

А.А.Попов

ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБА РАСЧЕТА ЧАСТОТЫ, ФАЗЫ И АМПЛИТУДЫ ПО ТОЧКАМ ПУТЕМ УСРЕДНЕНИЯ

При исследовании данного способа было обнаружено, что его алгоритм является некорректным при большом количестве точек. В тоже время, при малом количестве точек, исходные координаты лежат на полученной синусоиде, но она может отличаться от изначальной. Поэтому есть необходимость провести дальнейшее исследование для определения необходимого количества точек и длины шага в данном способе, а также расчет корректного алгоритма поиска частоты, фазы и амплитуды.

Ключевые слова: корректность вычислительного алгоритма, синусоида, аппроксимация

Во многих технических областях знаний сталкиваются с задачей расчёта синусоиды по набору экспериментальных точек. Например, в радиотехнике часто требуется определить частоту, амплитуду и начальную фазу сигналов, поступающих с различных генераторов. Физически это сложно реализовать, поэтому на практике используют методы математического моделирования.

Есть множество различных способов для определения данных показателей, но каждый из них обладает определенными плюсами и минусами. Например, такие как:

1) построение полинома Лагранжа. Один из точных, но достаточно долгих способов, который показывает поведение функции только на локальном участке (где были выбраны точки);

2) расчет методом наименьших квадратов. К сожалению, если не убирать начальную фазу, полученная система аналитически не решается, а она необходима («Необходимость определения начальной фазы вытекает из следующего простого примера. Представьте себе два последовательно включенных генератора, частоты и амплитуды ЭДС которых одинаковы. Спрашивается: можно ли заранее определить, суммарное напряжение в каждый момент времени? Очевидно, что нельзя.» [1]);

3) исследование длины и высоты волны. Довольно быстрый способ, но он также показывает поведение функции только на локальном участке (где была исследована волна) и, предполагает, возможное наличие большой погрешности на неисследованных участках.

Данная статья рассказывает о методе, предложенным кандидатом физико-математических наук Е.В.Величко. Он позволяет оценить необходимые параметры сигнала, используя метод наименьших квадратов и тригонометрические формулы.

Имея набор точек x с шагом h и, зная значения функции $y_i = a \cdot \sin(bx_i + c) + g(x_i)$ в этих точках, мы можем восстановить функцию $y = a \cdot \sin(bx + c)$, где a – амплитуда, b – угловая частота, c – начальная фаза.

Угловая частота:

$$\begin{aligned} y_{i+1} + y_{i-1} &= a \cdot \sin(bx_{i+1} + c) + a \cdot \sin(bx_{i-1} + c) = a \cdot 2 \sin \frac{bx_{i+1} + bx_{i-1} + 2c}{2} \cdot \cos \frac{bx_{i+1} - bx_{i-1}}{2} \\ &= \left| \begin{matrix} x_{i+1} + x_{i-1} = 2x_i \\ x_{i+1} - x_{i-1} = 2h \end{matrix} \right| = 2a \cdot \sin \frac{2bx_i + 2c}{c} \cdot \cos \frac{2hb}{b} = 2a \cdot \sin(bx_i + c) \cdot \cos(hb) = 2a \cdot y_i \cdot \cos(hb) \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \cos(hb) &= \frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2y_i} \\ b &= \frac{1}{h} \arccos \left(\frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2y_i} \right) \end{aligned}$$

Усредним полученный результат

$$b = \frac{1}{h(n-2)} \sum_{i=2}^{n-1} \arccos \left(\frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2y_i} \right)$$

Начальная фаза:

