

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего профессионального образования
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого

Теоретические основы цифровой обработки сигналов

Новгород

2011

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего профессионального образования

Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого
Институт электронных и информационных систем

Кафедра радиосистем

Чеботарев Д.В

Теоретические основы цифровой обработки сигналов

Конспект лекций

Новгород
2011

УДК 621.39
ББК

Теоретические основы цифровой обработки сигналов:
Конспект лекций / сост. Д.В. Чеботарев, / ФГБОУ «Новгородский
государственный университет им. Ярослава Мудрого», Великий
Новгород, Изд. 2-е, 2011г. - 63 с.

В пособии представлен материал конспекта лекций
«Цифровая обработка сигналов».

Учебное пособие отвечает новым образовательным
стандартам и предназначено для подготовки бакалавров по
направлению 210300.62 "Радиотехника".

© Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего профессионального образования
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого, 2011

Содержание

Основные теоретические направления ЦОС	5
Основные области применения ЦОС	6
Элементная база ЦОС	7
Сравнительная характеристика цифровой и аналоговой обработки...8	
Теория дискретных линейных систем	9
Последовательности (дискретные сигналы)	9
Линейные системы с постоянными параметрами (ЛПП)	10
Разностные уравнения	12
ЛПП-системы первого порядка	13
ЛПП-системы второго порядка	15
Дискретный ряд Фурье	16
Соотношение между дискретными и непрерывными системами	17
Z-преобразование	18
Обратное Z-преобразование	19
Свойства Z-преобразования	22
Одностороннее Z -преобразование	22
Решение РУ с помощью Z-преобразования	23
Дискретное преобразование Фурье	24
Связь Z-преобразования и ДПФ	25
Свойства ДПФ	27
Свертка последовательностей	28
Секционированные свертки	32
Цифровые фильтры	33
Структурные схемы рекурсивных фильтров	33
Структурные схемы нерекурсивных ЦФ	35
Общая характеристика КИХ-фильтров	41
Проектирование КИХ-фильтров методом взвешивания	45
Основные виды окон	47
Проектирование оптимальных КИХ-фильтров	49
Сравнение КИХ ФНЧ, спроектированных разными методами	53
Обзор аналоговых ФНЧ-прототипов	58

Основные теоретические направления ЦОС

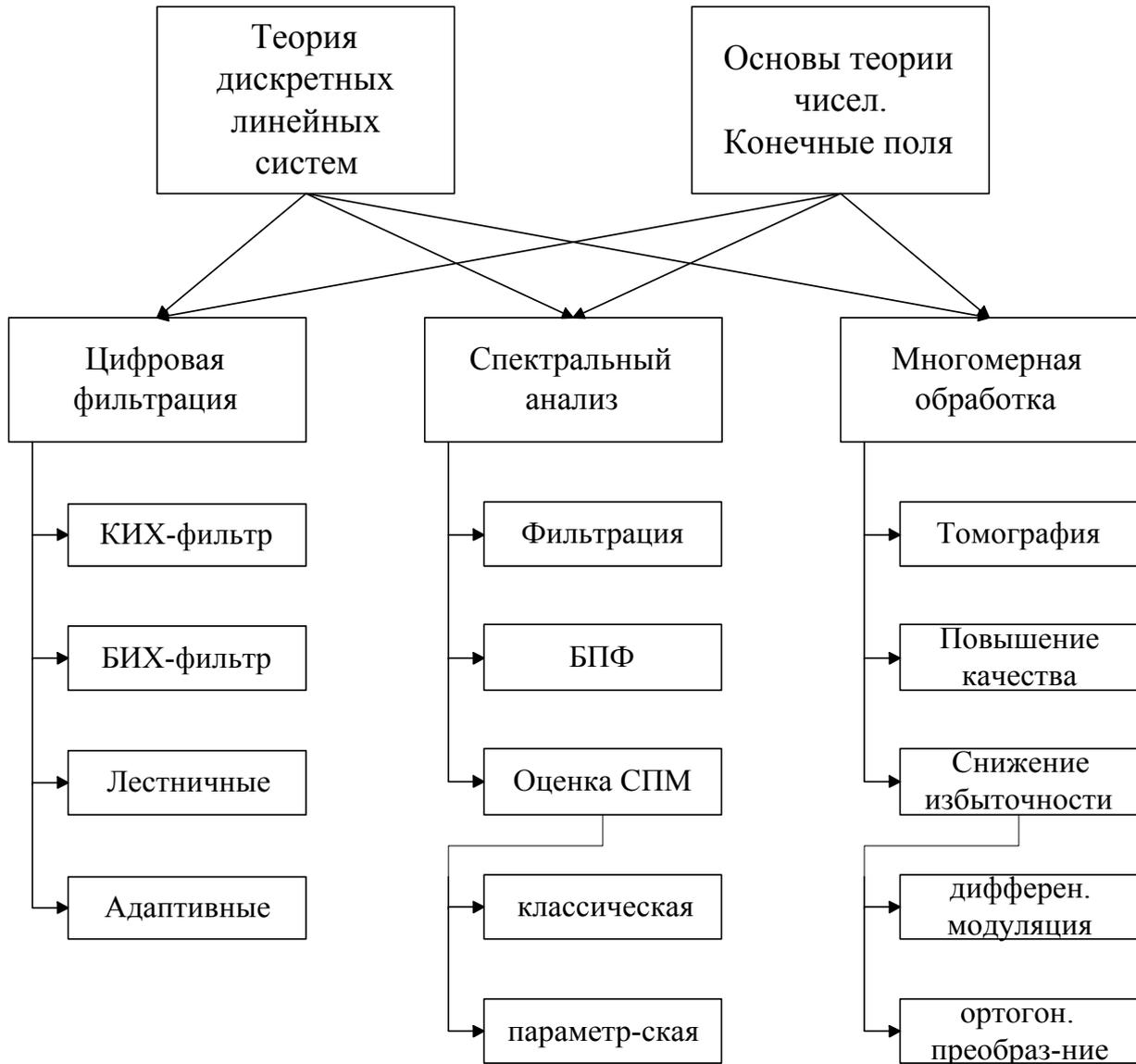


Рисунок 1

Основные области применения ЦОС

Общетехнические применения	Управление
Цифровая фильтрация Свертка Корреляция Преобразование Гильберта Быстрое преобразование Фурье Адаптивная фильтрация Генерация сигналов Кодирование - декодирование	Сервоуправление Управление дисками ЭВМ Управление роботами Управление принтерами Управление двигателями и турбинами Управление автомобилем
Военная техника	Графика / изображение
Засекреченная связь Радиолокация Обработка изображений Навигация Радиомодемы Управление ракетами Радиоразведка Гидроакустика	Зрение роботов Компрессия и передача изображений Распознавание образов Повышение качества изображения Гомоморфная обработка Трехмерные вращения Оснащение рабочих станций Работа с цифровыми картами
Обработка речи	Инструментарий
Кодирование речи Распознавание речи Верификация диктора Повышение качества речи Синтез речи Системы "речь - текст" Говорящая почта	Спектральный анализ Генерация функций Анализ сейсмограмм Цифровая фильтрация Синтез моделей Временной анализ Анализ вибраций Фазовая синхронизация
Автомобили	Медицина
Адаптивное управление движением Команды голосом Анализ вибраций Контроль двигателя Навигация Цифровое радио Сотовая телефония Глобальная ориентация	Ультразвуковое оборудование Диагностический инструментарий Мониторинг больных Слуховые приборы Протезирование Определение плода
Связь	
Компенсаторы эхо Модемы Транс мультимплексоны Интеллектуальные мультимплексоны Адаптивные корректоры Шифрование данных	Видео-конференц. связь Цифровое радио Сотовая телефония Громкоговорящая связь Интерполяция Пакетная коммутация

Линейные ретрансляторы Факсимильные платы	Широкополосная связь
Промышленность	Другие применения
Робототехника Цифровое управление Засекреченный доступ Контрольная аппаратура для ЛЭП	Синтезаторы музыки Игрушки и игры Цифровое вещание и телевидение

Элементная база ЦОС

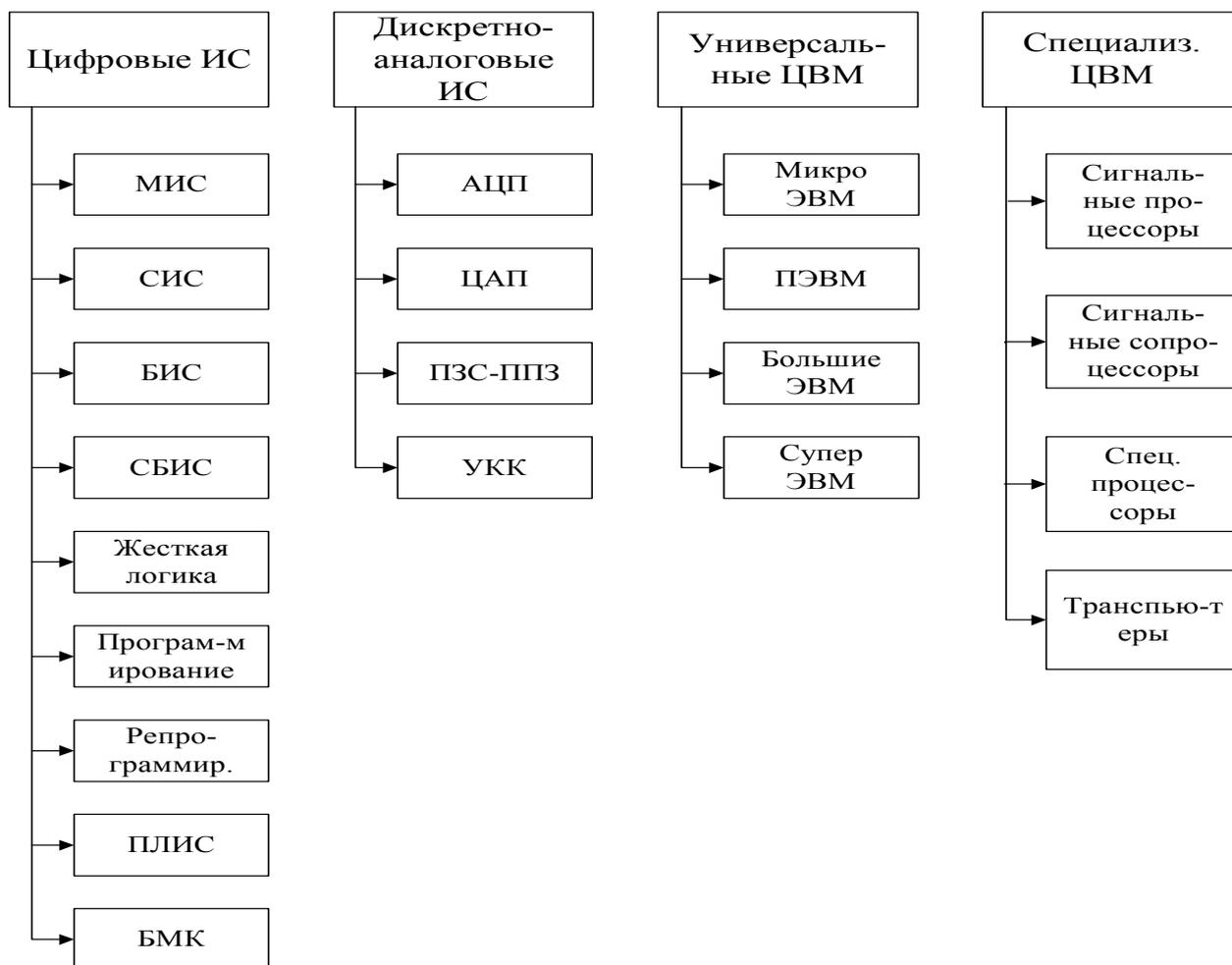


Рисунок 2

Сравнительная характеристика цифровой и аналоговой обработки

Преимущества	Недостатки
<ol style="list-style-type: none">1. Высокая помехоустойчивость (возможность регенерации сигнала).2. Высокая точность.3. Большой динамический диапазон.4. Универсальность методов и аппаратуры.5. Гибкость (Возможность программной перестройки).6. Стабильность параметров.7. Высокая степень интеграции.	<ol style="list-style-type: none">1. Большие требования к быстродействию (ширине полосы частот).2. Сложность методов и аппаратуры.3. Высокая скорость морального старения.4. Большая мощность потребления энергии.5. Наличие погрешностей дискретизации и шумов квантования-.

Теория дискретных линейных систем

Последовательности (дискретные сигналы)

Дискретное время (отсчеты, выборки):

$$t = nT, \quad T\text{-интервал дискретизации,}$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

Обозначение:

$$x(nT),$$

или $x(n), \quad N_1 \leq n \leq N_2 .$

Способы представления:

1. Набор чисел: 0, 0.5, 0.25, 0.125.. .
2. Аналитически: $x(n) = 1/2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
3. Рекуррентно: $x(n) = x(n-1)/2, \quad x(0) = 1.$
4. Графически:

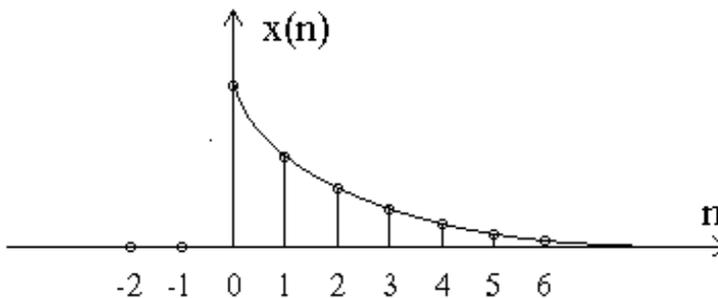


Рисунок 3

Представление произвольных последовательностей:

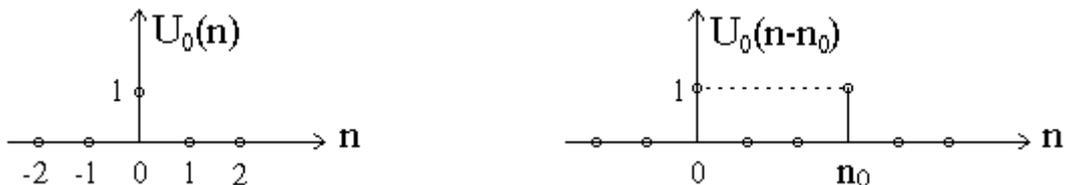


Рисунок 4

если задана $a(n), \quad -\infty < n < \infty$

$$\text{то } a(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)u_0(n - m)$$

$U_{-1}(n)$ - единичный скачок

Линейные системы с постоянными параметрами (ЛПП)

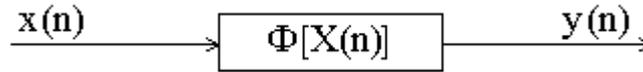


Рисунок 5

Линейность:

если $x_1(n) \Rightarrow y_1(n)$
 $x_2(n) \Rightarrow y_2(n)$
 то $x_3(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \Rightarrow y_3(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$

Система с постоянными параметрами:

если $x_1(n) \Rightarrow y_1(n)$
 то $x_2(n) = x_1(n - n_0) \Rightarrow y_2(n) = y_1(n - n_0)$ при любых n_0 .

Для ЛПП-систем:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot h(n - m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot h(n - m),$$

где $h(\cdot)$ - отклик на $U_0(n)$,
 $*$ - свертка.

Примеры дискретных сверток:

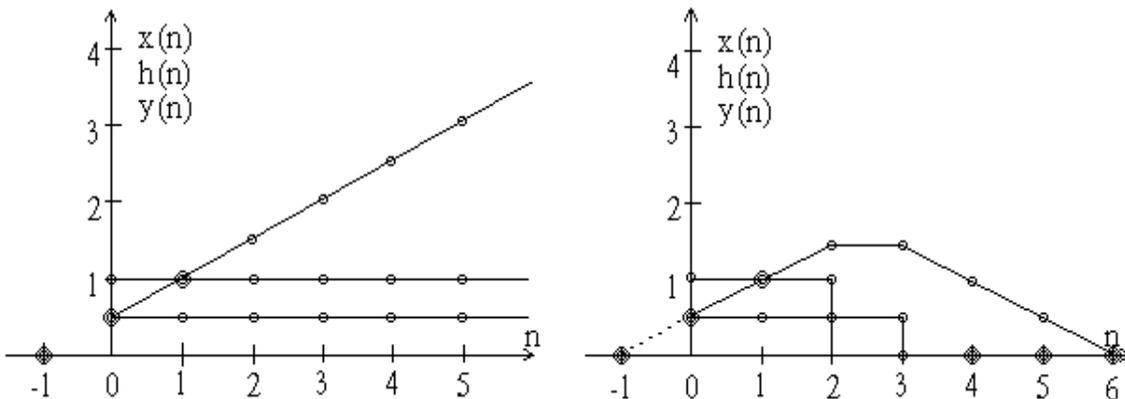
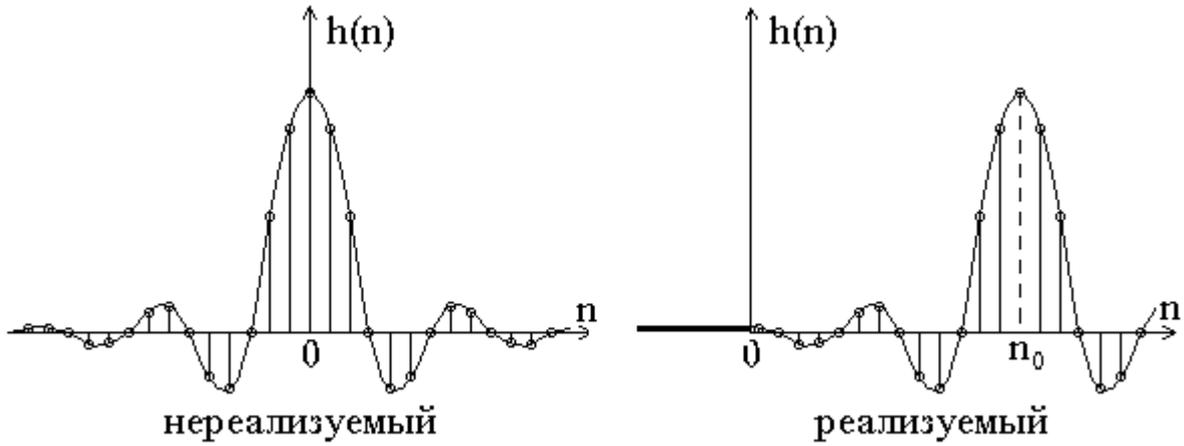


Рисунок 6

Физическая реализуемость:
 $h(n)=0$, при $n<0$



Устойчивость:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

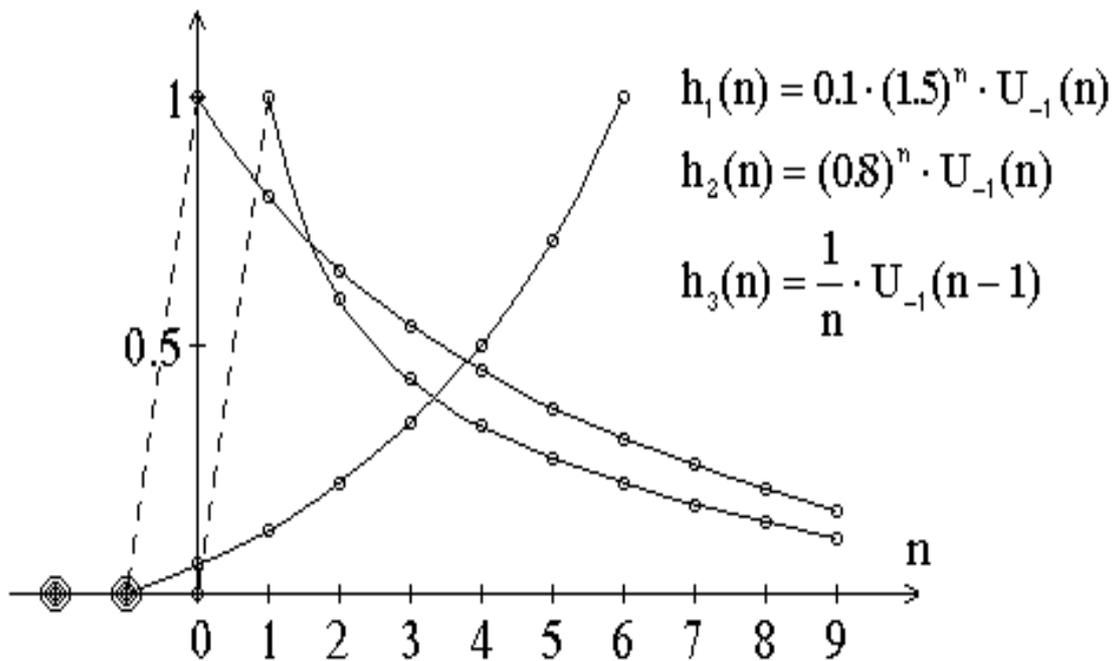


Рисунок 7

Разностные уравнения

Назначение: - временной анализ дискретных систем;
- способ построения системы;
- порядок, нули, собственные частоты.

