится, то каков бы ни был показатель, это выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Второе выражение ограничено по абсолютной величине

$$|mx|(1-|x|)^{m-1} \leq |mx(1+\Theta x)^{m-1}| \leq |mx|(1+|x|)^{m-1}.$$

Выражение $\left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta x} \right)^n < 1$.

Значит, $R_n((1+x)^m, 0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, для $|x| < 1$ имеет место разложение

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (5.2)$$

2. Отметим некоторые частные случаи биномиального ряда: при $m = -1$ имеем геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (\text{сходится при } x \in (-1;1));$$

при $m = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n$$

(сходится при $x \in [-1;1]$);

при $m = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$$

(сходится при $x \in (-1;1]$).

3. Применим разложение бинома к разложению других функций. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = \arcsin x$. Подставляя в последнее равенство вместо x выражение $-x^2$, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^8 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \dots$$

Проинтегрируем это равенство в пределах от 0 до x (при $|x| < 1$), получим:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Можно показать, что этот ряд сходится при $x \in [-1; 1]$; для всех этих значений сумма ряда равна $\arcsin x$.

4. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = \arctg x$. Положив в формуле (6.2) $m = -1$ и заменив x на x^2 , получим равенство

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, x \in (-1; 1).$$

$$\text{Тогда } \arctg x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Можно показать, что равенство справедливо и при $x = \pm 1$, то есть при всех $x \in [-1; 1]$.

§6. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ РЯД

Проинтегрируем равенство

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

в пределах от 0 до x (при $|x| < 1$), получим:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots) dt$$

или

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}.$$

Это разложение справедливо при $x \in (-1; 1)$.

Рассмотрим сходимость ряда на концах промежутка.

При $x = -1$ имеем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Он расходится.

При $x = 1$ получаем знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

который сходится условно. Можно показать, что этот ряд сходится к $\ln 2$.

Итак, при любом $x \in (-1; 1]$ справедливо разложение

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}. \quad (6.1)$$

§7. ПРИМЕРЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Пример 1. Написать первые четыре члена разложения в ряд по степеням x функции $f(x) = e^{\arctg x}$.

Решение. Дифференцируем функцию $f(x) = e^{\arctg x}$:

$$f'(x) = \frac{e^{\arctg x}}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{e^{\arctg x}(1-2x)}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{e^{\arctg x}(6x^2-6x-1)}{(1+x^2)^3}.$$

Находим значения функций $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... в точке $x=0$:

$$f(0)=1, \quad f'(0)=1, \quad f''(0)=1, \quad f'''(0)=-1.$$

Следовательно, $e^{\arctg x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots$

Пример 2. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \sin^2 x$.

Решение. Продифференцируем функцию $n+1$ раз:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x, \\ f'(x) &= 2 \sin x \cos x = \sin 2x, \\ f''(x) &= 2 \cos 2x = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right), \\ f'''(x) &= -2^2 \sin 2x = 2^2 \sin \left(2x + 2 \frac{\pi}{2} \right), \\ &\dots \dots \dots \\ f^{(n)}(x) &= 2^{n-1} \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} (n-1) \right), \\ f^{(n+1)}(x) &= 2^n \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} n \right). \end{aligned}$$

Находим значения функций $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ в точке $x=0$, а значение $f^{(n+1)}(x)$ определяем в точке $x=c$. Получаем

$$f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=2, f'''(0)=0, f^{(4)}(0)=-2^3, f^{(5)}(0)=0, \\ f^{(6)}(0)=2^5, f^{(n+1)}(c)=2^n \sin\left(2c + \frac{\pi}{2}n\right).$$

Находим остаточный член:

$$R_n = \frac{2^n \sin\left(2c + \frac{\pi}{2}n\right)}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ то есть } R_n = \frac{1}{2} \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(2c + \frac{\pi}{2}n\right).$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ при любом x , а $\sin\left(2c + \frac{\pi}{2}n\right)$ - величина ограниченная, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$. Следовательно, функцию $f(x) = \sin^2 x$ можно представить в виде ряда Маклорена при любом x .