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_i = a \cdot \sin(bx_i + c) \\ y_{i+1} = a \cdot \sin(bx_{i+1} + c) \\ \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{y_i}{\sin(bx_i + c)} \\ a &= \frac{y_{i+1}}{\sin(bx_{i+1} + c)} \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{y_i}{\sin(bx_i + c)} &= \frac{y_{i+1}}{\sin(bx_{i+1} + c)} \\ y_i \cdot \sin(bx_{i+1} + c) &= y_{i+1} \cdot \sin(bx_i + c) \\ y_i \cdot (\sin(bx_{i+1}) \cdot \cos(c) + \sin(c) \cdot \cos(bx_{i+1})) &= y_{i+1} (\sin(bx_i) \cdot \cos(c) + \sin(c) \cdot \cos(bx_i)) \\ y_i \cdot \sin(bx_{i+1}) \cdot \cos(c) - y_{i+1} \cdot \sin(bx_i) \cdot \cos(c) &= y_{i+1} \cdot \sin(c) \cdot \cos(bx_i) - y_i \cdot \sin(c) \cdot \cos(bx_{i+1}) \\ \cos(c) \cdot (y_i \cdot \sin(bx_{i+1}) - y_{i+1} \cdot \sin(bx_i)) &= \sin(c) \cdot (y_{i+1} \cdot \cos(bx_i) - y_i \cdot \cos(bx_{i+1})) \\ ctg(c) &= \frac{y_{i+1} \cdot \cos(bx_i) - y_i \cdot \cos(bx_{i+1})}{y_i \cdot \sin(bx_{i+1}) - y_{i+1} \cdot \sin(bx_i)} \\ c &= \text{arctg} \left(\frac{y_{i+1} \cdot \cos(bx_i) - y_i \cdot \cos(bx_{i+1})}{y_i \cdot \sin(bx_{i+1}) - y_{i+1} \cdot \sin(bx_i)} \right)\end{aligned}$$

Коэффициент b нам уже известен, потому усредним данный результат:

$$c = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \text{arctg} \left(\frac{y_{i+1} \cdot \cos(bx_i) - y_i \cdot \cos(bx_{i+1})}{y_i \cdot \sin(bx_{i+1}) - y_{i+1} \cdot \sin(bx_i)} \right)$$

Амплитуда:

В ходе попыток вычисления методом наименьших квадратов, одна из частных производных, а именно по амплитуде, выглядела следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n (a \cdot \sin(bx_i + c) - y_i) \cdot \sin(bx_i + c) = 0$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}a \sum_{i=1}^n \sin^2(bx_i + c) &= \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sin(bx_i + c) \\ a &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sin(bx_i + c)}{\sum_{i=1}^n \sin^2(bx_i + c)}\end{aligned}$$

Метод, предоставленный в данной статье, содержит вывод формул для всех трех параметров, и предлагает усреднение значений между точками. Основные минусы представленных формул:

1) при значениях функции близких к нулю, возникает большая погрешность. В данном случае, рекомендуется убрать их из расчета, а для сохранения шага между точками — убрать и кратные точки по порядковому номеру;

2) в случае, если $\frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2y_i} \geq 1$, то такие тройки также необходимо убрать (так как $0 \leq |\cos x| \leq 1$);

3) при увеличении количества точек на одном и том же интервале, результат ухудшается, что будет показано на примере, поскольку, при маленьком шаге, увеличивается погрешность расчета частоты, и, соответственно, начальной фазы и амплитуды.

Пример: на интервале $[0;100]$ реальная линия: $f(x) = 2 \sin(0,1x + 0,2) + 0,1 \sin x$, на рисунках изображены графики функций $f(x)$ — по точкам и $h(x) = f(x) - g(x)$ — по формулам [2]):

