

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого»
Институт электронных и информационных систем

Кафедра алгебры и геометрии



С. Л. Эминов
30 » 10 2017 г.

ЧИСЛОВЫЕ СТРУКТУРЫ, ВЕРОЯТНОСТИ, СТАТИСТИКА
Учебный модуль по направлению подготовки
44.03.05 – Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профиль - Математика и информатика

Рабочая программа

СОГЛАСОВАНО

Начальник Учебного отдела

подпись О.Б. Широколобова
И.О. Фамилия

30 10 2017 г.
число месяц

Разработал
Доцент каф. АГ


13 06 2017 г. Н.В. Неустроев

Принято на заседании кафедры АГ
Протокол № 10 от 14.06 2017 г.
Заведующий кафедрой


14 06 2017 г. Т.Г. Сукачева

1 Цели и задачи учебного модуля

Цели учебного модуля (УМ): формирование компетентности студентов в овладении математической и логической культурой теории чисел, числовых систем и теории вероятностей, позволяющей в дальнейшем успешно изучать основные математические дисциплины.

Задачи УМ: Задачи, решение которых обеспечивает достижение цели:

- формирование у студентов системы знаний по темам «Элементы теории делимости целых чисел», «Элементы теории сравнений в кольце целых чисел», «аксиоматические теории натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел», «случайные события», «случайные величины», «элементы математической статистики»;
- овладение основными понятиями тем «Элементы теории делимости целых чисел», «Элементы теории сравнений в кольце целых чисел», «аксиоматические теории натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел», «случайные события», «случайные величины», «элементы математической статистики»;
- формирование умений решать типовые задачи по темам «Элементы теории делимости целых чисел», «Элементы теории сравнений в кольце целых чисел», «аксиоматические теории натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел», «случайные события», «случайные величины», «элементы математической статистики»;
- актуализация способности студентов использовать знания при решении реальных (смоделированных) математических задач;
- стимулирование студентов к самостоятельной деятельности по освоению дисциплины и формированию необходимых компетенций.

2 Место учебного модуля в структуре ОП направления подготовки

Модуль «Числовые структуры, вероятности, статистика» входит в модули по выбору. Изучается в 5 семестре, базируется на материале школьного курса математики, модуле «Линейная алгебра», «Дискретная математика и алгебраические структуры», Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной», « Функции нескольких вещественных переменных».

Базовые знания, полученные при изучении данного курса, используются при освоении модулей вариативной части и модулей по выбору.

3 Требования к результатам освоения учебного модуля

Процесс изучения УМ направлен на формирование компетенции:

СК-1 Способность демонстрировать знания, умения и навыки в области математики и информатики и применять их в научно-исследовательской и педагогической деятельности

В результате освоения УМ студент должен знать, уметь и владеть:

Код компетенции	Уровень освоения компетенции	Знать	Уметь	Владеть
СК-1	базовый	историю развития арифметики и теории чисел; основополагающие факты теории чисел лежащие в основе построения	– решать основные типы теоретико-числовых задач и задач по теории вероятностей и математической статистики;	навыками решения основных типов теоретико-числовых задач и задач по теории вероятностей и

		математики, базовые понятия и факты теории вероятностей математической статистики; арифметические приложения теории сравнений; основные подходы к определению натуральных, рациональных, действительных, комплексных чисел (аксиоматический, теоретико-множественный и конструктивный), аксиоматику Пеано и Евклида; аксиоматический подход к построению классических числовых систем (натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные числа); структуру и свойства классических числовых систем, логику их взаимосвязи и взаимозависимости ; взаимосвязь между аксиоматическим построением числовых систем и построением числовых множеств в школьном курсе математики	– применять полученные знания при решении практических задач профессиональной деятельности; – решать практические задачи, связанные с использованием свойств числовых множеств; – доказывать свойства аксиоматических теорий: независимость аксиом, категоричность и непротиворечивость ; – применять полученные знания к практическим задачам профессиональной деятельности	математической статистики; основными теоретико-числовыми методами и методами теории вероятностей и математической статистики; базовыми приемами современных теоретико-числовых приложений и базовыми понятиями теории вероятностей и математической статистики; – методом математической индукции для доказательства свойств натуральных чисел; основами аксиоматического метода на примере построения классических числовых систем основными методами и приемами решения типовых задач;
--	--	--	---	---

4 Структура и содержание учебного модуля

4.1 Трудоемкость учебного модуля

В структуре УМ выделены два учебных элемента модуля (УЭМ) в качестве самостоятельных разделов