Разностное уравнение M-го порядка:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=0}^M a_i y(n-i), \quad n \geq 0$$

Методы решения разностных уравнений

1. Прямая подстановка.

Пример: $y(n) = y(n) - 3y(n-1)$
начальные условия: $y(-1) = 0$
входной сигнал: $x(n) = n^2 + n$

Решение: $y(0) = 0^2 + 0 - 3 \cdot 0 = 0;$
 $y(1) = 1^2 + 1 - 3 \cdot 0 = 2;$
 $y(2) = 2^2 + 2 - 3 \cdot 2 = 0;$
.....

2. Аналитическое.

$y_{o.n.}(n) = y_{o.o.}(n) + y_{ч.н.}(n)$
начальные условия: \rightarrow неопр. коэфф. $y_{ч.н.}$

Пример: $y(n) + 3y(n-1) - x(n) = 0;$
 $x(n) = n^2 + n; \quad y(-1) = 0.$

Решение:

однородное РУ: $y(n) + 3y(n-1) = 0;$
ЛПП: $y_{o.o.}(n) = A\alpha^n \rightarrow A\alpha^n + 3A\alpha^{n-1} = 0;$
 $A\alpha^{n-1}(\alpha + 3) = 0;$
 $y_{o.o.}(n) = 0$ - тривиальное
 $\alpha = -3$
 $y_{o.o.}(n) = A(-3)^n.$

$x(n) = n^2 + n \rightarrow y_{ч.н.}(n) = Bn^2 + Cn + D;$
 $Bn^2 + Cn + D + 3B(n-1)^2 + 3C(n-1) + 3D = n^2 + n;$
при $n^2 \rightarrow B = 1/4;$
при $n^1 \rightarrow C = 5/8;$

при $n^0 \rightarrow D=9/32$;

$$y_{o.n.}(n) = y_{o.o.}(n) + y_{\dot{.}n.}(n) = A(-3)^n + \frac{n^2}{4} + \frac{5}{8}n + \frac{9}{32};$$

начальные условия: $y(-1)=0 \rightarrow A=-9/32$;

$$y_{o.n.}(n) = \frac{n^2}{4} + \frac{5}{8}n + \frac{9}{32}(1 - (-3)^n).$$

3. Решение РУ с помощью Z-преобразования.

ЛПП-системы первого порядка

РУ: $y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$

Структура (способ построения)

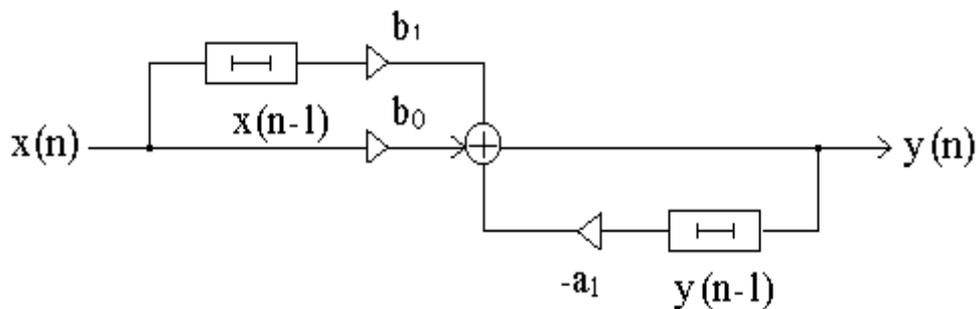


Рисунок 8

Частотная характеристика:

$x(n) = e^{j\omega n}$ - дискретный комплексный гармонический сигнал

$$H(e^{j\omega}) = \frac{y(n)}{x(n)} = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cdot e^{j\omega(n-m)}}{e^{j\omega n}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cdot e^{-j\omega m}$$

Пример: $y(n)=x(n)+Ky(n-1)$; $y(0)=0$

$$h(n) = \begin{cases} K^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

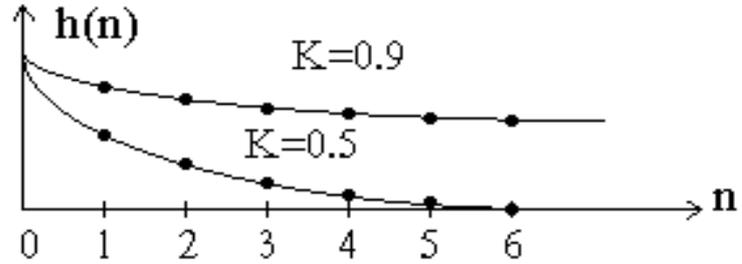


Рисунок 9

$$\begin{aligned} H(e^{jw}) &= \sum_{m=0}^{\infty} k^m e^{-jwm} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (ke^{-jw})^m = \frac{1}{1 - ke^{-jw}}; \end{aligned}$$

$$|H(e^{-jw})| = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 - 2k \cdot \cos w}};$$

$$\arg H(e^{-jw}) = \arctg \frac{k \cdot \sin w}{1 - k \cdot \cos w}.$$

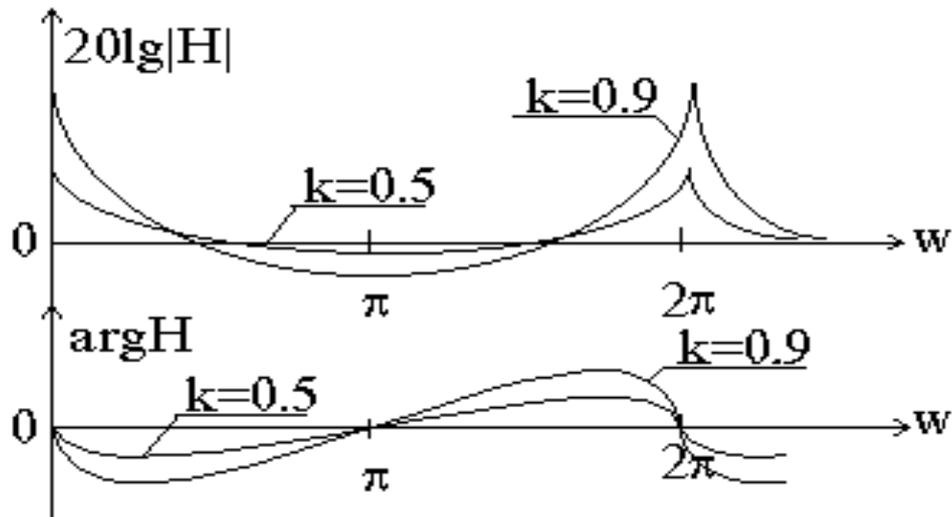


Рисунок 10

ЛПП-системы второго порядка

РУ: $y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$

Структура (способ построения)

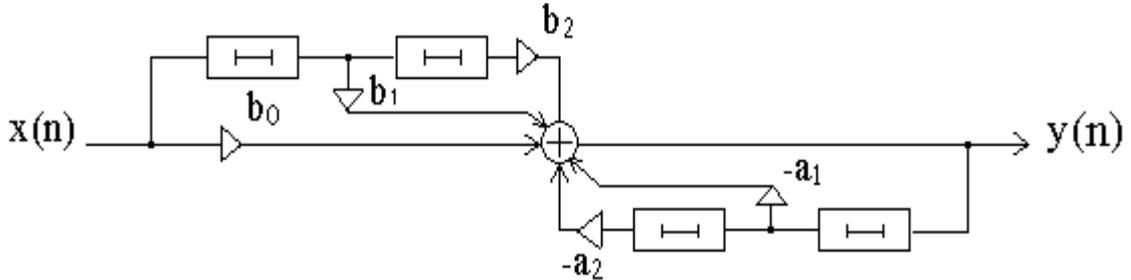


Рисунок 11

Импульсная характеристика

$$h(n) = \begin{cases} \alpha_1 P_1^n + \alpha_2 P_2^n, & \text{если } a_2 > -\frac{a_1^2}{4} \quad (\text{I}) \\ \alpha_1 r^n \sin(bn + \varphi), & \text{если } a_2 < -\frac{a_1^2}{4} \quad (\text{II}) \end{cases}$$

$$r = \sqrt{-a_2}; \quad b = \arccos(a_1/2r).$$

Частотная характеристика:

$$H(e^{jw}) = [1 - 2r \cdot \cos b \cdot e^{-jw} + r^2 e^{-2jw}]^{-1}$$

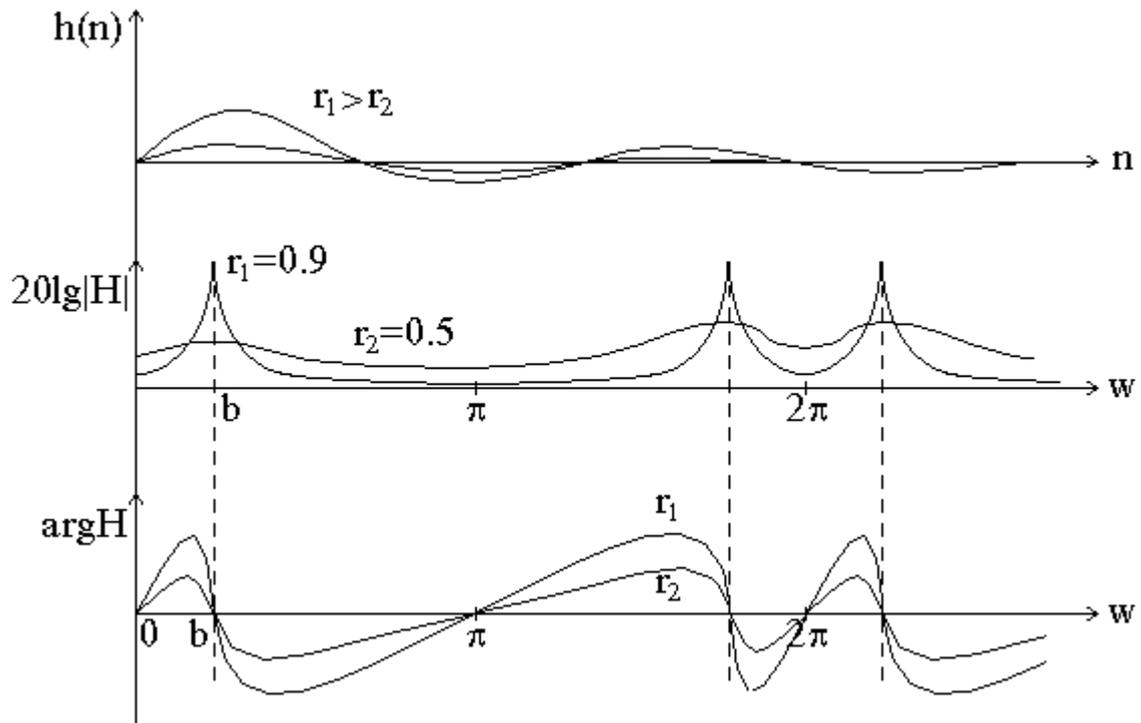


Рисунок 12

Дискретный ряд Фурье

т.к. $H(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega+2\pi k})$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

то $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n}$ - ряд Фурье

где $h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$ - коэффициенты.

Преобразование Фурье для дискретного входного сигнала:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

Пусть $x(n) = X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n}$ - при $\omega = \text{const}$.

Тогда $y(n)|_{\omega=\text{const}} = X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cdot e^{j\omega m} =$
 $= X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} \cdot H(e^{j\omega});$

Суммируя по всем ω :

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

откуда $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$

О размерности частоты:

если $h(n) \rightarrow h(nT)$,

то $H(e^{j\omega}) \rightarrow H(e^{j\omega T})$

и период $H(e^{j\omega T}) = \frac{2\pi}{T} [\text{Hz}]$

Соотношение между дискретными и непрерывными системами

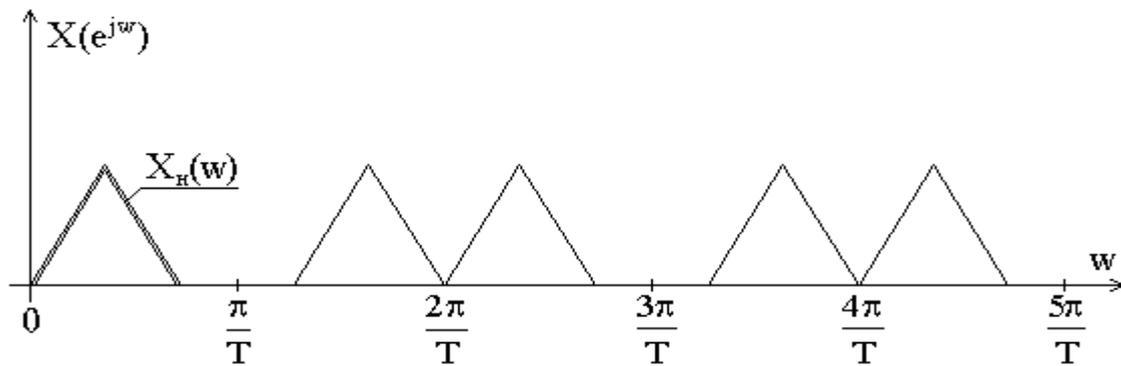


Рисунок 13

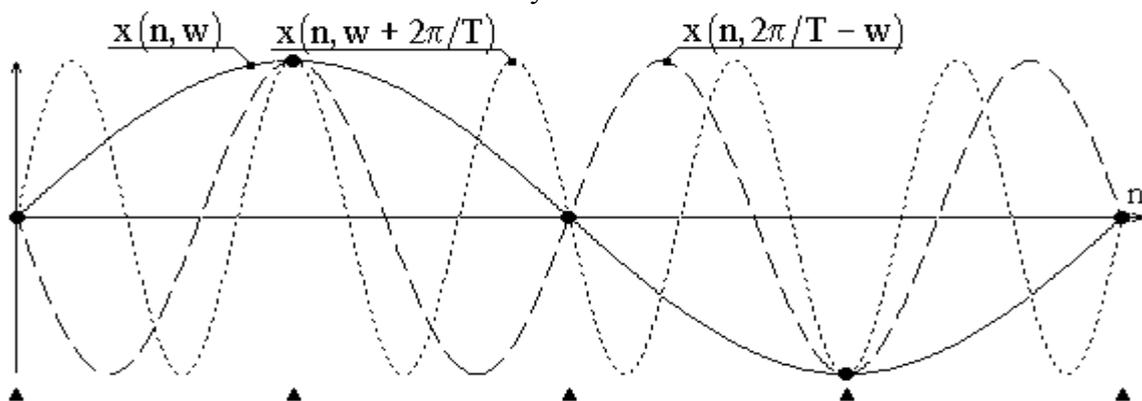


Рисунок 14

$x(nT) = x(t)$, при $t = nT$ - во временной области

$$X(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_H\left(\omega + \frac{2\pi}{T}m\right) \text{ - в спектральной области}$$

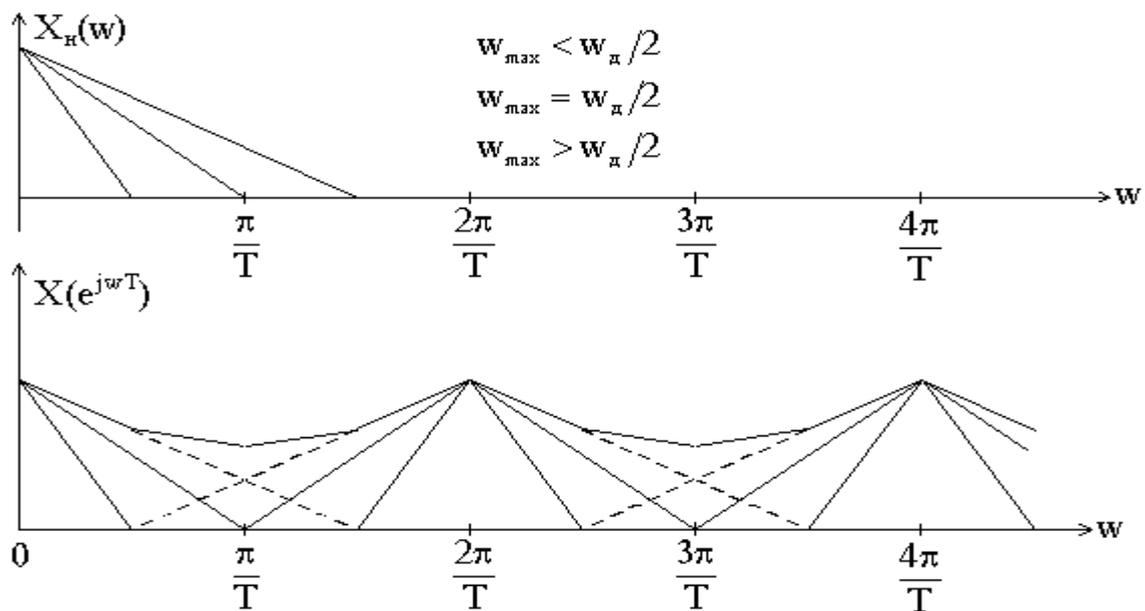


Рисунок 15

Z-преобразование

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

Z-преобразование для анализа дискретных систем.
Преобразование Лапласа - для непрерывных систем.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Если сигнал дискретный $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT)$, то

$$F(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \cdot e^{-pnT} \quad \text{-дискретное преобразование Лапласа.}$$

Замена $z=e^{pT}$ $F(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \cdot z^{-n}$ - Z-преобразование.

Для конечных последовательностей область определения соответствует области сходимости ряда

$$\text{если } x(n) \begin{cases} \neq 0, & \text{но } |x(n)| < \infty \text{ при } N_1 < n < N_2, \\ = 0, & \text{при остальных } n \end{cases},$$

то $X(z)$ определено везде.

R_1 - радиус сходимости: при $|z| > R_1$ ряд сходится.

- Примеры:
1. $x(n)=U_0(n)$; $X(z)=1$; $R_1=0$
 2. $x(n)=U_{-1}(n)$; $X(z)=[1-z^{-1}]^{-1}$; $R_1=1$
 3. $x(n)=e^{jwn}$; $X(z)=[1-e^{iw}z^{-1}]^{-1}$; $R_1=1$
 4. $x(n)=a^n$; $X(z)=[1-az^{-1}]^{-1}$; $R_1=a$

Связь Z-преобразования и преобразования Фурье

$$X(z) \Big|_{z=e^{jw}} = X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-jwn}$$

$z=e^{jw}$ - единичная окружность

Для ЛПП систем передаточная функция - дробно-рациональная относительно z^{-1} :

$$X(z) = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}};$$

где: z_i - нули;
 p_i - полюса.

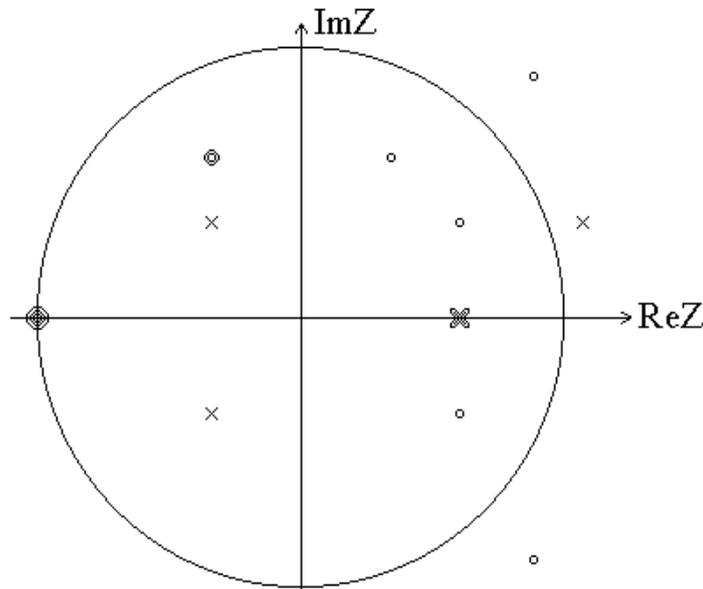


Рисунок 16

Условие устойчивости: $\underline{R_1} \leq 1$

Обратное Z-преобразование

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

где c - область сходимости с началом координат.

Способы вычисления:

1. Деление числителя на знаменатель.
2. Разложение на простые дроби.
3. Использование теоремы о вычетах.

4. Таблица Z-преобразований.

1. Деление числителя на знаменатель

Пример: $X(z) = \frac{30z^2}{6z^2 - z - 1}; \quad p_1 = 0.5; \quad R_1 = 0.5$
 $p_2 = -1/3$

$$30z^2 \left| \frac{6z^2 - z - 1}{5 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{35}{36}z^{-2} + \dots} = X(z) \right.$$

Сравним:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n} = x(0) + x(1) \cdot z^{-1} + \dots = 5 + \frac{5}{6} + \dots$$

то есть $x(n) = \left\{ 5, \frac{5}{6}, \frac{35}{36}, \dots \right\}.$

2. Разложение на простые дроби.

