

УДК 517.926

М.С.Токмачёв

АЛГОРИТМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА

Институт электронных и информационных систем НовГУ, т. (8162) 62 99 72

First order differential equation $y^n y' + A(x)y^k + B(x) = 0$ with definite condition imposed on the functions $A(x)$ and $B(x)$ is considered. The algorithms for integration of the above equation for some n and k are given.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, алгоритмы интегрирования уравнения

Введение

Как известно, интегрирование многих дифференциальных уравнений, даже первого порядка, связано с определенными трудностями. Часто эти проблемы носят принципиальный характер, и конкретное уравнение вообще не интегрируется в квадратурах. Поэтому задача классификации с дальнейшим указанием метода решения является одной из важнейших в теории дифференциальных уравнений.

Данная работа представляет собой продолжение работ [1,2], в которых рассмотрены дифференциальные уравнения первого порядка вида

$$y^n y' + A(x)y^k + B(x) = 0, \quad (1)$$

где n и k — действительные константы, а коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ связаны соотношением

$$B(x) = sA(x) \left(\int A(x) dx \right)^{\frac{k}{n-k+1}}, \quad s = \text{const}, \quad s \neq 0. \quad (2)$$

Заметим, что при $s = 0$ интегрирование уравнения тривиально. Преобразуем (1), представив коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ через новые функции:

$$A(x) = f'(x); \quad \int A(x) dx = f(x) + q, \quad \text{где } q = \text{const}; \quad (3)$$

$$B(x) = s f'(x) \cdot (f(x) + q)^{\frac{k}{n-k+1}}.$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$y^n y' + f'(x)y^k + s f'(x)(f(x) + q)^{\frac{k}{n-k+1}} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет новый класс дифференциальных уравнений первого порядка, пересекающийся с другими известными классами в зависимости от конкретных n и k .

Наиболее простым для решения является случай $n = k$. Методика интегрирования уравнения типа (4) при $n = k = 1$ (уравнения Абеля второго рода) представлена в [3]. Заметим, что при $n = k = -1$ уравнение (1) элементарно сводится к линейному уравнению и интегрируется вне зависимости от соотношения коэффициентов (2). В предлагаемой работе рассмотрены три подкласса уравнения (4): при $n = k = -2$ (уравнение Риккати), $n = k = -\frac{1}{2}$ и $n = k = \frac{1}{2}$. Приведены алгоритмы интегрирования дифференциальных уравнений и указаны соответствующие структуры решений, определяемые принадлежностью числового коэффициента s некоторым множествам. Разобраны конкретные примеры.

Основные результаты

I. Рассмотрим уравнение (4) при $n = k = -2$:

$$y' + s \frac{f'}{(f+q)^2} y^2 + f' = 0. \quad (5)$$

Уравнения вида (5) относятся к классу уравнений Риккати

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

При этом, как известно, с помощью некоторого преобразования (см., напр., [4]) всегда можно избавиться от коэффициента при искомой функции. К такому типу преобразованного уравнения и относится уравнение (5).

Согласно общей теории [1] замена переменной $y = u(f+q)$ приводит уравнение (5) к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой искомой функции u и независимой переменной x . Осуществив указанную замену, приходим к соотношению

$$\int \frac{du}{su^2 + u + 1} = -\ln(C|f+q|). \quad (6)$$

Дальнейший ход решения зависит от корней трехчлена $su^2 + u + 1$, т. е. полностью определяется числом s , формирующим значение дискриминанта $D = 1 - 4s$. При $D \geq 0$ корни квадратного трехчлена имеют вид

$$u_1 = \frac{-1 - \sqrt{1-4s}}{2s}, \quad u_2 = \frac{-1 + \sqrt{1-4s}}{2s}. \quad (7)$$

Рассмотрим три возможных случая.

а) $s = \frac{1}{4}$ (кратный корень $u_1 = u_2 = -2$).

Разрешаем уравнение (6). После ряда преобразований, возвращаясь к старой переменной, получаем общее решение

$$\begin{cases} y = \frac{4(f+q)}{\ln(C|f+q|)} - 2(f+q), \\ y = 2(f+q). \end{cases} \quad (8)$$

б) $s \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{1}{4})$. Два действительных

различных корня u_1, u_2 .

Вычисление интеграла в (6), преобразование полученного выражения и возвращение к переменной y приводят к общему решению

$$\begin{cases} y = \frac{(u_1 - C|f+q|^{\sqrt{1-4s}})(f+q)}{1 - C|f+q|^{\sqrt{1-4s}}}, \\ y = u_1(f+q), \\ y = u_2(f+q), \end{cases} \quad (9)$$

где постоянные u_1, u_2 вычисляются согласно (7).