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \frac{2^7}{8!}x^8 + \dots$$

Задачу можно решить и иначе. В равенстве $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ заменим $\cos 2x$ его разложением в степенной ряд:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots$$

Выполнив несложные преобразования, получим найденное выше разложение $\sin^2 x$.

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = 2^x$.

Решение. Так как $2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x \ln 2}$, то заменяя x на $x \ln 2$ в разложении (4.1), получим

$$2^x = 1 + \frac{\ln 2}{1!}x + \frac{\ln^2 2}{2!}x^2 + \dots + \frac{\ln^n 2}{n!}x^n + \dots, x \in (-\infty; +\infty).$$

Пример 4. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln(3-x)$.

Решение. Так как $f(x) = \ln(3-x) = \ln 3 \left(1 - \frac{x}{3}\right) = \ln 3 + \ln\left(1 + \left(-\frac{x}{3}\right)\right)$, то воспользовавшись формулой (6.1), в которой заменим x на $\left(-\frac{x}{3}\right)$, получим:

$$\ln(3-x) = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(-\frac{x}{3}\right)^{n+1} = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{3^{n+1}(n+1)} x^{n+1} = \ln 3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}.$$

Это разложение справедливо, если $-1 < -\frac{x}{3} \leq 1$, то есть $-3 \leq x < 3$.

Пример 5. Разложить по степеням x функцию $f(x) = \frac{4}{(1-x)(1+3x)}$.

Решение. Разложив функцию на простейшие дроби, имеем

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{3}{1+3x}.$$

Так как

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (7.1)$$

$$\frac{1}{1+3x} = 1 - 3x + (3x)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n x^n, \quad (7.2)$$

то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n 3^{n+1}) x^n. \quad (7.3)$$

Геометрические прогрессии (7.1) и (7.2) сходятся соответственно при $|x| < 1$ и $|x| < \frac{1}{3}$; следовательно, разложение (7.3) имеет место при $|x| < \frac{1}{3}$, то есть при $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

Пример 6. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в ряд по степеням $(x-2)$.

Решение. Воспользуемся равенством $\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{x-2}{2}}$. Правую часть

этого равенства можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a = \frac{1}{2}$ и знаменателем

$q = -\frac{x-2}{2}$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{x-2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x-2}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x-2}{2} \right)^3 + \dots,$$

то есть

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n.$$

Этот ряд сходится при $\left| \frac{x-2}{2} \right| < 1$ или при $x \in (0; 4)$.

§8. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

I. Приближённое вычисление значения функции

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_1$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Если функцию $f(x)$ в интервале $(-R; R)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

и $x_1 \in (-R; R)$, то точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x = x_1$, то есть

$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n + \dots,$$

а приближённое – частичной сумме $s_n(x_1)$, то есть

$$f(x_1) \approx s_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с ростом n . Абсолютная погрешность этого приближённого равенства равна модулю остатка ряда, то есть

$$|f(x_1) - s_n(x_1)| = |r_n(x_1)|,$$

где

$$r_n(x_1) = a_{n+1}x_1^{n+1} + a_{n+2}x_1^{n+2} + \dots$$

Таким образом, ошибку $|f(x_1) - s_n(x_1)|$ можно найти, оценив остаток $r_n(x_1)$ ряда.

Для рядов лейбницевского типа

$$|r_n(x_1)| = |u_{n+1}(x_1) + u_{n+2}(x_1) + u_{n+3}(x_1) + \dots| < |u_{n+1}(x_1)|.$$

В остальных случаях составляют ряд из модулей членов ряда и для него стараются найти положительный ряд с большими членами (обычно это сходящийся ряд геометрической прогрессии), который легко бы суммировался. И в качестве оценки $|r_n(x_1)|$ берут величину остатка этого нового ряда.

Пример. Вычислить число e с точностью до 0,001.