если $X(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{1 - p_i z^{-1}},$

то на основании $\frac{\alpha_i}{1 - p_i z^{-1}} \Leftrightarrow \alpha_i p_i^n$

верно $x(n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i^n, & \text{при } n \geq 0 \\ 0, & \text{при } n < 0 \end{cases}$

Пример: $X(z) = \frac{30z^2}{6z^2 - z - 1};$

$$6z^2 - z - 1 = 0; \quad z_{1,2} = \frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{12} \pm \frac{5}{12};$$

$$z_1 = 1/2; \quad z_2 = -1/3;$$

$$X(z) = \frac{30z^2}{6(z-1/2)(z+1/3)} = \frac{5}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)};$$

2 полюса: $p_1 = 1/2; \quad p_2 = -1/3.$

$$X(z) = \frac{k_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - p_2 z^{-1}};$$

$$k_{1,2} = X(z)(1 - p_{1,2} z^{-1}) \Big|_{z=p_{1,2}};$$

$$k_1 = X(z) \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) \Big|_{z=1/2} = 3;$$

$$k_2 = X(z) \left(1 + \frac{1}{3} z^{-1}\right) \Big|_{z=-1/3} = 2;$$

$$X(z) = \frac{3}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{2}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}};$$

Тогда:
$$x(n) = \begin{cases} 3(1/2)^n + 2(-1/3)^n, & \text{при } n \geq 0 \\ 0, & \text{при } n < 0 \end{cases}$$

Если в числителе степень выше, чем в знаменателе, “целая часть” дает единичные функции $u_0(n)$ в последовательности $x(n)$.

3. Использование теоремы вычетов.

$$x(n) = \sum \operatorname{res} [X(z) \cdot z^{n-1}] \Big|_{z \in \mathbb{C}_1}$$

Определение вычета $f(z)$ в полюсе порядка m :

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)];$$

При $m=1$ и $f(z) = \frac{p(z)}{g(z)}$: $\operatorname{Res} f(a) = \frac{p(a)}{g'(a)}$

Пример:

$$X(z) = \frac{30z^2}{6z^2 - z - 1};$$

$$f(z) = \frac{30z^2 z^{n-1}}{6z^2 - z - 1}; \quad p_1 = \frac{1}{2}; \quad p_2 = -\frac{1}{3};$$

$$\operatorname{Res} f(1/2) = \frac{30 \cdot (1/2)^2 \cdot (1/2)^{n-1}}{2 \cdot 6 \cdot 1/2 - 1} = 3 \cdot (1/2)^n;$$

$$\operatorname{Res} f(-1/3) = \frac{30 \cdot (-1/3)^2 \cdot (-1/3)^{n-1}}{-2 \cdot 6 \cdot 1/3 - 1} = 2 \cdot (-1/3)^n;$$

$$x(n) = \operatorname{Res} f(1/2) + \operatorname{Res} f(-1/3) = \begin{cases} 3 \cdot (1/2)^n + 2 \cdot (-1/3)^n, & \text{при } n \geq 0 \\ 0, & \text{при } n < 0 \end{cases}$$

Свойства Z-преобразования

- 1. Линейность:** если $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$,
то $X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$.
- 2. Задержка:** если $x(n) = x_1(n - n_0)$ для $\forall n_0$
то $X(z) = X_1(z) \cdot z^{-n_0}$.

Используется при решении РУ:

Пусть $y(n) = x(n) - b_1y(n-1) - b_2y(n-2)$.

Тогда $Y(z) = X(z) - b_1Y(z)z^{-1} - b_2Y(z)z^{-2}$;

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}.$$

- 3. Свертка:** если $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot h(n-m)$,
то $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$.
- 4. Произведение:** если $x(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$,

то $X(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) \cdot X_2(v) \cdot v^{-1} dv$.

При $z=e^{j\omega}$ и $v=e^{j\theta}$:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) \cdot X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

Одностороннее Z-преобразование

Предназначено: для анализа физически реализуемых систем.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Отличие: в свойстве задержки.

если $x(n) = x_1(n-1)$, то

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n-1)z^{-n} = \sum_{m=-1}^{\infty} x_1(m)z^{-m-1} = \\ &= z^{-1} \left[x_1(-1)z + \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)z^{-m} \right] = X_1(z)z^{-1} + x_1(-1). \end{aligned}$$

В общем случае для задержки n_0 тактов:

$$X(z) = z^{-n_0} X_1(z) + x_1(-n_0) + x_1(-n_0 + 1)z^{-1} + \dots + x_1(-1)z^{-(n_0-1)},$$

где $x_1(-n_0)$, $x_1(-n_0 + 1)$, \dots , $x_1(-1)$ - начальные условия.

При нулевых начальных условиях:

$$X(z) = X_1(z)z^{-n_0} - \text{аналогично двустороннему Z-преобразованию.}$$

Решение РУ с помощью Z-преобразования

Пример: решить РУ $y(n) = x(n) + ay(n-1)$
при начальном условии $y(-1) = K$
и входном сигнале $x(n) = e^{j\omega n} u_{-1}(n)$.

Решение: находим Z-преобразование от обеих частей:

$$Y(z) = X(z) + a[Y(z)z^{-1} + K]$$

откуда:

$$Y(z) = \frac{X(z) + aK}{1 - az^{-1}}$$

Поскольку $x(n) = e^{j\omega n}$, то $X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega} z^{-1}}$.

Тогда:

$$Y(z) = \frac{aK}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{(1 - e^{j\omega} z^{-1})(1 - az^{-1})}$$

Разлагаем на простые дроби:

$$Y(z) = \frac{aK}{1 - az^{-1}} + \frac{a/(a - e^{j\omega})}{1 - az^{-1}} + \frac{-e^{j\omega}/(a - e^{j\omega})}{1 - e^{j\omega} z^{-1}}$$

Вычисляем обратное Z-преобразование:

$$Y(z) = \left[a^{n+1}K + \frac{a^{n+1}}{a - e^{j\omega}} - \frac{-e^{j\omega(n+1)}}{a - e^{j\omega}} \right] u_{-1}(n).$$

Общий случай РУ L-го порядка:

$$y(n) = \sum_{i=0}^L a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^L b_i y(n-i),$$

$$x(n) = 0, \text{ при } n < 0.$$

$$Y(z) = \sum_{i=0}^L a_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^L b_i [z^{-i} Y(z) + Y(-i) + Y(1-i)z^{-1} + \dots]$$

Дальнейшие операции аналогичны рассмотренным при решении РУ первого порядка.

Дискретное преобразование Фурье

Для бесконечной периодической последовательности $x_p(n)$ с периодом N верно представление рядом Фурье:

$$x_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn},$$

где частоты дискретны: $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k; \quad -\infty < k < \infty.$

Так как $\omega_k = \frac{2\pi k}{N} = \omega_k \pm mN = \frac{2\pi}{N}(k \pm mN),$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

то
$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (*)$$

Выразим $X_p(k)$ через $x_p(n)$.

Умножим обе части (*) на $e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$ и $\sum_{n=0}^{N-1}$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-m)}$$

Меняем порядок $\sum \sum$ и используем формулу:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k-m)} = Nu_0(k-m) = \begin{cases} N, & \text{при } k = m \\ 0, & \text{при } k \neq m \end{cases}$$

Получаем:
$$\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) u_0(k-m)$$

После перестановки частей и замены m на k :

<p>ДПФ: $X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k=0, 1 \dots N-1$</p>

<p>ОДПФ: $x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n=0, 1 \dots N-1$</p>

Связь Z-преобразования и ДПФ

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n), & \text{при } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{при других } n \end{cases} \quad \text{- конечная последовательность}$$

Тогда:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

Полагая $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k=0, 1 \dots N-1$ найдем

$$X(z_k) = X\left[e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},$$

то есть

$$X_p(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k=0, 1 \dots N-1$$

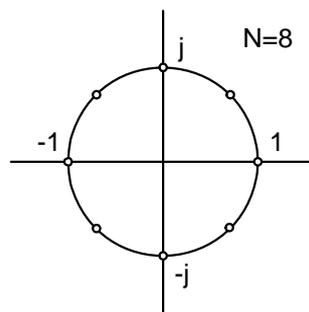


Рисунок 17

Выразим $X(z)$ через $X_p(k)$:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} z^{-n} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} X_p(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right]^n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X_p(k)}{N} \cdot \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \end{aligned}$$

при $z=e^{j\omega}$ получим связь спектральной плотности с ДПФ:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X_p(k)}{N} \cdot \frac{e^{-j\frac{\omega(N-1)}{N}}}{e^{j\frac{\pi k}{N}}} \cdot \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)}.$$

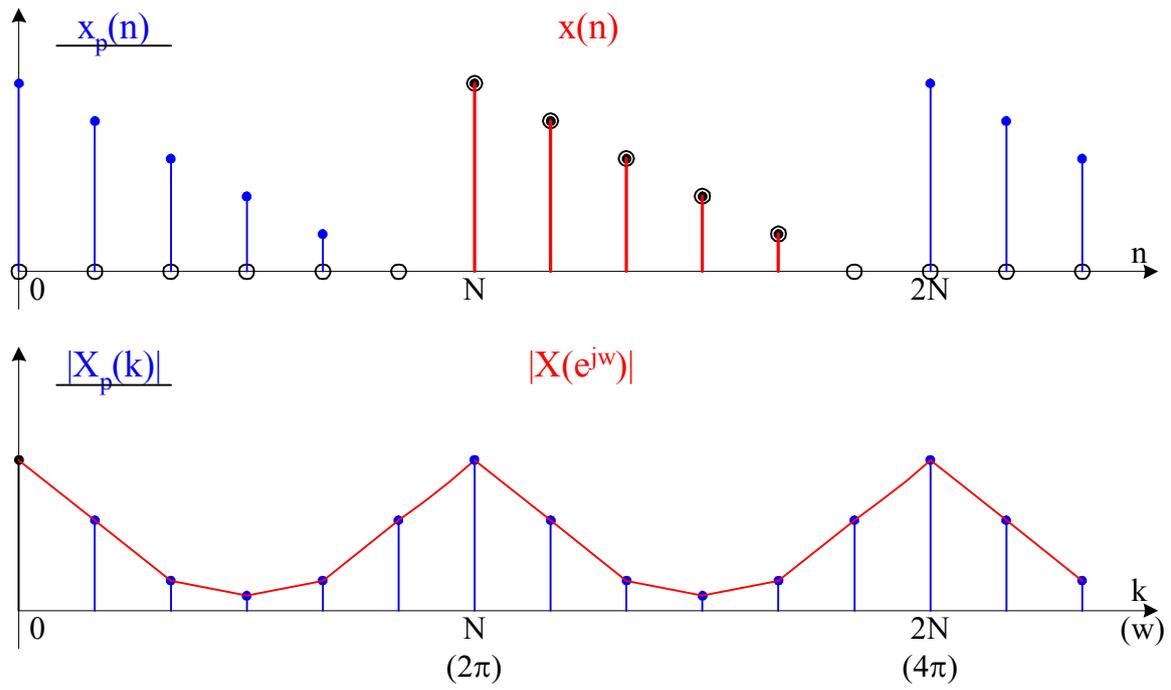


Рисунок 18

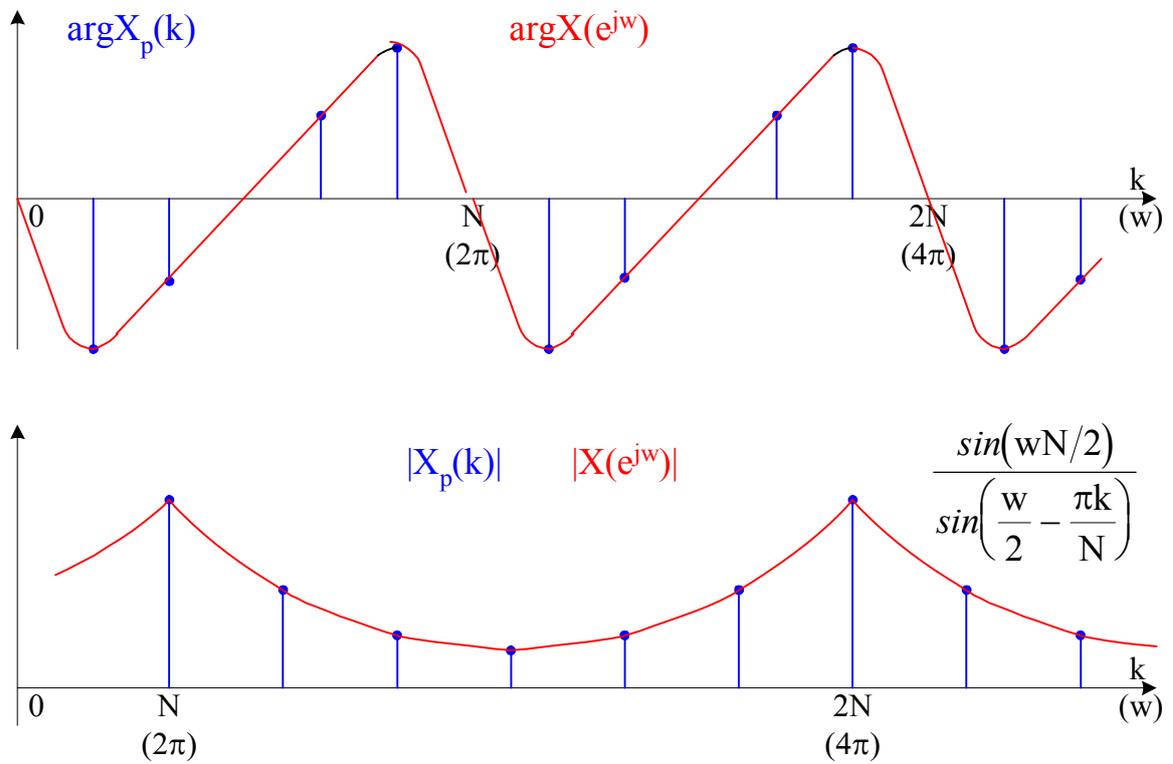


Рисунок 19

Свойства ДПФ

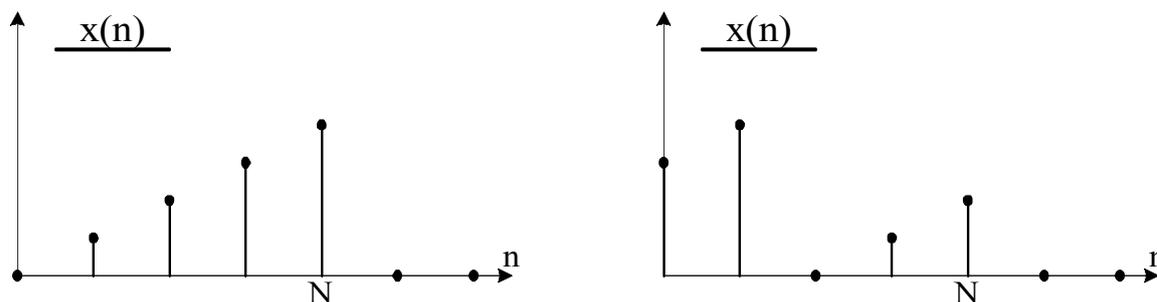
1. Линейность:

$$x_p(n) = x_{p1}(n) + x_{p2}(n) \Leftrightarrow X_p(k) = X_{p1}(k) + X_{p2}(k)$$

2. Сдвиг:

Если $x_{p1}(n) \Leftrightarrow X_{p1}(k)$,

то $x_p(n) = x_{p1}(n - n_0) \Leftrightarrow X_p(k) = X_{p1}(k) e^{-\frac{2\pi}{N} n_0 k}$



циклический сдвиг конечной последовательности

Рисунок 20

3. Симметрия:

Если $x_p(n)$ - действительная (N - период),

то $Re[X_p(k)] = Re[X_p(N - k)]$

$$Im[X_p(k)] = -Im[X_p(N - k)]$$

$$|X_p(k)| = |X_p(N - k)|$$

$$arg X_p(k) = -arg X_p(N - k)$$

Пусть $z_p(n) = x_p(n) + jy_p(n)$.

Тогда $Z_p(k) = X_p(k) + jY_p(k)$

и $ReX_p(k) = 1/2[ReZ_p(k) + ReZ_p(N - k)]$

$$ImX_p(k) = 1/2[ImZ_p(k) - ImZ_p(N - k)]$$

$$ReY_p(k) = 1/2[ImZ_p(k) + ImZ_p(N - k)]$$

$$ImY_p(k) = 1/2[ReZ_p(N - k) - ReZ_p(k)]$$

Свертка последовательностей

1. Циклическая (периодическая, круговая);
2. Линейная (апериодическая);
3. Секционированная;
4. Быстрая:
 - 4.1. на основе БПФ;
 - 4.2. на основе разложения на короткие свертки;
 - 4.3. на основе структурных свойств;
 - 4.4. на основе ТЧП.

Циклическая свертка.

$x_p(n), h_p(n), y_p(n), n=0, 1 \dots N-1$

$$y_p(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x_p(l)h_p(n-l);$$

$X_p(k), H_p(k), Y_p(k), k=0, 1 \dots N-1$

$$Y_p(k) = X_p(k) \cdot H_p(k).$$

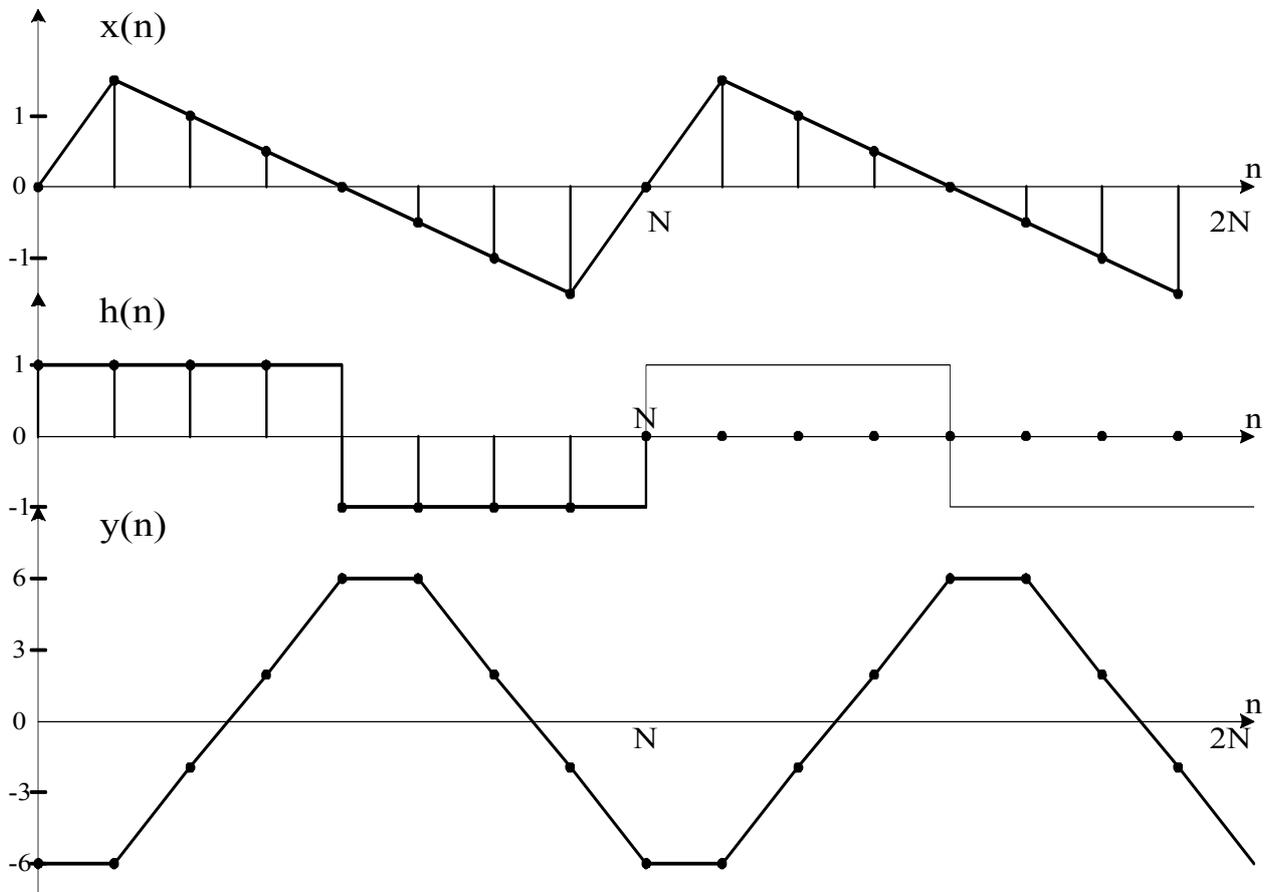


Рисунок 21

Линейная свертка.

