

УДК 519.862.5

И.Я.Гозман, Н.В.Рутковский

МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ

Институт электронных и информационных систем НовГУ, т. (8162) 62 99 72

The paper considers the general model of oligopoly market and its equilibrium conditions. Elasticity of demand by price is the main characteristic of the equilibrium state. Equilibrium conditions have been identified. From the mathematical point of view the task reduces to solving a system of algebraic equations.

Ключевые слова: модель кооперированной олигополии, состояние равновесия

Введение

Олигополия — это определенный тип строения рынка, при котором сторона предложения представ-

лена небольшим числом сравнительно крупных предприятий — продавцов однородной продукции или близких субститутов [1,2]. Олигополия является преобладающей формой современного отраслевого рын-

ка. Олигополистическими отраслями промышленности являются, например, автомобильная промышленность, производство стали, алюминия, электрооборудования, компьютеров.

Как правило, фирмы олигополии имеют в своем распоряжении дополнительные производственные мощности. Обладая такими ресурсами и значительной долей реализуемого товара, фирма олигополии имеет определенную монопольную власть, т.е. может влиять на цену своей продукции. Одной из особенностей олигополии являются барьеры для входа. Барьеры возникают благодаря сознательной деятельности самих фирм, их стратегическому поведению, препятствующему проникновению новых фирм в данную отрасль.

Главная отличительная черта олигополии как специального типа строения рынка заключается во всеобщей взаимозависимости поведения предприятий-продавцов. Поэтому олигополист не может рассматривать кривую спроса на свою продукцию как заданную. Олигополист должен сделать (или принять) некоторые предположения о реакции своих соперников на принимаемые им решения, а также о реакции соперников на результаты своих решений.

Поведение фирм на олигополистическом рынке подвержено двум противоположным тенденциям. Во-первых, взаимозависимость фирм может привести их к желанию вступить в сговор друг с другом. Во-вторых, эти фирмы будут стремиться конкурировать таким образом, чтобы получать именно в свое распоряжение максимальную долю отраслевой прибыли. При этом важно понимать, что эти две линии поведения несовместимы. Чем больше фирмы конкурируют друг с другом ради получения большей доли отраслевой прибыли, тем меньше становится общая величина этой прибыли.

Неоднозначность и сложность олигополий объясняет недостаточно полную проработку ее теории. В настоящее время это наименее изученная модель конкуренции.

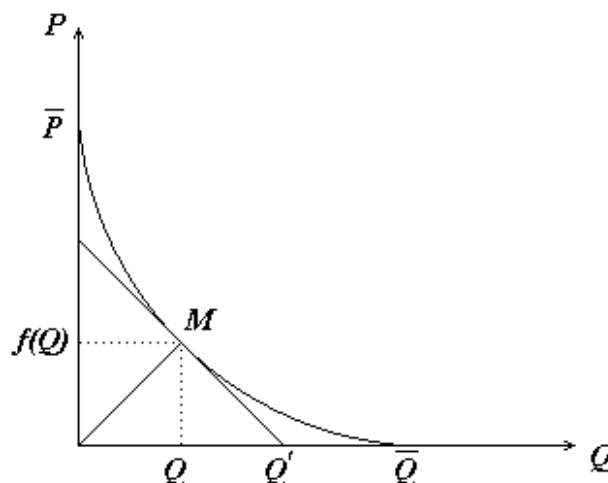
Функция спроса

Функцию спроса будем задавать уравнением $P = f(Q)$, где P — цена единицы товара, а Q — количество товара, которое покупатели хотят и могут приобрести по заданной цене.

Область определения функции спроса — отрезок $[0, \bar{Q}]$, где $\bar{Q}$ — количество товара, удовлетворяющее все потребности потребителей этого товара при условии, что товар достанется бесплатно, что соответствует равенству $f(\bar{Q}) = 0$. Область значений функции спроса — отрезок $[0, \bar{P}]$, где $\bar{P}$ — предельный уровень цены за товар, при любом снижении которого находятся покупатели товара. Иными словами, при цене $P \geq \bar{P}$ товар не покупают, а при малейшем снижении цены ниже уровня $\bar{P}$ товар начинают покупать, что соответствует равенству $f(0) = \bar{P}$ [3].