Учебная работа (УР)	Всего	Распределение по семестрам	Коды формируемых компетенций
		5	
Трудоемкость модуля в зачетных единицах (ЗЕТ)	9	9	
Распределение трудоемкости по видам УР в академических часах (АЧ):			
1) УЭМ 1 <i>Теория чисел и числовые системы</i>			СК-1
- лекции	36	36	
- практические занятия (семинары)	60	60	
- лабораторные работы			
- аудиторная СРС	24	24	
- внеаудиторная СРС	96	96	
2) УЭМ 2 <i>Вероятности и статистика</i>			СК-1
- лекции	18	18	
- практические занятия (семинары)	30	30	
- лабораторные работы			
- аудиторная СРС	12	12	
- внеаудиторная СРС	48	48	
Аттестация:			
- экзамен	36	36	

4.2 Содержание и структура разделов учебного модуля

УЭМ 1 Теория чисел и числовые системы

1.1 Элементы теории делимости целых чисел.

1.2 Элементы теории сравнений в кольце целых чисел.

1.3 Аксиоматические теории натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел.

УЭМ 2 Вероятности и статистика

2.1 Случайные события

2.2 Случайные величины

2.3 Элементы математической статистики

Календарный план, наименование разделов учебного модуля с указанием трудоемкости по видам учебной работы представлены в технологической карте учебного модуля (приложение Б).

4.3 Организация изучения учебного модуля

Образовательный процесс по модулю формируется с использованием технологии модульно–рейтингового обучения.

Реализация интегральной модели образовательного процесса по модулю предполагает использование следующих технологий стратегического уровня (задающих организационные формы взаимодействия субъектов образовательного процесса), осуществляемых с использованием определенных тактических процедур:

- лекционные (вводная лекция, информационная лекция, проблемная лекция; обзорная лекция; рефлексия);
- практические (моделирование; работа в малых группах);
- самоуправления (самостоятельная работа студентов) (работа с источниками по темам дисциплины, моделирование процессов, выполнение индивидуальных заданий).

Рекомендуется использование информационных технологий при организации коммуникации со студентами для представления информации, выдачи рекомендаций и консультирования по оперативным вопросам (электронная почта), использование мультимедиа средств при проведении лекционных и практических занятий.

5 Контроль и оценка качества освоения учебного модуля

Контроль качества освоения студентами УМ и его составляющих осуществляется непрерывно в течение всего периода обучения с использованием балльно-рейтинговой системы (БРС), являющейся обязательной к использованию всеми структурными подразделениями университета.

Для оценки качества освоения модуля используются формы контроля: текущий – регулярно в течение всего семестра; рубежный – на девятой неделе семестра; семестровый – по окончании изучения УМ.

Оценка качества освоения модуля осуществляется с использованием фонда оценочных средств, разработанного для данного модуля, по всем формам контроля в соответствии с положением от 27.09.2011 № 32 «Об организации учебного процесса по основным образовательным программам высшего профессионального образования».

Содержание видов контроля и их график отражены в технологической карте учебного модуля (Приложение Б).

6 Учебно-методическое и информационное обеспечение учебного модуля представлено **Картой учебно-методического обеспечения** (Приложение В)

7 Материально-техническое обеспечение учебного модуля

Реализация учебного модуля требует наличия учебной аудитории, оборудованной:

- посадочными местами по количеству обучающихся;
- рабочим местом преподавателя;
- методическими материалами (включая электронные): комплект учебно-методических пособий по разделам модуля.

Технические средства обучения

Word, MS Excel.

Приложения (обязательные):

А – Методические рекомендации по организации изучения учебного модуля

Б – Технологическая карта

В – Карта учебно-методического обеспечения УМ

Приложение А
(обязательное)

**Методические рекомендации по организации изучения учебного модуля
«Числовые структуры, вероятности, статистика»**

УЭМ 1 Теория чисел и числовые системы

1.1 Элементы теории делимости целых чисел

Замечательный английский математик Г.Х. Харди утверждал, элементарную теорию чисел следует считать одним из лучших предметов для первоначального математического образования. Она требует очень мало предварительных знаний, а предмет ее понятен и близок; методы рассуждений, принимаемые, ею просты, общи и немногочисленны; среди математических наук нет равной ей в обращении к естественной человеческой любознательности. Действительно, многие вопросы ставятся настолько конкретно, что обычно допускают «экспериментальную» числовую проверку; многие достаточно глубокие проблемы допускают наглядную интерпретацию (например, нахождение «пифагоровых троек»). К тому же элементарная теория чисел наилучшим образом сочетает дедуктивное и интуитивное. Что весьма важно в преподавании математики. Теория чисел дает ясные и точные доказательства и теоремы безукоризненной строгости, формирует математическое мышление и способствует приобретению навыков, полезных в любой отрасли математики. Зачастую решение ее задач требует преодоления значительных трудностей, математической изобретательности, отыскания новых методов и идей, находящих продолжение в современной математике. В пользу изучения теории чисел говорит и то, что при всяком сколько-нибудь глубоком математическом исследовании в разных областях мы часто наталкиваемся на сравнительно простые теоретико-числовые факты.