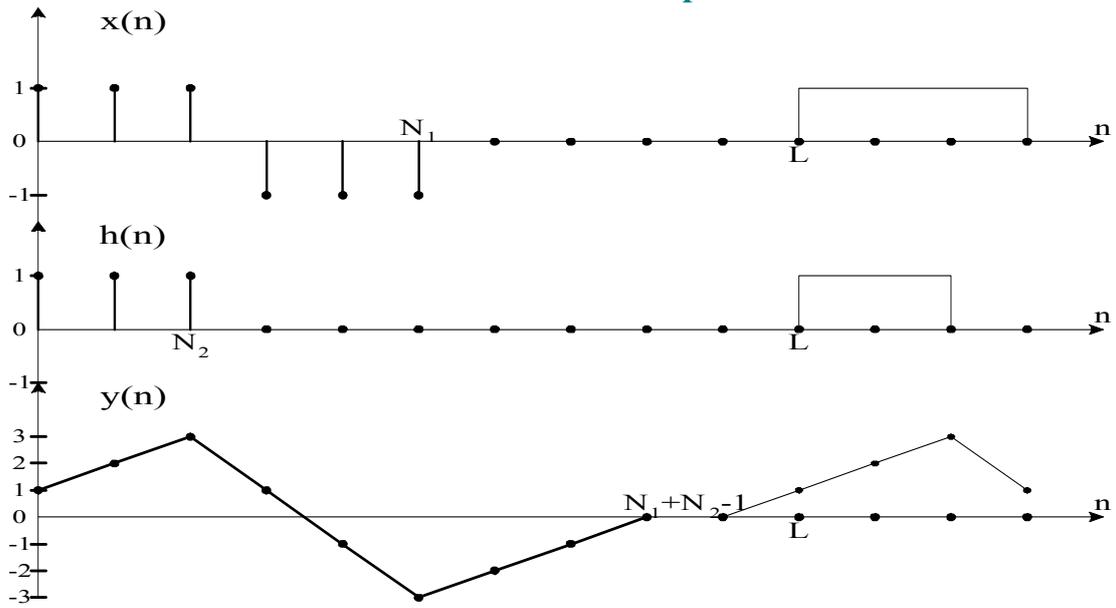


Рисунок 22

$$y(n) = \sum_{m=0}^n h(m)x(n-m), \quad n=0, 1 \dots N_1+N_2-1$$

Быстрая свертка на основе БПФ.

$$y(n) = x(n) * h(n) \Leftrightarrow Y(k) = X(k) \cdot H(k)$$

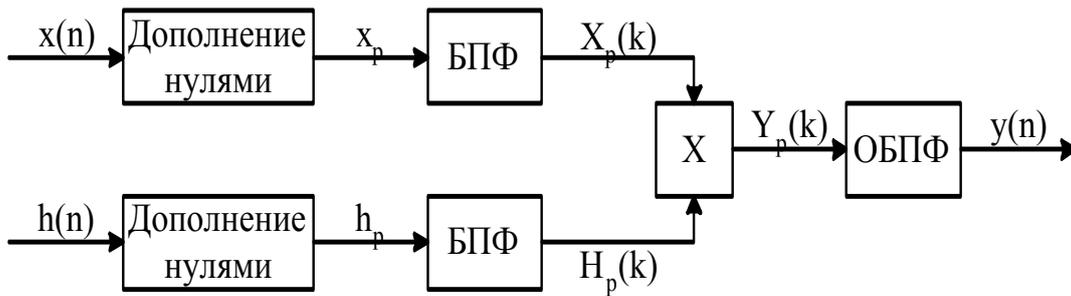


Рисунок 23

Прямая свертка: $Кол = N(N-1) \approx N^2$

БПФ или ОБПФ: $Кол \approx \frac{N}{2} \log_2 N$

Умножение: $Кол = N$

Быстрая свертка: $Кол \approx N(\log_2 N + 1)$

Выигрыш в количестве операций: $\approx N/(\log_2 N + 1)$

Быстрая свертка на основе разложения.

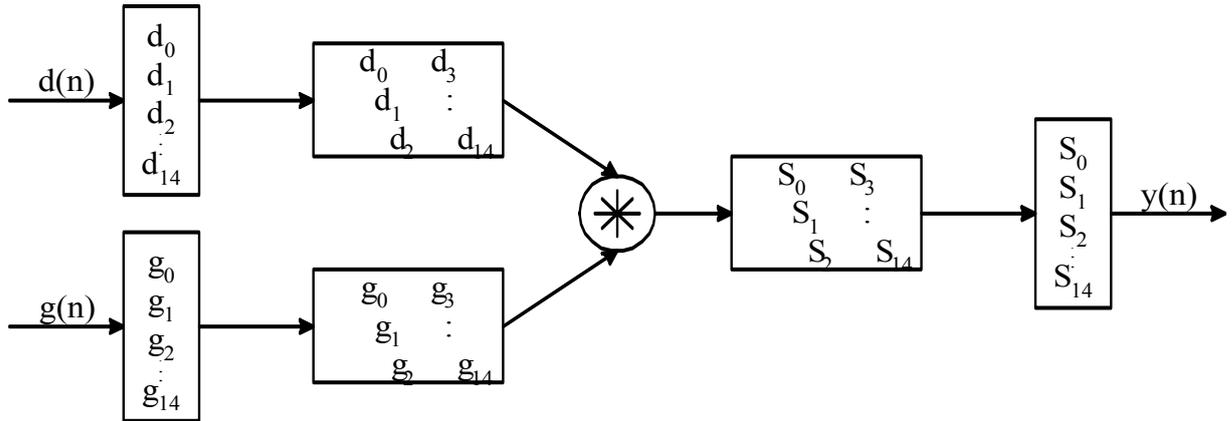


Рисунок 24

Алгоритм Агарвала-Кули

Пример: свертка 2x2

$$d(n) = \{d_0, d_1\}$$

$$g(n) = \{g_0, g_1\}$$

$$\begin{cases} S_0 = d_0 g_0 \\ S_2 = d_1 g_1 \\ S_1 = d_0 g_1 + d_1 g_0 \end{cases}$$

→ Кол=4 умнож., 1 слож.

Быстрый алгоритм (Кука-Тоома, Карацубы)

$$S_0 = d_0 g_0;$$

$$S_2 = d_1 g_1;$$

$$\left. \begin{aligned} l &= (d_0 + d_1)(g_0 + g_1) \\ S_1 &= l - S_0 - S_2 \end{aligned} \right\}$$

Кол = $\begin{matrix} 3 \text{ умнож.} \\ 4 \text{ слож.} \end{matrix}$

Короткие свертки			
L	N	вещ x	вещ +
2	2	3	3
3	3	5	20
		6	10
		9	4
4	4	7	41
		9	15

Алгоритм Агарвала-Кули		
N	вещ. x на 1(·)	вещ. + на 1(·)
20	2.5	10.7
60	3.3	16.07
240	4.4	40.4
1008	9.95	55.9

Быстрая свертка на основе структурных свойств

Пример: $x(n) = \{a, \pm a, a, \pm a, \dots, a\}$

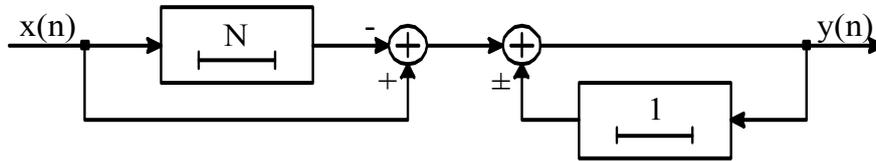


Рисунок 25

$Kол=2N$ операций слож/вычит.

Пример: блочные последовательности
 $x(n) = +1, +1, +1, -1, -1, +1, -1$

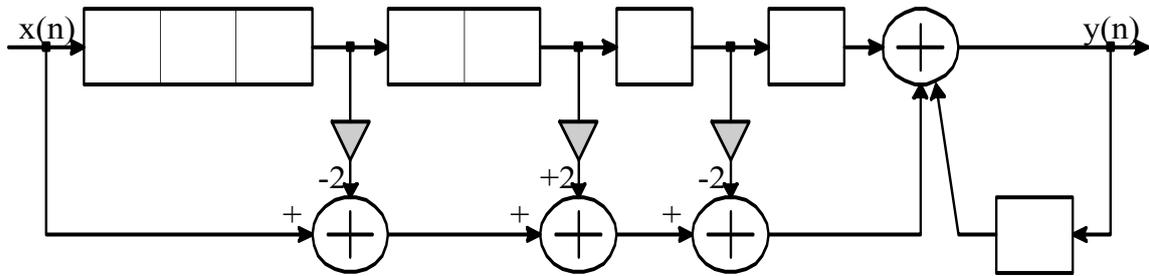


Рисунок 26

Было: $Kол=6 \times 7=42$ **Стало:** $Kол=5 \times 7=35$

Пример: D-коды (фильтр Велти)

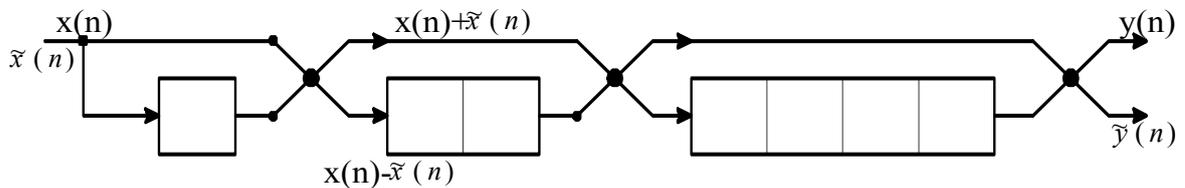


Рисунок 27

$x(n) = +1, +1, +1, -1, +1, +1, -1, +1$

$x(n) = +1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1$

$Kол = \log_2 N \cdot N$

Пример: периодические ПСП

$Kол \approx N \log_2 N$

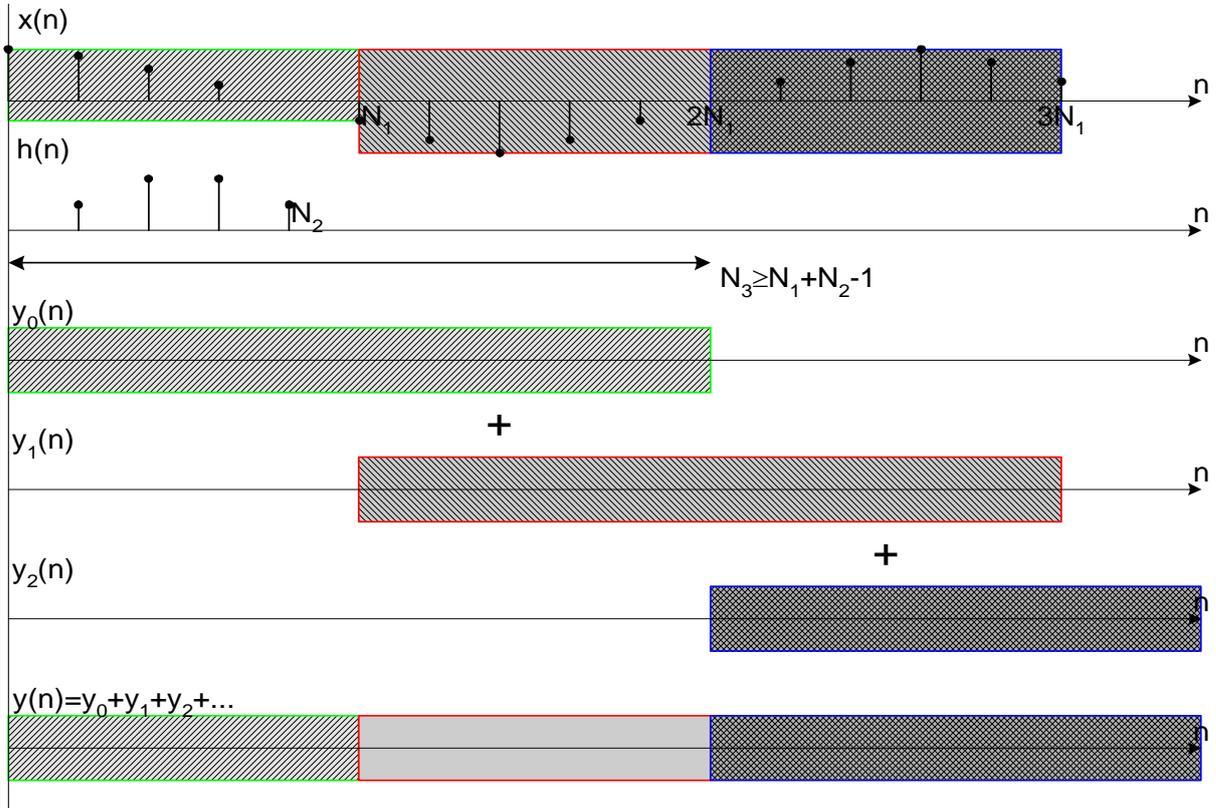
Секционированные свертки

Назначение: свертка длинной $x(n)$ с короткой $h(n)$.

Методы:

1. Перекрытие с суммированием;
2. Перекрытие с накоплением.

①



②

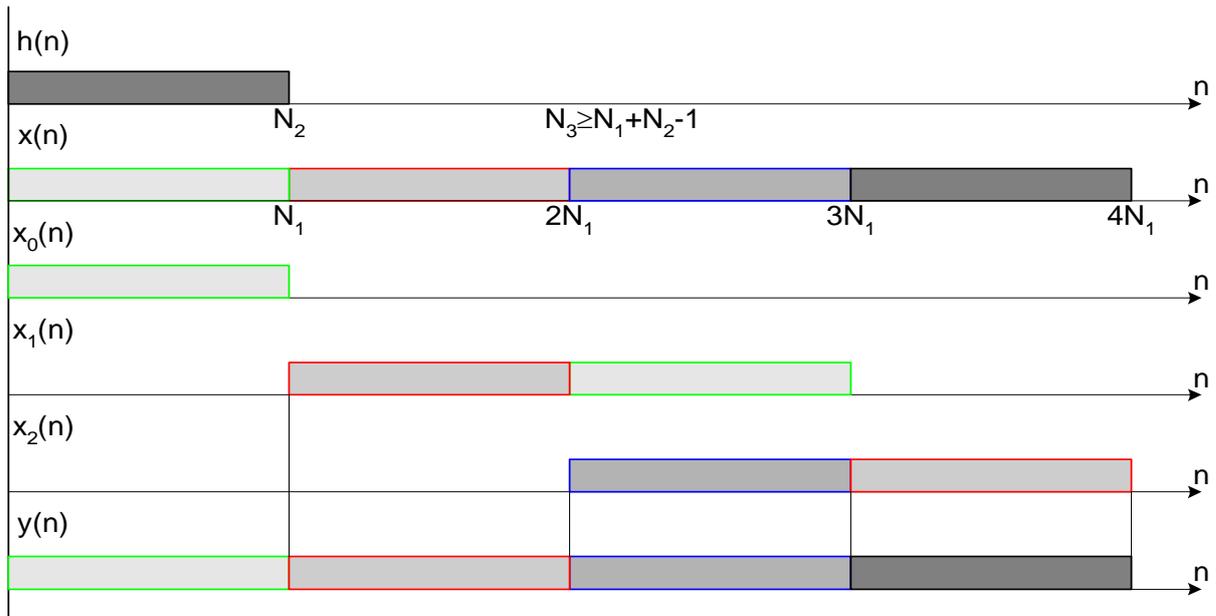


Рисунок 28

Цифровые фильтры

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots] -$$

рекурсивные, БИХ, БИО-фильтры

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \dots] -$$

нерекурсивные, КИХ, КИО-фильтры, лестничные, решетчатые, волновые.

Структурные схемы рекурсивных фильтров

Прямая форма 1

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}; \quad a_0 \stackrel{\Delta}{=} 1.$$

$$Y(z) \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} = X(z) \sum_{i=0}^N b_i z^{-i};$$

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i);$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i);$$

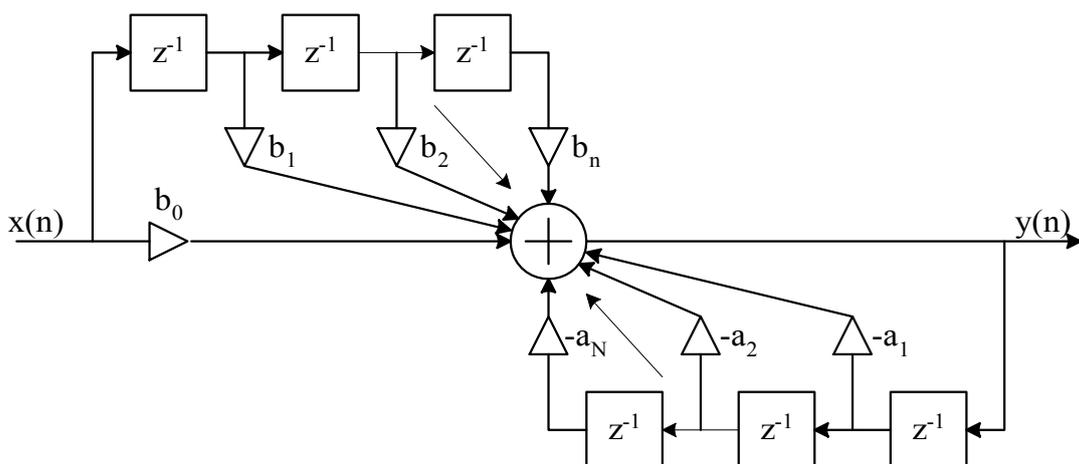


Рисунок 29

Прямая форма 2 (каноническая)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \cdot \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}; \quad H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i}.$$

$$w(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i w(n-i); \quad a_0 \stackrel{\Delta}{=} 1;$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i w(n-i)$$

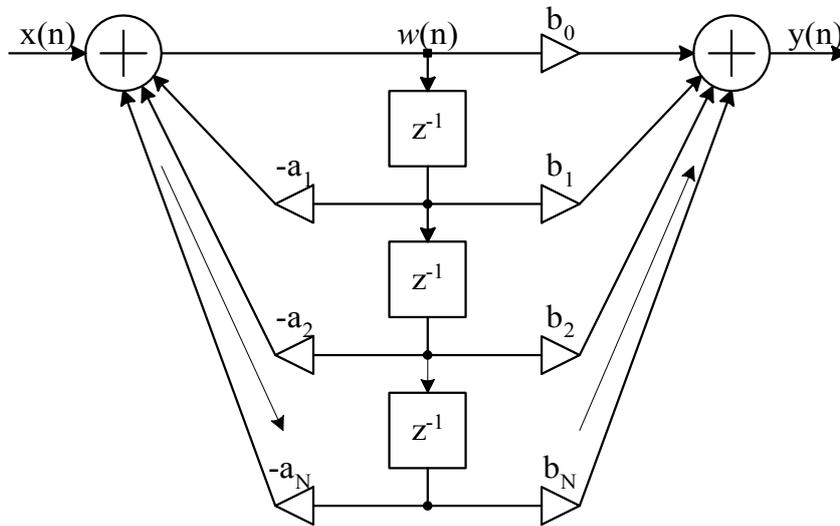


Рисунок 30

Каскадная форма ЦФ

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = b_0 \prod_{i=1}^K H_i(z);$$

где $H_i(z) = \frac{1 + b_i z^{-1}}{1 + a_i z^{-1}};$

либо $H_i(z) = \frac{1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2}}{1 + a_{1i} z^{-1} + a_{2i} z^{-2}}.$

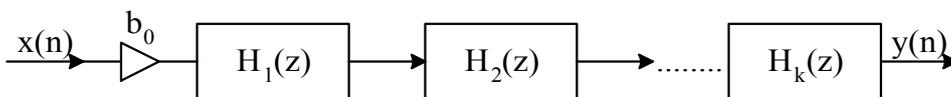


Рисунок 31

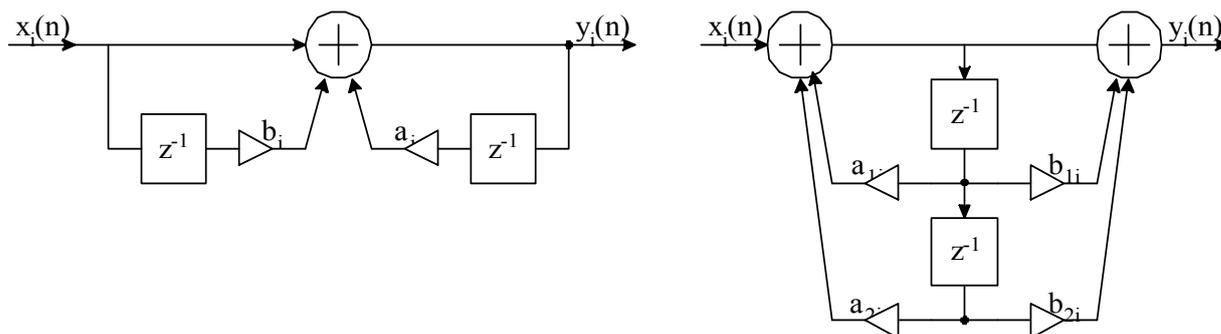


Рисунок 32

Параллельная форма

$$H(z) = c + \sum_{i=1}^K H_i(z), \quad \text{где } c = \frac{b_N}{a_N},$$

$$H_i(z) = \frac{b_{0i}}{1 + a_{1i}z^{-1}},$$

либо

$$H_i(z) = \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}$$

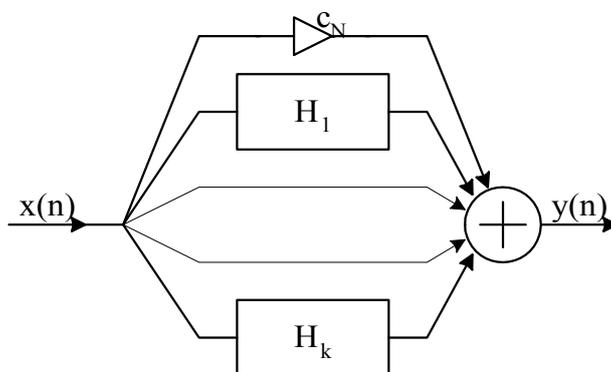


Рисунок 33

Структурные схемы нерекурсивных ЦФ

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)z^{-i};$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i).$$