в) $s > \frac{1}{4}$ (нет действительных корней).

Из (6) следует общее решение уравнения (5)

$$y = -\frac{f+q}{2s} \left\{ \sqrt{4s-1} \operatorname{tg} \left[\frac{\sqrt{4s-1}}{2} \ln(C|f+q|) \right] + 1 \right\}. \quad (10)$$

Таким образом, соотношения (8)-(10) в зависимости от параметра s представляют общее решение уравнения Риккати вида (5).

II. Рассмотрим уравнение (4) при $n = k = -\frac{1}{2}$:

$$y' + s \frac{f'}{\sqrt{f+q}} \sqrt{y} + f' = 0. \quad (11)$$

Вновь воспользуемся результатами [1], согласно которым замена переменной $y = u(f+q)$ переводит уравнение (11) в уравнение с разделяющимися переменными

$$\int \frac{du}{u + s\sqrt{u} + 1} = -\ln(C|f+q|). \quad (12)$$

Осуществляя замену переменной $\sqrt{u} = t$, приходим к соотношению

$$\int \frac{2t dt}{t^2 + st + 1} = -\ln(C|f+q|). \quad (13)$$

Решение (13) зависит от корней трехчлена $(t^2 + st + 1)$:

$$t_1 = \frac{-s - \sqrt{s^2 - 4}}{2}, \quad t_2 = \frac{-s + \sqrt{s^2 - 4}}{2}, \quad (14)$$

следовательно, определяется числом s . Рассмотрим все возможные случаи.

а) $s = 2$ (кратный корень $t_1 = t_2 = -1$).

Решение уравнения приводит к общему интегралу

$$2 \ln \left| \frac{\sqrt{y} + \sqrt{f+q}}{\sqrt{f+q}} \right| + \frac{2\sqrt{f+q}}{\sqrt{y} + \sqrt{f+q}} = -\ln(C|f+q|). \quad (15)$$

б) $s = -2$ (кратный корень $t_1 = t_2 = 1$).

Решение уравнения приводит к общему интегралу

$$\begin{cases} 2 \ln \left| \frac{\sqrt{y} - \sqrt{f+q}}{\sqrt{f+q}} \right| - \frac{2\sqrt{f+q}}{\sqrt{y} - \sqrt{f+q}} = -\ln(C|f+q|), \\ y = f+q. \end{cases} \quad (16)$$

в) $|s| > 2$ Два действительных различных корня

t_1, t_2 , определяемых (14).

В итоге интегрирования (13) и дальнейших преобразований получаем общий интеграл вида

$$\begin{cases} \left| \frac{y}{f+q} + s \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{f+q}} + 1 \right| \cdot \left| \frac{\sqrt{y} - t_1 \sqrt{f+q}}{\sqrt{y} - t_2 \sqrt{f+q}} \right|^{\frac{s}{\sqrt{s^2-4}}} = \frac{1}{C|f+q|}, \\ y = t_1^2(f+q), \\ y = t_2^2(f+q). \end{cases} \quad (17)$$

г) $|s| < 2$ (нет действительных корней).

Общий интеграл исходного уравнения (11) имеет вид

$$\ln \left(\frac{y}{f+q} + s \sqrt{\frac{y}{f+q}} + 1 \right) - \frac{2s}{\sqrt{4-s^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\frac{y}{f+q}} + s}{\sqrt{4-s^2}} = -\ln(C|f+q|). \quad (18)$$

Таким образом, соотношения (15)-(18) в зависимости от параметра s представляют общий интеграл уравнения (11).

III. При $n = k = \frac{1}{2}$ дифференциальное уравнение (4) имеет вид

$$y' + s f'(f+q)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + f' = 0, \quad (19)$$

где $f = f(x)$, $y = y(x)$. Согласно [1] замена $y = u(f+q)$ переводит уравнение (19) в уравнение с разделяющимися переменными относительно аргумента x и новой искомой функции $u = u(x)$. Действительно, произведя указанную замену искомой функции, получим

$$u'(f+q) + f'(u + s u^{\frac{1}{2}} + 1) = 0,$$

откуда следует

$$\frac{\sqrt{u} du}{(\sqrt{u})^3 + \sqrt{u} + s} = -\frac{f' dx}{f+q}. \quad (20)$$

Проинтегрируем обе части (20), тогда

$$\int \frac{\sqrt{u} du}{(\sqrt{u})^3 + \sqrt{u} + s} = -\ln C(f+q), \quad (21)$$

где C — произвольная постоянная.

