

С.И.Эминов, А.В.Сочилин, И.С.Эминов

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКИХ ЭКРАНАХ

Институт электронных и информационных систем НовГУ, Stefan.Eminov@novsu.ru

The article is devoted to the justification of the Galerkin method for solving a system of integro-differential equations in diffraction task on flat screens. It is proved that original equations are equivalent to Fredholm equations of the second kind in the space of positive operators.

Ключевые слова: метода Галёркина, интегро-дифференциальные уравнения, уравнения Фредгольма

1. Постановка задачи

Целью данной работы является обоснование метода Галёркина в векторной задаче дифракции на плоских экранах. Одновременно устраняется неточность, которая возникла в работе [1] при решении задачи дифракции на плоских экранах.

Задача дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей поверхности описывается уравнением вида

$$L\vec{j} = \vec{e}, \quad (1)$$

где L — линейный интегральный оператор; $\vec{e}$ — первичное электрическое поле на экране; $\vec{j}$ — плотность поверхностных токов, наведенных на обеих сторонах экрана.

Сформулируем метод Галёркина. Для этого выберем систему вектор-функций $\{\vec{\varphi}_n\}$. Разложим неизвестную вектор-функцию по этой системе функций

$$\vec{j} = \sum_{m=1}^N C_m \vec{\varphi}_m, \quad (2)$$

подставим в уравнение (1) и умножим на $\vec{\varphi}_n$ в пространстве $L_2 \oplus L_2$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^N C_m (L\vec{\varphi}_m, \vec{\varphi}_n) = (\vec{e}, \vec{\varphi}_n), \quad 1 \leq n \leq N, \quad (3)$$

где $(\cdot, \cdot)$ означает умножение в $L_2 \oplus L_2$, т.е. скалярное умножение и затем интегрирование по поверхности экрана S . Решив систему (3) найдем неизвестные коэффициенты C_m и по формуле (2) — приближенное значение плотности тока, соответствующее заданному числу N . Такова суть метода Галёркина.

С помощью метода Галёркина и других численных методов к настоящему времени решено большое количество дифракционных задач [2-5]. Но при этом практически не рассматривались вопросы обоснования численных методов, сходимости приближенных решений к точным решениям. Разработка численных методов решения интегральных уравнений оказалась несравненно более легким делом, нежели обоснование численных методов. Последнее требует глубокого изучения структуры интегральных уравнений.

2. Уравнение дифракции электромагнитных волн на плоском экране. Сведение к уравнениям Фредгольма второго рода

Приведем векторное уравнение дифракции электромагнитных волн на плоском экране. Оно имеет вид [1]

$$L\vec{j} = \iint \frac{1}{\sqrt{|\vec{\xi}|^2 - k^2}} \left(-\vec{\xi}(\vec{\xi} \cdot \vec{j}) + k^2 \vec{j} \right) \exp(-i(\vec{x} \cdot \vec{\xi})) d\xi_1 d\xi_2 = \vec{e}, \quad (4)$$

где $\vec{j}(j_1(x_1, x_2), j_2(x_1, x_2))$ — плотность поверхностных токов; $\vec{x} \cdot \vec{\xi} = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2$; $\vec{j}(\vec{j}_1(\xi_1, \xi_2), \vec{j}_2(\xi_1, \xi_2))$ — преобразование Фурье, взятое от плотности токов, т.е. $\vec{j}_i(\xi_1, \xi_2) = \iint_S j_i(x_1, x_2) \exp(ix_1 \xi_1 + ix_2 \xi_2) dx_1 dx_2$, $i = 1, 2$.

Здесь интегрирование проводится по поверхности экрана.

Каким условиям должна удовлетворять граница области? Для доказательства вполне непрерывности встречающихся здесь операторов достаточно, чтобы граница удовлетворяла условию Липшица [6]. Это обстоятельство позволяет рассматривать не только области с гладкой границей, но также прямоугольные экраны.

Введем в рассмотрение оператор

$$A\vec{j} = \iint \frac{1}{\sqrt{|\vec{\xi}|^2 + 1}} \left(\vec{\xi}(\vec{\xi} \cdot \vec{j}) + \vec{j} \right) \exp(-i(\vec{x} \cdot \vec{\xi})) d\xi_1 d\xi_2.$$

Оператор A является положительным, поэтому можно определить энергетическое пространство H этого оператора. Скалярное произведение в H определяется по формуле

$$(\vec{j}, \vec{j}) = (A\vec{j}, \vec{j}) = \iint \frac{1}{\sqrt{|\vec{\xi}|^2 + 1}} \left(|\vec{\xi} \cdot \vec{j}|^2 + |\vec{j}|^2 \right) d\xi_1 d\xi_2.$$

