

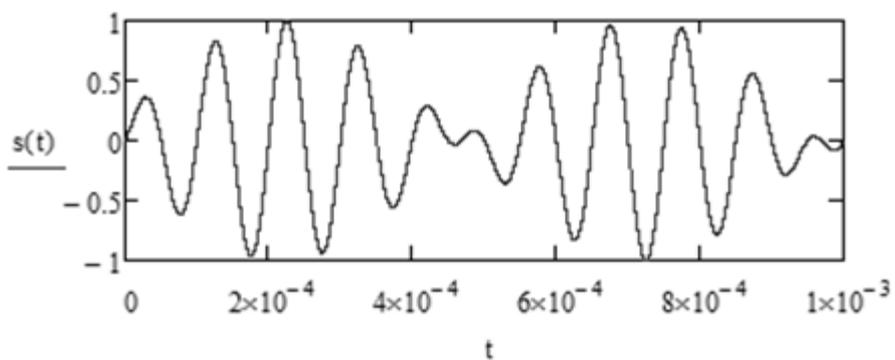
РАСЧЕТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

$$T := 0.001$$

$$\Delta t := 10^{-8}$$

$$t := 0, \Delta t.. T$$

$$s(t) := \sin(2 \cdot \pi \cdot 10^4 \cdot t) \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot 10^3 \cdot t + \frac{\pi}{16}\right)$$



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Институт электронных и информационных систем

Кафедра радиосистем

РАСЧЕТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Сборник заданий для практическим занятий по «Основам теории цепей»
для направления подготовки 11.03.01 – Радиотехника

Великий Новгород
2017

УДК 621.391.26 (075.8)
ББК

Печатается по решению
кафедры радиосистем НовГУ

Расчет и моделирование электрических цепей. Сборник заданий для практических занятий по «Основам теории цепей» для направления подготовки 11.03.01 - Радиотехника, Учебно-методическое пособие/ Сост. Жукова И.Н. ФГБОУ «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого», Великий Новгород, 2017 г. - 69 с.

Рецензент: д-р техн. наук Быстров Н.Е.

В сборник включены методические указания и задания по расчету и моделированию работы электрических цепей. Пособие может использоваться в ходе практических занятий по курсу «Основы теории цепей».

Учебное пособие одобрено советом Института электронных и информационных систем Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого.

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

1. Расчет эквивалентных параметров соединений пассивных элементов электрических цепей	5
2. Построение внешней характеристики электрической цепи	11
3. Расчет параметров эквивалентного источника	18
4. Векторные диаграммы цепей, содержащих реактивные элементы.	24
5. Матричные вычисления и расчет линейных электрических цепей.	29
6. Исследование частотных характеристик электрических цепей	41
7. Расчет переходных процессов в электрических цепях.	47
8. Требования к оформлению отчета по лабораторной работе	58
9. Литература	59
Приложение А	60
Приложение Б	61

1. РАСЧЕТ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПАРАМЕТРОВ СОЕДИНЕНИЙ ПАССИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

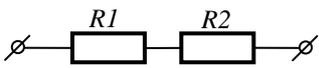
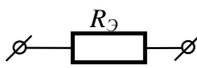
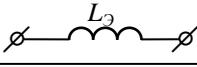
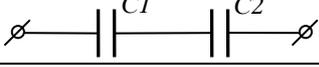
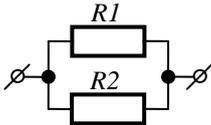
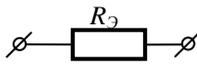
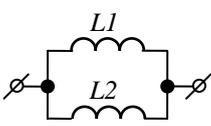
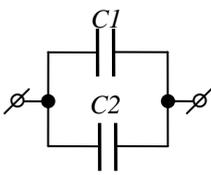
1.1 Цель работы

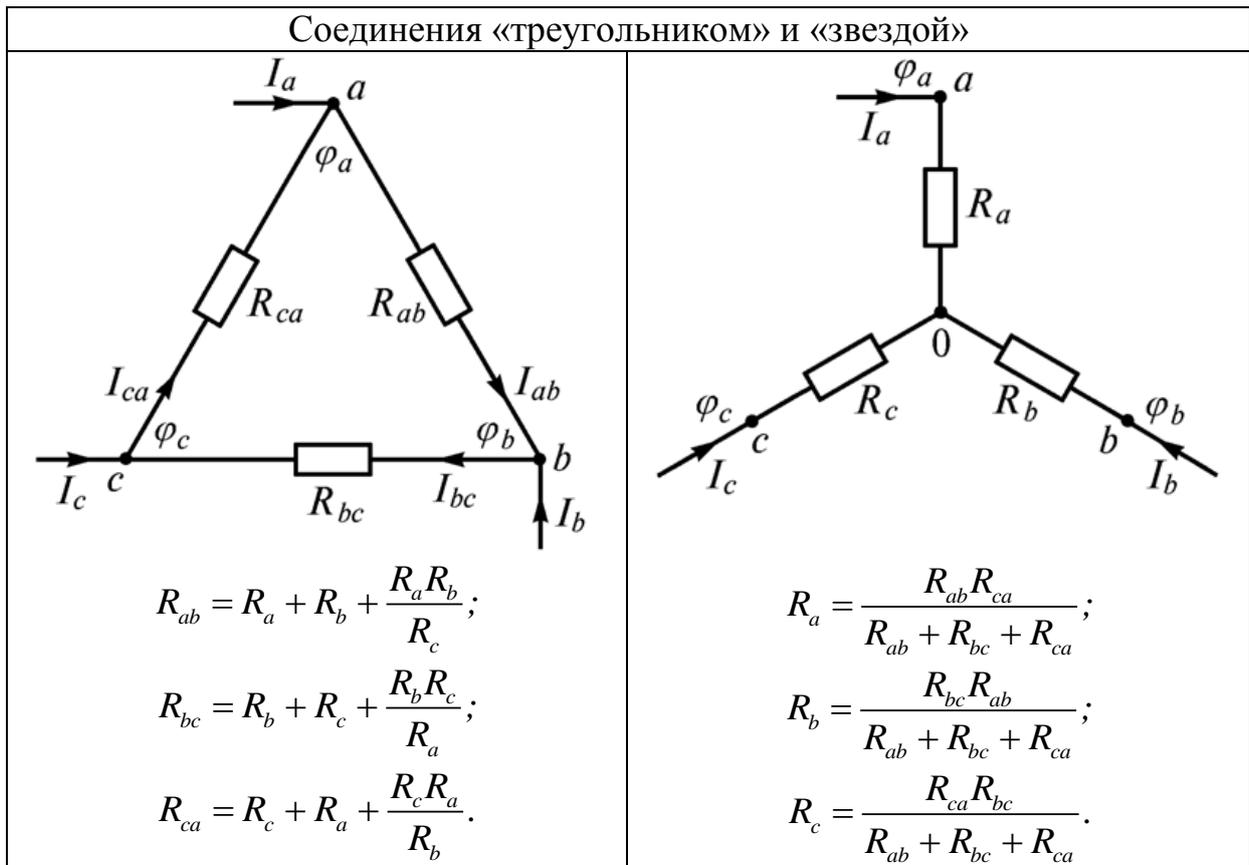
Изучить правила эквивалентных преобразований элементов электрических цепей, овладеть навыками разработки простейших программ расчета электрических цепей в среде MathCAD на основе операторов присвоения.

1.2 Основные теоретические сведения по преобразованию элементов электрических цепей

Таблица 1.1

Правила преобразований электрических цепей

Схема соединения	Эквивалентная схема	Формула преобразования
Последовательное соединение элементов		
		$R_3 = R1 + R2$
		$L_3 = L1 + L2$
		$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C1} + \frac{1}{C2}$
Параллельное соединение элементов		
		$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$
		$\frac{1}{L_3} = \frac{1}{L1} + \frac{1}{L2}$
		$C_3 = C1 + C2$



1.3 Примеры реализации расчета эквивалентных соединений элементов электрических цепей в среде MathCAD

Пример 1. Листинг программы расчета общего сопротивления резистивной цепи, схема соединения элементов которой приведена на рисунке 1.1, представлена на рисунке 1.2.

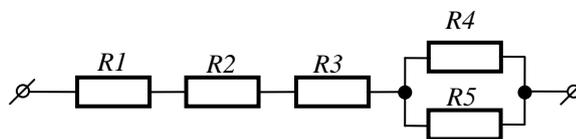


Рис. 1.1 Резистивная цепь

```

ORIGIN := 1

R1 := 10      сопротивление первого резистора, Ом
R2 := 20      сопротивление второго резистора, Ом
R3 := 30      сопротивление третьего резистора, Ом
R4 := 40      сопротивление четвертого резистора, Ом
R5 := 50      сопротивление пятого резистора, Ом

RT = (10 20 30 40 50)

Общее сопротивление, Ом
Первый вариант записи

Ro1 := R1 + R2 + R3 +  $\frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5}$       Ro1 = 82.222

Второй вариант записи

Ro2 :=  $\sum_{i=1}^3 R_i + \frac{1}{\sum_{i=4}^5 \frac{1}{R_i}}$       Ro2 = 82.222

```

Рис. 1.2 Листинг программы расчета резистивной цепи

Пример 2. Листинг программы расчета общего сопротивления емкостной цепи, схема соединения элементов которой приведена на рисунке 1.3, представлена на рисунке 1.4.

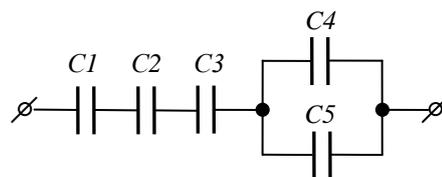


Рис. 1.3 Емкостная цепь

```

C1 := 100·10-6           емкость первого конденсатора, Ф
C2 := 50·10-6           емкость второго конденсатора, Ф
C3 := 0.15·10-3         емкость третьего конденсатора, Ф
C4 := 2.5·10-9          емкость четвертого конденсатора, Ф
C5 := 800·10-12         емкость пятого конденсатора, Ф

Общая емкость, Ф

Первый вариант записи

Co1 :=  $\frac{1}{\frac{1}{C1} + \frac{1}{C2} + \frac{1}{C3}}$  + C4 + C5      Co1 = 2.728 × 10-5

Второй вариант записи

Co2 :=  $\frac{C1·C2·C3}{C2·C3 + C1·C3 + C1·C2}$  + C4 + C5      Co2 = 2.728 × 10-5

```

Рис 1.4 Листинг программы расчета емкостной цепи

1.4 Индивидуальные задания для самостоятельного решения

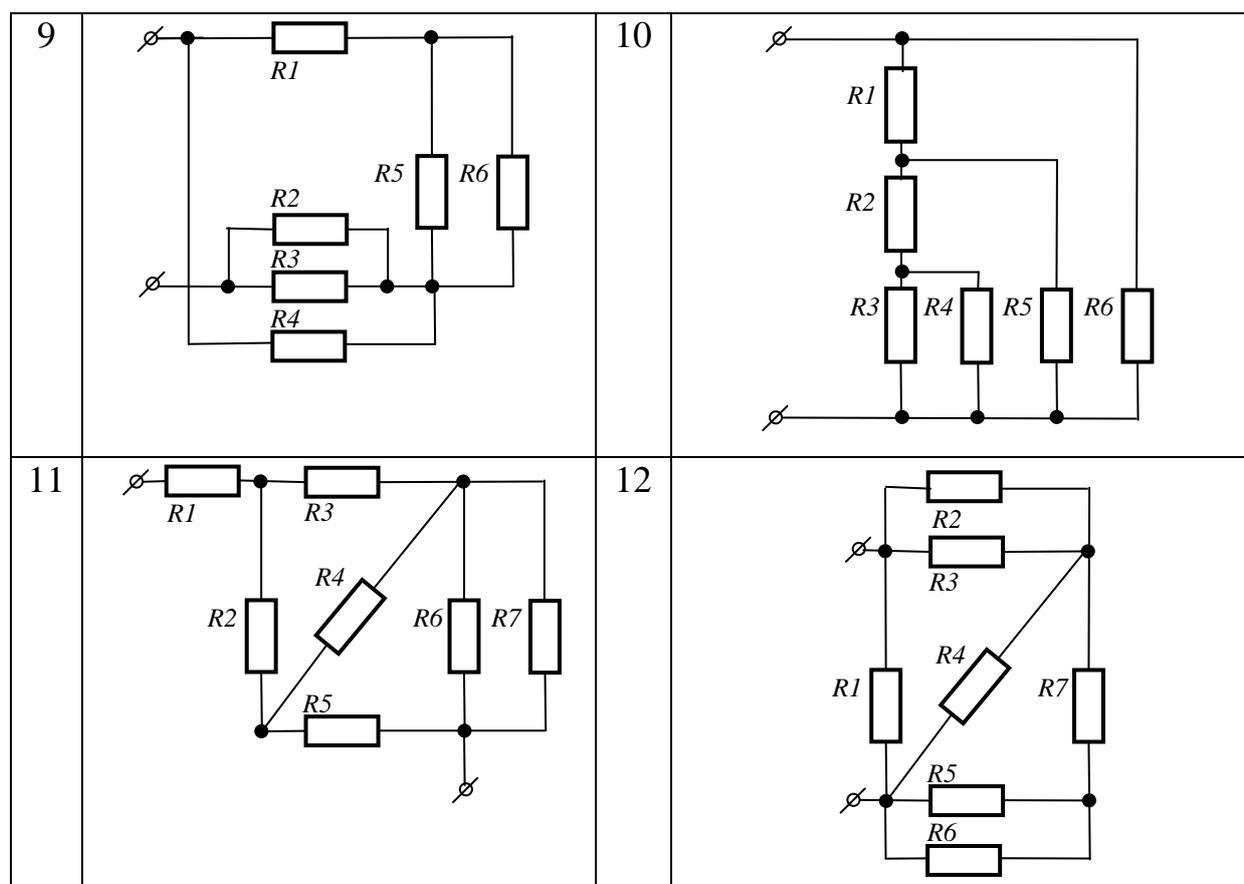
1. Согласно Вашему варианту разработайте в среде SMath Studio или MathCAD программу расчета значения эквивалентного сопротивления резистивной схемы, представленной в таблице 1.3. При необходимости сделайте промежуточные преобразования схемы электрической цепи, используя теоретические сведения из раздела 1.2.

2. Замените в схеме электрической цепи сопротивление на индуктивность, а затем на емкость, и повторите расчеты.

Таблица 1.3

Схемы резистивных цепей для эквивалентного преобразования

№	Схема электрической цепи	№	Схема электрической цепи
1		2	
3		4	
5		6	
7		8	



1.5 Контрольные вопросы

1. Как изменяется эквивалентное сопротивление:
 - при последовательном соединении резисторов;
 - при параллельном соединении резисторов.
2. Как изменятся эквивалентная индуктивность:
 - при последовательном соединении катушек индуктивности;
 - при параллельном соединении катушек.
3. Как изменятся эквивалентная емкость:
 - при последовательном соединении конденсаторов;
 - при параллельном соединении конденсаторов.

2. ПОСТРОЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

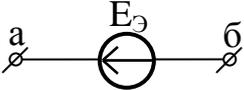
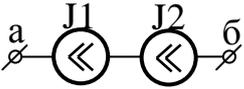
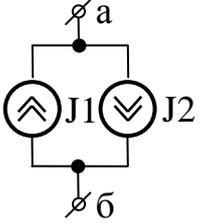
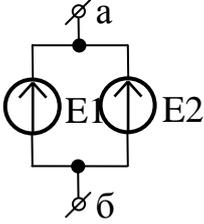
2.1 Цель работы

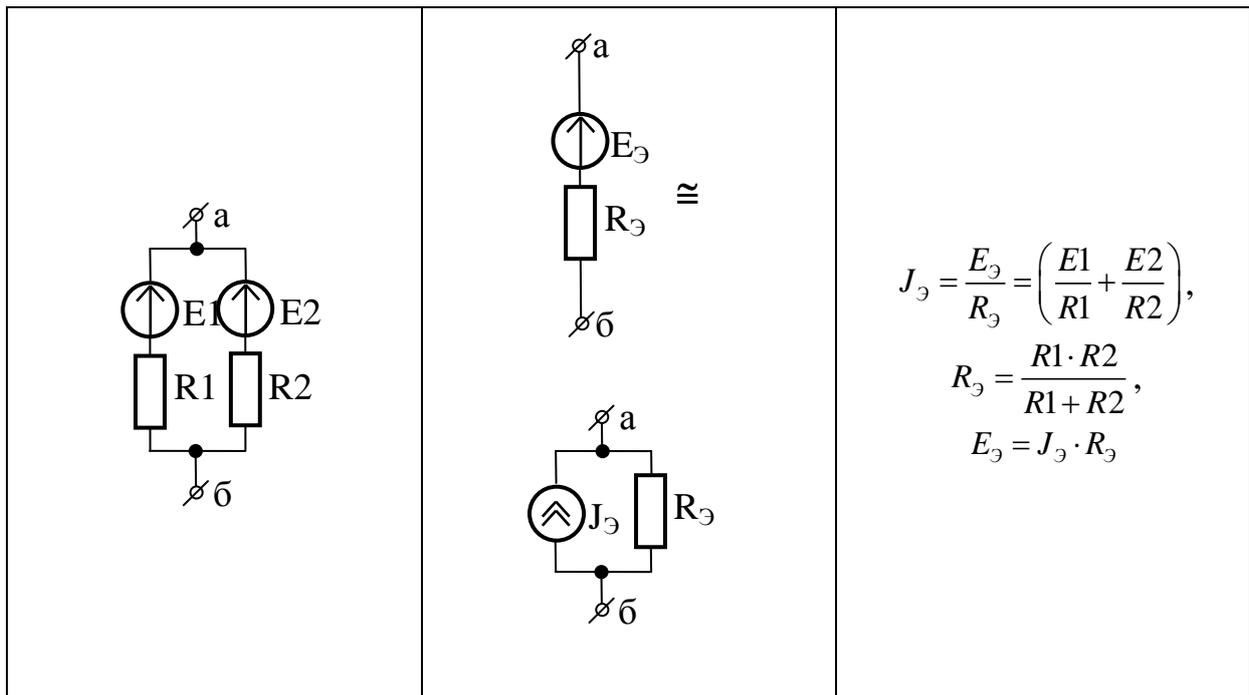
Изучить правила эквивалентных преобразований источников тока и напряжения. Получить навыки работы с пользовательскими функциями SMath Studio, MathCAD на примере разработки модели построения внешней характеристики электрической цепи

2.2 Основные теоретические сведения по преобразованию источников тока и напряжения

Таблица 2.1

Правила преобразований схем соединений источников тока и напряжения

Схема соединения	Эквивалентная схема	Формула преобразования
		$E_3 = E1 - E2$ <p>Знаки определяются взаимным направлением составляющих э.д.с. и э.д.с. эквивалентного источника</p>
	<i>Соединение недопустимо!!!</i>	
		$J_3 = -J1 + J2,$ <p>Знаки определяются взаимным направлением составляющих токов и тока эквивалентного источника</p>
	<i>Соединение недопустимо!!!</i>	



2.3 Пример расчета и исследования изменения внешней характеристики электрической цепи

Для заданных значений E , $R1$, $R2$, $R3$, $R4$ схемы электрической цепи, представленной на рисунке 2.1, построить график зависимости $U_{аб}(I_{аб})$ при изменении сопротивлений: 1) $R1$; 2) $R2$;

Определите значение сопротивления $R2$, при котором мощность, передаваемая от источника потребителю, будет максимальной.

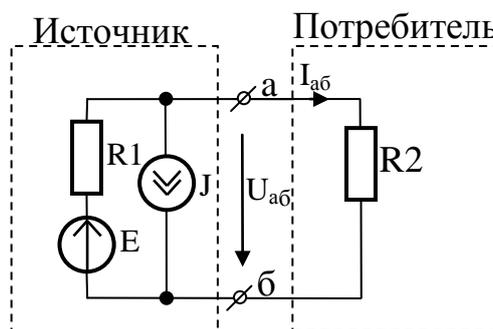


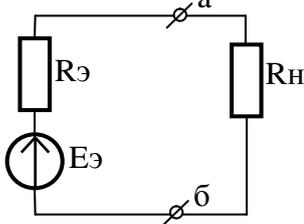
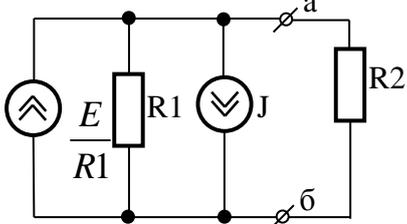
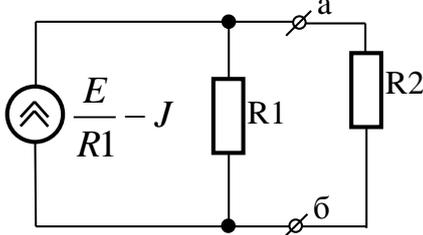
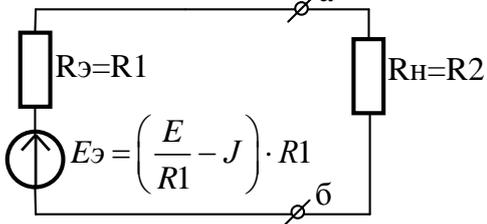
Рис. 2.1 Схема соединения источника и приемника для расчета внешней характеристики электрической цепи

Зависимость $U_{аб}(I_{аб})$ является внешней характеристикой электрической цепи, определяющей зависимость напряжения внешней цепи от тока в ней.

Предварительные преобразования схемы электрической цепи, необходимые для получения выражений тока и напряжения на зажимах а - б, приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Последовательность преобразований схемы соединений источника и потребителя электрической энергии для расчета внешней характеристики

1	<p>Необходимо преобразовать схему к виду. Тогда</p> $I_{аб} = \frac{E_{\Sigma}}{R_{\Sigma} + R_{н}}, U_{аб} = R_{н} \cdot I_{аб}$	
2	<p>Преобразуем последовательное соединение E и R1 к параллельной форме.</p>	
3	<p>Объединим два источника тока в один</p>	
4	$I_{аб} = \frac{E_{\Sigma}}{R_{\Sigma} + R_{н}} = \frac{E - J \cdot R1}{R1 + R2},$ $U_{аб} = R2 \cdot \frac{E - J \cdot R1}{R1 + R2}$	

Листинг программы, реализующей построение внешней характеристики электрической цепи, представлен на рисунке 2.2.

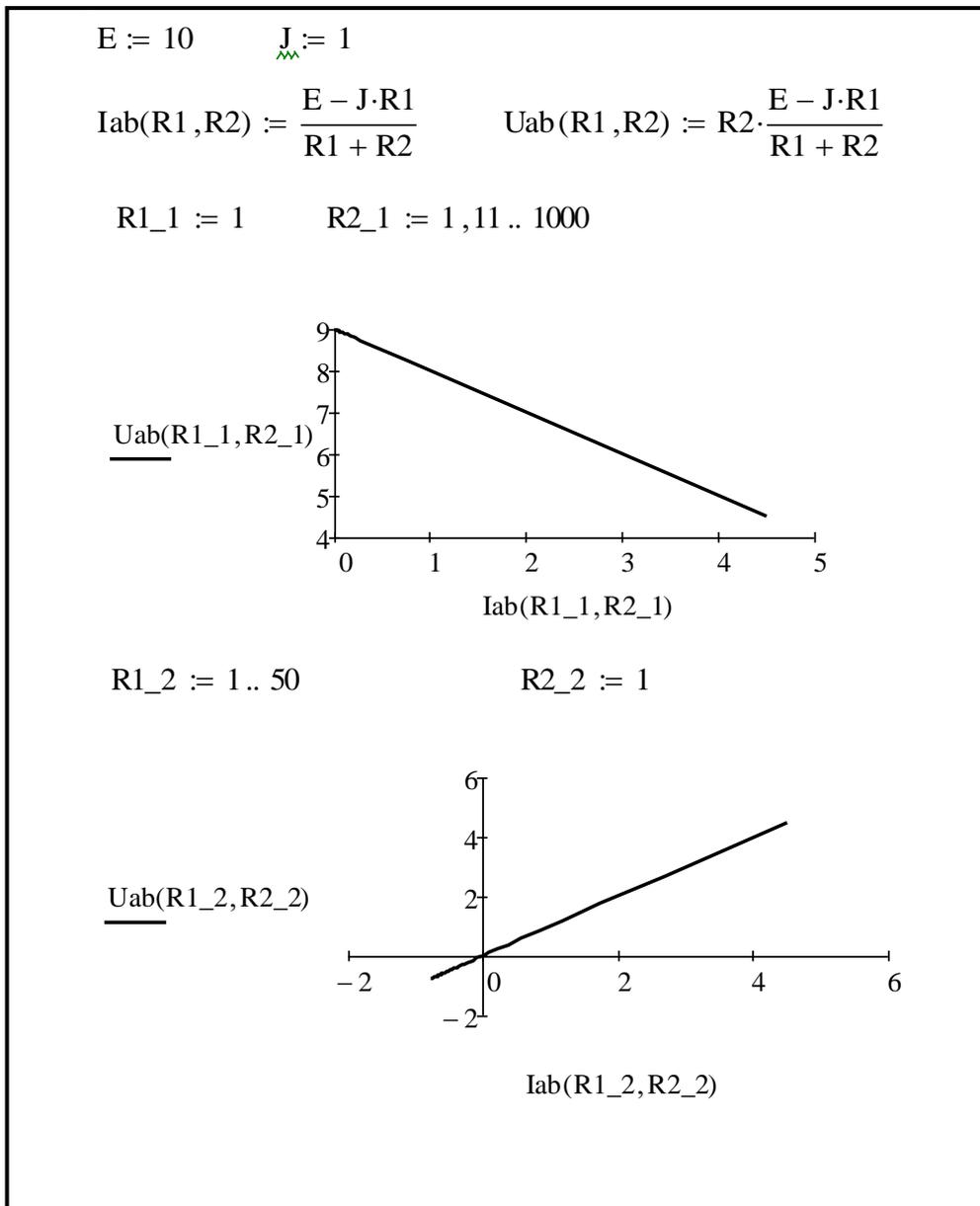


Рис. 2.2 Листинг программы расчета внешней характеристики электрической цепи

Листинг программы расчета мощности, передаваемой от источника потребителю, в зависимости от значения сопротивления R2, представлен на рисунке 2.3.

$$P(R1, R2) := I_{ab}(R1, R2)^2 \cdot R2$$

$$R1_1 := 1$$

$$R2_1 := 0.1, 0.2 \dots 10$$

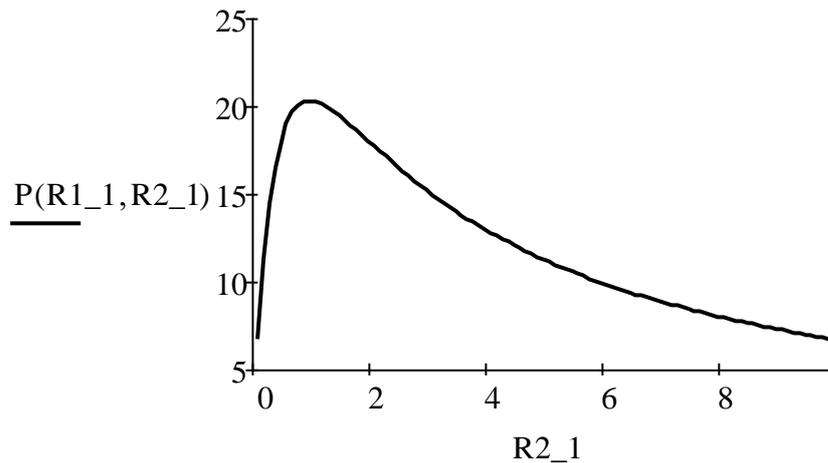


Рис. 2.3 Листинг расчета мощности

2.4 Индивидуальные задания для самостоятельного решения

1. Согласно Вашему варианту постройте внешнюю характеристику электрической цепи, схема которой представлена в таблице 2.3, относительно зажимов а - б при изменении сопротивлений R1 и R3.
2. Определите значение изменяемого в нагрузке сопротивления, при котором мощность, передаваемая в нагрузку будет максимальной.

Таблица 2.3

Схемы для расчета внешней характеристики электрической цепи

№	Схема электрической цепи	№	Схема электрической цепи
1		2	

3		4	
5		6	
7		8	
9		10	

2.5 Контрольные вопросы

1. Что называется внешней характеристикой электрической цепи?
2. Укажите в схеме элементы электрической цепи, изменение которых позволяет получить внешнюю характеристику, отражающую:
 - вольт-амперную характеристику реального источника;
 - вольт-амперную характеристику сопротивления.
3. Поясните, почему недопустимы:
 - параллельное соединение идеализированных источников напряжения;

– последовательное соединение идеализированных источников тока.

4. Приведите вывод выражения для эквивалентных э.д.с. и внутреннего сопротивления при параллельном соединении реальных источников напряжения.

3. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ИСТОЧНИКА

3.1 Цель работы

Закрепление навыков выполнения эквивалентных преобразований электрических цепей.

3.2 Основные теоретические сведения

Преобразование электрических цепей, содержащих наряду с пассивными элементами источники тока и напряжения, основано на правилах преобразования из таблицы 2.1.

Последовательность преобразований активного двухполюсника, приводящая к схеме последовательного соединения эквивалентного источника напряжения с внутренним эквивалентным сопротивлением или к схеме параллельного соединения эквивалентного источника тока с внутренней эквивалентной проводимостью, называется *методом свертки*.

3.3 Типовой пример свертки схемы электрической цепи.

Требуется свернуть схему электрической цепи, представленной на рисунке 3.1, рассчитав значения э.д.с и внутреннего сопротивления эквивалентного источника напряжения относительно зажимов а-б. Порядок преобразований приведен в таблице 3.1.