Далее займемся вычислением интеграла в левой части (21):

$$\int \frac{\sqrt{u} du}{(\sqrt{u})^3 + \sqrt{u} + s} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{u} = t \\ u = t^2 \\ du = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2t^2 dt}{t^3 + t + s}. \quad (22)$$

Найдем корни трехчлена $t^3 + t + s$. Как известно (см., напр., [5]), неполное кубическое уравнение $t^3 + pt + q = 0$ имеет корни

$$t_1 = A + B, \quad t_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}, \quad (23)$$

где

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2. \quad (24)$$

В нашем случае соответствующие коэффициенты $p=1$, $q=s$. Найдем значение Q , которое и определяет вид корней:

$$Q = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{1}{27} + \frac{s^2}{4}.$$

Так как $Q > 0$ при любых s , то структура корней следующая: t_1 — действительный корень, t_2, t_3 — комплексно-сопряженные корни. При этом (см. (23))

$$\begin{cases} t_1 = A + B, \\ t_2 + t_3 = -(A + B) = -t_1, \\ t_2 t_3 = -\frac{s}{t_1} = -\frac{s}{A+B}. \end{cases} \quad (25)$$

Исходя из (25) и применяя теорему Виета, получаем разложение

$$\begin{aligned} t^3 + t + s &= (t - t_1)(t^2 + t_1 t - \frac{s}{t_1}) = \\ &= (t - (A + B)) \left(t^2 + (A + B)t - \frac{s}{A+B} \right). \end{aligned}$$

Далее раскладываем дробно-рациональную функцию на простейшие:

$$\frac{2t^2}{t^3 + t + s} = \frac{a}{t - (A + B)} + \frac{bt + h}{t^2 + (A + B)t - \frac{s}{A+B}}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{2(A+B)^3}{2(A+B)^3 - s}; \quad b = \frac{2(A+B)^3 - 2s}{2(A+B)^3 - s}; \\ h &= -\frac{2s(A+B)}{2(A+B)^3 - s}; \end{aligned} \quad (27)$$

$$A + B = t_1 = \sqrt[3]{-\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{s^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{s^2}{4}}}. \quad (28)$$

Используя (26), вычислим интеграл в выражении (22):

$$\begin{aligned} \int \frac{2t^2 dt}{t^3 + t + s} &= \int \left(\frac{a}{t - t_1} + \frac{bt + h}{t^2 + t_1 t - \frac{s}{t_1}} \right) dt = a \ln|t - t_1| + \\ &+ \frac{b}{2} \ln \left(t^2 + t_1 t - \frac{s}{t_1} \right) + \left(h - \frac{bt_1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{-\frac{s}{t_1} - \frac{t_1^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{t_1}{2}}{\sqrt{-\frac{s}{t_1} - \frac{t_1^2}{4}}}. \end{aligned}$$

Полученный интеграл вычислен в предположении, что $t^3 + t + s \neq 0$, т. е. $t \neq t_1$. Добавив решение $t = t_1$, (см. (28)) и возвращаясь к старой переменной $t = \sqrt{u} = \sqrt{\frac{y}{f+q}}$, из (21) получаем общий интеграл уравнения (19):

$$\begin{aligned} &\left[a \ln \left| \sqrt{\frac{y}{f+q}} - t_1 \right| + \frac{b}{2} \ln \left(\frac{y}{f+q} + t_1 \sqrt{\frac{y}{f+q}} - \frac{s}{t_1} \right) + \right. \\ &+ \left(h - \frac{bt_1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{-\frac{s}{t_1} - \frac{t_1^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\frac{y}{f+q}} + \frac{t_1}{2}}{\sqrt{-\frac{s}{t_1} - \frac{t_1^2}{4}}} = -\ln C(f+q), \\ &\left. y = t_1^2(f+q). \right] \end{aligned}$$

Примеры

Приведем характерные примеры дифференциальных уравнений, имеющих указанную выше структуру и интегрируемых по указанным алгоритмам. Отметим, что представленные уравнения в известных справочниках среди уравнений, имеющих решение, как правило, отсутствуют.

Уравнения типа I

$$1) y' + \frac{b}{(ax+q)^2} y^2 + a = 0.$$

В данном уравнении Риккати $f(x) = ax + q$, $s = \frac{b}{a}$.
Общее решение записывается по одной из формул (8)-(10) в зависимости от конкретного значения s .

$$2) y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}.$$

Это уравнение известно как специальное уравнение Риккати. В приведенном выше алгоритме $f(x) = \frac{b}{x}$, $s = ab$. Заметим, что в достаточно полном справочнике [6] общее решение указанного уравнения (см.1.2.2., уравнение 36) найдено, исходя из одного известного частного решения $\frac{\lambda}{x}$:

$$y = \frac{\lambda}{x} - x^{2a\lambda} \left(\frac{ax}{2a\lambda + 1} x^{2a\lambda} + C \right)^{-1},$$

