УДК 621.391

В.А.Едемский, И.С.Вагунин

МЕТОД СИНТЕЗА БИНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С СОСТАВНЫМ ПЕРИОДОМ НА ОСНОВЕ КЛАССОВ СТЕПЕННЫХ ВЫЧЕТОВ

Институт электронных и информационных систем НовГУ, Vladimir.Edemsky@novsu.ru

The method of synthesis of binary sequences with composed period and prescribed limitation on the main parameters: period, autocorrelation function, power of balance is proposed.

Ключевые слова: бинарные последовательности, период, автокорреляционная функция, степень уравновешенности

1. Введение

Дискретно-кодированные последовательности с хорошими автокорреляционными свойствами широко используются в различных областях, например в радиолокации, гидролокации, связи и т.д. [1]. В [2] была предложена методика синтеза дискретно-кодированных последовательностей, сформированных на основе классов степенных вычетов, с заданными ограничениями на основные параметры. Ее эффективность подтверждена многочисленными примерами синтеза. Главным недостатком методики, заключающейся в комплексном использовании теории спектров разностей классов вычетов и циклотомических чисел, является то, что она применима лишь для синтеза последовательностей с простым периодом. В [3] вышеупомянутая методика была обобщена на случай синтеза двоичных последовательностей (ДП) с периодом KP, где P — простое число, а K — натуральное число, взаимно простое с P.

Цель настоящей статьи заключается в разработке метода синтеза бинарных последовательностей (БП) с составным периодом KP и заданными ограничениями на основные параметры. Рассматриваемые последовательности формируются на основе классов степенных вычетов.

2. Конструирование БП с составным периодом KP на основе классов степенных вычетов

Рассмотрим БП с периодом KP, сформированную из K БП $X_0,\dots,X_{K-1}$ периода P: $X_f=\{x_{f,g}\}$, $f=\overline{0,K-1}$, $g=\overline{0,P-1}$ по правилу кодирования (ПК):

$$z_i = x_{\langle i\rangle_K,\langle i\rangle_P} \qquad (1)$$

где $\langle i\rangle_K$ — наименьший положительный вычет целого числа i по модулю K.

Пусть $\lambda_{X_f}(\tau),\lambda_Z(\tau)$ — периодические автокорреляционные функции (ПАКФ) БП X_f и Z, а $r_{X_f,X_h}(\tau)$ — периодические взаимно корреляционные функции (ПВКФ) пары последовательностей X_f, X_h, $f,h=\overline{0,K-1}$, здесь τ — целое число.

Теорема 1. Если БП Z сформирована по ПК (1), то ее ПАКФ

$$\lambda_Z(\tau)=\begin{cases}\sum_{f=0}^{k-1}\lambda_{X_f}(\langle\tau\rangle_P), & \text{если } \tau\equiv 0 \pmod K,\\ \sum_{f=0}^{k-1} r_{X_f,X_{\langle f+\tau\rangle_K}}(\langle\tau\rangle_P), & \text{если } \tau\not\equiv 0 \pmod K.\end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим двоичные последовательности $Y = \frac{Z+1}{2}$ и $Y_f = \frac{X_f + 1}{2}$, $f = \overline{0, K-1}$, тогда последовательности Y, Y_f так же, как и Z, X_f удовлетворяют соотношению (1). Для ПАКФ ДП и БП последовательностей справедливы соотношения [4]:

$$\lambda_Y(\tau) = 4(\lambda_Z(\tau) - R_Z) + KP,\ \lambda_{Y_f}(\tau) = 4\left(\lambda_{X_f}(\tau) - R_{X_f}\right) + P. \quad (2)$$

Для двоичных последовательностей теорема 1 была доказана в [3]. Воспользовавшись формулой (2), убеждаемся в справедливости теоремы 1 и для БП.

Следствие 1.1. Если $K = 2$, то

$$\lambda_Z(\tau) = \begin{cases} \lambda_{X_0}(\langle\tau\rangle_P) + \lambda_{X_1}(\langle\tau\rangle_P), \text{ если } \langle\tau\rangle_2 = 0, \\ r_{X_0,X_1}(\langle\tau\rangle_P) + r_{X_1,X_0}(\langle\tau\rangle_P), \text{ если } \langle\tau\rangle_2 \neq 0. \end{cases}$$

Аналогичная теорема справедлива и для ПВКФ пар БП Z_1 и Z_2, сформированных по ПК (1).

Таким образом, предложенное ПК формирует БП с периодом *KP*, ПАКФ которых, а также ПВКФ пары БП определяются ПАКФ и ПВКФ БП периода *P*, что позволяет использовать для синтеза БП разнообразные и многочисленные результаты, полученные ранее, а также эффективную методику анализа и синтеза последовательностей с заданными ограничениями на основные параметры [2].