Товар на рынке олигополии предполагается нормальным, т.е. выполняется закон спроса: функция f убывает на отрезке $[0, \bar{Q}]$. Для удобства будем считать функцию f достаточно гладкой, чтобы имели смысл все

возникающие производные. Типичный график функции спроса представлен на нижеследующем рисунке.



Условие убывания функции спроса выражается неравенством $f'(Q) < 0$ при $Q \in [0, \bar{Q}]$.

Эластичность спроса по цене

Эластичностью спроса по цене называется величина $E_p = -\frac{f(Q)}{Q \cdot f'(Q)}$, определенная при $Q \in (0, \bar{Q}]$.

Эластичность показывает, на сколько процентов увеличится объем спроса при уменьшении цены P на один процент. Как видно из формулы для эластичности, величина E_p всегда положительна.

Далее эластичность будет использоваться в качестве основной характеристики состояния равновесия на рынке олигополии. Для этого нам необходимо, чтобы эластичность была взаимнооднозначна с функцией спроса $f(Q)$ [3].

Рассмотрим эластичность на наиболее типичных примерах:

1. *Линейная функция спроса* $f(Q) = \bar{P} - k \cdot Q$, где $k > 0$.

Тогда $\bar{Q} = \frac{1}{k} \cdot \bar{P}$, $f'(Q) = -k$, $E_p = \frac{\bar{P} - k \cdot Q}{k \cdot Q} = \frac{\bar{Q}}{Q} - 1$,

$$E_p' = -\frac{\bar{Q}}{Q^2} < 0.$$

Учитывая, что $\lim_{Q \rightarrow 0} E_p = +\infty$ и $E_p(\bar{Q}) = 0$, эластичность строго убывает на $(0, \bar{Q}]$.

2. *Квадратичная функция спроса* $f(Q) = k \cdot (a - Q)^2 - h$, где k, a, h — положительные параметры, удовлетворяющие условию

$$a > \sqrt{\frac{h}{k}}. \quad (1)$$

Здесь $\bar{P} = f(0) = k \cdot a^2 - h$, а величина $\bar{Q}$ является левым корнем квадратного уравнения $k \cdot (a - Q)^2 - h = 0$, т.е.

$$\bar{Q} = a - \sqrt{\frac{h}{k}}. \quad (2)$$

Найдем эластичность этой функции спроса $f'(Q) = -2 \cdot k \cdot (a - Q)$:

$$E_p = -\frac{k \cdot (a - Q)^2 - h}{2 \cdot k \cdot Q \cdot (a - Q)}.$$

Найдем множество значений эластичности на промежутке $(0, \bar{Q}]$. При ограничении (1) и учитывая (2) получаем $\lim_{Q \rightarrow +0} E_p(Q) = +\infty$, $E_p(\bar{Q}) = 0$, т.е. множество значений эластичности на промежутке $(0, \bar{Q}]$ есть промежуток $(+\infty, 0]$.

Проверим, что эластичность убывает на $(0, \bar{Q}]$. Для этого найдем E'_p и запишем в виде

$$E'_p = -\frac{a \cdot k \cdot Q^2 + 2 \cdot (h - a^2 \cdot k) \cdot Q - a \cdot (h - a^2 \cdot k)}{2k \cdot Q^2 \cdot (a - Q)^2}.$$

Рассмотрим числитель данного выражения:

$$\phi(Q) = a \cdot k \cdot Q^2 + 2 \cdot (h - a^2 \cdot k) \cdot Q - a \cdot (h - a^2 \cdot k).$$

Покажем, что он положителен для всех Q из $(0, \bar{Q}]$. Найдем дискриминант:

$$D = 4 \cdot (h - a^2 \cdot k)^2 + 4 \cdot a^2 \cdot k \cdot (h - a^2 \cdot k),$$

$$D = 4 \cdot (h - a^2 \cdot k)(h - a^2 \cdot k + a^2 \cdot k) = 4 \cdot h \cdot (h - a^2 \cdot k).$$

Учитывая (1) и положительность h получаем $D < 0$ и, следовательно, $E'_p < 0$, т.е. эластичность убывает на $(0, \bar{Q}]$.