где λ — корень квадратного уравнения $a\lambda^2 + \lambda + b = 0$. Однако это решение пригодно лишь для случая различных корней λ_1, λ_2 , т. е. при условии $ab < \frac{1}{4}$ (в наших обозначениях $s < \frac{1}{4}$). Другие два случая, $s = \frac{1}{4}$ и $s > \frac{1}{4}$, выпали из рассмотрения. Оказывается, что в каждом из рассмотренных случаев для нахождения общего решения необходимо использовать свое частное решение. Приведенные в работе алгоритмы выдают готовое общее решение в любом случае соотношений a, b и без нахождения частных решений: см. выражения (8)-(10).

$$3) y' + \frac{b \cos x}{\sin^2 x} y^2 + a \cos x = 0.$$

В данном уравнении $f(x) = a \sin x$, $s = ab$.

$$4) y' + b e^{-kx} y^2 + a e^{kx} = 0.$$

В этом уравнении $f(x) = \frac{a}{k} e^{kx}$, $s = \frac{ab}{k^2}$.

Уравнения типа II

$$5) y' + bx^{\frac{m}{2}-1} \sqrt{y} + ax^{m-1} = 0, (am > 0).$$

Здесь $f(x) = \frac{a}{m} x^m$, $s = \frac{b}{\sqrt{am}}$.

Приведем некоторые частные случаи:

$$y' + bx\sqrt{y} + ax^3 = 0, (m = 4, a > 0);$$

$$y' + b\sqrt{x}y + ax^2 = 0, (m = 3, a > 0);$$

$$y' + \frac{b}{x^2} \sqrt{y} + \frac{a}{x^3} = 0, (m = -2, a < 0).$$

$$6) y' + b \sin x \sqrt{y} - a \sin 2x = 0, (a > 0).$$

В данном случае $f(x) = a \cos^2 x$.

$$7) y' + \frac{b}{x} \sqrt{y} + \frac{a^2 \ln x}{x} = 0, (a > 0).$$

В данном уравнении $f(x) = \frac{a^2}{2} \ln^2 x$.

Уравнения типа III

$$8) y' + ax^{3p-1} y^{\frac{1}{2}} + bx^{2p-1} = 0, (b \cdot p > 0).$$

Это уравнение имеет вид (19) при $f = \frac{b}{2p} x^{2p}$,

$$q = 0, s = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{2p}{b}}.$$

Укажем ряд частных случаев уравнения при некоторых значениях параметра p :

$$y' + ax^2 y^{\frac{1}{2}} + bx = 0, (b > 0, p = 1);$$

$$y' + ax^{\frac{7}{2}} y^{\frac{1}{2}} + bx^2 = 0, (b > 0, p = 1.5);$$

$$y' + ax^5 y^{\frac{1}{2}} + bx^3 = 0, (b > 0, p = 2);$$

$$y' + ax^{\frac{5}{2}} y^{\frac{1}{2}} + bx^{-2} = 0, (b < 0, p = -0.5);$$

$$y' + ax^{-4} y^{\frac{1}{2}} + bx^{-3} = 0, (b < 0, p = -1).$$

$$9) y' + ae^{\frac{3kx}{2}} y^{\frac{1}{2}} + be^{kx} = 0, (k \cdot b > 0).$$

В данном уравнении $f = \frac{b}{k} e^{kx}$, $q = 0$, $s = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{k}{b}}$.

$$10) y' + a \sin x \sin 2x y^{\frac{1}{2}} + b \sin 2x = 0, (b > 0).$$

$$11) y' + a \cos x \sin 2x y^{\frac{1}{2}} - b \sin 2x = 0, (b > 0).$$

Заключение

Разработанные методы и представленные в зависимости от параметра s структуры решений (общих интегралов) рассматриваемых дифференциальных уравнений позволяют не только алгоритмизировать процесс интегрирования (идентификация уравнения на принадлежность к данному классу — вычисление параметров — запись решения или интеграла уравнения — возможное упрощение полученного выражения), но и достаточно просто реализовать процесс решения на компьютере.

1. Токмачёв М.С. / Деп. в ВИНТИ от 20.07.1995. №2245-B95. 8 с.
2. Токмачёв М.С. / Деп. в ВИНТИ от 10.05.1995. №1308-B95. 9 с.
3. Токмачёв М.С. // Вестник НовГУ. Сер.: Математика и информатика. 2002. №22. С.19-23.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 4-е, испр. и доп. Минск: Вышэйш. школа, 1974. 768 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. С.832.
6. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.