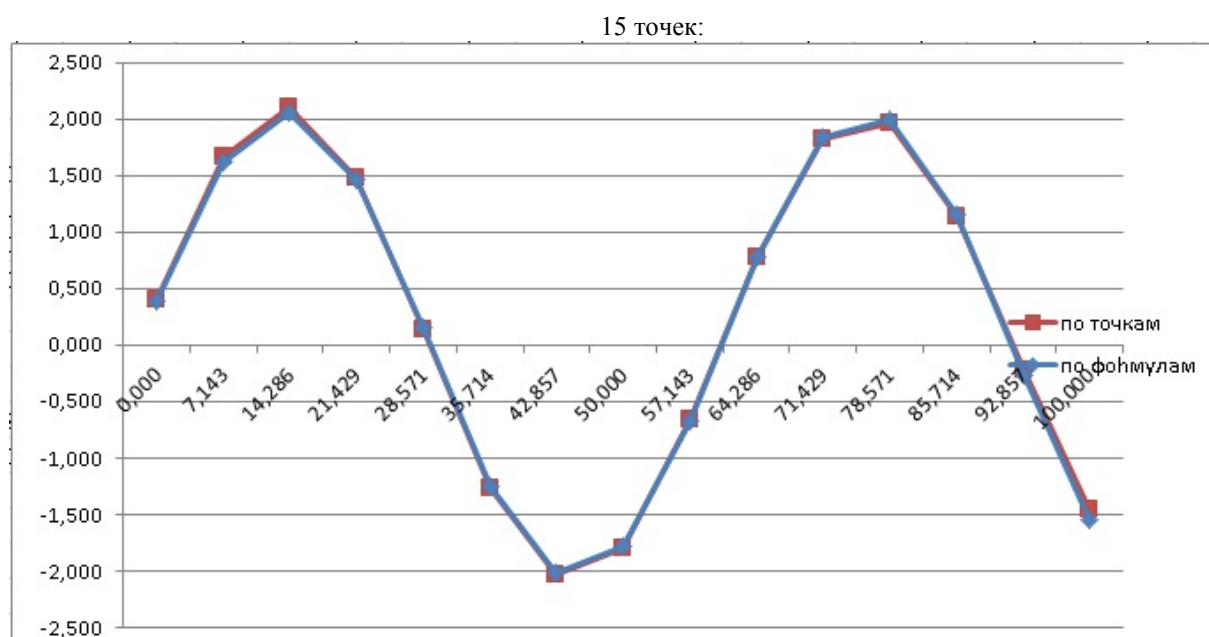


Рис. 1

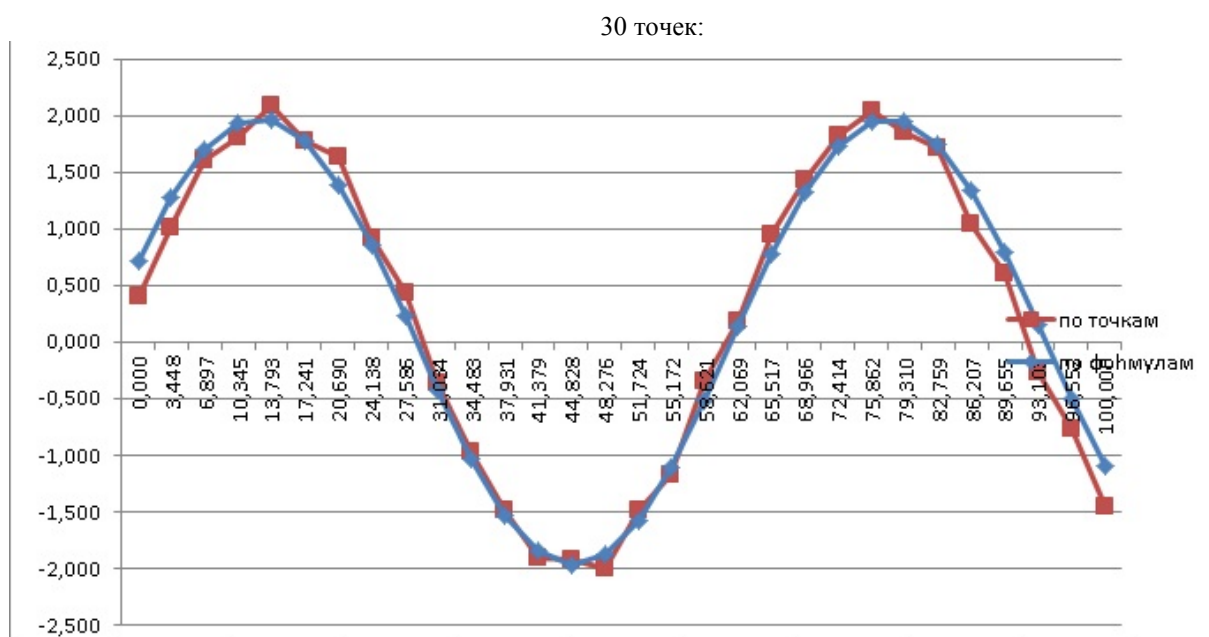


Рис. 2

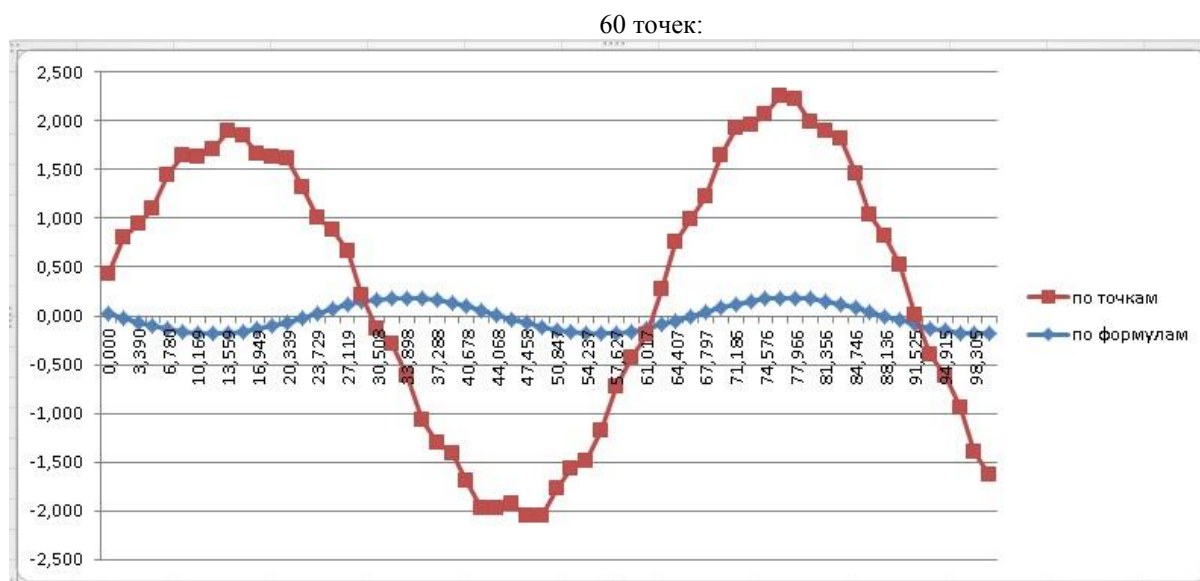


Рис. 3

Из выше сказанного и проведенных расчетов можно утверждать, что данный метод достаточно удобен и точен лишь в некоторых частных случаях, но, к сожалению, на практике мы не всегда можем сразу оценить величину $g(x_i)$, потому данный метод не всегда пригоден. Также, на примерах, было показано, что в некоторых случаях погрешность значительно превышает заявленные 5%, а сам метод требует необходимости ввести еще одно ограничение от заявленного.

1. Ломоносов В.Ю., Поливанов К.М., Михайлов О.П. Электротехника. М.: Энергоатомиздат, 1990. С. 154.
2. Величко Е.В. Определение параметров синусоиды по ее значениям в системе точек [Электр. ресурс] // Наукові вісті Дніпровського університету. 2014. № 11. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nvdu_2014_11_9 (дата обращения: 20.02.2018).

References

1. Lomonosov V.Yu., Polivanov K.M., Mikhaylov O.P. Ehlektrotehnika [Electrical Engineering]. Moscow, 1990, p. 154.
2. Velichko E.V. Opredelenie parametrov sinusoidy po ee znacheniyam v sisteme tochek [Determination of the parameters of a sinewave by its meanings in the system of points]. Naukovi visti Dalivs'kogo universitetu, 2014, no. 11. Available at: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nvdu_2014_11_9 (accessed: 20.02.2018).

Popov A.A. Investigation of the method for calculating frequency, phase, and amplitude by averaging points. Having studied the method, it was found out that the algorithm is incorrect when a lot of points are used. If the calculation is performed on a small number of points, the initial coordinates belong to the sinewave, but it can be different from the original one. The need for a further study to determine the appropriate count of points and step length is apparent. Moreover, we have to calculate the correct algorithm for finding the frequency, phase, and amplitude.

Keywords: accuracy of the computational algorithm, sinewave, approximation.

Сведения об авторе. А.А.Попов — студент ИЭИС НовГУ им. Ярослава Мудрого, направление «Прикладная математика и информатика»; anton1406@bk.ru.

Статья публикуется впервые. Поступила в редакцию 30.08.2018.