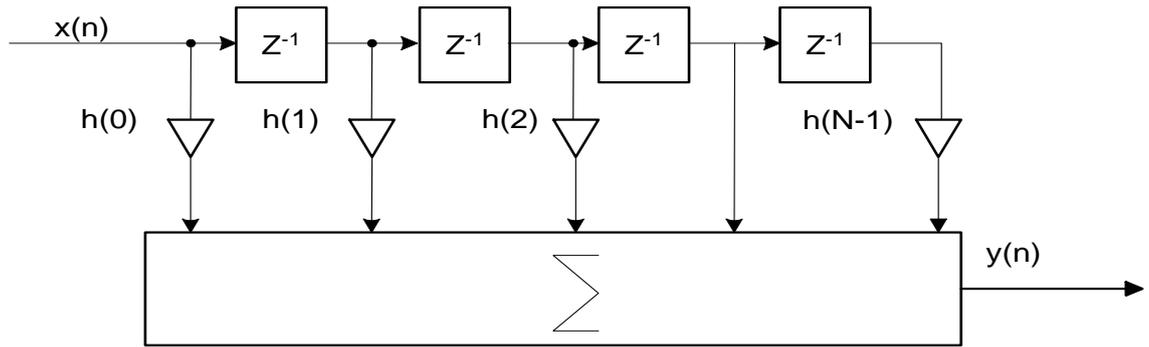


Рисунок 34

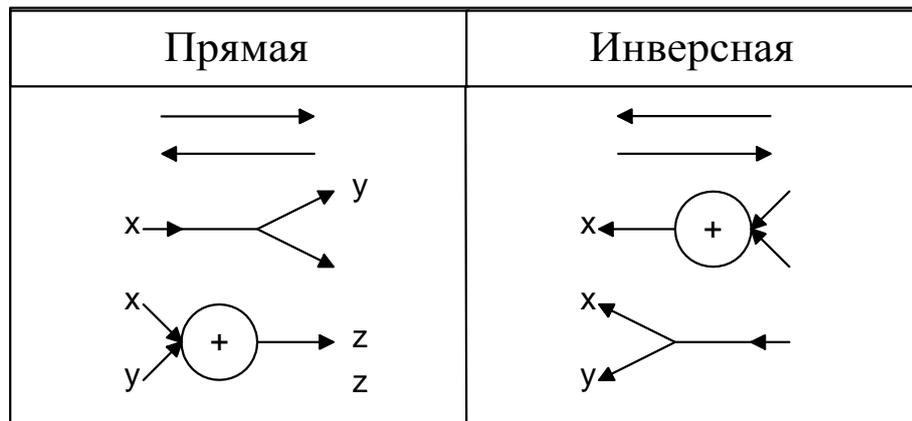


Рисунок 35

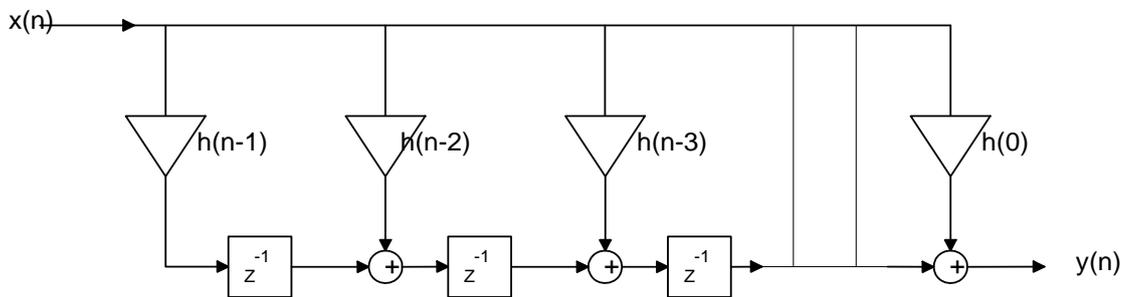


Рисунок 36

Каскадная форма КИХ-фильтров

$$H(z) = \prod_{i=1}^K H_i(z),$$

где

$$H_i(z) = b_{0i} + b_{1i}z^{-1};$$

либо

$$H_i(z) = b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}.$$

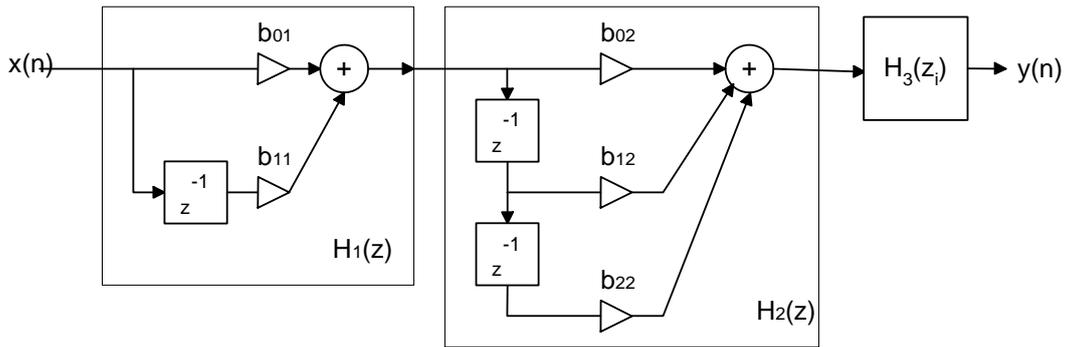


Рисунок 37

Фильтр на основе БПФ - ОБПФ

см. “Быстрая свертка на основе БПФ”.

Форма КИХ-фильтра на основе интерполяционной формулы Лагранжа

Пример: для $H(z_0)$, $H(z_1)$ и $H(z_2)$

$$H(z) = \frac{(1 - z^{-1}z_1)(1 - z^{-1}z_2)}{(1 - z_0^{-1}z_1)(1 - z_0^{-1}z_2)} H(z_0) + \frac{(1 - z^{-1}z_1)(1 - z^{-1}z_2)}{(1 - z_1^{-1}z_0)(1 - z_1^{-1}z_2)} H(z_1) + \frac{(1 - z^{-1}z_1)(1 - z^{-1}z_2)}{(1 - z_2^{-1}z_0)(1 - z_2^{-1}z_1)} H(z_2)$$

В общем случае:
$$H(z) = \prod_{n=0}^{N-1} (1 - z^{-1}z_n) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{A_m}{1 - z^{-1}z_m},$$

где
$$A_m = \frac{H(z_m)}{\prod_{n=0, n \neq m}^{N-1} (1 - z_m^{-1}z_n)}$$

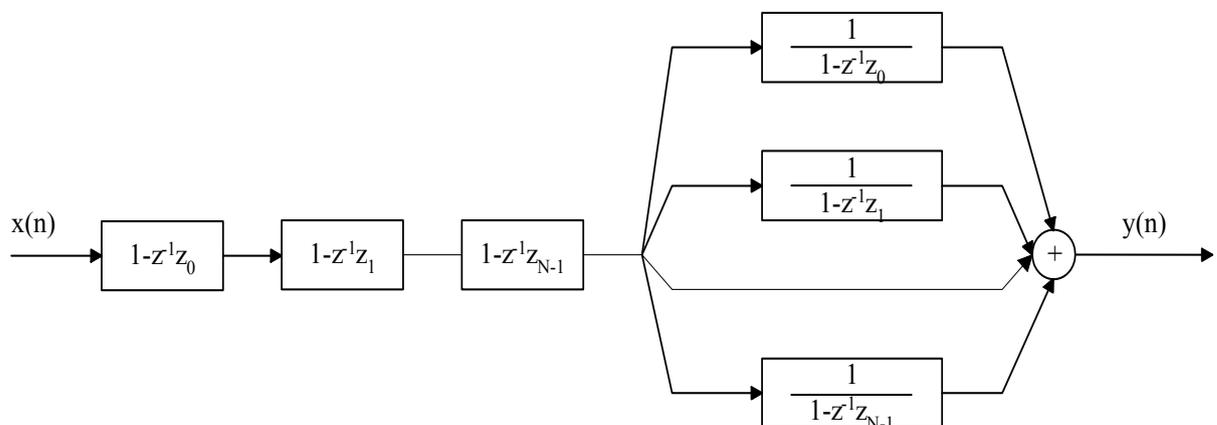


Рисунок 38

Фильтр с частотной выборкой

Получается из ЦФ на основе формулы Лагранжа при:

$$Z_n = e^{j\frac{2\pi}{N}n}, \quad n=0, 1 \dots N-1.$$

При этом
$$\prod_{n=0}^{N-1} [1 - z^{-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n}] = 1 - z^{-N}$$

и
$$A_m = \frac{1}{N} H(e^{j\frac{2\pi}{N}m})$$
 - отсчет ЧХ.

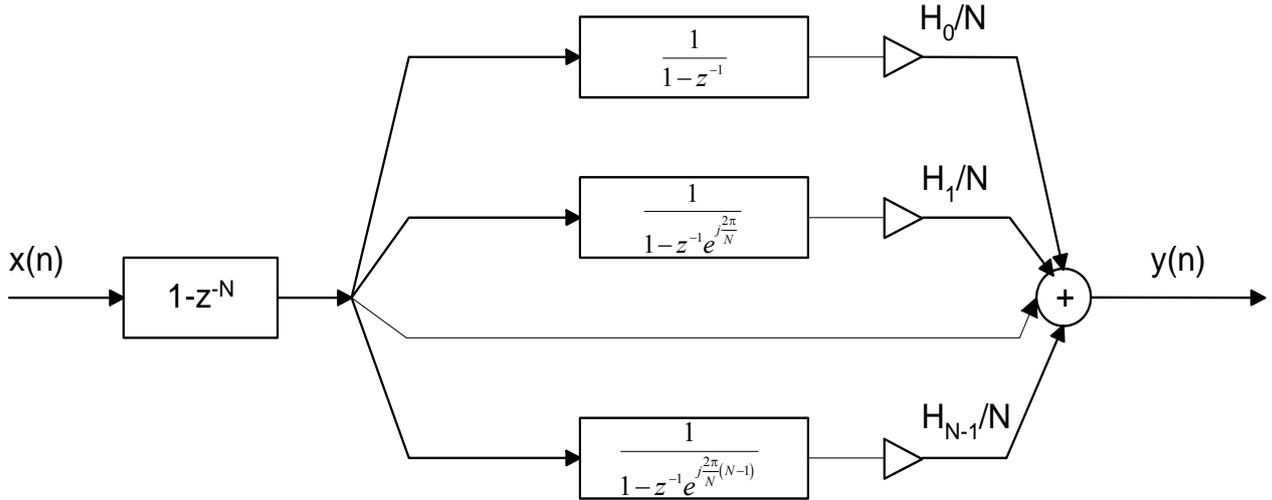


Рисунок 39

Преимущество: экономичность при $H_n=0$.

Недостаток: неполная компенсация полюсов нулями.

Лестничные (решетчатые) фильтры

Применяются:

- анализ и синтез речи;
- имитация речевого тракта;
- сейсморазведка.

Физическая модель - каскадное соединение цилиндров разного диаметра. Коэффициенты фильтра представляют часть энергии волны, отраженной от границ раздела цилиндров разного диаметра.

Нерекурсивный решетчатый фильтр

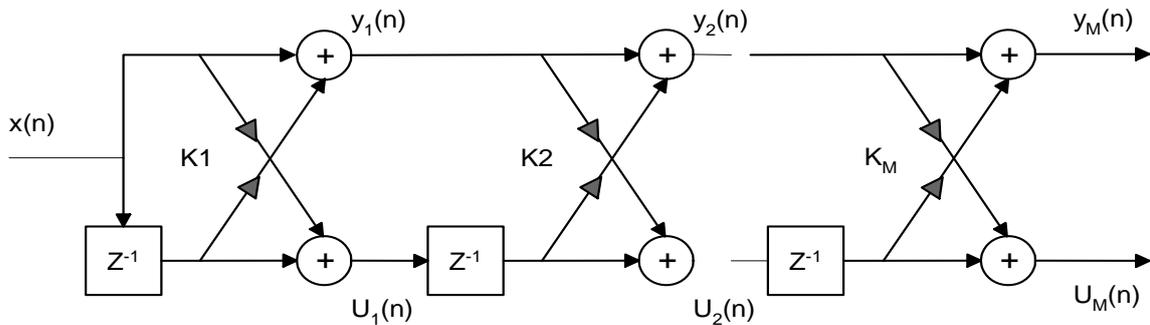


Рисунок 40

$$y_i(n) = y_{i-1}(n) + K_i u_i(n-1)$$

$$u_i(n) = K_i y_{i-1}(n) + u_{i-1}(n-1)$$

Для первого звена:

$$y_0(n) = x(n)$$

$$u_0(n) = x(n)$$

Имеют только нули в Z-плоскости.

Рекурсивный решетчатый фильтр

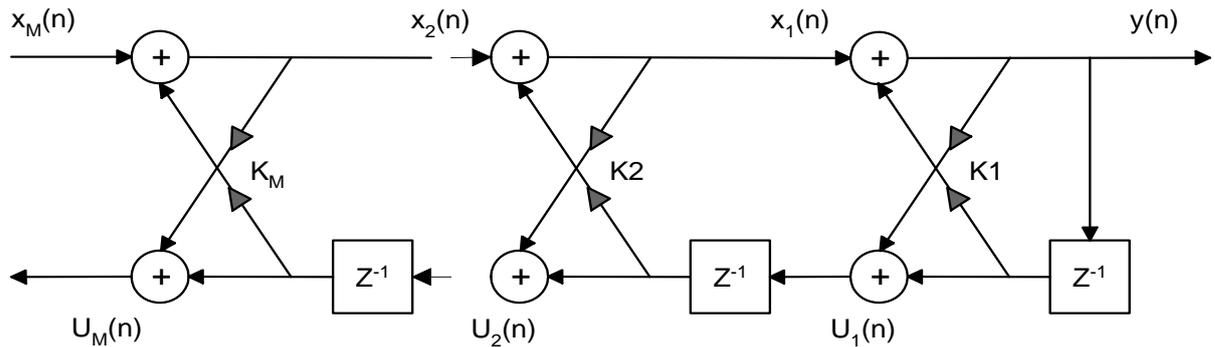


Рисунок 41

$$x_{i-1}(n) = x_i(n) - K_i u_{i-1}(n-1)$$

$$u_i(n) = K_i x_{i-1}(n) + u_{i-1}(n-1)$$

Поэтому:

$$y(n) = x_1(n) - K_1 y(n-1)$$

$$u_1(n) = K_1 y(n) + y(n-1)$$

и далее

$$x_1(n) = x_2(n) - K_2 u_1(n-1)$$

$$u_2(n) = K_2 x_1(n) + u_1(n-1)$$

Рекурсивный решетчатый фильтр имеет только полюса в Z-плоскости. Решетчатые фильтры слабочувствительны к погрешностям коэффициентов в отличие от других типов фильтров.

Фильтры, изменяющие частоту дискретизации

Характерная особенность: различная скорость потока данных на входе и выходе.

Применения:

- преобразование частоты дискретизации между цифровыми аудиосистемами;
- узкополосные ФНЧ и полосовые фильтры;
- сжатие полосы частот при цифровой обработке речевых сигналов;
- трансмультиплексоры (преобразование ВРК-ЧРК);
- квадратурная модуляция;

- восстанавливающие и ограничивающие фильтры в цифровых аудиосистемах;

- узкополосный анализ спектра в сонарных системах и вибрационном анализе.

Основные операции: прореживание и интерполяция.

Структурные схемы дециматоров (прореживателей)

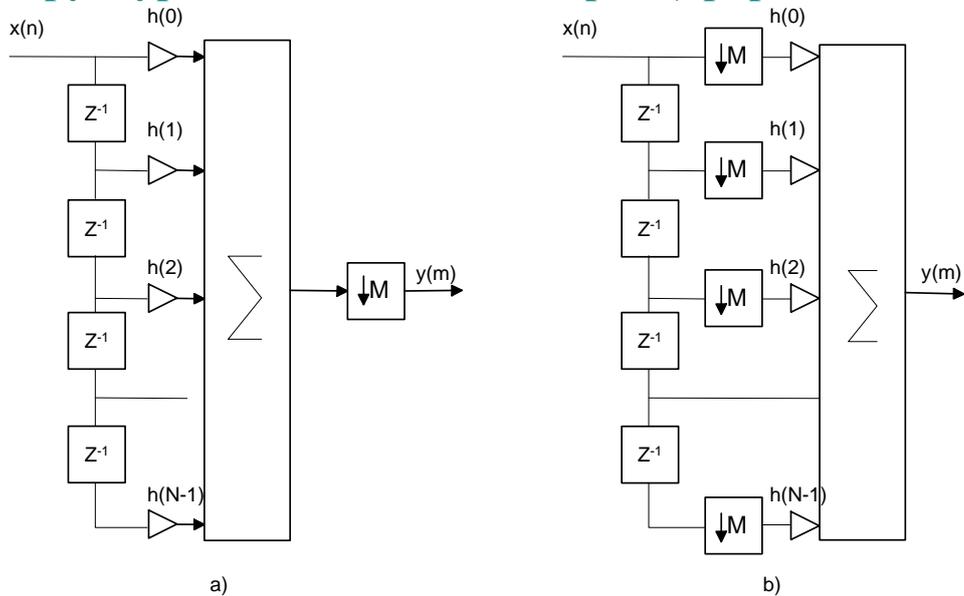


Рисунок 42

Структурная схема интерполятора

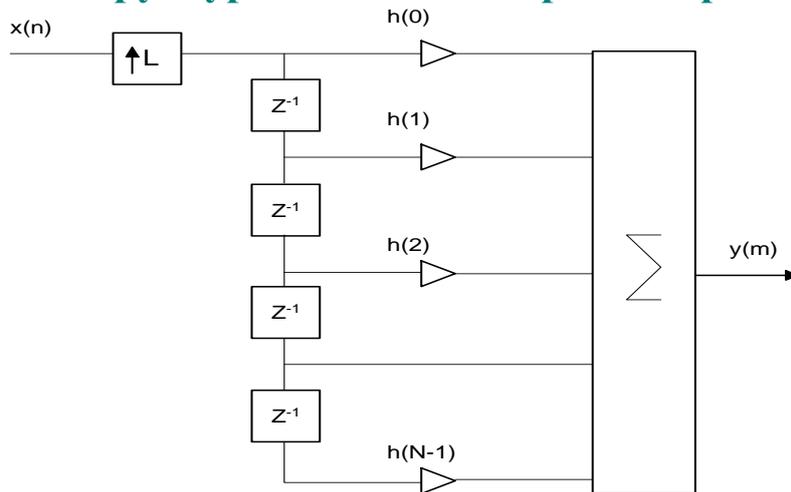


Рисунок 43

Общая характеристика КИХ-фильтров

Преимущества:

- абсолютно устойчивы;
- физически реализуемы;
- линейные ФЧХ, произвольные АЧХ;
- простой расчет шумов дискретизации;
- возможность использования БПФ.

Недостатки:

- большой порядок при высоких требованиях к скатам АЧХ.

Основные методы расчета:

- взвешивание;
- частотная выборка;
- оптимизация по Чебышеву.

Порядок расчета:

- аппроксимация АЧХ, расчет коэффициентов, выбор порядка;
- выбор схемы построения;
- расчет шумов квантования, выбор разрядности данных и коэф-тов;
- проверка моделированием.

Виды КИХ-фильтров с линейной фазой

$h(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ - отсчеты ИХ фильтра (действительные).