3. *Степенная функция спроса* $f(Q) = k \cdot (a - Q)^m - h$, где k, a, h — положительные параметры, $m \geq 1$. Находим $\bar{P} = k \cdot a^m - h$, $\bar{Q} = a - \left(\frac{h}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Так как предельный уровень цены $\bar{P} > 0$, получаем ограничение

$$a > \left(\frac{h}{k}\right)^{\frac{1}{m}}. \quad (3)$$

Далее вычисляем $f'(Q) = -m \cdot k \cdot (a - Q)^{m-1}$,

$E_p = -\frac{k \cdot (a - Q)^2 - h}{m \cdot k \cdot Q \cdot (a - Q)^{m-1}}$. Из формулы для эластичности E_p следует, что она непрерывно зависит от Q и, учитывая (3), $\lim_{Q \rightarrow +0} E_p(Q) = +\infty$, а $E_p(\bar{Q}) = 0$. Следовательно, множество значений эластичности на промежутке $(0, \bar{Q}]$ есть промежуток $(+\infty, 0]$.

Проверим, что эластичность убывает на $(0, \bar{Q}]$. Для этого найдем производную E'_p , представляя эластичность в виде

$$E_p = \frac{1}{m} \cdot \left(a \cdot Q^{-1} - 1 - \frac{h}{k} \cdot Q^{-1} \cdot (a - Q)^{1-m} \right).$$

Имеем:

$$E'_p = \frac{1}{m} \cdot \left(-a \cdot Q^{-2} + \frac{h}{k} \cdot Q^{-2} \cdot (a - Q)^{1-m} + \frac{h}{k} (1-m) \cdot Q^{-1} \cdot (a - Q)^{-m} \right),$$

$$E'_p = -\frac{1}{m} \cdot \left(\frac{a}{Q^2} + \frac{h}{k} \cdot \left(\frac{m-1}{Q \cdot (a - Q)^m} - \frac{1}{Q^2 \cdot (a - Q)^{m-1}} \right) \right),$$

$$E'_p = -\frac{1}{m} \cdot \frac{k \cdot a \cdot (a - Q)^m - m \cdot h \cdot (a - Q) + (m-1) \cdot h \cdot a}{k \cdot Q^2 \cdot (a - Q)^m}.$$

Чтобы убедиться в неравенстве $E'_p < 0$, достаточно проверить, что числитель последнего выражения положителен.

Обозначая $a - Q$ через $x \in \left[\left(\frac{h}{k}\right)^{\frac{1}{m}}, a \right]$, запишем числитель в виде

$$\phi(x) = k \cdot a \cdot x^m - m \cdot h \cdot x + (m-1) \cdot h \cdot a = m \cdot h(a - x) + a \cdot k \cdot \left(x^m - \frac{h}{k} \right).$$

Теперь неравенство $\phi(x) > 0$ при $Q \in (0, \bar{Q}]$

или $x \in \left[\left(\frac{h}{k}\right)^{\frac{1}{m}}, a \right]$, очевидно.

4. *Гиперболическая функция спроса* $f(Q) = \frac{k}{Q+a} - h$, где параметры k, a, h положительны. Для этой функции $\bar{Q} = \frac{k}{h} - a$, $\bar{P} = \frac{k}{a} - h$ и поэтому

$$a < \frac{k}{h}. \quad (4)$$

Вычисляем $f' = \frac{k}{(Q+a)^2}$,

$$E_p = \frac{(k - h \cdot (Q+a)) \cdot (Q+a)^2}{k \cdot Q \cdot (Q+a)} = \frac{(k - h \cdot (Q+a)) \cdot (Q+a)}{k \cdot Q},$$

$$E_p = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{a \cdot (k - h \cdot a)}{Q} - 2 \cdot h \cdot a + k - h \cdot Q \right).$$

Найдем множество значений эластичности на промежутке $(0, \bar{Q}]$. При ограничении (4) $\lim_{Q \rightarrow +0} E_p(Q) = +\infty$, а $E_p(\bar{Q}) = 0$, т.е. множество значений эластичности на промежутке $(0, \bar{Q}]$ есть промежуток $(+\infty, 0]$.