Теория чисел является наукой о числовых системах с их связями законами. При этом в первую очередь уделяется внимание числам натурального ряда, которые являются основой для построения других числовых систем: целых, рациональных и иррациональных, действительных и комплексных, кватернионов и других гиперкомплексных чисел. Одной из основных задач теории чисел является изучение свойств целых чисел. Основной объект теории чисел – натуральные числа. Главное их свойство – делимость. Теория чисел изучает числа с точки зрения их строения и внутренних связей. Она рассматривает возможность представить одни числа через другие, более простые по своим свойствам, вопросы же строгого логического обоснования понятия натурального числа и его обобщений, а также связанная с ними теория действий рассматривается отдельно в основаниях арифметики или в курсе «Числовые системы».

В качестве применения теоремы о делении с остатком следует рассмотреть представление обыкновенной дроби в любой данной системе счисления, а в качестве применения алгоритма Евклида – представление НОД(a, b) в виде линейной комбинации, решение неопределенных уравнений, представление рациональных чисел в виде цепной дроби. При изучении цепных дробей следует познакомить студентов с алгоритмом Эйлера разложения любого действительного числа в цепную дробь и рассмотреть примеры разложения квадратичной иррациональности в цепную дробь.

Бесконечность множества простых чисел в прогрессиях $(4n-1)$ и $(6n-1)$ следует рассмотреть немедленно после доказательства теоремы о бесконечности множества простых чисел; бесконечность множества простых чисел вида $(4n+1)$ и $(6n+1)$ - после изучения простейших свойств символа Лежандра. Неравенства Чебышева могут быть даны без доказательства, вопрос об асимптотическом законе распределения – в историческом плане.

1.2 Элементы теории сравнений в кольце целых чисел

Приведение сравнения по составному модулю к сравнениям по степени простого и сравнений простого к сравнению по составному модулю можно рассматривать на примерах. Здесь же определяется символ Лежандра и доказываются его простейшие свойства. Закон

взаимности квадратичных вычетов можно дать без доказательства. В качестве арифметических приложений теории сравнений следует рассмотреть применения сравнений к выводу признаков делимости, к проверке арифметических действий, к нахождению остатков от деления с помощью теорем Эйлера и Ферма, к нахождению длины периода периодической систематической дроби при помощи свойств индексов.

Рассмотреть обзорно и на примерах приложения теории чисел в криптографии: сложность арифметических операций, проверка чисел на простоту, дискретное логарифмирование, криптосистемы с закрытым и открытым ключом, атаки на криптосистемы.

1.3 Числовые системы

Числа изучаются в школе, именно там закладываются интуитивные представления об их свойствах. В курсе «Числовые системы» интуитивные знания о числах переводятся на твердую основу доказательств, исходя из аксиом. В данной дисциплине рассматриваются натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные числа и кватернионы, доказываемая, что если представление о числе ограничить определенными рамками, то других чисел нет.

Программа предусматривает максимальную ориентацию изложения на школу, на обоснование школьных утверждений о числах, так, например, в теме «Натуральные числа» - индуктивные доказательства и определения в школе. В связи с этим изложение материала полезно сопровождать анализом соответствующих тем школьных учебников.

Некоторые темы можно изложить обзорно, заостря внимание лишь на узловых моментах. В то же время, следует обстоятельно показать из каких соображений появляется аксиоматическое определение каждой числовой системы, и особенно тщательно доказать те свойства чисел, которые приводятся в школе. Так, исходя из аксиоматического определения той или иной числовой системы, доказываются привычные свойства чисел. Кроме того, обосновываются такие важные для школы понятия как доказательства по индукции, индуктивные определения, понятия конечного множества, деление с остатком, десятичная запись целого числа, однозначная представление десятичной дробью сначала рационального, а затем и произвольного действительного числа. Рассматривается понятие степени с натуральным, целым, рациональным и произвольным действительным показателями, вводятся логарифмы. При переходе к каждой новой числовой области указываются причины, вызывающие появление новых чисел. Уточняя привычное представление о единственности каждой числовой системы, доказываемая, что она единственна с точностью до изоморфизма, то есть две одноименные числовые системы могут отличаться друг от друга лишь обозначениями элементов, операций и отношений.