Далее, будем рассматривать только БП X_f, $f = \overline{0, K-1}$, сформированные по обобщенному ПК [5]:

$$U_f(i) = \begin{cases} 1, \text{ если } \ i \in H_m, m \in I_f, \\ -1 \text{ в ост. случаях.} \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $P = dR + 1$, где d, R — натуральные числа; $H_m = \{\theta^{m+d\nu},\ \nu = \overline{0, R-1}\}$ — класс степенных вычетов с номером m, $m = \overline{0, d-1}$; , θ — первообразный корень по модулю P; I_f — подмножества индексов m.

Доказанная теорема 1 и результаты, полученные в [2,6,7], позволяют предложить обобщенную методику синтеза БП с составным периодом *KP*, состоящую из следующих этапов.

А) Выбор одной из стратегий синтеза на основе анализа исходных данных и требований к БП:

стратегия 1 — синтез осуществляется на основе известных ПК БП простого периода с требуемой ПАКФ или ПВКФ (квазиодноуровневой, квазиидеальной);

стратегия 2 — синтез осуществляется аналитическим расчетом или направленным перебором на вычислительной машине произвольных БП простого периода.

В) Определение допустимых параметров БП простого периода X_f, $f = \overline{0, K-1}$.

С) Расчет характеристик последовательностей простого периода по методике, предложенной в [2].

D) Анализ характеристик БП составного периода, сопоставление с заданными требованиями.

Следующий пример служит иллюстрацией методики синтеза БП на основе классов степенных вычетов.

3. Пример синтеза БП с квазиидеальной ПАКФ

Постановка задачи: синтезировать бинарные модулирующие последовательности с периодом $2P$ на основе классов биквадратичных вычетов для радиотехнических систем связи и передачи информации, радиолокации и радионавигации с шумоподобными сигналами, фазовой или амплитудно-фазовой манипуляцией и корреляционной обработкой сигналов. Ограничения на характеристики: степень уравновешенности $\frac{|m_+ - m_-|}{2P} \le 0{,}1$ (здесь m_+, m_- — число положительных и число отрицательных символов на периоде последовательности), отношение наибольшего бокового лепестка к главному лепестку ПАКФ $\frac{|\lambda_X(\tau)|_{\max}}{2P} \le 0{,}01$.

А) Выбор стратегии.

Согласно условию необходимо синтезировать БП с ПАКФ, близкой к идеальной. В связи с этим для конструирования БП с периодом $2P$ воспользуемся последовательностями простого периода с квазиидеальной ПАКФ. Параметры таких последовательностей и их ПВКФ рассчитаны в [6,7].

В) Определение допустимых параметров БП X_0, X_1.

Ограничение на степень уравновешенности БП $\frac{|m_+ - m_-|}{2P} \le 0{,}1$ равносильно неравенству $|m_+ - m_-| \le$ $\le 0{,}8R + 0{,}4$. Так как БП простого периода формируются по ПК (3), то из последнего неравенства получаем, что $m_+ = m_-$. Таким образом, $m_+ = m_- = 4$ согласно правилу (1) и условию задачи.

Если БП обладает квазидеальной ПАКФ, то соответствующая двоичная последовательность будет иметь квазиодноуровневую ПАКФ. Согласно [3] в последнем варианте регулярное ПК существует только тогда, когда $|I_f| = \text{const}$. Таким образом, исходя из найденных значений m_+, m_-, имеем $|I_1| = |I_2| = 2$. С учетом последнего получаем, что с точностью до циклического сдвига допустимыми являются три набора параметров:

$$d = 4,\ P \equiv 1 (\text{mod}\, 8),\ I_0 = \{0,1\},\ I_1 = \{0,2\};$$
$$I_0 = \{0,1\},\ I_1 = \{0,3\};\ I_0 = \{0,2\},\ I_1 = \{0,3\}.$$

С) Расчет рельефов ПАКФ и ПВКФ БП простого периода.

Если БП X_0 и X_1 с простым периодом сформированы по ПК (3) при $I_0 = \{0,1\}, I_1 = \{0,2\}$, то имеют место следующие взаимно однозначные соответствия [6,7]:

для четного R

$$\lambda_{X_0}(n) \Leftrightarrow (-3 + 2y, -3 - 2y, 1 + 2y, 1 - 2y), \quad (4)$$

$$r_{X_0,X_1}(n) \Leftrightarrow (-2 - x + 2y, x + 2y, x + 2y, 2 - x - 2y); \quad (5)$$

для нечетного R

$$\lambda_{X_0}(n) \Leftrightarrow (-1 - 2y, -1 + 2y, -1 - 2y, -1 + 2y), \quad (6)$$

$$r_{X_0,X_1}(n) \Leftrightarrow (-x + 2y, 2 + x + 2y, -2 + x - 2y, -x - 2y); \quad (7)$$

при любом R

$$\lambda_{X_1}(n) \Leftrightarrow (-3, 1, -3, 1) \quad (8)$$

(знак $\Leftrightarrow$ означает, что если $\langle\tau\rangle_P \in H_f$, то $\lambda_X(\tau)$ совпадает с *f*-ой гармоникой СРКВ [2]).