Решение. Подставляя $x = 1$ в формулу (4.1), получим:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Справа стоит знакоположительный ряд. Возьмём n слагаемых и оценим ошибку $r_n(x)$:

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \right) = \frac{1}{n!n},$$

то есть $r_n(x) < \frac{1}{n!n}$. Остаётся подобрать наименьшее натуральное число n ,

чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{n!n} < 0,001$.

Нетрудно вычислить, что это неравенство выполняется при $n \geq 6$. Поэтому имеем

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 \frac{517}{720} \approx 2,718.$$

Замечание. Оценку остатка ряда можно производить с помощью остаточного члена ряда Маклорена

$$|f(x_1) - s_n(x_1)| = |R_n(x_1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right|,$$

где c находится между 0 и x_1 . В рассмотренном примере $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$,

$0 < c < 1$. Так как $e^c < e^1 < 3$, то $R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$. При $n = 6$ имеем:

$$R_6(1) < \frac{3}{7!} < 0,001; e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{6!} \approx 2,718.$$

II. Приближённое вычисление определённых интегралов

Ряды применяются также для приближённого вычисления интегралов в случаях, когда первообразная не выражается через элементарные функции или нахождение первообразной сложно.

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x) dx$ с точностью до $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд и интервал сходимости включает в себя отрезок $[a, b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда. Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функций.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя x на $(-x^2)$ в формуле (4.1):

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad (8.1)$$

Интегрируя обе части этого равенства на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty; +\infty)$, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots\right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 2^5} - \frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 2^7} + \dots \end{aligned}$$

Получим знакочередующийся ряд. Так как $\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 2^5} = \frac{1}{320} \approx 0,031 > 0,001$, а $\frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 2^7} \approx 0,0002 < 0,001$, то с точностью 0,001 имеем:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} \approx 0.461.$$

Замечание. Первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = e^{-x^2}$ можно найти в виде степенного ряда, проинтегрировав равенство (8.1) в пределах от 0 до x :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots\right) dt = x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots, \\ x \in (-\infty; +\infty).$$

III. Приближённое решение дифференциальных уравнений

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции, или способ решения сложен, то для приближённого нахождения этого решения можно воспользоваться рядом Тейлора, предполагая, что искомое решение представимо своим рядом Тейлора.

Рассмотрим два способа решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Задача. Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (8.2)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (8.3)$$

Способ последовательного дифференцирования

Будем предполагать, что решение задачи Коши существует и единственно. Решение уравнения (8.2) ищем в виде ряда Тейлора

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots, \quad (8.4)$$

при этом первые два коэффициента находим из начальных условий (8.3). Подставив в уравнение (8.2) значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, находим третий коэффициент: $y''(x_0) = f(x_0; y_0; y'_0)$. Значения $y'''(x_0)$, $y^{(4)}(x_0)$, ... находим путём последовательного дифференцирования уравнения (8.2) по x и вычисления производных при $x = x_0$. Найденные значения производных (коэффициентов) подставляем в равенство (8.4). Ряд (8.4) представляет искомое частное решение уравнения (8.2) для тех значений x , при которых он сходится. Частичная сумма этого ряда будет приближённым решением дифференциального уравнения (8.2).

Рассмотренный способ применим и для построения общего решения уравнения (8.2), если y_0 и y'_0 рассматривать как произвольные постоянные.

Способ последовательного дифференцирования применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Пример. Методом последовательного дифференцирования найти пять первых членов (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения

$$y'' = x^2 + y^2, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = \frac{1}{2}.$$

Решение. Будем искать решение уравнения в виде

$$y = y(-1) + \frac{y'(-1)}{1!}(x + 1) + \frac{y''(-1)}{2!}(x + 1)^2 + \frac{y'''(-1)}{3!}(x + 1)^3 + \dots$$