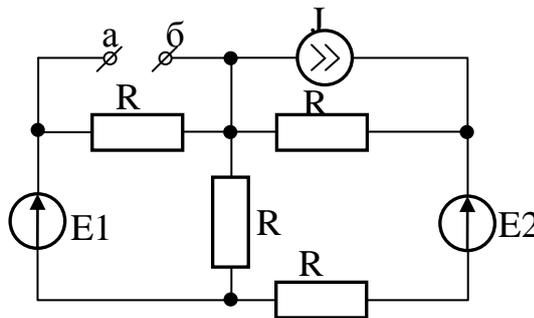
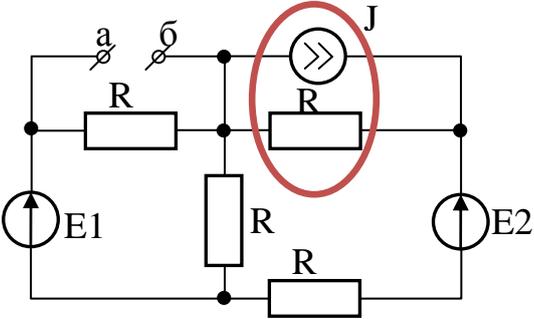
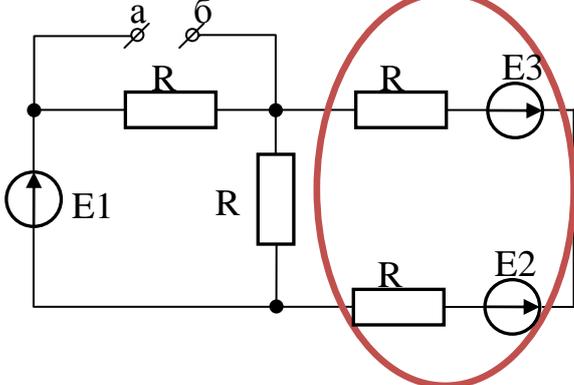
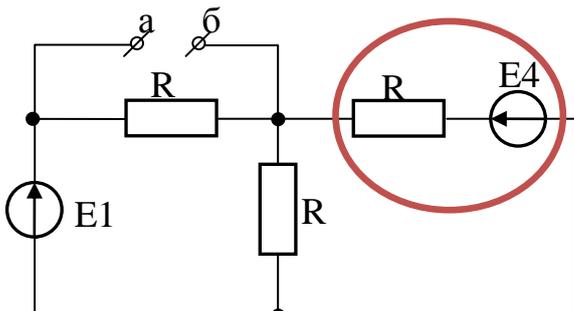
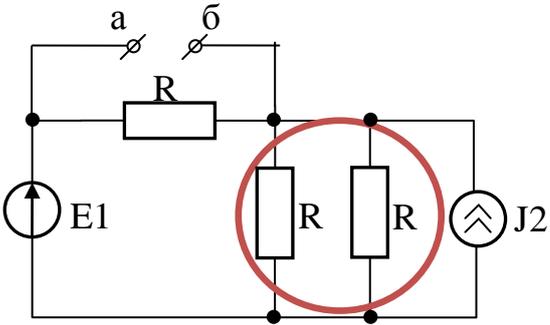
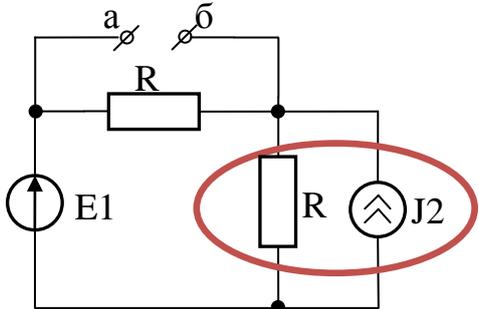
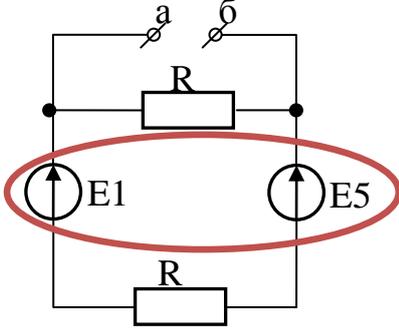
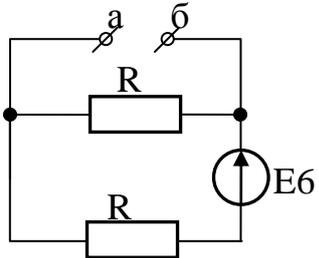


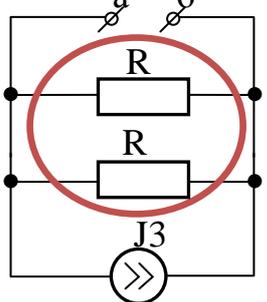
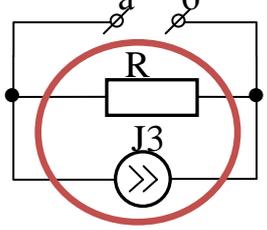
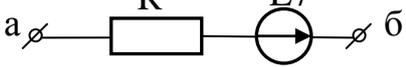
Рис. 3.1 Схема активного двухполюсника

Таблица 3.1

Последовательность свертки схемы электрической цепи

№	Схема электрической цепи	Описание эквивалентного преобразования
1.		<p>Преобразование источника тока J в эквивалентный ему источник э.д.с. E_3:</p> $E_3 = J \cdot R_2$
2		<p>Преобразование последовательно соединенных источников э.д.с. E_2 и E_3 и сопротивления R_2 и R_4:</p> $R_5 = R_2 + R_4$ $E_1 = E_2 - E_3$
3		<p>Преобразование источника ЭДС E_4 в эквивалентный ему источник тока J_2:</p> $J_2 = \frac{E_4}{R_5}$

4		<p>Преобразование параллельно соединенных сопротивлений R3 и R5:</p> $R_6 = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_5}$
5		<p>Преобразование источника тока J2 в эквивалентный ему источник Э.Д.С. E5:</p> $E_5 = J_2 \cdot R_6$
6		<p>Преобразование последовательно соединенных источников ЭДС E1 и E5:</p> <p>Пусть направление э.д.с. E6 совпадает с направлением э.д.с. E5. Тогда $E_6 = E_5 - E_1$.</p>
7		<p>Преобразование источника ЭДС E6 в эквивалентный ему источник тока J3:</p> $J_3 = E_6 / R_6$

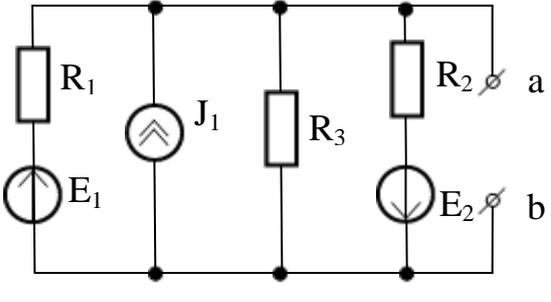
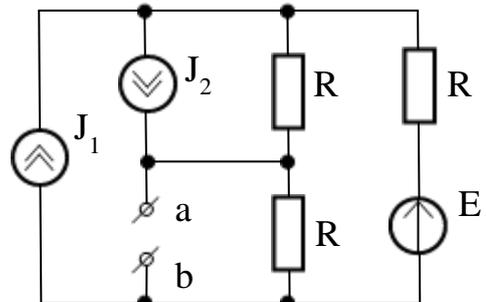
8		<p>Преобразование параллельно соединенных сопротивлений R_1 и R_6:</p> $R_7 = R_1 * R_6 / (R_1 + R_6)$
9		<p>Преобразование источника тока J_3 в эквивалентный ему источник Э.Д.С. E_7:</p> $E_7 = J_3 * R_7$
10		<p>Эквивалентная э.д.с. $E_9 = E_7$ и эквивалентное сопротивление электрической цепи $R_9 = R_7$</p>

3.4 Индивидуальные задания для самостоятельного решения

Для электрической цепи, схема которой представлена согласно Вашему варианту в таблице 3.2, рассчитайте значения параметров эквивалентных источников напряжения по отношению к зажимам а и б. Значения параметров элементов схем приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.2

Схемы для свертки электрической цепи

№	Схема электрической цепи	№	Схема электрической цепи
1		2	

3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

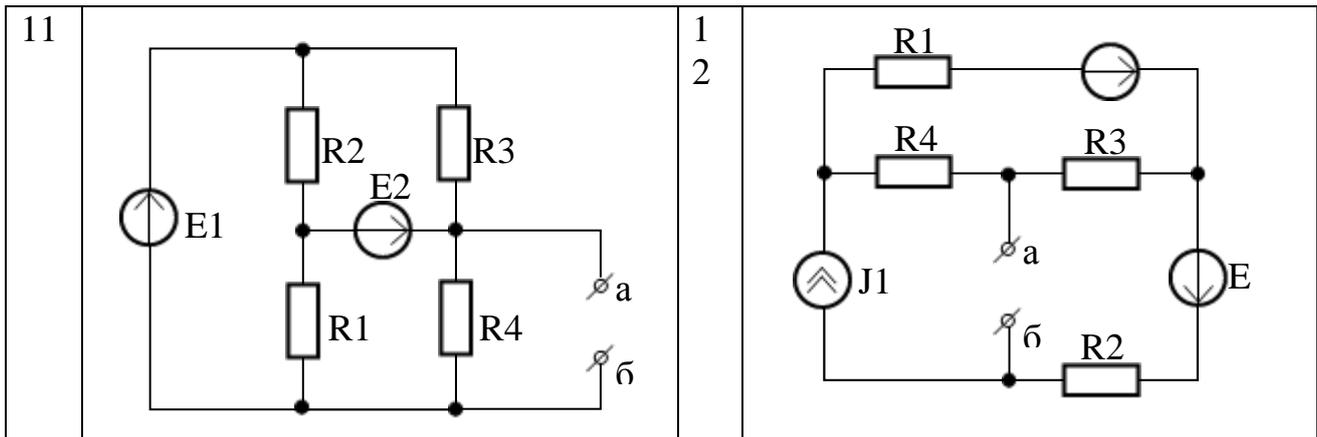


Таблица 3.3

Значения параметров элементов схем

Вариант	Значения параметров элементов схемы							
	Сопротивления, Ом				Токи, А		Напряжения, В	
	R1	R2	R3	R4	J1	J2	E1	E2
1	1	2	4	-	2	-	14	7
2	4	6	4	-	5	2	14	-
3	5	8	2	-	1	3	20	30
4	2	3	5	5	1	2	30	-
5	4	4	3	4	4	-	18	36
6	4	4	5	1	2	-	26	13
7	3	2	4	5	1	2	24	-
8	4	5	2	2	2	-	15	10
9	3	2	4	6	1	-	16	14
10	3	6	5	2	2	-	26	13
11	4	4	6	8	-	-	22	11
12	3	6	8	4	1	-	30	15

3.4 Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему об эквивалентном источнике э.д.с.
2. Сформулируйте теорему об эквивалентном источнике тока.
3. Какой двухполюсник называется активным?
4. Какой двухполюсник называется пассивным?
5. Чему равно эквивалентное сопротивление активного двухполюсника?
4. Докажите эквивалентность схем замещения реального источника последовательной схемой с идеальным источником напряжения и параллельной схемой с источником тока.

4. ВЕКТОРНЫЕ ДИАГРАММЫ ЦЕПЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ РЕАКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ.

4.1 Цель работы

Исследование изменения комплексных амплитуд напряжений и токов линейной электрической цепи, содержащей реактивные элементы, путем построения векторных диаграмм и анализа их трансформации при изменении параметров электрической цепи.

Получение навыков работы с графиками в полярной системе координат; освоение возможностей анимации в среде MathCAD.

4.2 Векторные диаграммы тока и напряжения в элементах электрической цепи

Таблица 4.1

Диаграммы токов и напряжений в пассивных элементах

Сопротивление	Индуктивность	Емкость

4.3 Типовой пример построения векторной диаграммы

Построить векторную диаграмму электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 4.1.

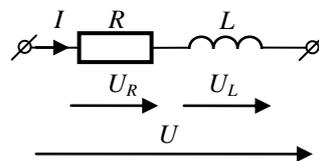
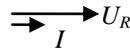
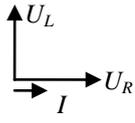
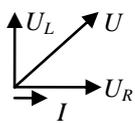


Рис. 4.1 Схема последовательной RL-цепи

Векторная диаграмма электрической цепи с рис. 4.1 должна содержать четыре вектора: I , U , U_R , U_L .

Очередность построения векторной диаграммы представлена таблицей 4.2 Листинг программы, реализующей расчет комплексных амплитуд токов и напряжений электрической цепи, а также построение векторной диаграммы, представлен на рисунке 4.2.

**Очередность построения векторной диаграммы
последовательной RL-цепи**

№	Диаграмма	Пояснение
1		Напряжение и ток в сопротивлении совпадают по фазе. Направление векторов выбрано произвольно, поскольку начальная фаза тока неизвестно и может быть принята равной нулю.
2		Сопротивление и индуктивность соединены последовательно, поэтому вектор тока описывает ток и в сопротивлении, и в индуктивности. Напряжение в индуктивности опережает ток на 90°.
3		Известно, что при последовательном соединении напряжение на входных зажимах электрической цепи равно сумме падений напряжений на ее элементах. $U = U_R + U_L$. (Суммирование – векторное, с учетом фазы)

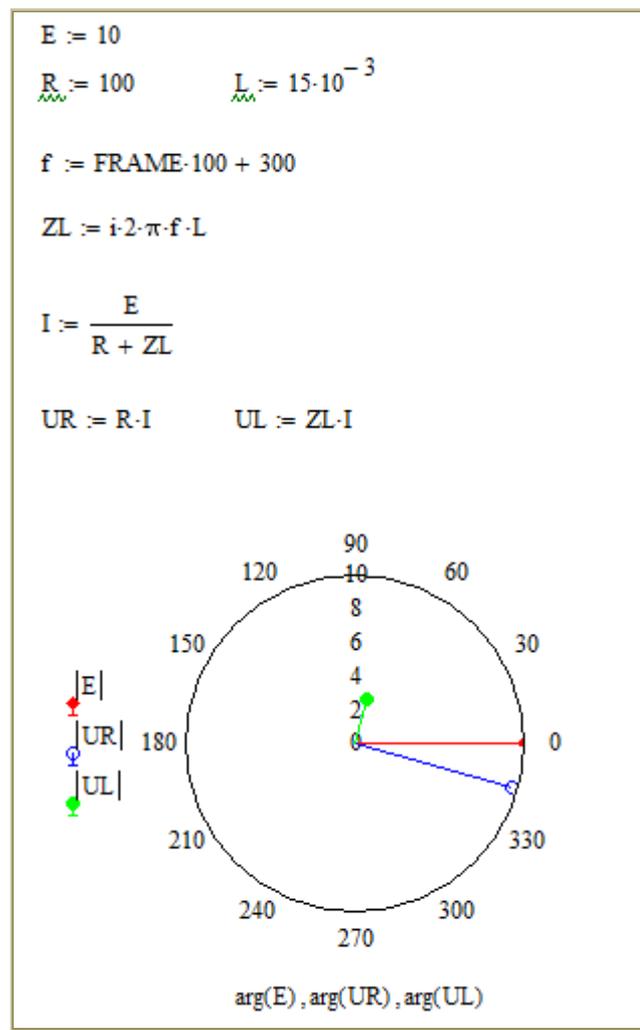


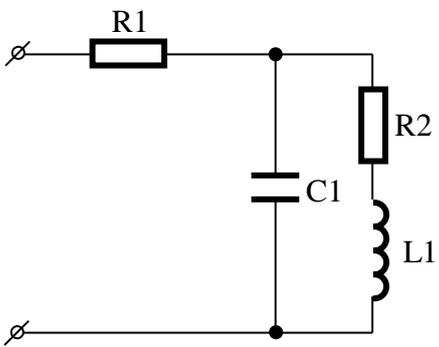
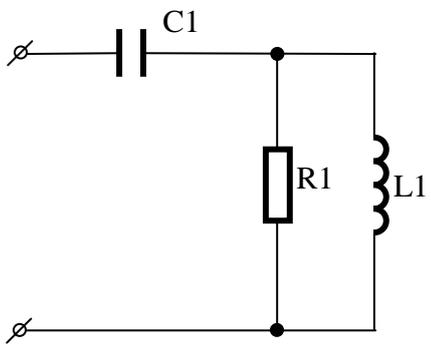
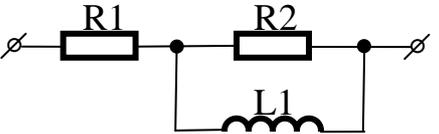
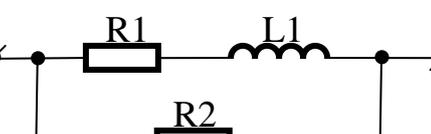
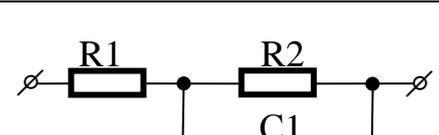
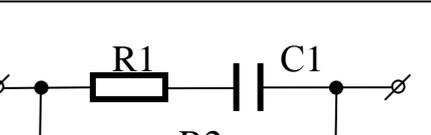
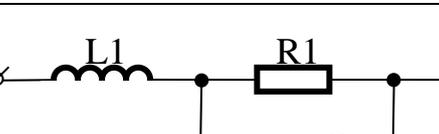
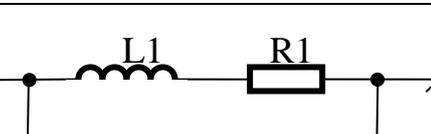
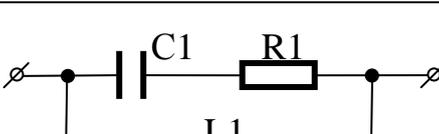
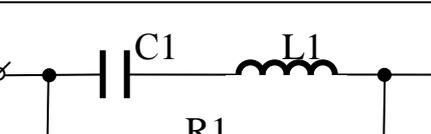
Рис. 4.2 Листинг программы построения векторной диаграммы

4.4 Индивидуальные задания для самостоятельного решения

1. Построить векторную диаграмму токов и напряжений на всех элементах двухполюсника.
2. Исследовать изменение формы векторной диаграммы при изменении параметров элементов электрической цепи (сопротивления, индуктивности, емкости), а также частоты. В отчете представить объяснения.