Пространство H подробно изучено в работе [1], где доказано, что оно разлагается в прямую сумму подпространств H_1 и H_2 с условиями

$$H_1 = \{ \vec{j} \in H : \xi_1 \vec{j}_1 + \xi_2 \vec{j}_2 = 0 \},$$

$$H_2 = \{ \vec{j} \in H : \xi_2 \vec{j}_1 - \xi_1 \vec{j}_2 = 0 \}.$$

Ю.Г.Смирновым [7] уравнение (4) сведено к двум независимым уравнениям, обладающим замечательными свойствами: каждое уравнение допускает выделение главной знакопостоянной части. В основе этого лежит разложение правой части (4) на сумму соленоидальной и потенциальной функций. Однако в

рассматриваемом множестве это разложение не единственно. В самом деле, функция, тождественно равная единице, является и соленоидальной и потенциальной. Поэтому метод разложения векторного уравнения на два независимых уравнения, предложенный в работе [1], является некорректным.

В данной работе предлагается новый подход. Выше мы ввели в рассмотрение положительный оператор A . Он имеет обратный оператор A^{-1} .

Умножим обе части (4) на A^{-1} :

$$K\vec{j} = A^{-1}L\vec{j} = A^{-1}\vec{e} \quad (5)$$

и рассмотрим это векторное уравнение в энергетическом пространстве H . Нетрудно показать, что когда $\vec{u}_i \in H_i$, $\vec{v}_j \in H_j$, $i=1,2$, $j=1,2$ и $i \neq j$, то верно соотношение

$$[Ku_i, v_j] = 0.$$

Это означает, что подпространства H_1 и H_2 являются инвариантными подпространствами оператора K . Правая часть (5) как элемент пространства H допускает однозначное разложение на сумму элементов, принадлежащих H_1 и H_2 , т. е. на сумму соленоидальной и потенциальной функций. Поэтому уравнение (5) разбивается на два независимых уравнения

$$K\vec{j}_i = \vec{f}_i, \quad i=1,2, \quad (6)$$

где $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$, $A^{-1}\vec{e} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$, $\vec{j}_1 \in H_1$, $\vec{j}_2 \in H_2$, $\vec{f}_1 \in H_1$, $\vec{f}_2 \in H_2$.

Когда $\vec{j}_1 \in H_1$, $\vec{v}_1 \in H_1$, выделяя положительный оператор, получим

$$\begin{aligned} [K\vec{j}_1, \vec{v}_1] &= [A^{-1}L\vec{j}_1, \vec{v}_1] = (L\vec{j}_1, \vec{v}_1) = \iint \frac{k^2}{\sqrt{|\vec{\xi}|^2} - k^2} \vec{j}_1 \cdot \vec{v}_1 d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \iint \frac{k^2}{\sqrt{|\vec{\xi}|^2} + 1} \vec{j}_1 \cdot \vec{v}_1 d\xi_1 d\xi_2 + \\ &+ \iint \left(\frac{k^2}{\sqrt{|\vec{\xi}|^2} - k^2} - \frac{k^2}{\sqrt{|\vec{\xi}|^2} + 1} \right) \vec{j}_1 \cdot \vec{v}_1 d\xi_1 d\xi_2 = (A_1\vec{j}_1 + M\vec{j}_1, \vec{v}_1), \end{aligned}$$

где $A_1\vec{j}_1 = \iint \frac{1}{\sqrt{|\vec{\xi}|^2} + 1} \vec{j}_1 \exp(-i(\vec{x} \cdot \vec{\xi})) d\xi_1 d\xi_2$,

$$M\vec{j}_1 = \iint \left(\frac{k^2}{\sqrt{|\vec{\xi}|^2} - k^2} - \frac{k^2}{\sqrt{|\vec{\xi}|^2} + 1} \right) \vec{j}_1 \exp(-i(\vec{x} \cdot \vec{\xi})) d\xi_1 d\xi_2.$$

Далее выделим главный положительный оператор во втором уравнении $\vec{j}_2 \in H_2$, $\vec{v}_2 \in H_2$:

$$\begin{aligned} [-K\vec{j}_2, \vec{v}_2] &= [-A^{-1}L\vec{j}_2, \vec{v}_2] = -(L\vec{j}_2, \vec{v}_2) = \iint \sqrt{|\vec{\xi}|^2} - k^2 \vec{j}_2 \cdot \vec{v}_2 d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \iint \sqrt{|\vec{\xi}|^2} + 1 \vec{j}_2 \cdot \vec{v}_2 d\xi_1 d\xi_2 + \\ &+ \iint \left(\sqrt{|\vec{\xi}|^2} + k^2 - \sqrt{|\vec{\xi}|^2} + 1 \right) \vec{j}_2 \cdot \vec{v}_2 d\xi_1 d\xi_2 = (A_2\vec{j}_2 + N\vec{j}_2, \vec{v}_2), \end{aligned}$$