Здесь $y(-1) = 2$, $y'(-1) = \frac{1}{2}$. Находим $y''(-1)$, подставив $x = -1$ в исходное уравнение: $y''(-1) = (-1)^2 + 2^2 = 5$. Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем заданное дифференциальное уравнение:

$$y''' = 2x + 2yy',$$

$$y^{(4)} = 2 + 2(y')^2 + 2yy'',$$

$$y^{(5)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''', \dots$$

При $x = -1$ имеем:

$$y'''(-1) = -2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$y^{(4)}(-1) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 22,5,$$

$$y^{(5)}(-1) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 0 = 15, \dots$$

Подставляя найденные значения производных в исходный ряд, получим:

$$y = 2 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{15}{16}(x+1)^4 + \frac{1}{8}(x+1)^5 + \dots$$

Способ неопределённых коэффициентов

Этот способ приближённого решения наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad (8.5)$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Предполагая, что функции $p_1(x)$, $p_2(x)$ и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды по степеням $x - x_0$, сходящиеся в некотором интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, искомое решение $y = y(x)$ ищем в виде степенного ряда

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots \quad (8.6)$$

с неопределёнными коэффициентами.

Коэффициенты c_0 и c_1 определяются при помощи начальных условий $c_0 = y_0$, $c_1 = y'_0$.

Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем ряд (8.6) два раза (каков порядок уравнения) и подставляем выражения для функции y и её производных в уравнение (8.5), заменив в нём $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ их разложениями. В результате получаем тождество, из которого методом неопределённых коэффициентов находим недостающие коэффициенты. Построенный ряд (8.6) сходится в том же интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ и служит решением уравнения (8.5).

Пример. Найти решение уравнения $y'' + xy' + y = x \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Разложим функции $p_1(x)$, $p_2(x)$ в степенные ряды:
 $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 1$,

$$f(x) = x \cos x = x \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right).$$

Ищем решение уравнения в виде ряда

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

Тогда

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots,$$

$$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + 3 \cdot 4c_4x^2 + \dots$$

Из начальных условий находим: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Подставляем полученные ряды в дифференциальное уравнение:

$$(2c_2 + 2 \cdot 3 \cdot c_3x + 3 \cdot 4 \cdot c_4x^2 + \dots) + x(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots) = x \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$x^0 : 2c_2 = 0,$$

$$x^1 : 2 \cdot 3c_3 + 2 = 1,$$

$$x^2 : 3 \cdot 4c_4 + 2c_2 + c_2 = 0,$$

$$x^3 : 4 \cdot 5c_5 + 3c_3 + c_3 = -\frac{1}{2},$$

$$x^4 : 5 \cdot 6c_6 + 4c_4 + c_4 = 0,$$

.....

Отсюда находим, что $c_2 = c_4 = c_6 = \dots = 0$, $c_3 = -\frac{1}{3!}$, $c_5 = \frac{1}{5!}$, $c_7 = -\frac{1}{7!}, \dots$

Таким образом, получаем решение уравнения в виде

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

то есть $y = \sin x$.

Приложение

Задание 1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости.

$$1. \sum_1^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$$

$$2. \sum_1^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$$

$$3. \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

$$4. \sum_1^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$$

$$5. \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$6. \sum_0^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$$

$$7. \sum_1^{\infty} (nx)^n$$

$$8. \sum_1^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

$$9. \sum_1^{\infty} n!(x-5)^n$$

$$10. \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$$

$$11. \sum_1^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!}$$

$$12. \sum_0^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{(n+1)4^n}$$

$$13. \sum_1^{\infty} \frac{n}{n+2} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$14. \sum_2^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n \ln n}$$

$$15. \sum_1^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$$

$$16. \sum_0^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$$

$$17. \sum_1^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)3^n}$$

$$18. \sum_1^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$$

$$19. \sum_1^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$$

$$20. \sum_1^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{n!}$$

$$21. \sum_1^{\infty} n^n (x+5)^n$$

$$22. \sum_1^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n}$$

$$23. \sum_1^{\infty} \frac{(x+3)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$$

$$24. \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$25. \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n \cdot 3^n}$$

$$26. \sum_1^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

$$27. \sum_1^{\infty} n^n (x-1)^n$$

$$28. \sum_1^{\infty} \frac{x^{3n}}{(4n-3)8^n}$$

$$29. \sum_0^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}$$

$$30. \sum_1^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$$

Задание 2. Найти несколько первых (отличных от 0) членов разложения в ряд по степеням x функций.