Таблица 4.3

Схемы для построения векторных диаграмм

№	Схема ЭЦ	№	Схема ЭЦ
1		2	
3		4	
5		6	
7		8	
9		10	

11		12	
13		14	
15		16	
17		18	
19		20	

4.5 Контрольные вопросы

1. Объясните фазовые соотношения между током и напряжением в элементах электрической цепи.

2. Запишите комплексные сопротивления индуктивности и емкости.

3. В каком диапазоне изменяется разность фаз между напряжением и током:

- в последовательной RC-цепи;
- в последовательной RL-цепи.

4. При каком соотношении параметров элементов последовательной RLC-цепи ее входное сопротивление будет иметь индуктивный, емкостной и активный характер?

5. Как изменяется с ростом частоты векторная диаграмма:

- параллельной RC-цепи;

- параллельной RL-цепи.

5. МАТРИЧНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.

5.1 Цель работы

Закрепление знаний о методах анализа сложных электрических цепей. Овладение навыками выполнения матричных вычислений в среде SMath Studio, MathCAD.

5.2 Типовой пример расчета электрической цепи.

Определить значения токов в ветвях электрической цепи, представленной на рисунке 5.1

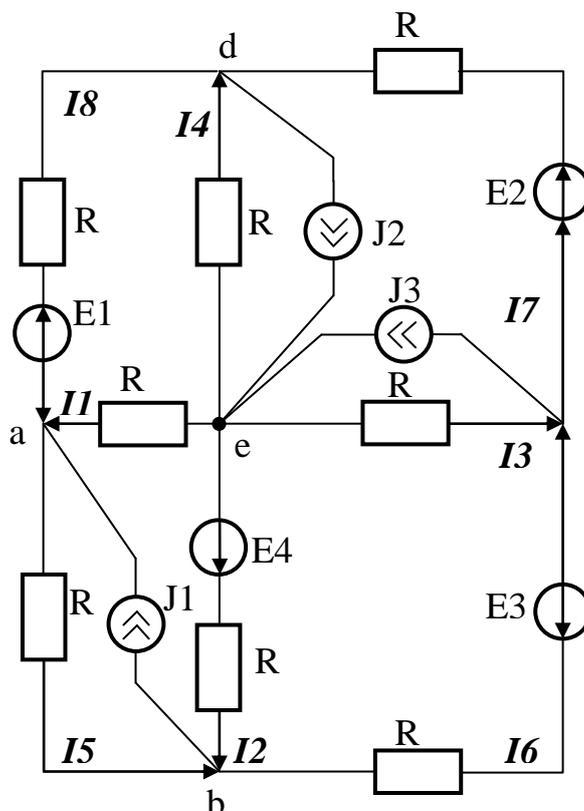


Рис 5.1

5.2.1. Граф, дерево графа, выбор контуров

Граф цепи – графическое представление ее геометрической структуры, состоящее из ветвей – линий (ребер) и узлов (вершин). Для схемы с рис. 5.1 граф изображен на рис. 5.2,а.

Дерево графа – любая система из минимального числа ветвей графа, соединяющая все узлы без образования контуров. Для схемы с рис. 5.1 деревья графа изображены на рис. 5.2,б.

Подключение к дереву графа каждой из *хорд-главных ветвей* (пунктирные линии на рис.5.2, б и 5.2,в) создает по одному независимому контуру. **Контур состоит из ветвей дерева и одной ветви связи.**

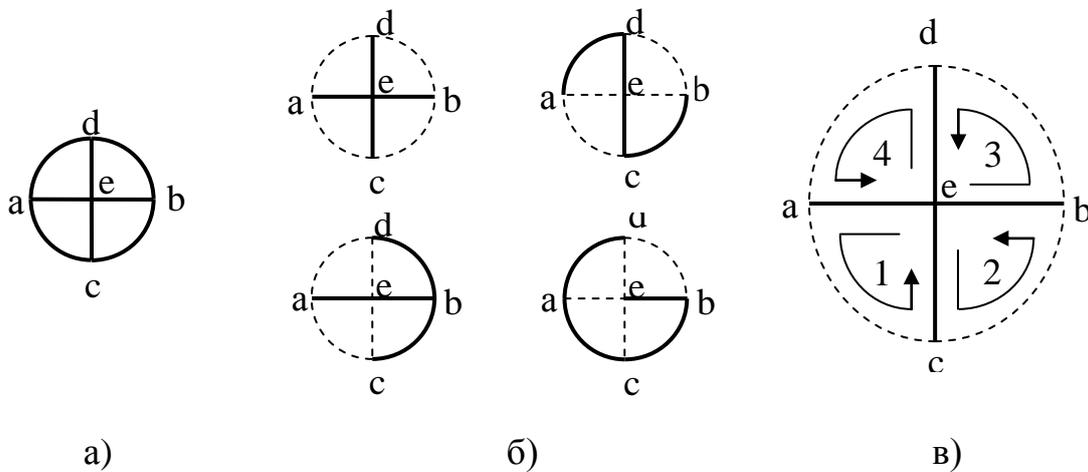


Рис. 5.2

- а) граф ;
- б) деревья графа;
- в) дерево графа в обозначении контуров

Анализ электрической цепи будем на основе дерева графа, представленном на рисунке 5.2,в.

Стрелками указаны направления обхода контуров дерева.

- 1 контур – ветви дерева ae и be и ветвь связи ab
- 2 контур – ветви дерева be и ce и ветвь связи bc
- 3 контур – ветви дерева ce и de и ветвь связи cd
- 4 контур – ветви дерева ae и de и ветвь связи ad

5.2.2. Расчет электрической цепи, применяя законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле равна нулю.

Второй закон Кирхгофа: в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме ЭДС, встречающихся в этом контуре.

Вариант решения 1.

Для анализа электрической цепи выполним следующую последовательность действий:

1. Выбираем направления токов в ветвях.
2. Строим граф, дерево графа и выбираем контура. см. рис. 5.2.
3. Составляем уравнения по первому закону Кирхгофа.

$$\text{Для узла а: } I_1 - I_5 + I_8 + J_1 = 0$$

$$\text{Для узла б: } I_2 + I_5 - I_6 - J_1 = 0$$

$$\text{Для узла с: } I_3 + I_6 - I_7 - J_3 = 0$$

$$\text{Для узла д: } I_4 + I_7 - I_8 - J_2 = 0$$

4. Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа.

$$\text{Контур 1: } \mathbf{I1R1 - I2R2 + I5R5 = -E4}$$

$$\text{Контур 2: } \mathbf{I2R2 - I3R3 + I6R6 = E4 - E3}$$

$$\text{Контур 3: } \mathbf{I3R3 - I4R4 + I7R7 = E2}$$

$$\text{Контур 4: } \mathbf{-I1R1 + I4R4 + I8R8 = -E1}$$

Обратите внимание, что источники токов используются только в первом законе, а источники ЭДС только во втором.

5. Составляем матрицы коэффициентов.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ R1 & -R2 & 0 & 0 & R5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R2 & -R3 & 0 & 0 & R6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R3 & -R4 & 0 & 0 & R7 & 0 \\ -R1 & 0 & 0 & R4 & 0 & 0 & 0 & R8 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -J1 \\ J1 \\ J3 \\ J2 \\ -E4 \\ E4 - E3 \\ E2 \\ -E1 \end{pmatrix}$$

6. Находим решение системы линейных уравнений, используя функции MathCAD:

$$I := \text{lsolve}(A, B) \quad \text{или} \quad I := A^{-1} \cdot B$$

Получаем значения токов.

Вариант решения 2.

1. Проводим эквивалентные преобразования источников токов в источники ЭДС:

$$\mathbf{E5 = J1 \cdot R6, E6 = J2 \cdot R3, E7 = J3 \cdot R5}$$

Схема преобразованной электрической цепи представлена на рисунке 5.3.

2. Выбираем направления токов в ветвях.

3. Строим граф, дерево графа и выбираем контура. см. рис.5.2.

4. Составляем уравнения по первому закону Кирхгофа.

$$\text{Для узла a:} \quad \mathbf{I1 - I5_ + I8 = 0}$$

$$\text{Для узла b:} \quad \mathbf{I2 + I5_ - I6 = 0}$$

$$\text{Для узла c:} \quad \mathbf{I3_ + I6 - I7 = 0}$$

$$\text{Для узла d:} \quad \mathbf{I4_ + I7 - I8 = 0}$$

5. Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа.

$$\text{Контур 1:} \quad \mathbf{I1 \cdot R1 - I2 \cdot R2 + I5_ \cdot R5 = -E4 - E5}$$

$$\text{Контур 2:} \quad \mathbf{I2 \cdot R2 - I3_ \cdot R3 + I6 \cdot R6 = E4 - E3 + E7}$$

$$\text{Контур 3:} \quad \mathbf{I3_ \cdot R3 - I4_ \cdot R4 + I7 \cdot R7 = E2 + E6 - E7}$$

$$\text{Контур 4:} \quad \mathbf{-I1 \cdot R1 + I4_ \cdot R4 + I8 \cdot R8 = -E1 - E6}$$

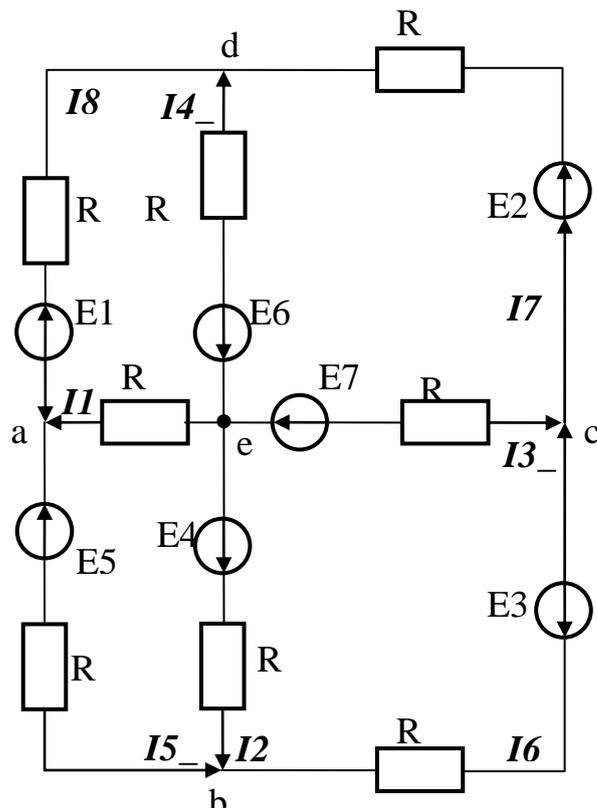


Рис. 5.3 Схема электрической цепи после преобразования источников тока в источники ЭДС

6. Составляем матрицы коэффициентов.

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & 0 & R_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 & 0 & R_7 & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 & R_8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E_4 - E_5 \\ E_4 - E_3 + E_7 \\ E_2 - E_6 - E_7 \\ -E_1 - E_6 \end{pmatrix}$$

6. Находим решение системы линейных уравнений. Получаем значения токов.

7. Поскольку были выполнены преобразования источников тока в источники э.д.с., то для определения токов в ветвях не преобразованной схемы необходимо выполнить дополнительные расчеты:

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_{3_} + \mathbf{J}_3, \quad \mathbf{I}_4 = \mathbf{I}_{4_} + \mathbf{J}_2, \quad \mathbf{I}_5 = \mathbf{I}_{5_} - \mathbf{J}_1$$

Если в электрической цепи есть ветви с вырожденными источниками тока (нет подключенного параллельно сопротивления), то значение тока в данной ветви известно, и общее число уравнений, составляемых по

первому и второму законам Кирхгофа уменьшается на число вырожденных источников.

5.2.3 Взаимосвязь уравнений электрической цепи, составляемых по первому и второму законам Кирхгофа

Для каждой анализируемой электрической цепи нумерация узлов и набор контуров могут быть выбраны таким образом, что из системы уравнений по первому закону Кирхгофа путем матричных преобразований может быть получена система уравнений по второму закону Кирхгофа и наоборот. Это отражает взаимосвязь между законами Кирхгофа.

В рассмотренном в 5.2.2 примере нумерация узлов и набор контуров были выбраны с учетом возможных преобразований.

1. Рассмотрим матрицу коэффициентов по первому закону Кирхгофа.

Она составит из двух подматриц, левая из которых – единичная.

$$A := \left\| \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right\| \right\|$$

Выделенную часть матрицы транспонируем.

$$F := \left\| \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right\| \right\| \quad F^T := \left\| \left\| \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| \right\|$$

2. Умножаем F^T на «-1».

$$F^T \cdot (-1) := \left\| \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \right\|$$

3. Составляем матрицу коэффициентов для второго закона Кирхгофа путем присоединения к матрице F^T единичной матрицы той же размерности.

$$B := \left\| \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \right\|$$

4. На основе полученной матрицы можем составить уравнения для второго закона Кирхгофа.

- Контур 1: $U_1 - U_2 + U_5 = -E_4$
 Контур 2: $U_2 - U_3 + U_6 = E_4 - E_3$
 Контур 3: $U_3 - U_4 + U_7 = E_2$
 Контур 4: $-U_1 + U_4 + U_8 = -E_1$

Сравнив полученные уравнения с уравнениями, составленными ранее по второму закону Кирхгофа, мы можем убедиться, что они совпадают.

5.2.4 Расчет электрической цепи методом контурных токов.

1. Выбираем направления токов в ветвях.
2. Выбираем контурные токи и их направления.