Проверим, что эластичность убывает на $(0, \bar{Q}]$. Найдем производную

$$E'_p = -\frac{a \cdot (k - h \cdot a) + h \cdot Q^2}{k \cdot Q^2}.$$

Из этой формулы видно, что $E'_p < 0$, следовательно, на промежутке $(0, \bar{Q}]$ эластичность убывает.

5. *Показательная функция спроса* $f(Q) = a \cdot e^{-k \cdot Q} - h$, где k, a, h положительны и удовлетворяют условию $a > h$. Для этой функции спроса $\bar{P} = a - h$, $\bar{Q} = \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{a}{h}$.

Найдем эластичность этой функции:

$$f'(Q) = -k \cdot a \cdot e^{-k \cdot Q},$$

$$E_p = \frac{a \cdot e^{-k \cdot Q} - h}{k \cdot a \cdot Q \cdot e^{-k \cdot Q}} = \frac{a - h \cdot e^{k \cdot Q}}{k \cdot a \cdot Q}. \quad (5)$$

Найдем множество значений эластичности на промежутке $(0, \bar{Q}]$. Очевидно, что $\lim_{Q \rightarrow +0} E_p(Q) = +\infty$, а $E_p(\bar{Q}) = 0$, т.е. множество значений эластичности на промежутке $(0, \bar{Q}]$ есть промежуток $(+\infty, 0]$.

Убывание эластичности на $(0, \bar{Q}]$ хорошо видно из (5) — при увеличении Q числитель уменьшается, а знаменатель увеличивается.

Таким образом, использование эластичности в качестве однозначной характеристики точки на кривой спроса возможно для широкого класса функций.

Функция издержек

Ввиду больших масштабов производства олигополистов естественно предположить, что предельные издержки практически постоянны, что приводит к линейным функциям издержек $C_i(Q_i) = C_i + c_i \cdot Q_i$, где C_i — постоянные издержки фирм, а c_i — их предельные издержки. Если допустить, что некоторые фирмы имеют более низкие предельные издержки, то они смогут делать производство конкурентов убыточным. Поэтому естественно предположить, что $c_i = c$ для каждой фирмы, и функции издержек каждого олигополиста запишутся в виде $C_i(Q_i) = C_i + c \cdot Q_i$. Если Q_0 — такой совокупный объем производства, что $f(Q_0) = c$, то реальный совокупный объем производства Q никогда не превысит Q_0 , и следует рассматривать лишь часть кривой спроса, соответствующую отрезку $[0, Q_0]$. В связи с этим целесообразно рассмотреть приведенную функцию спроса $g(Q) = f(Q) - c$, определенную на отрезке $[0, Q_0]$ с множеством значений $[0, \bar{P} - c]$. Из равенства $g'(Q) = f'(Q)$ следует, что функция g удовлетворяет всем свойствам функции спроса. Эластичность функции g будем обозначать $\underline{E}_p$ [3].

Коалиции

На любом олигополистическом рынке у фирм есть стимулы координировать свою производственную деятельность и политику ценообразования посредством ограничения объема выпуска фирм (квот) и назначения одинаковых цен для увеличения совокупной прибыли отрасли и индивидуальных прибылей каждой из фирм. Объединение фирм, которые заключили явное или тайное соглашение о координации своей деятельности, будем называть *коалицией*.

Коалиции создаются с тем, чтобы совместными усилиями достичь экономических целей, достижение которых невозможно в одиночку. Каждая фирма может входить в несколько коалиций. Для отдельной фирмы участие в нескольких коалициях помогает избежать банкротства: если одна из коалиций пришла в упадок, а другая оказалась на подъеме, то участие во второй коалиции может компенсировать потери от участия в первой.

Действующий набор коалиций — совокупность коалиций в отрасли, включающих в себя всех участников рынка.