Практические занятия по данному курсу рекомендуется начать с повторения и углубления понятий, знакомых студенту из дисциплин «Алгебра» и «Теория чисел», и используемых при построении конкретных числовых систем. Для этой цели следует рассматривать фрагменты таких систем и их моделей, решать задачи, связанные с выяснением вопросов, какими свойствами обладают эти системы и их модели. Например, является ли рассматриваемое отношение отношением эквивалентности (изоморфизма, гомоморфизма) и почему? Является ли рассматриваемая алгебраическая система группоидом, полугруппой (группой, кольцом, полем) и почему? Установленные таким путем свойства позволяют существенно сократить время на построение соответствующих моделей, а саму идею и схему построения моделей сделать более отчетливой.

УЭМ 2 Вероятности и статистика

В настоящее время некоторые вопросы теории вероятностей и математической статистики включены в школьную программу 9 класса, поэтому возрастает необходимость будущим учителям изучить этот предмет. Необходимо при изложении материала уделять внимание методике преподавания того или иного вопроса, больше приводить практических примеров из жизни.

Преподавание теории вероятностей и математической статистики всегда связано с объективными трудностями. Отсутствие вычислительных навыков у студентов (в плане решения комбинаторных задач, вычисления определенных и несобственных интегралов, обработки массивов данных), крайне малое количество аудиторных часов (особенно на практику) плюс некоторая громоздкость и сложность доказательств основных положений и теорем теории вероятностей ставит перед преподавателем непростую задачу. Отрицательно сказывается и тот факт, что в отличие от большинства математических дисциплин, термины из теории вероятностей часто мелькают в СМИ, как правило, в абсолютно неверном значении, что формирует ошибочные представления о них и приводит к отторжению на подсознательном уровне новой информации, закладываемой преподавателем дисциплины. Поэтому большая часть усилий преподавателя, ведущего курс теории вероятностей и математической статистики, должна быть сосредоточена на преодолении указанных трудностей.

В этой связи теоретический материал на лекциях рекомендуется давать в максимально упрощенной форме, по возможности, жертвуя строгими формальными доказательствами, останавливаясь лишь на главных идеях этих доказательств (с отсылкой к учебникам, в которых они изложены во всей полноте). Кроме того, обязательно следует иллюстрировать теоретический материал многочисленными примерами к каждому новому определению или свойству.

На практических занятиях рекомендуется отрабатывать со студентами не менее, чем по 3-4 примера по каждому из видов заданий, предлагаемых на контрольных работах. Кроме того, в решении практических задач целесообразно постоянно обращаться к лекционному материалу, прививая у студентов навык работы с источниками.

2.1 Случайные события

Раскрывая тему «Основные понятия теории вероятностей» на лекциях, следует акцентировать внимание студентов на различии между определенностью и случайностью, дать определение вероятности случайного события, описать 4 способа определения вероятности (классическая, статистическая, геометрическая, субъективная); на практике следует основное внимание уделить различиям между способами выбора, комбинаторным формулам и вычислению классической вероятности.

В теме «Аксиоматика теории вероятностей» необходимо особо выделить два основных свойства вероятности. С этой целью рекомендуется разобрать на практике пример с заданными значениями вероятностей событий, приводящий после вычислений к значениям, нарушающим основные свойства. Обсуждая теоремы сложения и умножения вероятностей, полезно детально разобрать как общие, так и частные случаи данных теорем (для несовместных и независимых событий соответственно).

Разбирая тему «Следствия теорем сложения и умножения вероятностей», следует подчеркнуть разницу между условной и полной вероятностью события, ввести понятие гипотезы, обсудить зависимость между априорной и апостериорной вероятностями.

Рассказывая о повторных испытаниях и схеме Бернулли, необходимо акцентировать внимание на необходимом условии независимости испытаний. Вводя приближенные формулы Пуассона и Муавра-Лапласа, нужно четко разграничить области их применения (условия на n и p). Полезно на примере показать, что при большом n вычисления по формуле Бернулли становятся неудобными.

2.2 Случайные величины

В теме «Случайные величины» важно обсудить сходства и различия между дискретными и непрерывными случайными величинами, способами их задания, а также объяснить условность (абстрактность) непрерывных величин.