В схеме электрической цепи в соответствии с деревом графа, см. рис. 5.3, четыре контура, в которых протекают контурные токи: $I_I, I_{II}, I_{III}, I_{IV}$, отображенные на схеме рис. 5.4

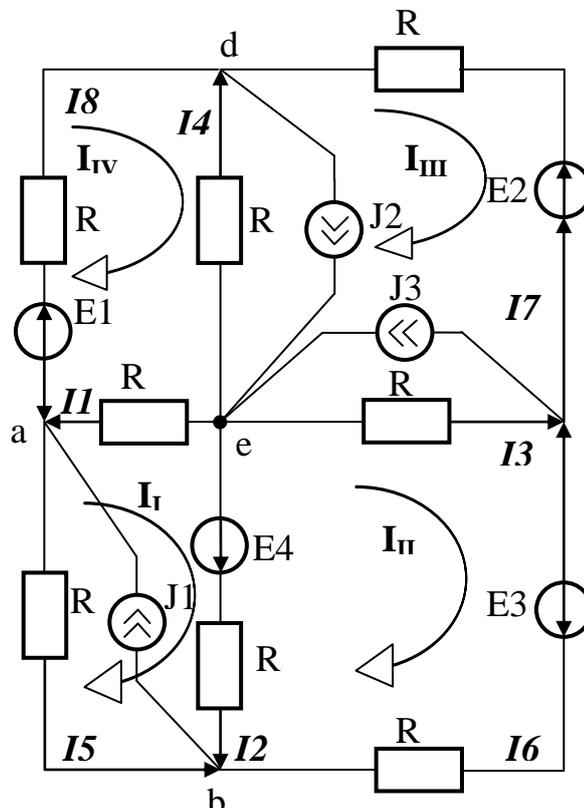


Рис. 5.4 Схема электрической цепи с обозначением контурных токов

В контуре, образованном парой «сопротивление – идеальный источник тока» (для схемы с рис.5.4 это контура: R_5, J_1 ; R_4, J_2 ; R_3, J_3), контурный ток известен. При направлении обхода контура, совпадающем с направлением источника, он равен току этого источника.

3. Составляем уравнения для контурных токов на основе второго закона Кирхгофа.

$$\begin{aligned} I_I(R_1+R_2+R_5) - I_{II}R_2 - I_{IV}R_1 &= E_4 \\ -I_I R_2 + I_{II}(R_2+R_3+R_5) - I_{III}R_3 &= E_3 - E_4 \\ -I_{II}R_3 + I_{III}(R_3+R_4+R_7) - I_{IV}R_4 &= -E_2 \\ -I_I R_1 - I_{III}R_4 + I_{IV}(R_1+R_4+R_8) &= E_1 \end{aligned}$$

Примечание: при одинаковом направлении контурных токов, в системе уравнений собственные сопротивления контуров входит со знаком «+», общее сопротивление двух контуров со знаком «-».

4. Составляем уравнения для расчета токов в ветвях.

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{IV} - I_I & I_5 &= -I_I \\ I_2 &= I_I - I_{II} & I_6 &= -I_{II} \\ I_3 &= I_{II} - I_{III} & I_7 &= -I_{III} \\ I_4 &= I_{III} - I_{IV} & I_8 &= -I_{IV} \end{aligned}$$

5. Составляем матрицы коэффициентов.

$$A := \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_5 & -R_2 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_5 & -R_3 & 0 \\ 0 & -R_3 & R_3 + R_4 + R_7 & -R_4 \\ -R_1 & 0 & -R_4 & R_1 + R_4 + R_8 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} E_4 \\ E_3 - E_4 \\ -E_2 \\ E_1 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что матрица коэффициентов симметрична относительно главной диагонали.

6. Решаем систему уравнений и получаем значения контурных токов. Находим согласно уравнений п. 4 настоящего раздела токи в ветвях электрической цепи.

5.2.5 Расчет электрической цепи методом узловых напряжений.

1. Выбираем направления токов в ветвях.
2. Выбираем в качестве базового узла, потенциал которого будет равен нулю, узел **e**, см. рис.5.5. Узловое напряжение направлено к базовому узлу.

Если в ветви присутствует вырожденный источник э.д.с. (внутреннее сопротивление источника равно нулю), то в качестве базового целесообразно выбрать узел, к которому подключен этот

источник. Тогда узловое напряжение другого узла ветви с вырожденным источником известно и равно без учета знака э.д.с этого источника.

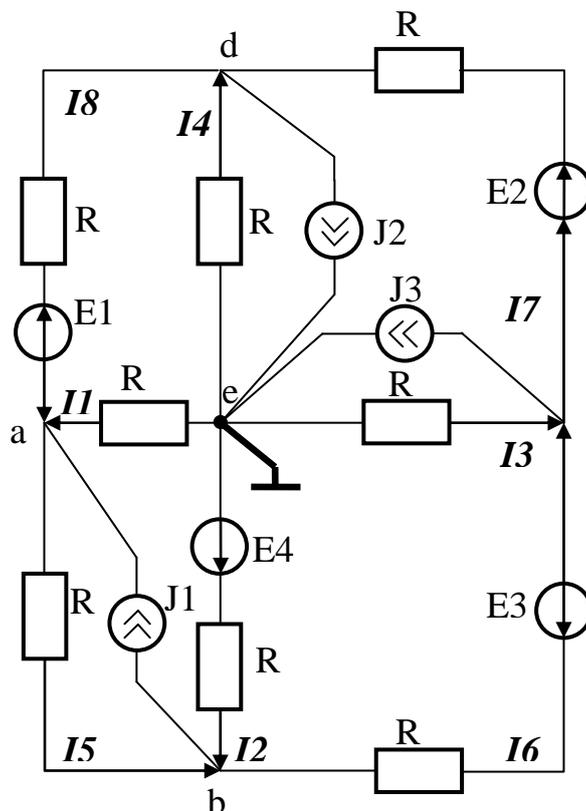


Рис. 5.5 Схема электрической цепи с обозначением базового узла

3. Составляем уравнения для узловых напряжений на основе первого закона Кирхгофа.

Примечание:

- 1) положительным направлением тока источника подключенного к узлу считается направление «к узлу».
- 2) Источники э.д.с. подключенные к узлу преобразуются в источники тока.

$$\text{Для узла } \mathbf{a}: U_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_5} \right) - U_b \frac{1}{R_5} - U_d \frac{1}{R_8} = J_1 - \frac{E_4}{R_8}$$

$$\text{Для узла } \mathbf{b}: -U_a \frac{1}{R_5} + U_b \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_5} \right) - U_c \frac{1}{R_6} = -J_1 + \frac{E_3}{R_6} + \frac{E_4}{R_2}$$

$$\text{Для узла } \mathbf{c}: -U_b \frac{1}{R_6} + U_c \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) - U_d \frac{1}{R_7} = -J_3 - \frac{E_2}{R_7} - \frac{E_3}{R_6}$$

$$\text{Для узла } \mathbf{d}: -U_a \frac{1}{R_8} - U_c \frac{1}{R_7} + U_d \left(\frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_7} \right) = -J_2 + \frac{E_2}{R_7} + \frac{E_1}{R_8}$$

4. Составляем уравнения для расчета токов в ветвях.

$$I_1 = -U_a/R_1$$

$$I_2 = -U_b/R_2$$

$$I_3 = -U_c/R_3$$

$$I_4 = -U_d/R_4$$

$$I_5 = (U_a - U_b)/R_5$$

$$I_6 = (U_b - U_c)/R_6$$

$$I_7 = (U_c - U_d)/R_7$$

$$I_8 = (U_d - U_a)/R_8$$

5. Составляем матрицы коэффициентов.

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} & 0 & -\frac{1}{R_8} \\ -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} & -\frac{1}{R_7} \\ -\frac{1}{R_8} & 0 & -\frac{1}{R_7} & \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_7} \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} J_1 - \frac{E_4}{R_8} \\ -J_1 + \frac{E_3}{R_6} + \frac{E_4}{R_2} \\ -\frac{E_2}{R_7} - \frac{E_3}{R_6} - J_3 \\ \frac{E_2}{R_7} - J_2 + \frac{E_1}{R_8} \end{pmatrix}$$

6. Решаем и получаем значения токов.

5.3 Индивидуальные задания для самостоятельного решения

Для схемы электрической цепи, схема которой представлена согласно Вашему варианту в таблице 5.1, определите значения токов в ветвях, используя следующие методы анализа :

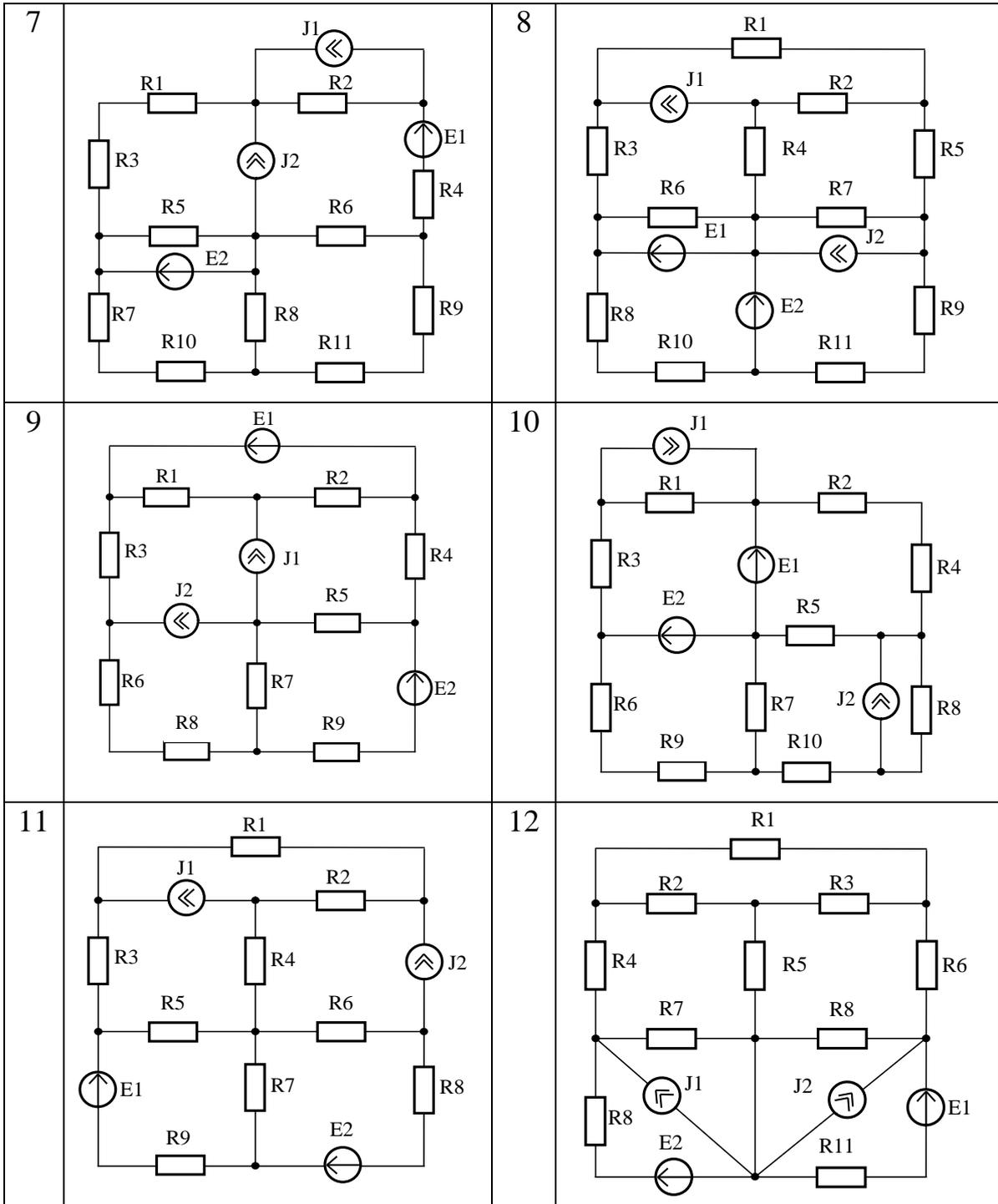
- 1) На основе законов Кирхгофа,
- 2) Метод контурных токов;
- 3) Метод узловых напряжений ;

Сопоставьте вычисленные значения.

Таблица 5.1

Схемы для анализа электрических цепей

№	Схема ЭЦ	№	Схема ЭЦ
1		2	
3		4	
5		6	



5.4 Контрольные вопросы

1. Сформулируйте I-ый закон Кирхгофа. Сколько уравнений необходимо составить по I-ому закону Кирхгофа при анализе электрической цепи.
2. Сформулируйте II -ой закон Кирхгофа. Сколько уравнений необходимо составить по II -ому закону Кирхгофа при анализе электрической цепи.
3. Как изменится система уравнений, составленная по законам Кирхгофа, если в схеме электрической цепи одно из сопротивлений заменить емкостью, а другое – индуктивностью?
4. Как получить из системы уравнений по II -ому закону Кирхгофа систему уравнений по методу контурных токов?
5. Как получить из системы уравнений по I -ому закону Кирхгофа систему уравнений по методу узловых напряжений?

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

6.1 Цель работы

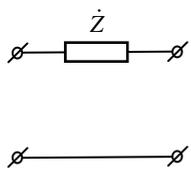
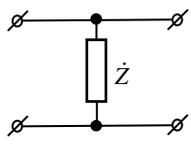
Закрепить знания по частотным характеристикам электрических цепей. Научиться записывать входную и передаточную характеристики линейной электрической цепи. Получить навыки построения в среде MathCad амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик цепи. Исследовать изменение характеристик от частоты.

6.2 А-параметры двухполюсников

Исследуемые четырехполюсники могут быть представлены каскадным соединением двухполюсников, схема и А-параметры которых представлены в таблице 6.1. При каскадном соединении А-параметры составного четырехполюсника получаются произведением А-параметров элементарных четырехполюсников.

Таблица 6.1

А-параметры двухполюсников

Тип двухполюсника	Схема двухполюсника	А-параметры
Последовательный		$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}$
Параллельный		$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\dot{Z}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}$

6.3 Пример анализа частотных характеристик Г-образного четырехполюсника, составленного из сопротивления и индуктивности

Исследуем изменение входной и передаточной характеристики ненагруженной RL-цепи, представленной на рисунке 6.1.

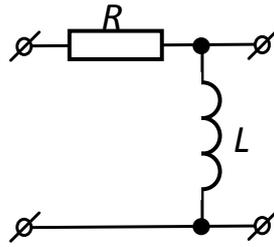


Рис. 6.1 RL- цепь

Параметры цепи, комплексные сопротивления и частотные характеристики описываются выражениями:

- | | |
|--|--|
| $\omega := 0.1, 0.2 \dots 10$ | Диапазон частот, рад/сек |
| $R := 1$ | Сопротивление |
| $L := 1$ | Индуктивность |
| $Z_L(\omega) := i \cdot \omega \cdot L$ | Комплексное сопротивление индуктивности |
| $Z_{in}(\omega) := R + Z_L(\omega)$ | Входное сопротивление |
| $H(\omega) := \frac{Z_L(\omega)}{R + Z_L(\omega)}$ | Передаточная функция ненагруженного четырехполюсника |

Графики характеристик представлены на рисунках 6.1 и 6.2.