Здесь $P = x^2 + 4y^2, x \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, x, y — целые числа.

D) Анализ характеристик БП составного периода, сопоставление с заданными требованиями.

Теорема 2. Если БП X_0, X_1 сконструированы по ПК (3) при $d = 4$, $P = x^2 + 4y^2$, $I_0 = \{0,1\}$, $I_1 = \{0,2\}$, то рельеф ПАКФ $\lambda_Z(\tau)$ БП Z, сформированной по ПК (1), определяется формулами

1. $\lambda_Z(\tau) = \{2, -4-2x+4y, 2x \pm 4y, 4-2x-4y, -6+2y, -2 \pm 2y, 2-2y\}$, $\tau = \overline{1{,}2P-1}$, если R четное;

2. $\lambda_Z(\tau) = \{-2, 2, -4-2y, 2y\}$, $\tau = \overline{1{,}2P-1}$, если R нечетное.

Доказательство теоремы проведем для четного значения R.

Если $\tau = 2n$, то по следствию 1.1 $\lambda_Z(\tau) = \lambda_{X_0}(\langle\tau\rangle_P) + \lambda_{X_1}(\langle\tau\rangle_P)$ и согласно (4), (8) $\lambda_Z(\tau) \Leftrightarrow (-6+2y, -2-2y, -2+2y, 2-2y)$.

Если же $\tau = 2n+1$, то $\lambda_Z(\tau) = r_{X_0,X_1}(\langle\tau\rangle_P) + r_{X_1,X_0}(\langle\tau\rangle_P)$, отсюда с учетом (5) и свойств ПВКФ получаем, что $\lambda_Z(\tau) \Leftrightarrow (-4-2x+4y, 2x+4y, 2x-4y, 4-2x-4y)$ при $\tau \ne P$, а $\lambda_Z(P) = 2$.

При нечетном R теорема следует из формул (6), (8).

Следствие 2.1. Если R нечетное, то $|\lambda_{\max}(\tau)| \le 4 + 2|y|$ при $\tau = \overline{1{,}2P-1}$.

Воспользовавшись следствием 1.1, рельефами ПАКФ и ПВКФ, найденными в [6,7], аналогично теореме 2, получаем два следующих утверждения.

Теорема 3. Если БП X_0, X_1 сконструированы по ПК (3) при $d = 4$, $P = x^2 + 4y^2$ и $I_0 = \{0,1\}$, $I_1 = \{0,3\}$, то рельеф ПАКФ $\lambda_Z(\tau)$ БП Z, сформированной по ПК (1), определяется формулами

1. $\lambda_Z(\tau) = \{-6, -2, 2, -4-2x, 2x, 4-2x\}$, $\tau = \overline{1{,}2P-1}$, если R четное;

2. $\lambda_Z(\tau) = \{-2, 2, \pm 2x\}$, $\tau = \overline{1{,}2P-1}$, если R нечетное.

Следствие 3.1. В условиях теоремы $|\lambda_{\max}(\tau)| \le 4 + 2|x|$ при $\tau = \overline{1{,}2P-1}$.

Теорема 4. Если БП X_0, X_1 сконструированы по ПК (3) при $d = 4$, $P = x^2 + 4y^2$ и $I_0 = \{0,2\}$, $I_1 = \{0,3\}$, то для рельефа ПАКФ $\lambda_Z(\tau)$ БП Z, сформированной по ПК (1), справедливы соотношения

1. $\lambda_Z(\tau) = \{2, -4-2x-4y, 2x \pm 4y, 4-2x+4y, -6-2y, -2 \pm 2y, 2+2y\}$, $\tau = \overline{1{,}2P-1}$, если R четное;

2. $\lambda_Z(\tau) = \{-2, 2, -4+2y, -2y\}$, $\tau = \overline{1{,}2P-1}$, если R нечетное.

Следствие 4.1. Если R нечетное, то $|\lambda_{\max}(\tau)| \le 4 + 2|y|$ при $\tau = \overline{1{,}2P-1}$.

Для нечетного R рельефы ПАКФ БП были определены в [8] посредством использования циклотомических чисел. Анализ полученных результатов показывает, что регулярное ПК с наиболее плотной сеткой периодов БП, удовлетворяющих условиям поставленной задачи, получается при нечетном R, а также при четном R в условиях теоремы 3.