$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j\Theta(\omega)} \quad - \text{ ЧХ фильтра.}$$

$$\Theta(\omega) = -\alpha\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad - \text{ ЛФХ фильтра,}$$

$$\alpha = \text{const} \quad - \text{ фазовая задержка.}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \pm |H(e^{j\omega})| e^{-j\alpha\omega};$$

$$\text{Re: } \pm |H(e^{j\omega})| \cos \alpha\omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n,$$

$$\text{Im: } \pm |H(e^{j\omega})| \sin \alpha\omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n;$$

$$\frac{\text{Im}}{\text{Re}} : \frac{\sin \alpha\omega}{\cos \alpha\omega} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n}; \quad (*)$$

Тривиальное решение: $\alpha=0$; $0 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos \omega n}$;

$$h(n) = \begin{cases} h(0) - \text{ произвольное} \\ 0, \text{ при } n > 0 \end{cases}$$

Нетривиальное решение 1(*):

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \sin \alpha \omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \cos \alpha \omega ;$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\alpha - n)\omega] = 0 ;$$

Откуда:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n) \end{cases} .$$

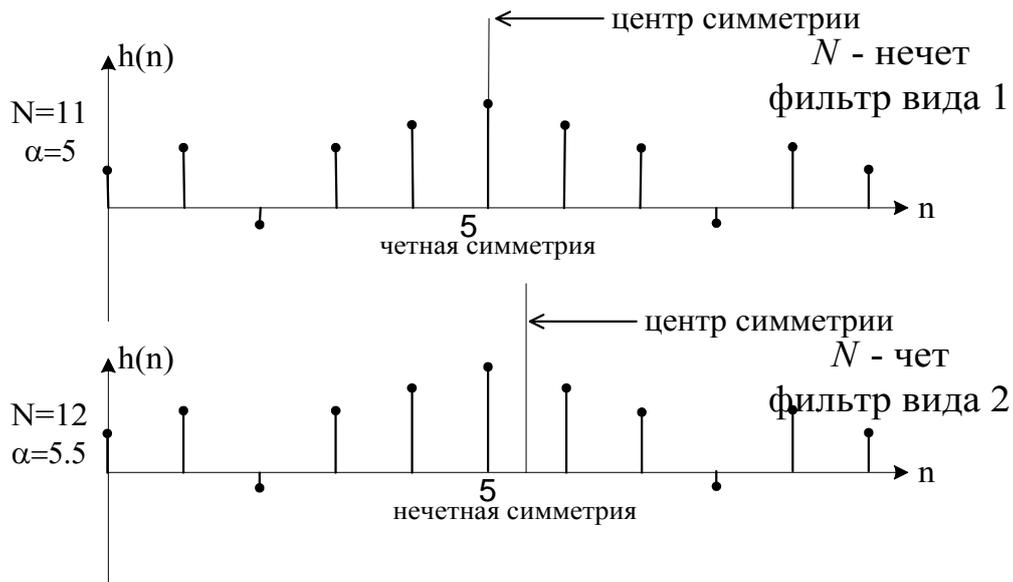


Рисунок 44

$$\Theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$$

$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j(\beta - \alpha\omega)}$$

Нетривиальное решение 2(*):

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

$$\beta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

Для нечетных N : $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$

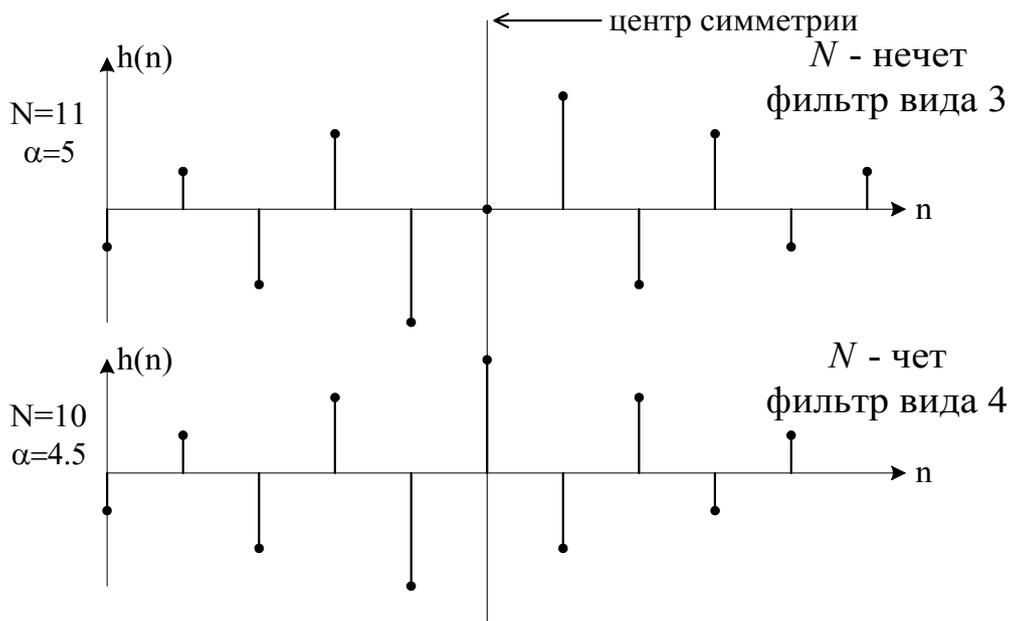


Рисунок 45

Импульсные и частотные характеристики КИХ-фильтров

Импульсная	Частотная
Вид 1 N - нечетно $h(n)$ - симметрична $h(n) = h(N-1-n)$; $n = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}$	$H(e^{j\omega}) = \exp\left[-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega\right] \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos \omega n$ $a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right); a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right); \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$
Вид 2 N - четно $h(n)$ - симметрична $h(n) = h(N-1-n)$ $n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$	$H(e^{j\omega}) = \exp\left[-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega\right] \cdot \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$ $b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right); \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$
Вид 3 N - нечетно $h(n)$ - антисимметр. $h(n) = -h(N-1-n)$ $n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}; \quad h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$	$H(e^{j\omega}) = -j \exp\left[-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega\right] \cdot \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin \omega n$ $c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right); \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$
Вид 4 N - четно $h(n)$ - антисимметр. $h(n) = -h(N-1-n)$ $n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$	$H(e^{j\omega}) = -j \exp\left[-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega\right] \cdot \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$ $d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right); \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$

Все ЧХ представимы в виде взвешенной суммы гармонических функций.

Частотная характеристика КИХ-фильтров

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega})e^{j(\beta-\alpha\omega)}$$

Симметричная ИХ

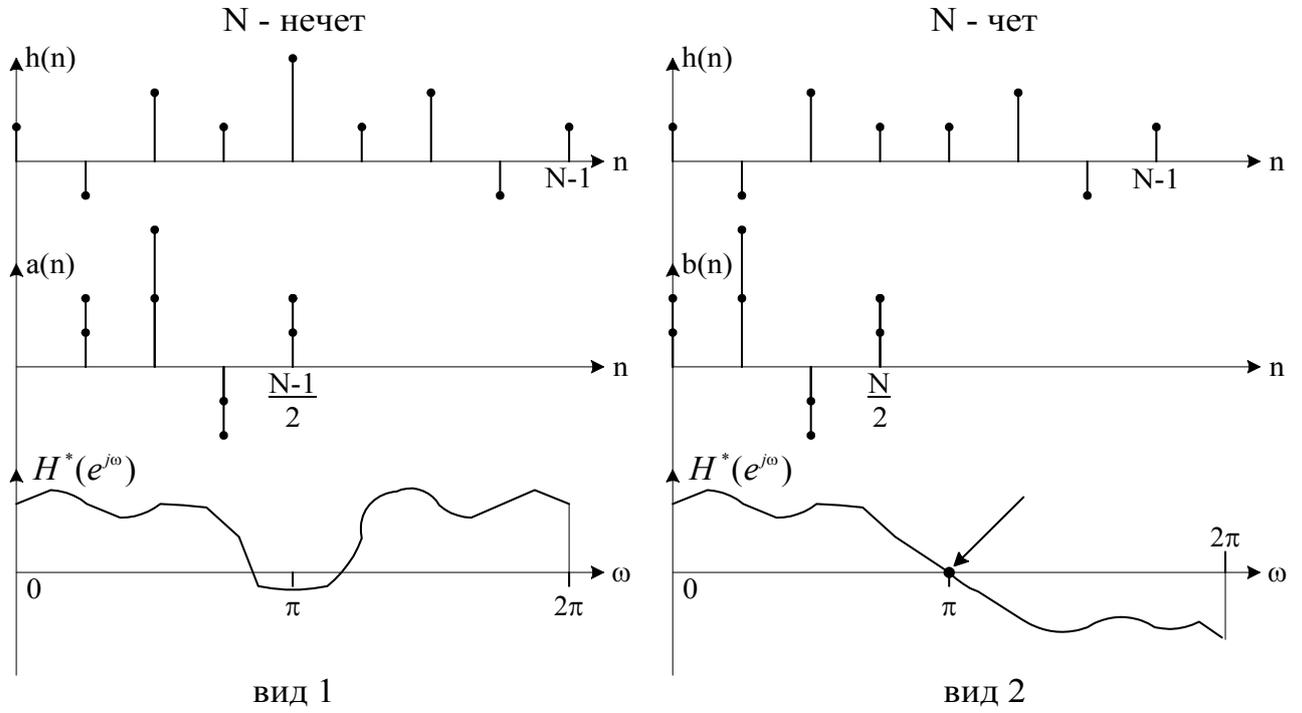


Рисунок 46

Антисимметричная ИХ

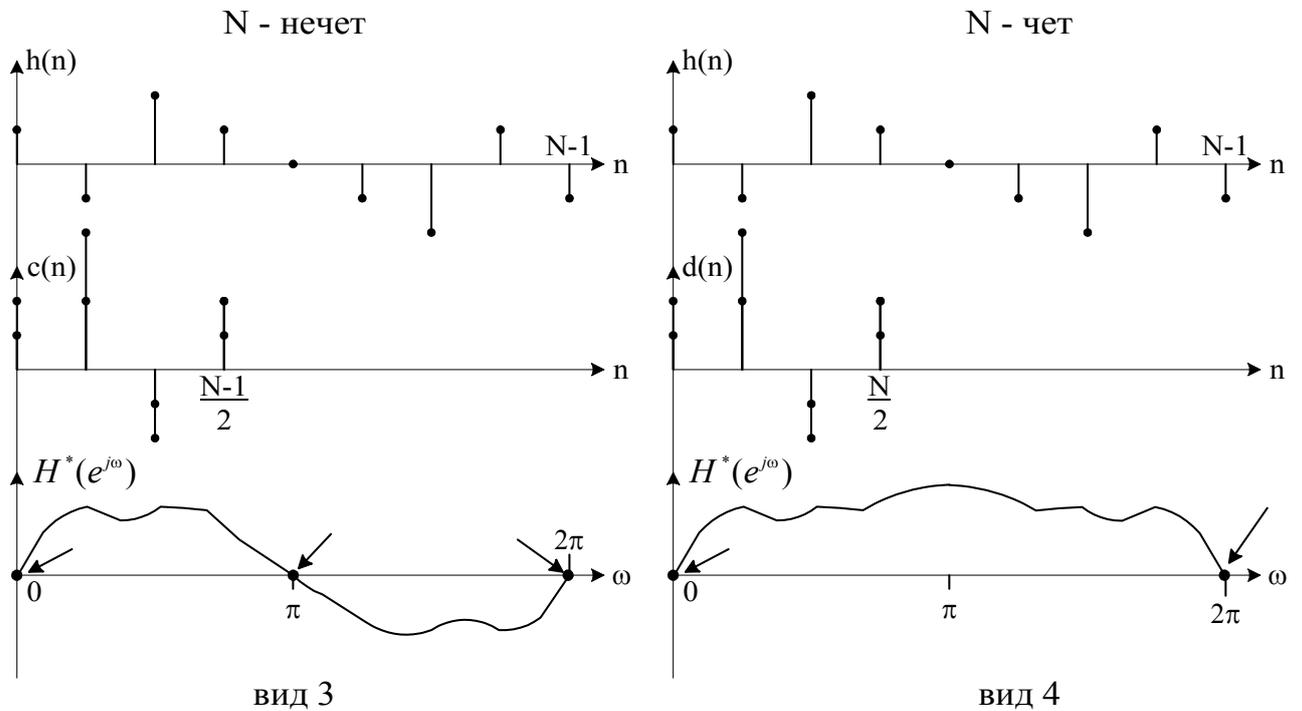


Рисунок 47

Проектирование КИХ-фильтров методом взвешивания

Заданы: требования к АЧХ фильтра:

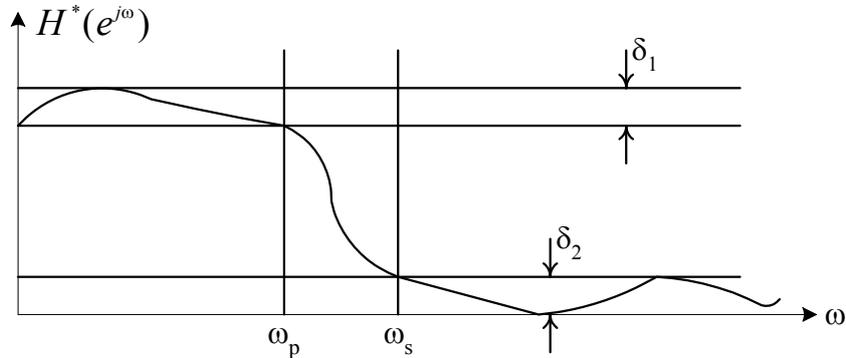


Рисунок 48

Определить: N - порядок;
 $h(n)$, $n=0, 1 \dots N-1$ - коэффициенты

Поскольку $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$,

то $h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ для $n=0, \pm 1, \pm 2 \dots$

полагая $H(e^{j\omega})$ идеальной, получаем 2 затруднения:

- $h(n)$ - бесконечна
- физически нереализуема
- усекаем до $\pm N/2$;
- сдвигаем на $N/2$ вправо.

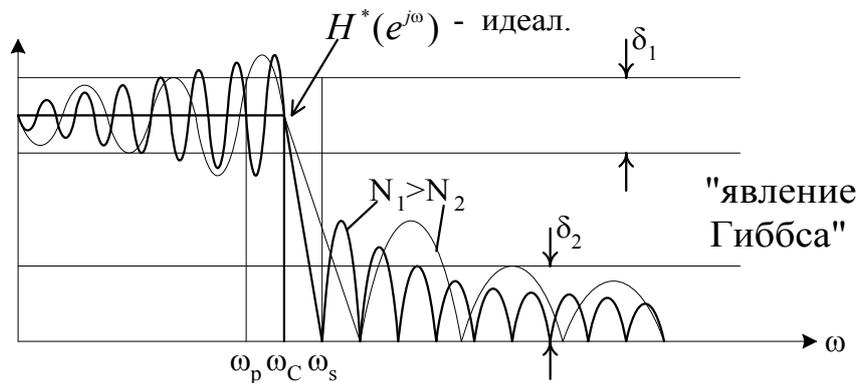


Рисунок 49

Использование "окон" $w(n)$, $-\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$ - для сглаживания пульсаций АЧХ.

Операции метода взвешивания:

Способ 1:

1. выбрать N и $w(n)$
2. вычислить $W(e^{j\omega})$
3. $\hat{H}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$
4. проверка $\delta_1, \delta_2, w_p, w_s$
5. $\hat{h}(n) = \text{ОБПФ}[\hat{H}(e^{j\omega})]$

Способ 2:

1. выбрать N и $w(n)$
2. $\hat{h}(n) = h(n) \cdot w(n)$
3. $\hat{H}(e^{j\omega}) = \text{БПФ}[\hat{h}(n)]$
4. проверка $\delta_1, \delta_2, w_p, w_s$

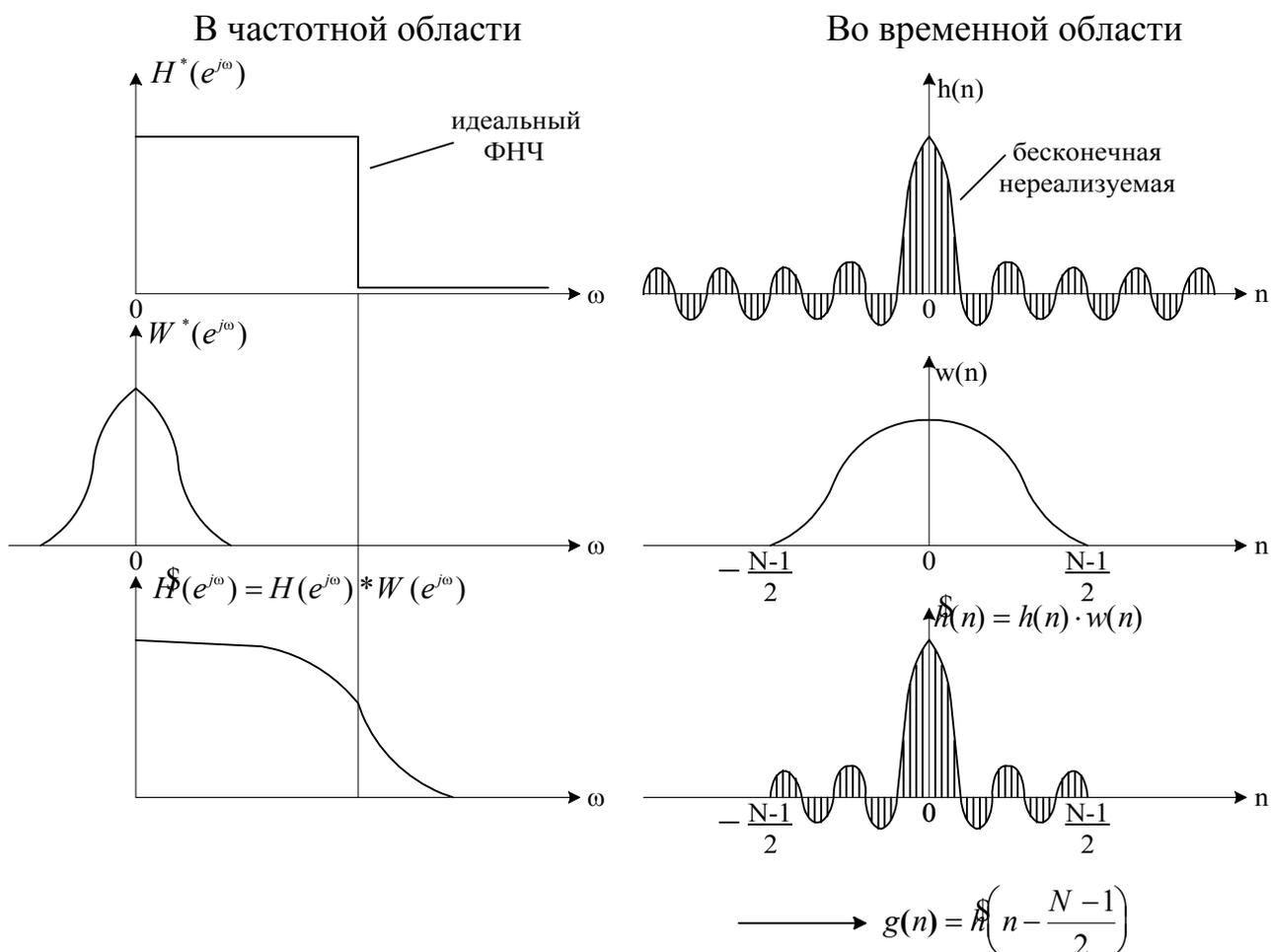


Рисунок 50

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ОКОН

Требования к окнам:

- минимальный уровень боковых лепестков (min пульсаций АЧХ фильтра);
- минимальная ширина главного лепестка АЧХ окна (min ширина переходной полосы фильтра).

1. Прямоугольное окно.