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $\operatorname{tg} x$ | 2. $\operatorname{arctg}^2 x$ |
| 3. $\sec x$ | 4. $\arcsin^2 x$ |
| 5. $e^{\cos x}$ | 6. $e^{-x} \cos x$ |
| 7. $\operatorname{th} x$ | 8. $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ |
| 9. $e^x \sin x$ | 10. $(1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}$ |
| 11. $\ln \cos x$ | 12. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ |
| 13. $\ln(1+e^x)$ | 14. $e^x \cos x$ |
| 15. $e^{\sin x}$ | 16. $3^{\cos x}$ |
| 17. $(1+x)^x$ | 18. $\operatorname{tg} 2x$ |
| 19. $\sin^3 x$ | 20. $\operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2}$ |
| 21. $\ln^2(1-x)$ | 22. $e^{\sin 2x}$ |
| 23. $\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$ | 24. $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ |
| 25. $(1+x^2) \operatorname{arctg} x$ | 26. $e^{-x} \sin x$ |
| 27. $\operatorname{tg} 3x$ | 28. $\operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}$ |
| 29. $2^{\sin 3x}$ | 30. $\ln(2+e^x)$ |

Задание 3. Разложить функцию $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$.

- | | |
|---|--|
| 1. $\sqrt{x}; \quad x_0 = 4$ | 2. $\ln(x+2); \quad x_0 = -\frac{3}{2}$ |
| 3. $\frac{1}{x^2+3x+2}; \quad x_0 = -4$ | 4. $\frac{1}{x^2}; \quad x_0 = -1$ |
| 5. $\ln x; \quad x_0 = 1$ | 6. $\cos^2 x; \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$ |
| 7. $e^x; \quad x_0 = -2$ | 8. $\cos x; \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$ |
| 9. $\frac{1}{1+x^2}; \quad x_0 = 0$ | 10. $\ln(2x+1); \quad x_0 = \frac{1}{4}$ |

11. $\sin^2 x; \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

13. $\sqrt{x+2}; \quad x_0 = 1$

15. $3^x; \quad x_0 = 1$

17. $\ln(1-x); \quad x_0 = \frac{1}{2}$

19. $e^{-x}; \quad x_0 = 2$

21. $(2+x)^{\frac{1}{3}}; \quad x_0 = -1$

23. $\ln(x+3); \quad x_0 = -\frac{5}{2}$

25. $\ln(2x-1); \quad x_0 = \frac{3}{4}$

27. $\sin^2 3x; \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

29. $\ln(x-3); \quad x_0 = \frac{7}{2}$

12. $\ln(x+1); \quad x_0 = -\frac{1}{2}$

14. $\frac{1}{x^2+4x+7}; \quad x_0 = -2$

16. $\sin x \cos x; \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

18. $(2+x)^{\frac{1}{2}}; \quad x_0 = -1$

20. $\ln(x-2); \quad x_0 = \frac{5}{2}$

22. $\cos x; \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

24. $\sin 2x; \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$

26. $2^{-x}; \quad x_0 = 1$

28. $\sqrt{x-1}; \quad x_0 = 2$

30. $e^{-2x}; \quad x_0 = -1$

Задание 4. Разложить функцию в ряд Маклорена, указать интервалы, в которых эти разложения имеют место.