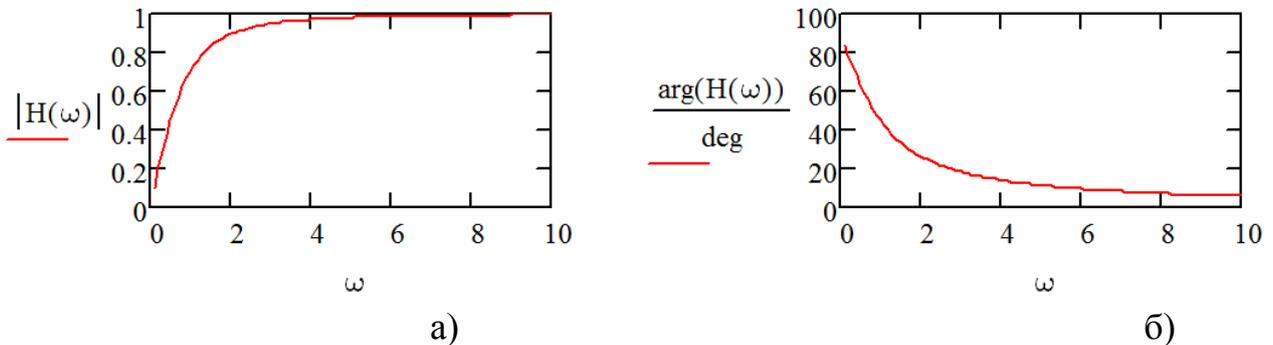


Рис. 6.1 Передаточная функция ненагруженного четырехполюсника
 а) амплитудно-частотная характеристика
 б) фазо-частотная характеристика

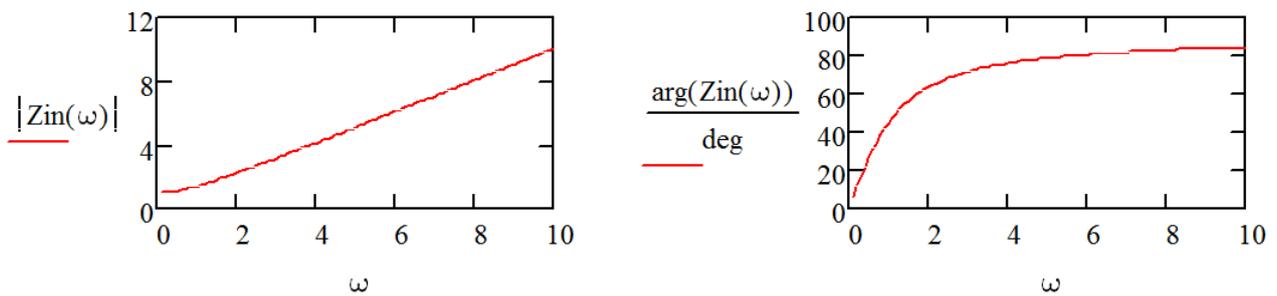


Рис. 6.2 Входная характеристика ненагруженного четырехполюсника
 а) амплитудно-частотная характеристика
 б) фазо-частотная характеристика

Определим передаточную характеристику четырехполюсника через его А-параметры.

$$A_{po}(Z) := \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{pa}(Z) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Описание А-параметров двухполюсников}$$

$$A(\omega, R, L) := A_{po}(R) \cdot A_{pa}(i \cdot \omega \cdot L) \quad \text{Описание каскадного соединения двухполюсников}$$

$$A(\omega, R1, L1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \frac{R1 \cdot i}{L1 \cdot \omega} & R1 \\ -\frac{i}{L1 \cdot \omega} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{А-параметры Г-образного четырехполюсника, составленного из R и L}$$

$$Ku(\omega, R, L) := \frac{1}{A(\omega, R, L)_{0,0}} \quad \text{Коэффициент передачи ненагруженного четырехполюсника}$$

$$Ku1(\omega, R, Rn, L) := \frac{Rn}{A(\omega, R, L)_{0,0} \cdot Rn + A(\omega, R, L)_{0,1}} \quad \text{Коэффициент передачи нагруженного четырехполюсника}$$

Передаточные амплитудно-частотные характеристики ненагруженного четырехполюсника (кривая 1) и при нагрузке 1 и 2 Ом (кривые 3 и 2 соответственно) представлены на рисунке 6.3.

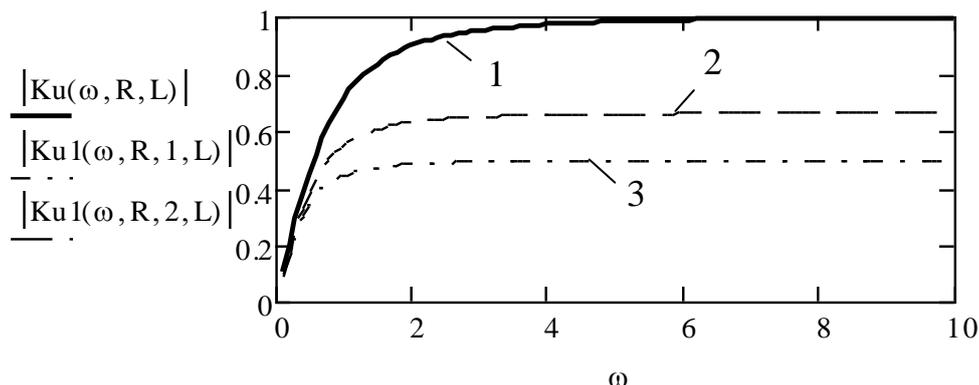


Рис. 6.3

6.3 Индивидуальные задания для самостоятельного решения

Разработать программу, реализующую:

1. Вычисления и построение графиков входной и передаточной характеристик ненагруженного и нагруженного четырехполюсника;
2. Построение годографа;
3. Расчет А-параметров четырехполюсника;
4. Расчет А-параметров составного четырехполюсника, состоящего из K каскадов, K - целое.

Исследовать и сделать выводы:

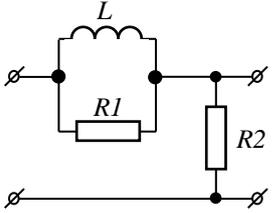
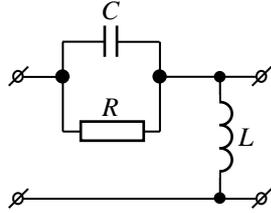
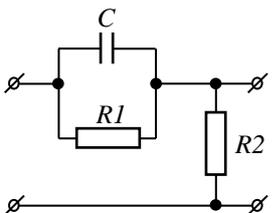
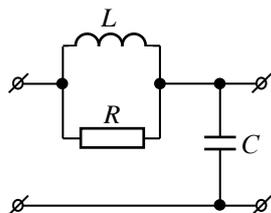
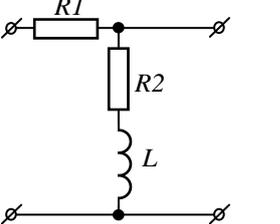
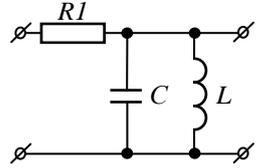
1. О характере изменения входной и передаточной характеристики четырехполюсника в зависимости от значения параметров его элементов;
2. О характере изменения входной и передаточной характеристики составного четырехполюсника в зависимости от числа составляющих его каскадов.
3. Исследования провести как для ненагруженного, так и для нагруженного четырехполюсника.

Схемы четырехполюсников для исследования представлены по вариантам в таблице 6.1.

Таблица 6.1

**Схемы для исследования передаточных характеристик
четырёхполюсников**

№	Схема четырёхполюсника	№	Схема четырёхполюсника
1		2	
3		4	
5		6	
7		8	
9		10	
11		12	
13		14	

15		16	
17		18	
19		20	

6.4 Контрольные вопросы

1. Какая частотная характеристика электрической цепи называется входной?
2. Какая частотная характеристика электрической цепи называется передаточной?
3. Чем определяется частотная характеристика электрической цепи?
4. Какие величины связывают A-параметры четырехполюсника?

7. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ.

7.1 Цель работы

Изучить методы анализа переходных процессов в линейных электрических цепях, познакомиться с функциями MathCad для решения задач анализа.

7.2 Функции MathCad для решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений

Для решения дифференциальных уравнений в пакете MathCAD есть несколько специальных функций. Одна из них **rkfixed**($y_0, t_0, t_k, npoints, D$) использует метод Рунге-Кутты с постоянным шагом для нахождения решения. Параметрами функции являются следующие величины:

y_0 – вектор начальных условий размерности n , где n – порядок дифференциального уравнения или число уравнений в системе. Для дифференциального уравнения первого порядка вектор начальных значений вырождается в одну точку $y_0 = y(t_0)$;

t_0, t_k – граничные точки интервала, для которого находится решение (начальное условие заданное переменной y – это значение решения в точке t_0);

$npoints$ – число точек (не считая начальной точки), в которых отыскивается приближенное решение;

$D(x, y)$ – векторная функция, задающая значение производных неизвестных функций (если решается система уравнений). Для дифференциального уравнения первого порядка векторная функция вырождается в обыкновенную.

Функция **rkfixed** возвращает решение в виде матрицы, первый столбец которой содержит значения независимой переменной, а второй – значения решения.

Функция **Odesolve** предназначена для решения дифференциальных уравнений, линейных относительно старшей производной и записанных в общепринятой математической форме.

Функция решает дифференциальное уравнение методом Рунге-Кутты с фиксированным шагом. Для перехода на автоматический шаг нужно щелкнуть в рабочем документе по имени функции правой кнопкой мыши и выбрать в появившемся меню пункт Adaptive.

Обращение к функции имеет следующий вид

$y := \text{Odesolve}(t, tn, step)$ или $y := \text{Odesolve}(t, tn)$

где y – имя искомой функции $y(t)$;

t – переменная интегрирования;

tn – конец отрезка интегрирования;

step – шаг интегрирования.

Перед функцией **Odesolve** необходимо поместить ключевое слово **Given**, затем ввести дифференциальное уравнение и начальные или граничные условия. В них следует использовать знак логического равенства (<Ctrl>+<=>). В записи производных можно использовать как оператор дифференцирования, так и «штрих» - знак производной (<Ctrl>+<F7>), например,

$$\frac{d}{dt}y(t) \text{ или } y'(t).$$

7.3 Примеры расчета в MathCad

7.3.1 Расчет переходных процессов в электрической цепи 1-го порядка

Определим закон изменения тока в электрической цепи, схема которой представлена на рис. 7.1, при замыкании ключа.

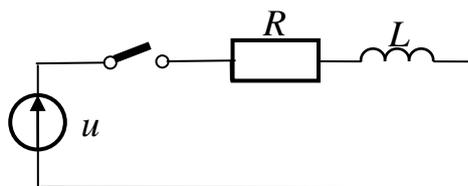


Рис. 7.1

После коммутации (замыкания ключа) изменение тока в электрической цепи описывается дифференциальным уравнением:

$$u = L \frac{di}{dt} + R \cdot i \quad (7.1)$$

Преобразование выражения (7.1) позволяет получить уравнение для решения дифференциального уравнения при помощи функции **rkfixed**:

$$\frac{di}{dt} = (u - R \cdot i) / L$$
$$i \rightarrow x \quad (7.2)$$

$$\frac{dx}{dt} = (u - R \cdot x) / L$$

Листинг программы, реализующей решение дифференциального уравнения для анализа изменения тока в электрической цепи, представлен на рисунке 7.2

```

u := 100           Задаем параметры цепи
R := 1
L := 0.001
y0 := 0           Задаем начальное значение решения (значение тока в
                  цепи в момент замыкания)
D(t,x) :=  $\frac{u - R \cdot x}{L}$    Задаем функцию, определяющую производную
t0 := 0           Задаем начальную и конечную точки расчета по времени
tk := 0.01
n := 500         Число точек расчета
y := rkfixed(y0,t0,tk,n,D)  Находим решение
t1 := y<0>
tok := y<1>

```

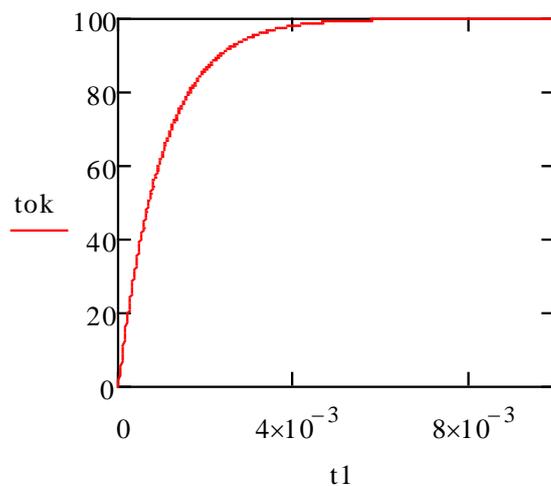


Рис. 7.2 Листинг программы, реализующий анализ переходных процессов с применением функции **rkfixed**

7.3.2 Анализ переходных процессов с применением функции расчета по методу Рунге-Кутты

Определим закон изменения тока в электрической цепи, схема которой представлена на рис. 7.3, при замыкании ключа.

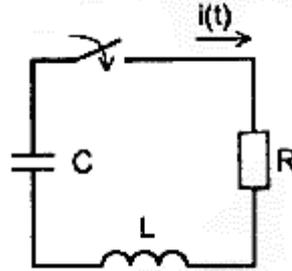


Рис. 7.3

Листинг программы, реализующей анализ переходных процессов по методу Рунге-Кутты, представлен на рисунке 7.4

```

R := 4      L := 1      C := 1
ω0 := 1/√(L·C) = 1      Резонансная частота контура, рад/с
δ := R/(2·L) = 2      Коэффициент затухания контура
Uc0_ := 0.1      Напряжение на емкости и э.д.с источника до коммутации
E := 0      Э.д.с. источника после коммутации
i0_ := 0      Ток в цепи до коммутации
dIdt := (E - Uc0_ - R·i0_)/L = -0.1      Производная тока после коммутации
Given
      Дифференциальное уравнение
d²I(t)/dt² + R/L · dI(t)/dt + 1/(C·L) · I(t) = 0
I(0) = i0_      I'(0) = dIdt
tn := 20      Конец отрезка интегрирования
N := 1000      Количество точек
I := Odesolve(t, tn)

```

Рис. 7.4

На рисунке 7.5 представлен график изменения тока в электрической цепи после коммутации.

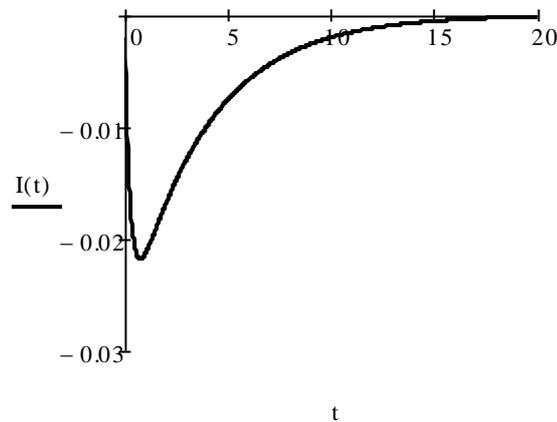


Рис.7.5

7.2.3 Анализ переходных процессов с применением метода переменных состояния.

В основу метода переменных состояния положена возможность замены дифференциального уравнения n -го порядка электрической цепи n дифференциальными уравнениями первого порядка. При этом в качестве переменных состояния принимаются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях, которые однозначно определяют запас энергии цепи в любой момент времени. Для линейных цепей система уравнений состояния также линейна и может быть записана в виде набора дифференциальных уравнений первого порядка, которые можно представить в виде матричного уравнения:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + BV(t) = Ax + F(t), \quad (7.3)$$

где $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ - вектор-столбец n переменных состояния;

$\dot{x} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n]^T$ - вектор-столбец n первых производных переменных состояния;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \text{квадратная матрица размером } (n \times n),$$

элементы которой определяются коэффициентами дифференциального уравнения цепи;

$V(t)$ - вектор-столбец m независимых воздействий;

B - матрица размером $(n \times m)$, элементы которой зависят от независимых воздействий, структуры и параметров цепи.