Таким образом, если $I_0 = \{0,1\}, I_1 = \{0,3\}$, то БП, сформированная по ПК (1), удовлетворяет условиям поставленной задачи для $P = x^2 + 4y^2$ при $x = 1, P \ge 300; x = -3, P \ge 500; x = 5, P \ge 750$ и т. д., а если же $I_0 = \{0,1\}, I_1 = \{0,2\}$ или $I_0 = \{0,2\}, I_1 = \{0,3\}$ — то при $y = \pm 1$, $P \ge 300$; $y = \pm 3$, $P \ge 500$; $y = \pm 5$, $P \ge 750$ и т.д.

Для рассматриваемых БП разность $m_+ - m_- = -2$. Для того, чтобы получить уравновешенные БП, достаточно поменять знак x_0 в последовательности Z (теперь $x_0 = 1$). Последнее условие означает, что БП X_0 формируется по ПК

$$U_0(i) = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in H_m, m \in I_0, i = 0, \\ -1 \text{ в ост. случаях.} \end{cases} \tag{9}$$

При использовании ПК (9) и (3) для БП X_0 и X_1 значение m_+ станет равно m_-, т. е. БП будет полностью уравновешенной, при этом ПАКФ новой последовательности изменится на $\Delta(0) = 2x_{-\tau} + 2x_\tau$. Если R четное, то $\langle -\tau\rangle_P, \langle\tau\rangle_P$ принадлежат одному и тому же классу степенных вычетов, следовательно, $\Delta(0) = 4x_\tau$ при $\tau \ne P$, а если R нечетное, $\Delta(0) = 2x_\tau + 2x_{\langle\tau+2\rangle_4}$.

Для примера рассмотрим вариант, когда $I_0 = \{0,1\}, I_1 = \{0,3\}$. Согласно теореме 3 будет справедлива следующая

Лемма 1. Если БП X_0 сформирована по ПК (9) при $I_0 = \{0,1\}$, БП X_1 по ПК (3) при $I_1 = \{0,3\}$, то для уравновешенной БП, сконструированной по ПК (1), рельеф ПАКФ $\lambda_Z(\tau) = \{-6, -2, 2, -4+2x, -2x, 4+2x\}$, если R четное и $\lambda_Z(\tau) = \{-2, 2, \pm 2x\}$, $\tau = \overline{1{,}2P-1}$.

Сравнение рельефов ПАКФ БП, удовлетворяющих условиям теоремы 3 и леммы 1, показывает, что при нечетном R рельеф не изменился, а при четном R существенных различий между рельефами нет, и при $\tau = \overline{1{,}2P-1}$ абсолютная величина наибольшего бокового лепестка ПАКФ $|\lambda_{\max}(\tau)| = 4 + 2|x|$ в обоих вариантах.

4. Заключение

Предложен метод синтеза бинарных последовательностей с составным периодом KP, удовлетворяющих заданным ограничениям на основные параметры. Последовательности формируются на основе классов степенных вычетов. Определены достаточные условия существования бинарных последовательностей с квазиидеальной ПАКФ и периодом $2P$.

1. Ипатов В.П. Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. М.: Радио и связь, 1992. 162 с.
2. Gantmakher V.E., Edemskiy V.A. The Synthesis Methodology of Periodic Discretely Coded Sequences Formed Basing on Cyclotomic Classes with Basic Parameters Constraints // Proceedings of 2007 International Workshop on Signal Design and Its Applications in Communications (IWSDA'07). China, 2007. P.4-8.
3. Едемский В.А., Вагунин И.С. // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. 2008. № 6. С.147-150.
4. Гантмахер В.Е., Быстров Н.Е., Чеботарев Д.В. Шумоподобные сигналы. Анализ, синтез, обработка. СПб.: Наука и техника, 2005. 400 с.
5. Свердлик М.Б. Оптимальные дискретные сигналы. М., 1975. 200 с.
6. Гантмахер В.Е., Едемский В.А. // Вестник Саратовского гос. техн. ун-та. 2007. №1(21). Вып.1. С.7-12.
7. Гантмахер В.Е., Едемский В.А. О взаимной корреляции бинарных последовательностей, сформированных на основе классов степенных вычетов по простому модулю $p = dR + 1$, $d = 4,6,8$, с квазиидеальной автокорреляцией // Сб. докладов 13-й МНТК «Радиолокация, навигация и связь». Воронеж, 2007. Т.1. С.105-111.
8. Ding C., Helleseth T., Martinsen H. // IEEE Trans. Info. Theory. Jan. 2001. Vol.IT-47. P.428-433.