1. $\ln(1-x-6x^2)$

3. $2x^2 \cos \frac{x}{2} - x$

5. $\frac{\arcsin x}{x} - 1$

7. $x \sinh 3x$

9. $\ln(x^2+3x+2)$

11. $\ln(1-x-12x^2)$

13. $\sin 2x + x \cos 2x$

15. $\frac{2x-3}{(x-1)^2}$

2. $\frac{3}{(1-x)(1+2x)}$

4. $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$

6. $\ln \frac{1+x}{1-x}$

8. $\frac{x}{9+x^2}$

10. $\sin^2 x \cos^2 x$

12. $\frac{5}{6-x-x^2}$

14. $(3+e^{-x})^2$

16. $\ln(1+2x-x^2)$

17. $\frac{7}{12+x-x^2}$

19. $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$

21. $\ln(1+x-2x^2)$

23. $x^2\sqrt{4-3x}$

25. $(1+e^x)^2$

27. $\frac{6}{8+2x-x^2}$

29. $\sqrt{16-5x}$

18. $(x-1)\sin 3x$

20. $x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$

22. $\frac{5x-5}{x^2-x-6}$

24. $\frac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$

26. $\ln(4+3x)$

28. $x^2 \operatorname{ch} 2x$

30. $\ln(1+x-6x^2)$

Задание 5. Вычислить приблизительно с точностью ε .

1. $\cos 10^\circ; \varepsilon = 0,0001$

3. $\sin \frac{\pi}{4}; \varepsilon = 0,0001$

5. $\ln 5; \varepsilon = 0,001$

7. $\sqrt{e}; \varepsilon = 0,0001$

9. $\cos 1^\circ; \varepsilon = 0,00001$

11. $\sqrt{27}; \varepsilon = 0,001$

13. $\sqrt[3]{30}; \varepsilon = 0,001$

15. $\sqrt[3]{2}; \varepsilon = 0,001$

17. $\ln 1,04; \varepsilon = 0,0001$

19. $\sqrt{70}; \varepsilon = 0,001$

21. $\ln 1,07; \varepsilon = 0,0001$

23. $\frac{1}{\sqrt{e}}; \varepsilon = 0,00001$

25. $\sqrt[5]{250}; \varepsilon = 0,001$

27. $\sin \frac{\pi}{3}; \varepsilon = 0,0001$

29. $\operatorname{ch} 0,3; \varepsilon = 0,0001$

2. $\sin 18^\circ; \varepsilon = 0,001$

4. $\operatorname{arctg} \frac{1}{5}; \varepsilon = 0,0001$

6. $\arcsin 1; \varepsilon = 0,0001$

8. $\lg e; \varepsilon = 0,00001$

10. $\ln 10; \varepsilon = 0,0001$

12. $\ln 1,1; \varepsilon = 0,0001$

14. $\sqrt[3]{120}; \varepsilon = 0,0001$

16. $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}; \varepsilon = 0,00001$

18. $\sqrt[5]{1,1}; \varepsilon = 0,0001$

20. $\cos 18^\circ; \varepsilon = 0,0001$

22. $\ln 3; \varepsilon = 0,0001$

24. $\sqrt[3]{500}; \varepsilon = 0,0001$

26. $\ln 0,98; \varepsilon = 0,0001$

28. $\sin 9^\circ; \varepsilon = 0,0001$

30. $\sin 1; \varepsilon = 0,001$

Задание 6. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

$$1. \int_0^1 \sin x^2 dx$$

$$3. \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

$$5. \int_0^{0,25} \sqrt{1+x^3} dx$$

$$7. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$$

$$9. \int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx$$

$$11. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$$

$$13. \int_0^{0,5} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x} dx$$

$$15. \int_0^{0,25} \cos(16x^2) dx$$

$$17. \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

$$19. \int_0^{0,1} \sin(100x^2) dx$$

$$21. \int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} e^x dx$$

$$23. \int_0^1 \sqrt{x} \cos x dx$$

$$25. \int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$27. \int_0^{0,2} e^{-3x^2} dx$$

$$29. \int_0^{0,25} \sin(16x^2) dx$$

$$2. \int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx$$

$$4. \int_0^{0,5} \sin(4x^2) dx$$

$$6. \int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$$

$$8. \int_0^{0,1} e^{-2x^2} dx$$

$$10. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$$

$$12. \int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx$$

$$14. \int_0^1 \cos x^2 dx$$

$$16. \int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$$

$$18. \int_0^{0,4} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x} dx$$

$$20. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$

$$22. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$$

$$24. \int_0^{0,4} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$$

$$26. \int_0^{0,2} \cos(25x^2) dx$$

$$28. \int_0^1 \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$$

$$30. \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx$$

Задание 7. Найти пять первых членов ряда Тейлора решения задачи Коши.