Рассмотрим формирование матричного уравнения (7.3) на примере электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 7.6

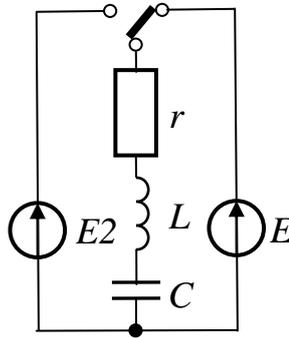


Рис.7.6

Работа электрической цепи описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} E2 = r \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_c(t) \\ u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} i(t) dt \end{cases} \quad (7.4)$$

Выражение (7.4) может быть преобразовано к виду:

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \left(\frac{-r}{L}\right) \cdot i(t) + \left(\frac{-1}{L}\right) u_c(t) + \frac{E2}{L} \\ \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \end{cases} \quad (7.5)$$

В матричной форме система уравнений (7.5) описывается выражением (7.6)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-r}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E2}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Листинг программы, реализующей анализ переходных процессов с применением метода переменных состояния, представлен на рисунке 7.7 и 7.8.

```

ORIGIN := 1
r := 1000    L := 0.1    C := 10-7    ω := 104

e1(t) := 100·√2·sin(ω·t + 45·deg)    E2 := 100

Расчет независимых начальных условий

x1 := ω·L    xc := 1 / (ω·C)

Zc := -i·xc = -i × 103

Z := r + i·x1 - i·xc = 1 × 103

E1 := 100·ei·45·deg = 70.711 + 70.711i

I := E1 / Z = 0.071 + 0.071i    |I| = 0.1    arg(I) / deg = 45

UC := I·Zc = 70.711 - 70.711i    |UC| = 100    arg(UC) / deg = -45

i(t) := |I|·√2·sin(ω·t + arg(I)) → 0.099999999999999989478·√2·sin(10000·t + 0.78539816339744821062)

uc(t) := |UC|·√2·sin(ω·t + arg(UC)) → 99.999999999999993721·√2·sin(10000·t - 0.78539816339744840861)

i(0) = 0.1    uc(0) = -100

Вектор начальных условий    x := ( i(0)
      uc(0) )

Вектор правых частей уравнений    F(t,x) := [ ( (-r/L)·x1 + (-1/L)·x2 + 1/L·E2
      1/C·x1 ]

```

Рис. 7.7 Фрагмент листинга программы, реализующей анализ переходных процессов методом переменных состояний

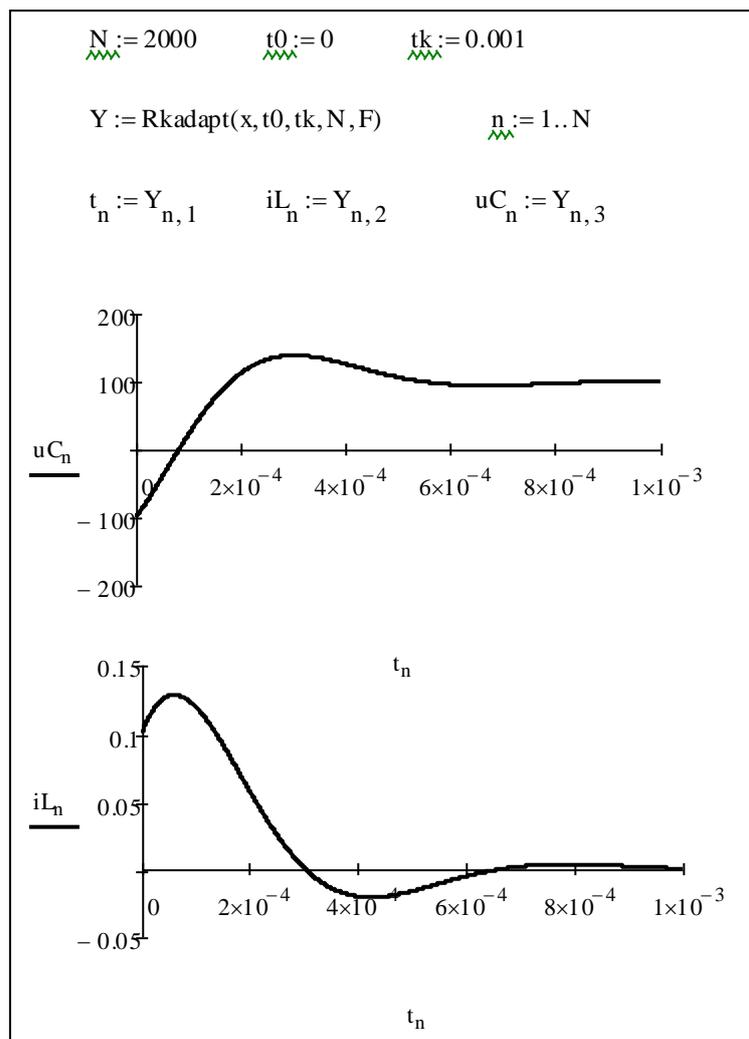


Рис. 7.8 Фрагмент листинга программы, реализующей анализ переходных процессов методом переменных состояний

7.3 Индивидуальные задания для самостоятельного решения

1. Выполнить анализ переходного процесса с применением функция **rkfixed** для электрической цепи, схема которой представлены в таблице 7.1 в соответствии с номером варианта, а параметры указаны в таблице 7.2.
2. Замените сопротивление, указанное преподавателем, на реактивный элемент, который в схеме отсутствует. Электрическая цепь становится цепью 2го порядка.
3. Выполните анализ преобразованной схемы по методам Рунге-Кутта и переменных состояния. Сопоставьте полученные результаты. Пример анализа переходных процессов в цепях 2-го порядка представлен в приложении Б.

Таблица 7.1

Схемы для исследования переходных процессов

№	Вид функции	№	Вид функции
1		2	
3		4	
5		6	
7		8	

9		10	
11		12	
13		14	
15		16	

Таблица 7.2

Параметры элементов схемы

Вариант	$E, В$	$J, А$	$L, мГн$	$C, мкФ$	$R1, Ом$	$R2, Ом$	$R3, Ом$	$R4, Ом$	Найти	Ключ S
1	12	-	1	-	20	20	40	20	u_L	3
2	-	2	-	10	40	20	10	30	u_C	p
3	10	-	1	-	10	10	25	25	i_L	3
4	-	4	2	-	6	6	3	6	i_2	p
5	15	-	-	10	50	50	25	25	i_C	3
6	-	6	2	-	3	3	3	3	i_1	p
7	12	-	-	5	40	50	20	40	u_C	3
8	-	8	1	-	2	4	4	2	u_L	p
9	50	-	-	5	20	30	35	15	i_C	3
10	-	10	-	5	10	30	35	5	u_C	p
11	80	-	10	-	20	60	60	40	u_3	3
12	-	12	-	5	12	3	6	3	i_4	p
13	10	-	10	-	40	40	20	40	u_L	3
14	-	2	-	2	2	4	4	3	i_1	p
15	16	-	-	10	20	60	50	30	u_4	3
16	-	4	1	-	1	3	4	2	i_4	p

Примечание: P — ключ S размыкается; 3 — ключ S замыкается.

8. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Отчет по лабораторной работе сопровождается MathCad-файлом.
Шаблон оформления титульной листа отчета по лабораторной работе представлен в Приложении А.

Требования к содержанию отчета:

- постановка задачи
- предварительные расчеты, если таковые необходимы
- листинг программы
- результаты исследований с анализом полученным данных (выводы).

9. ЛИТЕРАТУРА

1. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов,инженеров и конструкторов. - СПб. : БХВ-Петербург, 2007. - 356с.
2. Дьяконов В. Mathcad 2001 : Учеб.курс. - СПб. : ПИТЕР, 2001. - 621с.
3. Дьяконов В.П. Энциклопедия Mathcad 2001i и Mathcad 2001 11. - М. : Солон-Пресс, 2004. - 831с.
4. Фриск В.В. Основы теории цепей : Расчеты и моделирование с помощью пакета компьютерной математики Mathcad:Учеб.пособие для вузов. - М. : Солон-Пресс, 2006. - 85с.
5. Черняк А.А. Высшая математика на базе Mathcad.Общий курс : Учеб.пособие для вузов. - СПб. : БХВ-Петербург, 2004. - 593с.
6. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad 14. - СПб. : Питер, 2007. – 591
7. Ивановский Р.И. Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем Mathcad PRO : Учеб.пособие. - М. : Высшая школа, 2003. – 430
8. Охорзин В. А. Прикладная математика в системе MATHCAD : учеб. пособие для вузов / В. А. Охорзин. - 3-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2009. – 348
9. Каганов В.И. Радиотехника+компьютер+Mathcad : Учеб.пособие для вузов,обуч.по спец."Радиотехника". - М. : Горячая линия-Телеком, 2001. – 412

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Пример оформления титульного листа отчета по лабораторной работе

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Институт электронных и информационных систем

Кафедра радиосистем

РАСЧЕТ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПАРАМЕТРОВ СОЕДИНЕНИЙ
ПАССИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
Отчет по заданию №1 по дисциплине «Основы теории цепей»
Направления подготовки 11.03.01 «Радиотехника»

Проверил:

_____ И.Н.Жукова
«___» _____ 201__ г.

Выполнил:

Студент группы _____
_____ А.О.Сидоров
«___» _____ 201__ г.

Великий Новгород
201_

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Пример анализа переходных процессов в цепи второго порядка

Постановка задачи: получить выражение мгновенного значения тока в индуктивности в цепи постоянного тока, представленной на рисунке П.Б.1.

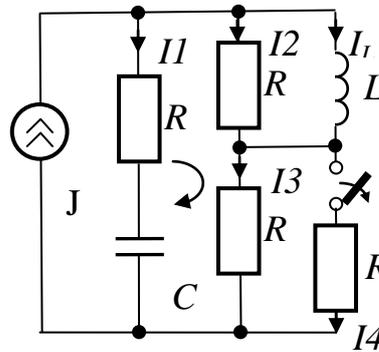


Рис. П.Б.1

Вариант решения 1

Получим дифференциальное уравнение электрической цепи для тока в индуктивности.

Запишем уравнение баланса напряжений контура, состоящего из R_1, L, R_3, C , для цепи после коммутации.

$$-R_1 I_1 + L \frac{dI_L}{dt} + R_3 I_3 - \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} I_1 dt = 0 \quad (\text{Б.1})$$

После дифференцирования выражение (Б.1) преобразуется к виду

$$-R_1 \frac{dI_1}{dt} + L \frac{d^2 I_L}{dt^2} + R_3 \frac{dI_3}{dt} - \frac{I_1}{C} = 0 \quad (\text{Б.2})$$

Из уравнений баланса токов: $I_3 = I_2 + I_L$ и $J = I_1 + I_2 + I_L$, откуда $I_1 = J - I_2 - I_L$.

После подстановки в (Б.2) получаем

$$\begin{aligned} & -R_1 \frac{d(J - I_2 - I_L)}{dt} + L \frac{d^2 I_L}{dt^2} + R_3 \frac{d(I_2 + I_L)}{dt} - \frac{J - I_2 - I_L}{C} = 0 \\ & -R_1 \frac{dJ}{dt} + R_1 \frac{dI_2}{dt} + R_1 \frac{dI_L}{dt} + L \frac{d^2 I_L}{dt^2} + R_3 \frac{dI_2}{dt} + R_3 \frac{dI_L}{dt} - \frac{J - I_2 - I_L}{C} = 0 \\ & \frac{dJ}{dt} = 0, \text{ поскольку в схеме включен источник постоянного тока.} \end{aligned}$$

$$L \frac{d^2 I_L}{dt^2} + (R_1 + R_3) \frac{dI_L}{dt} + (R_1 + R_3) \frac{dI_2}{dt} - \frac{J - I_2 - I_L}{C} = 0 \quad (\text{Б.3})$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_L}{R_2} = \frac{L}{R_2} \cdot \frac{dI_L}{dt}$$

После подстановки I_2 в (Б.3) имеем

$$L \frac{d^2 I_L}{dt^2} + (R_1 + R_3) \frac{dI_L}{dt} + (R_1 + R_3) \frac{d\left(\frac{L}{R_2} \cdot \frac{dI_L}{dt}\right)}{dt} - \frac{J - \frac{L}{R_2} \cdot \frac{dI_L}{dt} - I_L}{C} = 0$$

$$\left(L + \frac{L}{R_2} \cdot (R_1 + R_3)\right) \frac{d^2 I_L}{dt^2} + \left(R_1 + R_3 + \frac{L}{CR_2}\right) \frac{dI_L}{dt} + \frac{1}{C} I_L - \frac{J}{C} = 0$$

$$\frac{L}{R_2} (R_1 + R_2 + R_3) \frac{d^2 I_L}{dt^2} + \left(R_1 + R_3 + \frac{L}{CR_2}\right) \frac{dI_L}{dt} + \frac{1}{C} I_L - \frac{J}{C} = 0 \quad (\text{Б.4})$$

Выражение (Б.4) описывает искомое дифференциальное уравнение относительно тока в индуктивности электрической цепи.

Для расчета средствами MathCad изменения тока в индуктивности необходимо определить в момент коммутации мгновенное значение тока, а также значение его производной. По закону коммутации ток в индуктивности сразу после коммутации равен значению тока до коммутации,

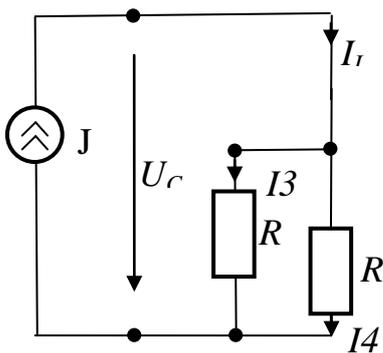


Рис. П.Б.2

Рассмотрим цепь до коммутации. Отметим, что в цепи постоянного тока емкость образует разрыв цепи, а идеальная индуктивность – короткое замыкание. Поэтому схема с рисунка П.Б.1 преобразуется к виду, представленному на рисунке Б.2.

$$I_L(0_-) = J$$

$$U_c(0_-) = J \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$$

Найдем производную тока в индуктивности в цепи сразу после коммутации.