где $A_2\vec{j}_2 = \iint \sqrt{|\vec{\xi}|^2} + 1 \vec{j}_2 \exp(-i(\vec{x} \cdot \vec{\xi})) d\xi_1 d\xi_2$,

$$N\vec{j}_2 = \iint \left(\sqrt{|\vec{\xi}|^2} + k^2 - \sqrt{|\vec{\xi}|^2} + 1 \right) \vec{j}_2 \exp(-i(\vec{x} \cdot \vec{\xi})) d\xi_1 d\xi_2.$$

Операторы A_1 и A_2 являются положительными операторами. На основании теоремы 2 из приложения (см. ниже) можно доказать, что операторы $A_1^{-1}M$ и $A_2^{-1}N$ вполне непрерывны в энергетических пространствах операторов A_1 и A_2 соответственно. Это означает, что уравнения (6) эквивалентны уравнениям Фредгольма второго рода.

Применяя к уравнениям Фредгольма второго рода метод Галёркина, получим систему линейных алгебраических уравнений, которая совпадает с другой системой, получаемой в результате применения метода Галёркина к исходному уравнению. Тем самым получено обоснование метода Галёркина для векторной задачи дифракции.

3. Приложение

Рассмотрим пространство Соболева — Слободецкого $\dot{H}_s(S)$, которое определяется как пополнение множества бесконечно дифференцируемых финитных функций по норме:

$$\|\vec{u}\|_s^2 = \iint \sqrt{|\vec{u}|^2} (1 + |\vec{\xi}|^2)^{2s} d\xi_1 d\xi_2.$$

Пространство $\dot{H}_s(S)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(\vec{u}, \vec{v})_s = \iint \vec{u} \cdot \vec{v} (1 + |\vec{\xi}|^2)^{2s} d\xi_1 d\xi_2.$$

Пространство $\dot{H}_s(S)$ также можно рассматривать как энергетическое пространство следующего положительного оператора:

$$A_s \vec{u} = \iint \vec{u} (1 + |\vec{\xi}|^2)^{2s} \exp(-i(\vec{x} \cdot \vec{\xi})) d\xi_1 d\xi_2.$$

Приведем один эффективный критерий вполне непрерывности интегральных операторов. При доказательстве критерия будет использована важная теорема функционального анализа.

Теорема 1. Вложение $\dot{H}_s(S) \subset \dot{H}_{s-\varepsilon}(S)$ является компактным при любом $\varepsilon > 0$.

Доказательство этой теоремы имеется в [6]. Она применима для областей, граница которых удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 2. Оператор $T = A_s^{-1}A_{s-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) является вполне непрерывным в пространстве Соболева — Слободецкого $\dot{H}_s(S)$.

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму

$$(Tu, v)_s = (A_s^{-1}A_{s-\varepsilon}\vec{u}, \vec{v})_s = (A_{s-\varepsilon}u, v) = \iint \vec{u} \cdot \vec{v} (1 + |\vec{\xi}|^2)^{2s-2\varepsilon} d\xi_1 d\xi_2$$

и оценим ее по норме

$$|(Tu, v)_s| \leq \iint |\tilde{u}| \cdot |\tilde{v}| (1 + |\tilde{\xi}|)^{2s-2\epsilon} d\xi_1 d\xi_2 \leq$$

$$\leq \left(\iint |\tilde{u}|^2 (1 + |\tilde{\xi}|)^{2s-4\epsilon} d\xi_1 d\xi_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint |\tilde{v}|^2 (1 + |\tilde{\xi}|)^{2s} d\xi_1 d\xi_2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \quad (7)$$

$$\leq \|u\|_{(s-2\epsilon)} \|v\|_s.$$

Положим $\tilde{v} = T\tilde{u}$ и сравним левую и правую части (7). В результате получим неравенство

$$\|T\tilde{u}\|_s \leq \|\tilde{u}\|_{(s-2\epsilon)}. \quad (8)$$

Возьмем последовательность $\tilde{u}_n$, которая слабо сходится к элементу $\tilde{u}$ в пространстве $\dot{H}_s(S)$. В силу компактности вложения $\dot{H}_s(S) \subset \dot{H}_{s-\epsilon}(S)$ последовательность $\tilde{u}_n$ сильно сходится к элементу $\tilde{u}$ в пространстве $\dot{H}_{s-\epsilon}(S)$. И, наконец, с учетом оценки

(8) последовательность $T\tilde{u}_n$ будет сильно сходиться к элементу $T\tilde{u}$ в пространстве $\dot{H}_s(S)$. Поэтому оператор T — вполне непрерывен. Теорема доказана.

1. Смирнов Ю.Г. // Дифференциальные уравнения. 1992. Т.28. № 1. С.136-143.
2. Вычислительные методы в электродинамике / Пер. с англ. / Под ред. Р.Митры. М.: Мир, 1977. 485 с.
3. Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982. 184 с.
4. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наук. думка, 1984. 344 с.
5. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987. 272 с.
6. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.
7. Смирнов Ю.Г. Указ. соч. С.142.