1. $y'' = xy, y(0)=1, y'(0)=0$
2. $y'' + xy' + y = 0, y(0)=0, y'(0)=1$
3. $y' = x^2 - y^2, y(0)=0$
4. $(1-x^2)y'' - xy' = 0, y(0)=0, y'(0)=1$
5. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0, y(0)=0, y'(0)=1$
6. $y'' = xy y', y(0)=1, y'(0)=1$
7. $(1-x)y' = 1+x-y, y(0)=0$
8. $y'' + xy = 0, y(0)=1, y'(0)=1$
9. $y'' = xy, y(0)=2, y'(0)=1$
10. $y' = e^x - y, y(0)=2$
11. $y' = x^2 + y^2, y(0)=1$
12. $y'' = e^y + x, y(0)=1, y'(0)=0$
13. $y' = \sin y - \sin x, y(0)=0$
14. $y'' = yy' - x^2, y(0)=1, y'(0)=1$
15. $y' = y^2 + x^3, y(0)=\frac{1}{2}$
16. $y' = x^2 - y, y(0)=0$
17. $y' = x^2 y^2 - 1, y(0)=1$
18. $y' = e^y + xy, y(0)=0$
19. $y' = 2e^y + xy, y(0)=0$
20. $y' = y + x^2, y(0)=-2$
21. $y' = 2y + x - 1, y(1)=1$
22. $y' = x + y, y(0)=1$
23. $y'' + xy = 0, y(0)=1, y'(0)=0$
24. $y' = \cos x + y^2, y(0)=1$
25. $y' = y + y^2, y(0)=3$
26. $y' = \sin x + y^2, y(0)=1$
27. $y' = e^x + y^2, y(0)=0$
28. $y' = 2e^y - xy, y(0)=0$
29. $y' = e^x + y, y(0)=4$
30. $y' = x + x^2 + y^2, y(0)=5$

Библиографический список

1. *Данко, П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1и Т.2. /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я.Кожевникова. М.: Наука, 2003.
2. *Демидович, Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов/Б.П. Демидович. М.: АСТ: Астрель, 2003.
3. *Кузнецов, Л. А.* Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие для вузов / Л. А. Кузнецов. - 11-е изд., стер. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2008.
4. Сборник задач по математике: для втузов : учеб. пособие: в 4 ч. / под ред.: А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – 5-е изд. - М.: Физматлит, 2009
5. *Пискунов, Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. пособие для вузов. В 2 т. Т.2./Н.С. Пискунов. М.: Интеграл-Пресс, 2002.
6. *Письменный, Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. 2 часть.. 2-е изд., испр. / Д.Т.Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2003.
7. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник: в 3-х т. Т.2. / Г. М. Фихтенгольц. - 9-е изд., стер. СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Понятие степенного ряда. Интервал сходимости	3
§ 2. Свойства степенных рядов	7
§ 3. Определение ряда Тейлора. Основные теоремы	10
§ 4. Разложение некоторых элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена	13
§ 5. Биномиальный ряд	16
§ 6. Логарифмический ряд	18
§ 7. Примеры разложения функций в степенные ряды	19
§ 8. Некоторые приложения степенных рядов	22
I. Приближённое вычисление значений функции	22
II. Приближённое вычисление определённых интегралов	23
III. Приближённое решение дифференциальных уравнений	24
Приложение	28
Литература	34

Учебно-методическое издание

Степенные ряды. Ряды Тейлора

Методические указания

Автор-составитель

Цапаева Светлана Анатольевна

Редактор