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}; \\ 0, & \text{остальные } N \end{cases}; W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega \frac{N}{2})}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

2. Обобщенное окно Хемминга.

$$w_H(n) = w_R(n) \left[\alpha + (1-\alpha) \cos \frac{2\pi n}{N} \right]$$

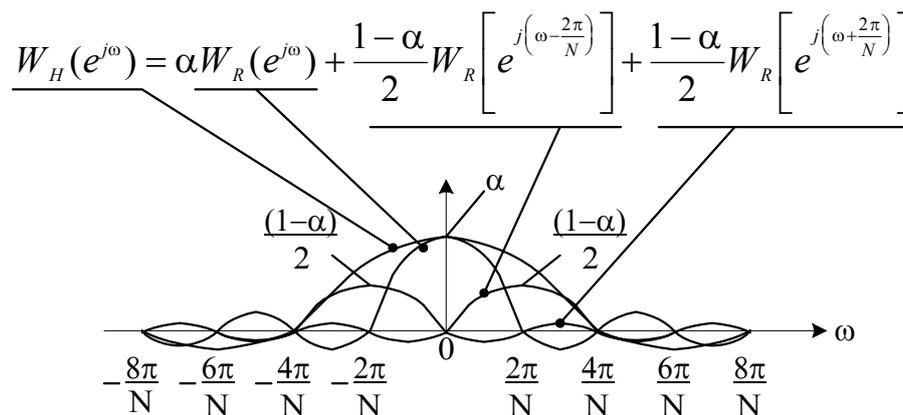


Рисунок 51

3. Окно Кайзера.

$$w_K(n) = \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left[\frac{2n}{N-1} \right]^2} \right)}{I_0(\beta)}; \quad W_K(e^{j\omega}) \sim \frac{\sin \left[\beta \sqrt{(\omega / \omega_\beta)^2 - 1} \right]}{\sqrt{(\omega / \omega_\beta)^2 - 1}}$$

4. Окно Ланцоша

$$w_L(n) = \left\{ \frac{\sin \left[\frac{2\pi n}{N-1} \right]}{\frac{2\pi n}{N-1}} \right\}^L$$

Весовые функции окон и их ЧХ

Весовые функции

Модуль ЧХ

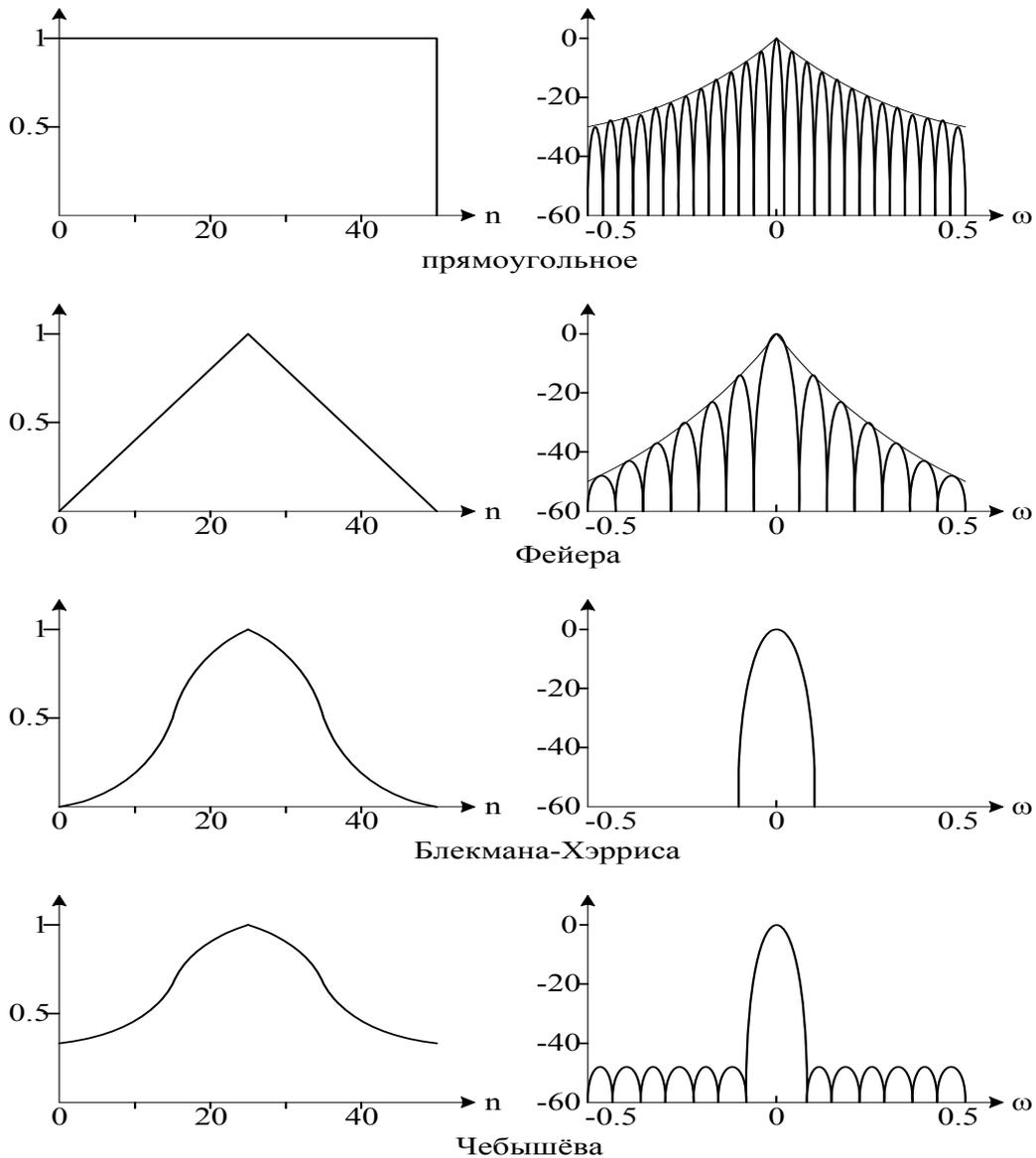


Рисунок 52

Вид окна	Максимальный уровень бокового лепестка, дБ	Асимптотическая скорость спада бокового лепестка, дБ/октава	Эквивалент ширины полосы
1. Прямоугольное	-13.3	-6	1.00
2. Треугольное	-26.5	-12	1.33

3. Ханна	-31.5	-18	1.50
4. Хемминга	-43	-6	1.36
5. Наттола	-98	-6	1.80
6. Гауссовское	-42	-6	1.39
7. Чебышёва	-50	0	1.39

Проектирование оптимальных КИХ-фильтров

Критерий оптимальности: Min. max. ошибки аппроксимации
 Вид аппроксимации ЧХ: Чебышевская ($\sum a(n) \cos \omega n$)
 Процедура оптимизации: Итерационный алгоритм замены

Аппроксимация ЧХ фильтра

$$H^*(e^{j\omega}) = Q(e^{j\omega})P(e^{j\omega})$$

Вид фильтра	$Q(e^{j\omega})$	$P(e^{j\omega})$
вид 1	1	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{a}(n) \cos \omega n$
вид 2	$\cos \frac{\omega}{2}$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{b}(n) \cos \omega n$
вид 3	$\sin \omega$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} \tilde{c}(n) \cos \omega n$
вид 4	$\sin \frac{\omega}{2}$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{d}(n) \cos \omega n$

$D(e^{j\omega})$ - заданная ЧХ фильтра (идеальная);

$W(e^{j\omega})$ - весовая функция ошибки аппроксимации.

Взвешенная функция ошибки аппроксимации

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) [D(e^{j\omega}) - H^*(e^{j\omega})]$$

т.к. $H^*(e^{j\omega}) = Q(e^{j\omega})P(e^{j\omega})$,

то $E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})Q(e^{j\omega}) \left[\frac{D(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})} - p(e^{j\omega}) \right]$

Обозначая: $\hat{W}(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})Q(e^{j\omega})$ и $\hat{D}(e^{j\omega}) = \frac{D(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})}$

Получим: $E(e^{j\omega}) = \hat{W}(e^{j\omega}) [\hat{D}(e^{j\omega}) - p(e^{j\omega})]$

критерий оптимальности

$$\max_{\omega \in A} |E(e^{j\omega})| \rightarrow \min_{\substack{\tilde{a}(n), \tilde{b}(n) \\ \tilde{c}(n), \tilde{d}(n)}}$$

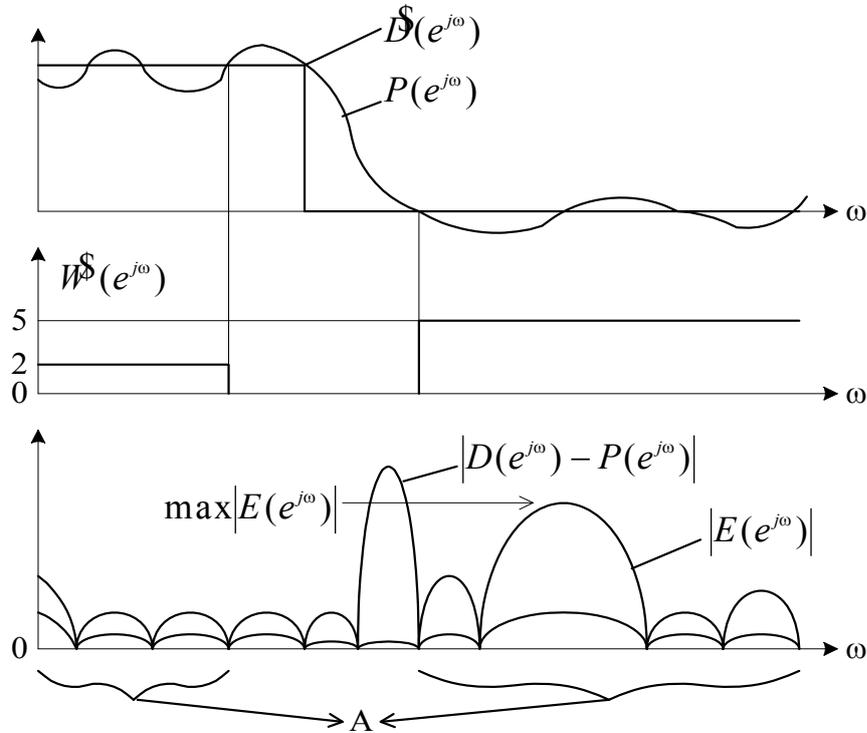


Рисунок 53

Теорема Чебышева

Если
$$P(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{r-1} a(n) \cos \omega n,$$

то необходимое и достаточное условие того, что $P(e^{j\omega})$ - наилучшая аппроксимация по минимальному критерию функции $\hat{D}(e^{j\omega})$, состоит в наличии не менее $r+1$ экстремума функции $E(e^{j\omega})$ в области A , т.е. для $w_1 < w_2 < w_3 \dots < w_{r+1}$

$$E(e^{j\omega_i}) = -E(e^{j\omega_{i+1}}), \quad i=1, 2 \dots r$$

и
$$|E(e^{j\omega})| = \max_{\omega \in A} E(e^{j\omega})$$

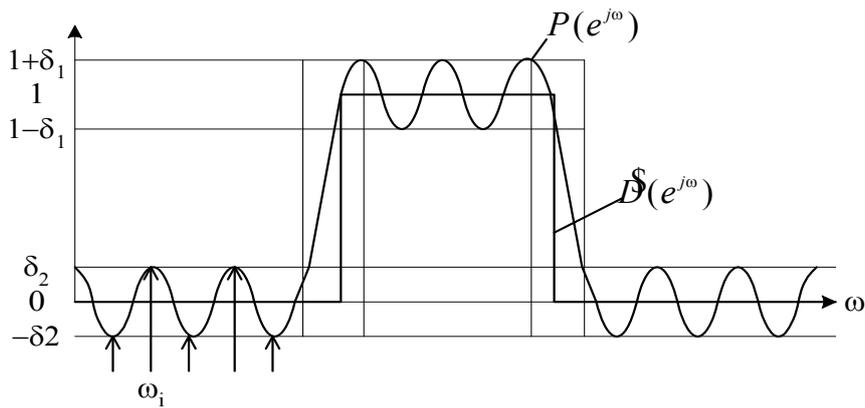


Рисунок 54

Решение задачи оптимизации

$$\begin{cases} H^*(e^{j\omega_i}) = \frac{\pm \delta_K}{W(e^{j\omega})} + D(e^{j\omega}) \\ \left. \frac{dH^*(e^{j\omega})}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

Сущность итерационного алгоритма :

Избежать решения системы нелинейных уравнений относительно экстремальных частот путем итерационной процедуры их уточнения и решения системы из $r+1$ линейных уравнений относительно r коэффициентов и погрешности δ .

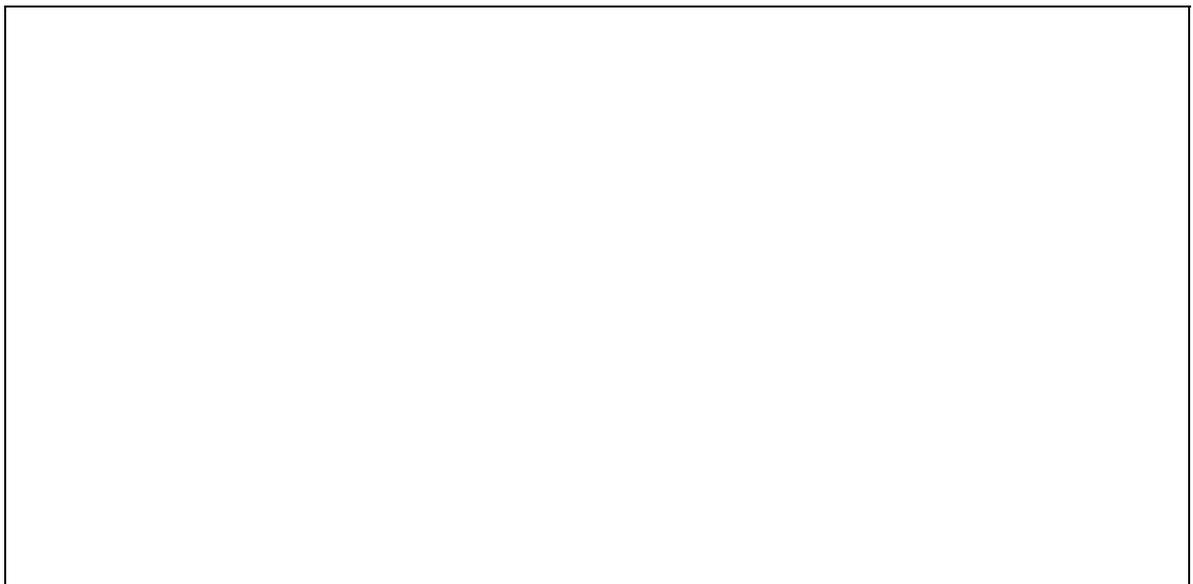


Рисунок 55

Свойства оптимальных ФНЧ

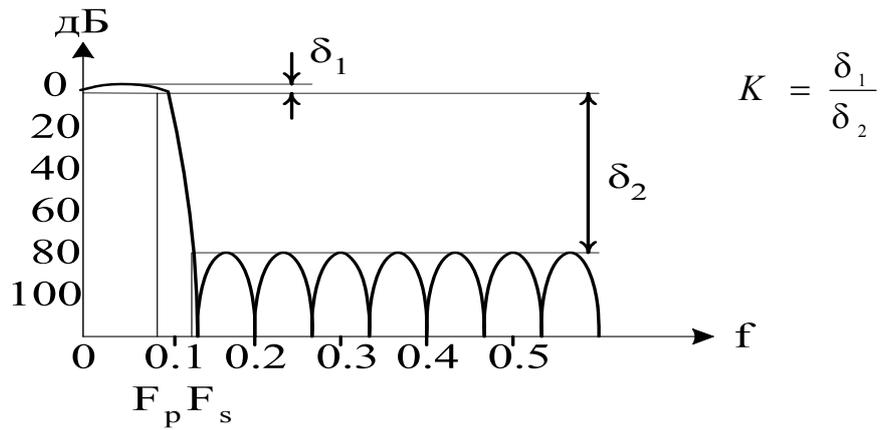


Рисунок 56

Параметры оптимального ФНЧ: N, F_p, F_s, k .

Ширина переходной полосы: $\Delta F = F_s - F_p$.

Оценка качества фильтра - нормированная ширина переходной полосы.

$$D = (N - 1)\Delta F$$

При $N \rightarrow \infty$ (>50) D не зависит от N .

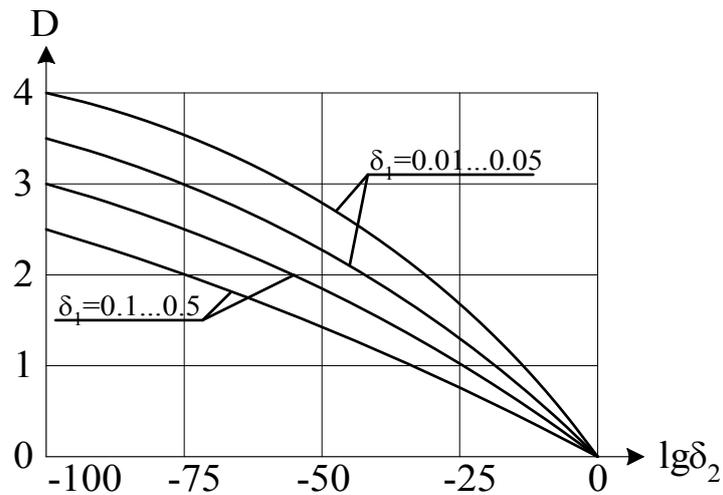


Рисунок 57

Сравнение КИХ ФНЧ, спроектированных разными методами

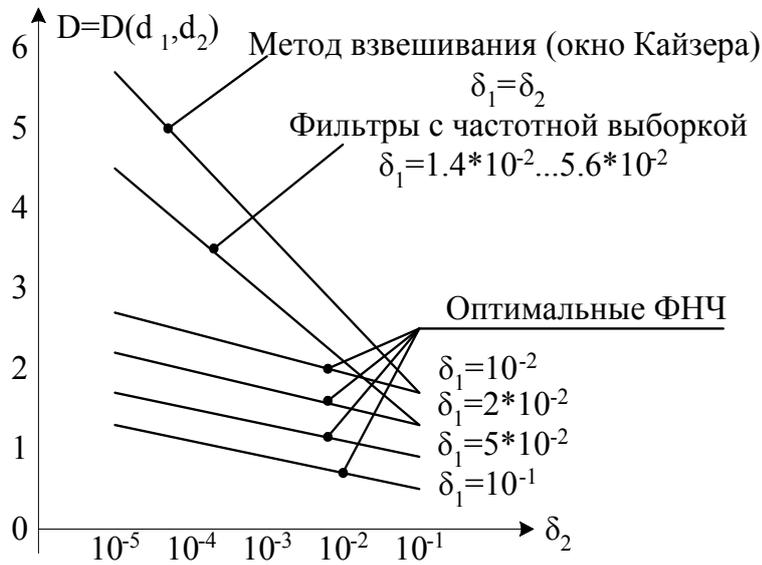


Рисунок 58

БИХ-фильтры с линейной ФЧХ

Метод 1

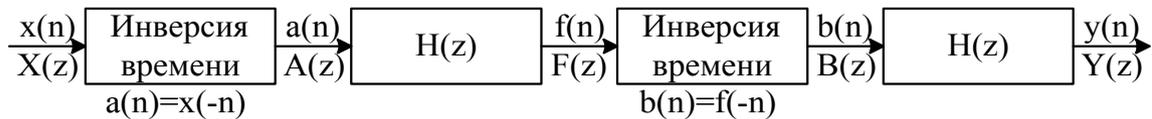


Рисунок 59

$$\begin{aligned}
 A(z) &= X(z^{-1}); \\
 F(z) &= H(z)A(z) = H(z)X(z^{-1}); \\
 B(z) &= F(z^{-1}) = H(z^{-1})X(z); \\
 Y(z) &= H(z)B(z) = X(z)H(z)H(z^{-1}); \\
 H_{\text{ЭКВ}}(z) &= Y(z) / X(z) = H(z)H(z^{-1}); \\
 H_{\text{ЭКВ}}(e^{j\omega}) &= |H(e^{j\omega})|^2; \quad \beta(e^{j\omega}) = 0.
 \end{aligned}$$

Метод 2

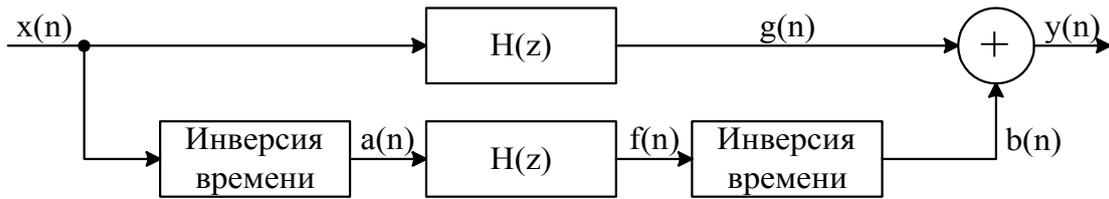


Рисунок 60

$$\begin{aligned}
 A(z) &= X(z^{-1}); & F(z) &= H(z)X(z^{-1}); \\
 B(z) &= F(z^{-1}) = H(z^{-1})X(z); \\
 G(z) &= H(z)X(z); \\
 Y(z) &= B(z) + G(z) = X(z)[H(z) + H(z^{-1})]; \\
 H_{\text{ЭКВ}}(z) &= H(z) + H(z^{-1}); \\
 H_{\text{ЭКВ}}(e^{j\omega}) &= 2|H(e^{j\omega})| \cos \varphi(\omega).
 \end{aligned}$$

Все пропускающие фильтры

Назначение: линеаризация ФЧХ.

Необходимое условие:

для каждого полюса

$$p = r e^{j\Theta}$$

должен существовать нуль

$$z = \frac{1}{r} e^{j\Theta}$$

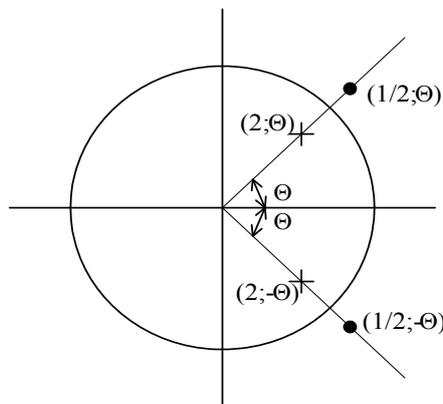


Рисунок 61

Нули и полюса все пропускающего фильтра с действительными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{\left[z - \frac{1}{2} e^{j\Theta} \right] \left[z - \frac{1}{2} e^{-j\Theta} \right]}{(z - r e^{j\Theta})(z - r e^{-j\Theta})} = \frac{z^2 - \frac{2}{r} z \cos \Theta + \frac{1}{r^2}}{z^2 - 2r z \cos \Theta + r^2} = \\
 &= \frac{r^2 z^2 - 2r z \cos \Theta + 1}{r^2 (z^2 - 2r z \cos \Theta + r^2)}
 \end{aligned}$$

$$H(e^{j\omega}) = \text{const}$$

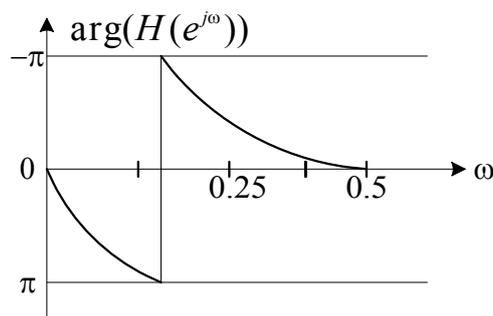


Рисунок 62

Классификация методов расчета БИХ фильтров

Задача аппроксимации $|H(e^{j\omega})|^2, \beta(e^{j\omega}), \tau_g(e^{j\omega})$ или $h(n)$ за счет выбора коэффициентов фильтра.