При сложной структуре рынка и взаимозависимости участников далеко не каждый действующий в отрасли набор коалиций будет устойчивым, т.е. не приводящим к возможному распаду некоторых коалиций.

Рассмотрим отрасль с однородным продуктом и n фирмами-производителями. Пусть $S = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество фирм в отрасли с совокупным выпуском

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i. \text{ Фирмы объединены в } m \text{ коалиций.}$$

Обозначим через J — действующий набор коалиций, причем $S = \bigcup_{A \in J} A$, т.е. набор коалиций покрывает все

множество фирм.

Равновесие. Условия существования равновесия

Цель коалиции — добиться наибольшей прибыли при условии, что выпуск фирм, не входящих в коалицию, останется постоянным.

Под *равновесием* будем понимать состояние рынка, при котором все коалиции достигают своих целей. Состояние равновесия является устойчивым, если при незначительном изменении параметров рынка не происходит изменение структуры коалиций.

Рассмотрим условия существования равновесия для общей модели олигополии.

Действующий набор коалиций J называют *сбалансированным*, если существует набор положительных чисел λ_A , сопоставляемых каждой коалиции $A \in J$, такой, что для любой фирмы i выполняется равенство

$$\sum_{i \in A} \lambda_A = 1, \quad (6)$$

где суммирование ведется по коалициям, в которые входит фирма с номером i . Число λ_A называют *весом* коалиции A в наборе J . Содержательно вес коалиции означает долю объема выпуска, которую предоставляет в коалицию A каждый ее член. Поэтому нулевые веса не имеют смысла, и берутся только положительные.

Любая фирма может входить в разные коалиции, и равенство (6) означает, что доли, предоставляемые фирмой во все коалиции, в которых она участвует, составляют весь выпуск фирмы.

Чтобы воспринимать коалицию в целом как отдельного участника рынка олигополии, определим ее выпуск, издержки и прибыль.

Выпуск коалиции $A \in J$

$$Q_A = \lambda_A \cdot \sum_{i \in A} Q_i. \quad (7)$$

Тогда суммарный выпуск всех коалиций составит величину

$$\sum_{A \in J} Q_A = \sum_{A \in J} \left(\lambda_A \cdot \sum_{i \in A} Q_i \right) = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \sum_{A \in J} \lambda_A = \sum_{i=1}^n Q_i = Q, \quad (8)$$

равную совокупному выпуску отрасли.

$$\text{Издержки коалиции } C_A = \lambda_A \cdot \sum_{i \in A} C_i(Q_i).$$

Запишем совокупный выпуск отрасли Q в следующем виде:

Для того, чтобы система уравнений имела единственное решение, необходимо, чтобы число уравнений было равно числу неизвестных, т.е. в нашем случае $m = n$. Это означает, что число коалиций совпадает с числом образующих их фирм.

Очевидно, что если (15) имеет единственное решение, то и система (16) также имеет единственное решение.

Введем следующее обозначение: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, где

$$x_i = \frac{Q_i}{E_p \cdot Q}, \quad i = \overline{1, n}. \quad \text{Тогда (15) запишется в виде}$$

$$B \cdot x = e. \quad (17)$$

Сбалансированный набор коалиций J назовем *минимальным*, если он не содержит других сбалансированных наборов. Для минимального сбалансиро-

ванного набора веса определяются однозначно и количество коалиций равно количеству фирм.

В нашем случае однозначная разрешимость систем уравнений (16) и (17) эквивалентна минимальности набора. Квадратная матрица B для минимального сбалансированного набора коалиций J называется *равновесной*.

Таким образом, задача поиска равновесных состояний сводится к алгебраической задаче решения систем линейных уравнений.

1. Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика: В 2-х т. / Общ. ред. В.М.Гальперина. СПб.: Экономическая школа, 1997. Т.2. 503 с.
2. Авдашева С.Б., Розанова Н.М. Теория организации отраслевых рынков: Учебник. М.: Магистр, 1998. 311 с.
3. Рутковский Н.В. Математические модели микроэкономики: Учеб.-метод. пособие. В.Новгород: НовГУ, 2006. 51 с.