Перепишем выражение (Б.1) в виде

$$-R_1 I_1 + L \frac{dI_L}{dt} + R_3 I_3 - U_c(0_-) = 0$$

Сделаем подстановки

$$-R_1 \left(J - \frac{L}{R_2} \cdot \frac{dI_L}{dt} - I_L(0_-) \right) + L \frac{dI_L}{dt} + R_3 \left(\frac{L}{R_2} \cdot \frac{dI_L}{dt} + I_L(0_-) \right) - U_c(0_-) = 0$$

$$-R_1 J + R_1 \frac{L}{R_2} \cdot \frac{dI_L}{dt} + R_1 I_L(0_-) + L \frac{dI_L}{dt} + R_3 \frac{L}{R_2} \cdot \frac{dI_L}{dt} + R_3 I_L(0_-) - U_c(0_-) = 0$$

$$\left(L + R1 \frac{L}{R2} + R3 \frac{L}{R2} \right) \cdot \frac{dI_L}{dt} + R3 I_L(0_-) - U_c(0_-) = 0 \quad (\text{Б.5})$$

Отметим, что $-R1J + R1I_L(0_-) = 0$

Из выражения (Б.5) видно, что $\frac{dI_L}{dt} = \frac{U_c(0_-) - R3I_L(0_-)}{\frac{L}{R2}(R1 + R2 + R3)}$

Реализация расчета тока в индуктивности в среде MathCad представлен на рисунке П.Б.3

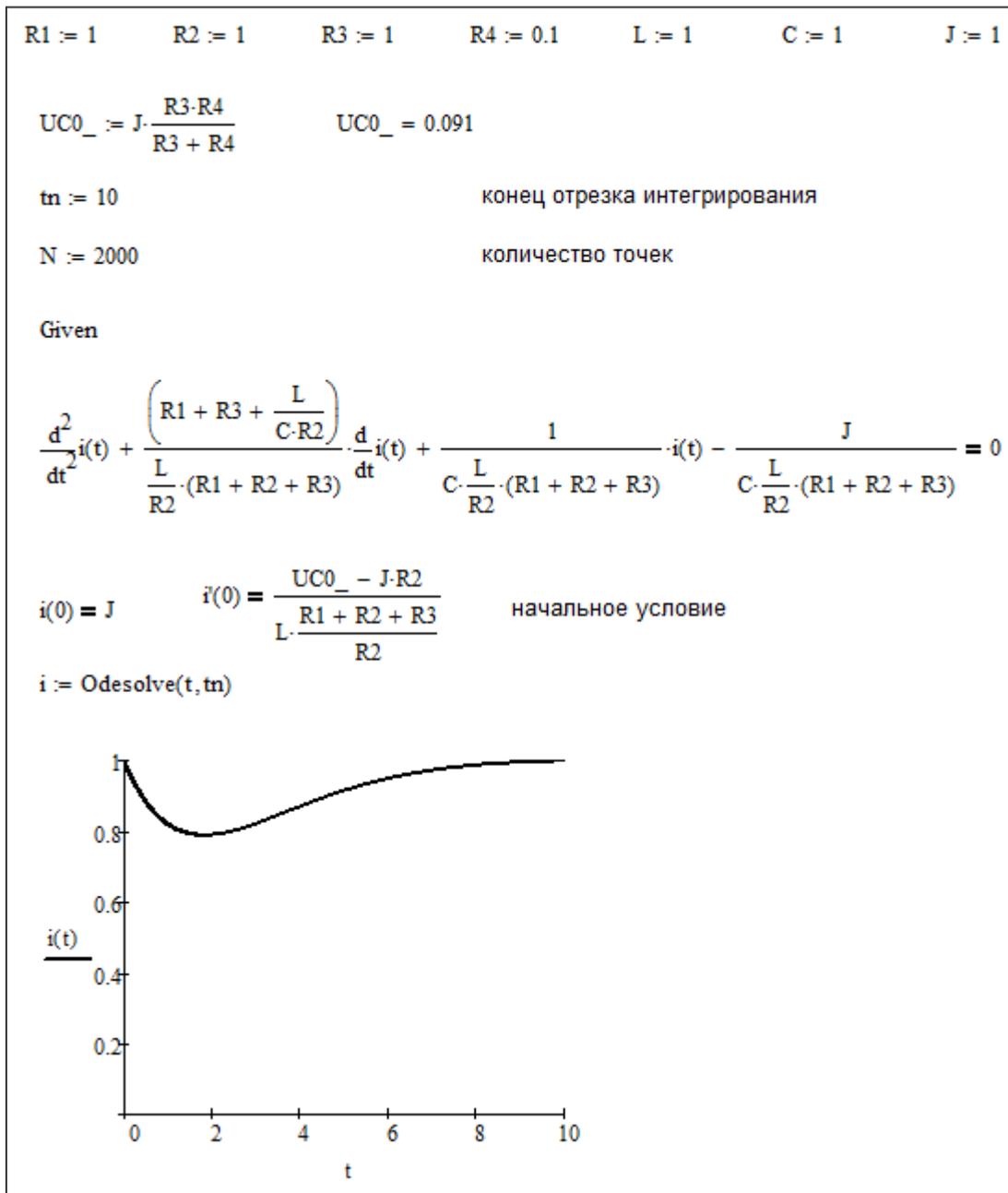


Рис. П.Б.3

Вариант решения 2

Выполним анализ переходных процессов на основе метода переменных состояний.

Получим выражения относительно производных тока в индуктивности и напряжения на емкости цепи после коммутации.

Из выражения (Б.1)

$$L \frac{dI_L}{dt} = U_C + R_1 I_1 - R_3 I_3 \quad (\text{Б.6})$$

$$I_1 = J - I_L - I_2 = J - I_L - \frac{U_2}{R_2} = J - I_L - \frac{L}{R_2} \frac{dI_L}{dt}$$

$$I_3 = I_L + I_2 = I_L + \frac{L}{R_2} \frac{dI_L}{dt}$$

После подстановки I_1, I_3 в (Б.6) имеем

$$L \frac{dI_L}{dt} = U_C + R_1 \left(J - I_L - \frac{L}{R_2} \frac{dI_L}{dt} \right) - R_3 \left(I_L + \frac{L}{R_2} \frac{dI_L}{dt} \right)$$

$$\frac{L}{R_2} (R_1 + R_2 + R_3) \frac{dI_L}{dt} = U_C - (R_1 + R_3) I_L + R_1 J$$

$$\frac{dI_L}{dt} = - \frac{(R_1 + R_3)}{\frac{L}{R_2} (R_1 + R_2 + R_3)} I_L + \frac{1}{\frac{L}{R_2} (R_1 + R_2 + R_3)} U_C + \frac{R_1 J}{\frac{L}{R_2} (R_1 + R_2 + R_3)}$$

Таким образом, получено первое выражение для системы уравнений по методу переменных состояний.

Получим второе выражение.

Перепишем выражение (Б.1) в виде

$$-R_1 C \frac{dU_C}{dt} + R_2 I_2 + R_3 I_3 - U_C = 0$$

$$I_2 = J - I_1 - I_L, \quad I_3 = J - I_1,$$

$$-R_1 C \frac{dU_C}{dt} + R_2 I_2 + R_3 I_3 - U_C = 0$$

$$-R_1 C \frac{dU_C}{dt} + R_2 (J - I_1 - I_L) + R_3 (J - I_1) - U_C = 0$$

$$-R_1 C \frac{dU_c}{dt} + R_2 \left(J - C \frac{dU_c}{dt} - I_L \right) + R_3 \left(J - C \frac{dU_c}{dt} \right) - U_c = 0$$

$$-R_1 C \frac{dU_c}{dt} + R_2 J - CR_2 \frac{dU_c}{dt} - R_2 I_L + R_3 J - CR_3 \frac{dU_c}{dt} - U_c = 0$$

$$-(R_1 + R_2 + R_3) C \frac{dU_c}{dt} - R_2 I_L + (R_2 + R_3) J - U_c = 0$$

$$\frac{dU_c}{dt} = -\frac{R_2}{(R_1 + R_2 + R_3)C} I_L - \frac{1}{(R_1 + R_2 + R_3)C} U_c + \frac{(R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2 + R_3)C} J$$

Искомая система уравнений переменных состояния представлена в виде

$$\begin{bmatrix} \frac{dI_L}{dt} \\ \frac{dU_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_3}{\frac{L}{R_2}(R_1 + R_2 + R_3)} & \frac{1}{\frac{L}{R_2}(R_1 + R_2 + R_3)} \\ -\frac{R_2}{(R_1 + R_2 + R_3)C} & -\frac{1}{(R_1 + R_2 + R_3)C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_L \\ U_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_1 J}{\frac{L}{R_2}(R_1 + R_2 + R_3)} \\ \frac{(R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2 + R_3)C} J \end{bmatrix}$$

Реализация расчета в среде MathCad представлена на рисунке П.Б.4

ORIGIN := 1

Вектор начальных условий $x := \begin{pmatrix} J \\ UC0_ \end{pmatrix}$

Вектор правых частей уравнений

$$F(t,x) := \begin{bmatrix} -\left[\frac{R1 + R3}{\frac{L}{R2} \cdot (R1 + R2 + R3)}\right] \cdot x_1 + \left[\frac{1}{\frac{L}{R2} \cdot (R1 + R2 + R3)}\right] \cdot x_2 + \frac{R1 \cdot J}{\frac{L}{R2} \cdot (R1 + R2 + R3)} \\ -\left[\frac{R2}{C \cdot (R1 + R2 + R3)}\right] \cdot x_1 + \left[\frac{-1}{C \cdot (R1 + R2 + R3)}\right] \cdot x_2 + \frac{J \cdot (R2 + R3)}{C \cdot (R1 + R2 + R3)} \end{bmatrix}$$

N := 2000 t0 := 0 tk := 10

Y := Rkadapt(x, t0, tk, N, F) n := 1..N

t1_n := Y_n,1 iL_n := Y_n,2 uC_n := Y_n,3

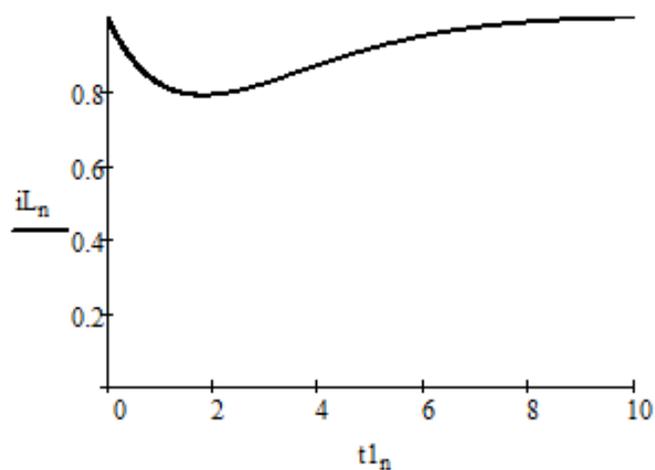


Рис. П.Б.4

Вариант решения 3

Выполним анализ переходных процессов операторным методом.

Операторная схема замещения электрической цепи после коммутации представлена на рисунке П.Б.5.

Получим изображение по Лапласу тока в индуктивности. Для этого составим систему уравнения, например, по методу контурных токов.

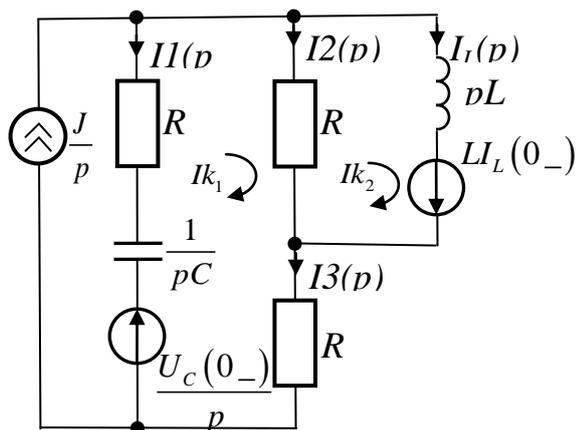


Рисунок П.Б.5

$$\begin{bmatrix} \left(R1 + R2 + R3 + \frac{1}{pC} \right) & -R2 \\ -R2 & (R2 + pL) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Ik_1 \\ Ik_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_c(0_-)}{p} + \frac{J}{p} \left(R1 + \frac{1}{pC} \right) \\ LI_L(0_-) \end{bmatrix}$$

Отметим, что $I_L(p) = Ik_2$

Операторное изображение тока в индуктивности находится в среде MathCAD согласно выражениям, представленным на рисунке П.Б.6.

$$A1(p) := \begin{pmatrix} R1 + R2 + R3 + \frac{1}{p \cdot C} & -R2 \\ -R2 & R2 + p \cdot L \end{pmatrix} \quad B1(p) := \begin{bmatrix} \frac{UC0_-}{p} + \frac{J}{p} \cdot \left(R1 + \frac{1}{p \cdot C} \right) \\ L \cdot IL0_- \end{bmatrix}$$

$$Ik(p) := \text{Isolve}(A1(p), B1(p))$$

$$Ik(p)_2 \rightarrow \frac{2.090909090909091 \cdot p + 3.0 \cdot p^2 + 1.0}{p \cdot (3 \cdot p^2 + 3 \cdot p + 1)}$$

Рис. П.Б.6.

Оригинал тока в индуктивности найдем, воспользовавшись теоремой разложения. Порядок действий, выполняемых для этого в среде MathCad, представлен на рисунке П.Б.7.

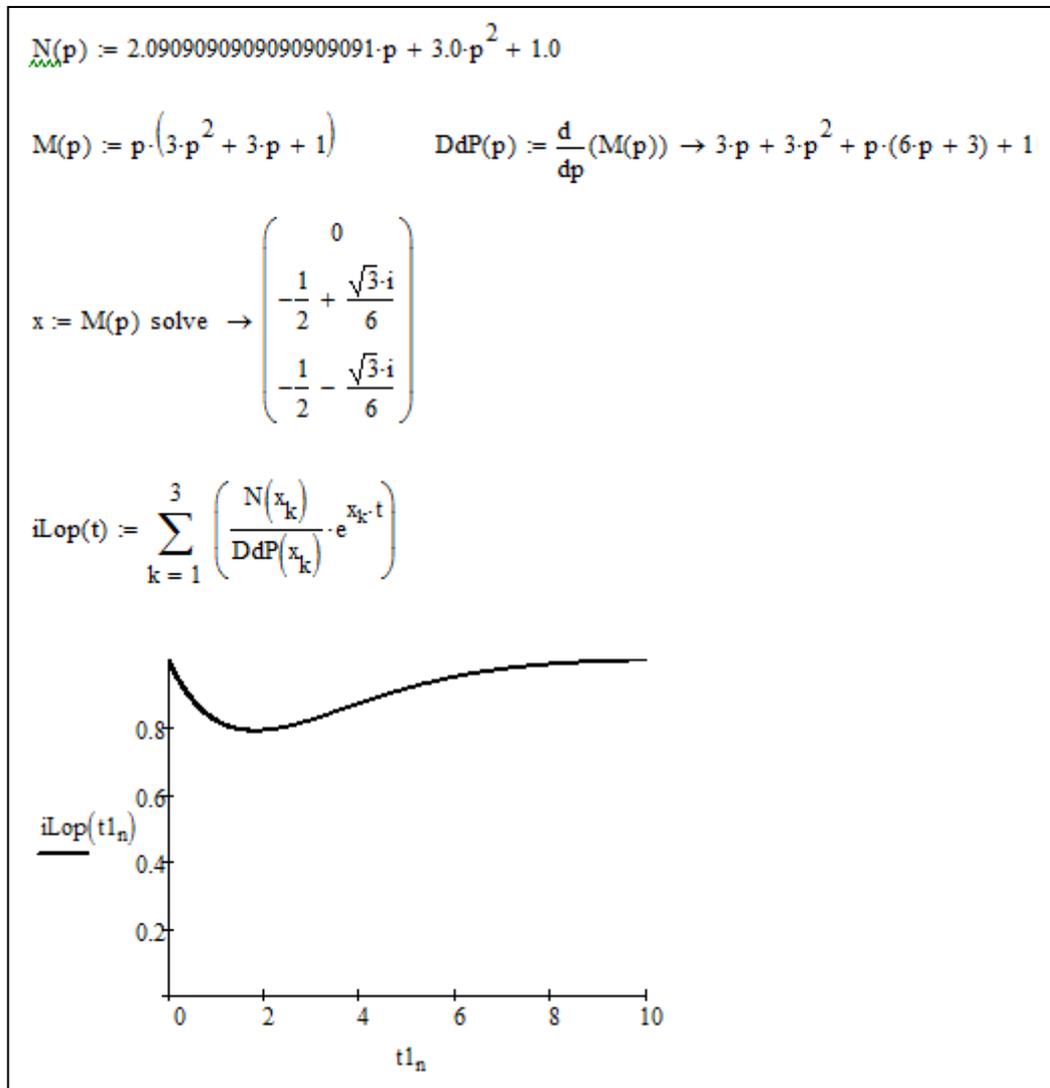


Рис. П.Б.7.

Учебное издание

**РАСЧЕТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

Сборник заданий для практическим занятий по «Основам теории цепей»
для направления подготовки 11.03.01 – Радиотехника

Учебное пособие

Составитель
Жукова Ирина Николаевна