3 группы методов расчета:

- расчет ЦФ по фильтрам непрерывного времени;
- прямые методы расчета разложения и количества нулей и полюсов в Z -плоскости;
- оптимизация при наличии ограничений.

Расчет ЦФ по фильтрам непрерывного времени

Аналоговые фильтры-прототипы: Баттерворта, Чебышева I и II рода, Кауэра-Золотарева (эллиптические).

$$H(S) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i S^i}{\sum_{i=1}^N a_i S^i} = \frac{\prod_{i=0}^M (S + c_i)}{\prod_{i=1}^N (S + d_i)} \quad \text{-системная функция}$$

$$\sum_{i=0}^N a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^M b_i \frac{d^i x(\psi)}{dt^i} \quad \text{-дифференциальное уравнение}$$

Методы дискретизации аналоговых фильтров:

1. Отображение дифференциалов;
2. Инвариантного преобразования ИХ;
- 3. Билинейного преобразования;**
4. Согласованного Z -преобразования.

Условия однозначного преобразования аналоговых фильтров в цифровые

1. Ось $j\Omega$ должна отображаться в единичную окружность в Z -плоскости (сохранение частотно-избирательных свойств).
2. Левая полуплоскость S -плоскости должна отображаться внутрь единичной окружности (сохранение устойчивости)

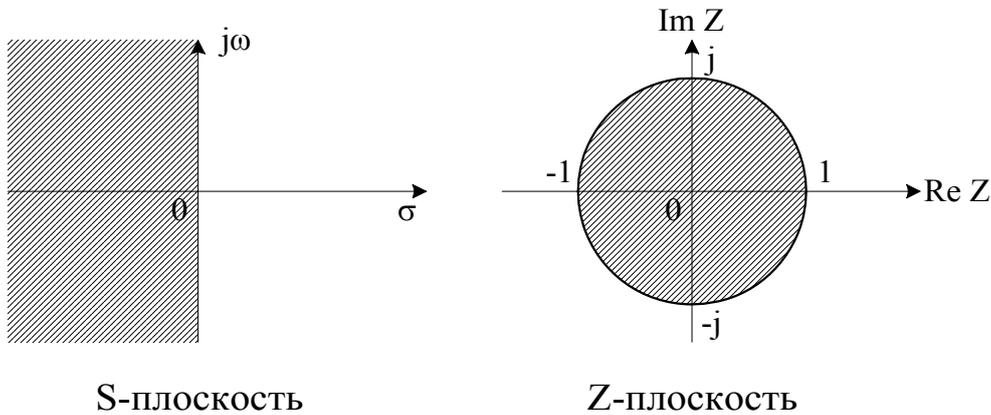


Рисунок 63

Условия 1 и 2 удовлетворяются отображением:

$$S = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} \text{ - билинейное преобразование.}$$

$$z = \frac{\frac{2}{T} + S}{\frac{2}{T} - S}$$

при $S = j\Omega$ - частотная ось S -плоскости:

$$z = \frac{\frac{2}{T} + j\Omega}{\frac{2}{T} - j\Omega} \Rightarrow |z| = 1 \quad \begin{matrix} \Omega \rightarrow 0, z \rightarrow 1 \\ \Omega \rightarrow \infty, z \rightarrow -1 \end{matrix} \quad \text{-1^{ое} условие выполняется.}$$

Полагая $S = \sigma + j\Omega$



при $\delta < 0, |z| < 1$. 2^{ое} условие выполняется.

Метод билинейного преобразования

Отображение S-плоскости в Z-плоскость

$$S = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Аналоговый фильтр с $H(S)$ преобразуется в цифровой с $H(z)$:

$$H(z) = H(S) \Big|_{S = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

1. Порядок знаменателя сохраняется, а порядок числителя может возрасти на 1.

Пример:

$$H(S) = \frac{1}{S+a}$$

$$H(z) = \frac{1}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a} = \frac{1+z^{-1}}{\frac{2}{T} + a + z^{-1} \left(a - \frac{2}{T} \right)}$$

Нуль $H(S)$ при $S \rightarrow \infty$ отображается в $z=-1$.

2. Нелинейное соотношение частот аналогового (Ω) и цифрового (ω) фильтров:

$$z = e^{j\omega T}; \quad S = j\Omega;$$

$$j\Omega = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}};$$

$$j\Omega = \frac{2}{T} \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}};$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}.$$

Недостаток: нелинейная связь частот аналогового и цифрового фильтров.

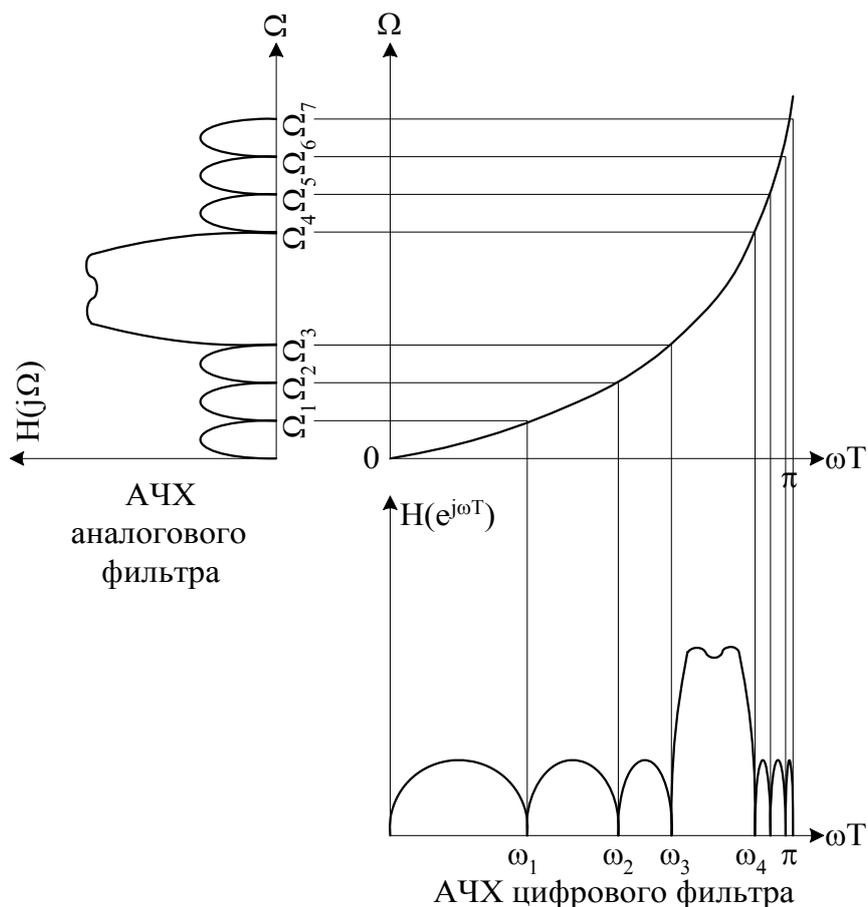


Рисунок 64

- для фильтров с почти ступенчатой ЧХ нелинейная связь частотных шкал может быть скомпенсирована;
- ни ФЧХ, ни импульсные характеристики аналогового и цифрового фильтра не совпадают.

Обзор аналоговых ФНЧ-прототипов

Фильтры Баттерворта

Свойства:

1. Максимально гладкая АЧХ вблизи начала координат;
2. Все полюсы на единичной окружности на одинаковом расстоянии друг от друга;
3. Порядок фильтра - единственный параметр при нормированной частоте среза.

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}; \quad |H(j1)|^2 = \frac{1}{2} \quad (-3\text{дБ});$$

$$n = \frac{\lg(A^2 - 1)}{2 \lg \Omega_t}; \quad A - \text{затухание на нормированной частоте } \Omega_t.$$

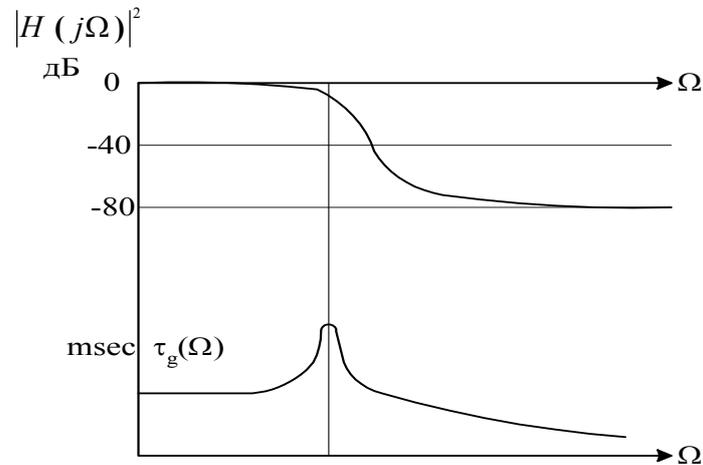


Рисунок 65

Фильтры Бесселя

Свойства:

1. Максимально гладкая характеристика групповой задержки в начале координат;
2. АЧХ и импульсная характеристика стремятся к гауссовской кривой при увеличении порядка;
3. Все полюсы на окружности с центром на действительной положительной полуоси;
4. Частота среза зависит от порядка.

$$H(S) = \frac{d_0 - \text{константа нормирования}}{B_n(S) - \text{функция Бесселя } n\text{-го порядка}}$$

$$d_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!}; \quad \Omega_c = \sqrt[n]{d_0} - \text{асимптотическая частота среза.}$$

Расчет корней - по таблице, на основании n и Ω_c .

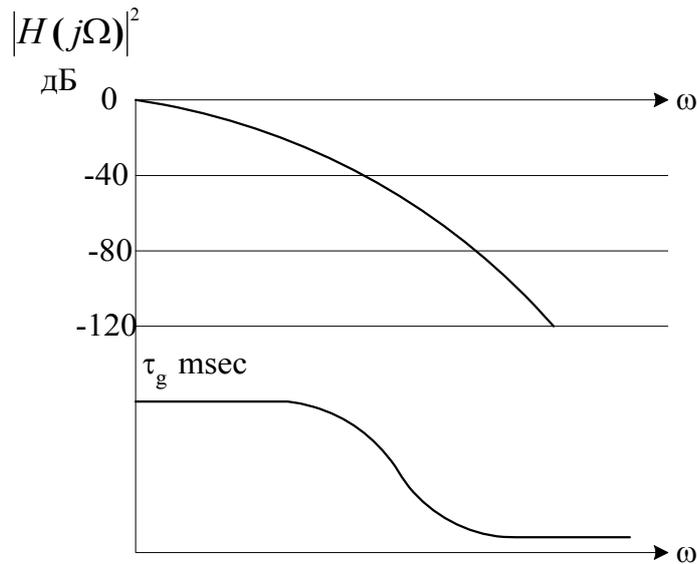


Рисунок 66

Фильтры Чебышева

Свойства:

1. I-го рода - имеют только полюсы, равновеликие пульсации в ПП, монотонное затухание в ПЗ.
2. II-го рода - равновеликие в ПЗ; монотонная характеристика в ПП; имеет нули и полюса.

Определяются 4-мя параметрами (3-мя):

n - порядок;

ε - неравномерность в полосе пропускания;

A - затухание в полосе задержки;

Ω_2 - частота, на которой достигается затухание A .

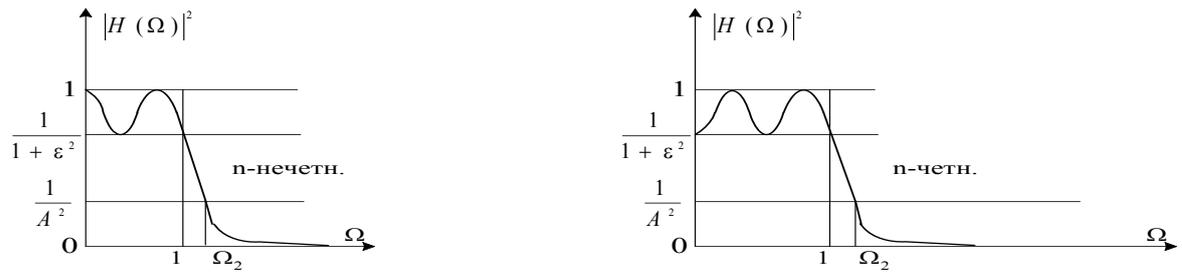
I род:
$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}$$
;

$$T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos \Omega), & \text{при } |\Omega| \leq 1 \\ \operatorname{ch}(n \cdot \operatorname{arcch} \Omega), & \text{при } |\Omega| > 1 \end{cases}$$

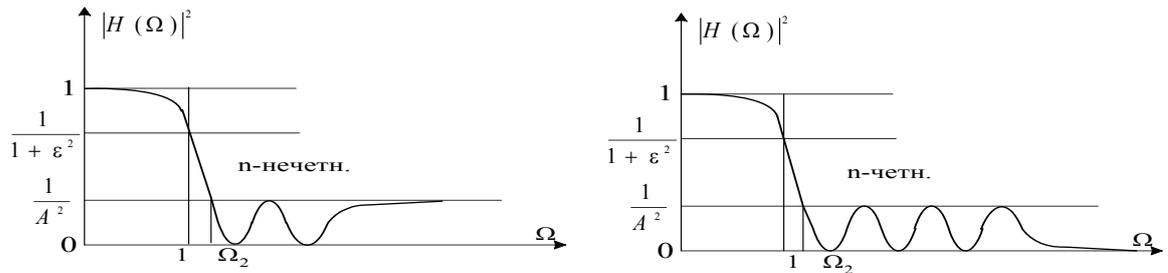
II род:
$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[\frac{T_n(\Omega_2)}{T_n(\Omega_2 / \Omega)} \right]^2}$$
;

Связь параметров:

$$n = \frac{\lg(g + \sqrt{g^2 - 1})}{\lg(\Omega_2 + \sqrt{\Omega_2^2 - 1})}; \quad \text{где } g = \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2}}.$$



I род



II род

Рисунок 67

Эллиптические фильтры (Кауэра-Золотарева)

Свойства:

1. Равновеликие пульсации в ПП и ПЗ;
2. Имеют min достижимую ширину переходной полосы при заданных пульсациях.

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\Omega, L)},$$

$R_n(\Omega, L)$ - рациональная функция Чебышёва n-го порядка.

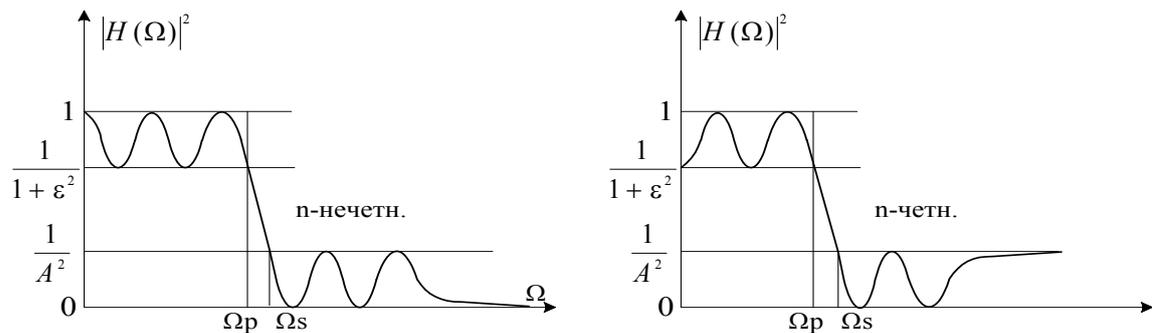
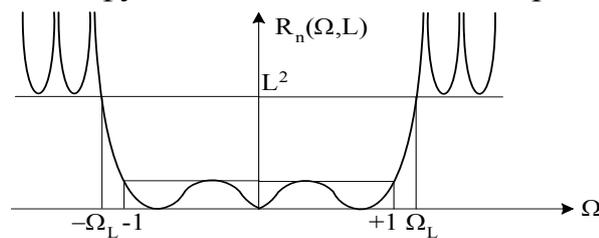
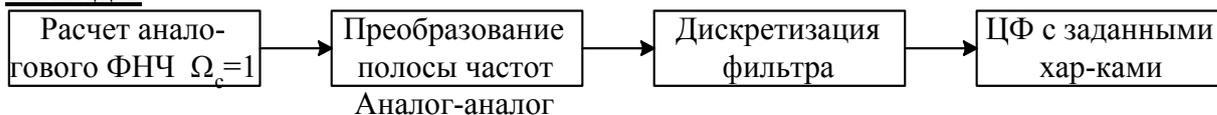


Рисунок 68

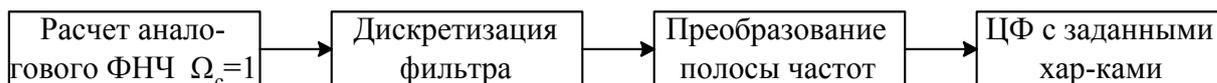
Частотные преобразования

Метод 1



Преобразование частот аналоговых фильтров

Метод 2



Преобразование частот цифровых фильтров

Рисунок 69

Преобразование полосы частот по методу 1

Вид преобразования	Замена переменной
1. ФНЧ → ФНЧ	$S \rightarrow S/\Omega_U$
2. ФНЧ → ФВЧ	$S \rightarrow \Omega_U/S$
3. ФНЧ → ПФ	$S \rightarrow \frac{S^2 + \Omega_U \Omega_L}{S(\Omega_U - \Omega_L)}$
4. ФНЧ → РФ	$S \rightarrow \frac{S(\Omega_U - \Omega_L)}{S^2 + \Omega_U \Omega_L}$

Ω_L - нижняя частота среза; Ω_U - верхняя частота среза.

Таблица соответствия частот при преобразовании ФНЧ-прототипа

Вид фильтра	частоты фильтра-прототипа			
	0	$-\omega_c$	$+\omega_c$	$\omega_s/2$
ФНЧ	0	$-\omega_u$	$+\omega_u$	$\omega_s/2$
ФВЧ	$\omega_s/2$	$+\omega_u$	$-\omega_u$	0
ПФ	$\pm\omega_o$	$\pm\omega_L$	$\pm\omega_u$	$\frac{0}{\omega_s/2}$
РФ	$\frac{0}{\omega_s/2}$	$\pm\omega_u$	$\pm\omega_L$	$\pm\omega_o$

Уровень пульсаций в полосе пропускания и полосе задержки не изменяется;

С теоретической и расчетной точки зрения оба метода равноценны.

Сравнение КИХ и БИХ-фильтров

Оптимальные КИХ-фильтры - эллиптические БИХ. На обработку 1 отсчета min:

$\left[\frac{N+1}{2} \right]$ - операций МАС для КИХ-фильтра N-го порядка;

$\left[\frac{3n+3}{2} \right]$ - операций МАС для БИХ-фильтра n-го порядка.

$\frac{3n+3}{2} = \frac{N+1}{2}$ - фильтры одинаковой сложности.

$$\frac{N}{n} \approx 3 + \frac{1}{n}$$

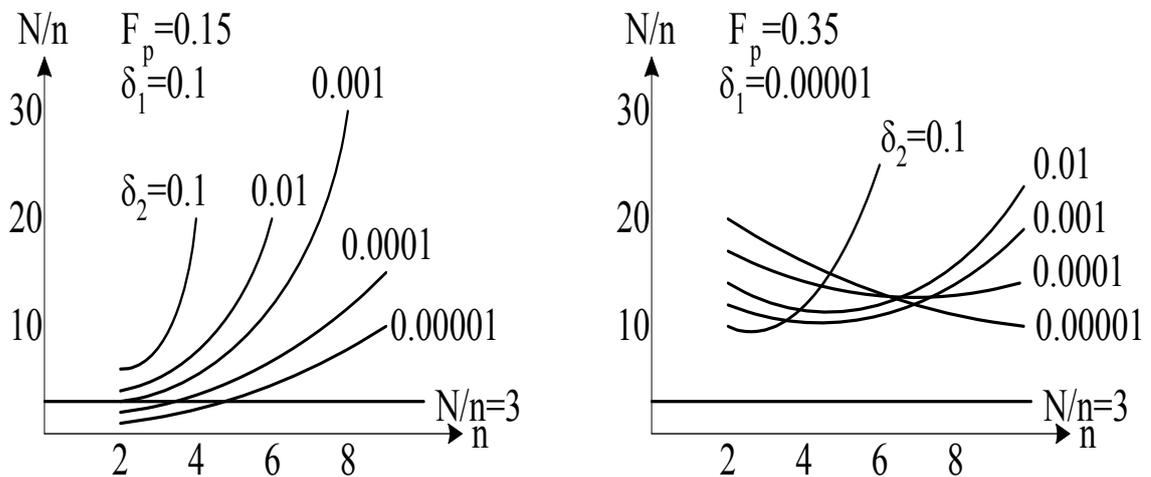


Рисунок 70

1. При $F_p > 0.3$ БИХ-фильтр лучше при любых δ_1, δ_2, n .
2. При $n \geq 7$ БИХ-фильтр лучше при любых δ_1, δ_2, F_p .
3. КИХ-фильтр лучше при большой δ_1 и малой δ_2 .
4. КИХ-фильтр лучше при линейной ФЧХ.