Тема «Числовые характеристики случайных величин» требует подробного разбора сущности понятий математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения, их свойств и способов вычисления в дискретном и непрерывном случаях.

Для тем «Некоторые важные распределения дискретных и непрерывных случайных величин», рекомендуется на практике в качестве примера вычислить со студентами числовые характеристики пуассоновского и показательного распределений, в качестве домашнего задания дать вычисление математического ожидания и дисперсии для биномиального и равномерного распределений, а характеристики остальных вводимых распределений дать без доказательств.

2.3 Элементы математической статистики

Раскрывая тему «Предмет и задачи математической статистики», важно обосновать необходимость выборочного обследования, раскрыть понятие репрезентативности выборки, обсудить условия применимости дискретного и интервального статистических рядов, графические способы задания выборки.

Рассказывая о статистических оценках параметров распределения, необходимо объяснить суть оценивания характеристики случайной величины по имеющейся выборке, связь между оцениваемыми величинами и их оценками, оговорить условия применимости точечных и интервальных оценок, ввести понятие надежности.

В теме «Элементы теории корреляции» следует объяснить суть понятия коррелированности двух величин, подробно остановиться на линейной корреляции, оценке тесноты линейной связи с помощью выборочного коэффициента корреляции, составлении уравнения линейной регрессии двух величин.

Тему «Проверка статистических гипотез» рекомендуется раскрыть на примере критерия Пирсона проверки гипотезы о нормальном распределении величины.

Тема 1.1 Элементы теории делимости целых чисел.

Л 1-4 Теорема деления с остатком. Основная теорема арифметики. Распределение простых чисел.

ПЗ 1-4 Деление нацело и с остатком. Простые и составные числа. НОД и НОК целых чисел. Цепные дроби.

Темы домашнего задания СРС:

1. Основные свойства отношения делимости целых чисел.
2. Основные свойства простых чисел. Решето Эратосфена.
3. Основные свойства НОД и НОК целых чисел и взаимно простых чисел.
4. Арифметические функции.
5. Неопределенные (диофантовы) уравнения.

Тема 1.2 Элементы теории сравнений в кольце целых чисел

Л 5-8 Кольцо классов вычетов целых чисел. Теоремы Эйлера и Ферма. Сравнения первой и высших степеней. Показатели и индексы целых чисел, первообразные корни.

ПЗ 5-8 Применения свойств отношения сравнимости, теоремы Эйлера и Ферма к решению теоретико-числовых задач. Способы решения сравнений.

Темы домашнего задания СРС:

1. Полная и приведенная система вычетов.
2. Способы решения сравнений первой степени.
3. Квадратичные вычеты и невычеты.
4. Свойства символа Лежандра и Якоби.
5. Бесконечные цепные дроби. Квадратичские иррациональности.

Коллоквиум (КЛ1).

Контрольная работа 1

Тема 1.3 Аксиоматические теории натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел

Л 9-12 Содержательные аксиоматические теории натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел. Категоричность и непротиворечивость данных теорий.

ПР 9-12 Аксиоматика Пеано. Построение аксиоматических теорий целых, рациональных и комплексных чисел с помощью пар чисел. Свойства целых чисел.

Темы домашнего задания СРС:

1. Свойства неравенств.
2. Независимость аксиом Пеано. Независимость аксиомы индукции.
3. Алгебры конечного ранга.

Тема 2.1 Случайные события

Л 13-14 Элементы комбинаторики. Основные понятия теории вероятностей. Формула полной вероятности и формула Байеса. Локальная и интегральная теорема Лапласа.

ПР 13-14 Применение комбинаторики к подсчету вероятности. Схема Бернулли и Пуассона.

Темы домашнего задания СРС:

1. Перестановки, размещения, сочетания с повторениями.
2. Полиномиальная теорема.

Тема 2.2 Случайные величины.

Л 15-17 Дискретные случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики. Непрерывные случайные величины, функция распределения вероятностей, плотность распределения. Основные законы распределения случайных величин.

ПР 15-17 Решение задач на нахождение функции распределения, на вычисление числовых характеристик. Решение задач на равномерное и нормальное распределение.

Темы домашнего задания СРС:

1. Моменты случайных величин.
2. Производящая функция.
3. Геометрическое распределение. Гипергеометрический закон распределения. Показательный закон распределения.
4. Системы случайных величин.

Тема 2.3 Элементы математической статистики.

Л 18 Выборки и их характеристики. Элементы теории оценок и проверки гипотез.

ПР Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма. Точечные оценки параметров распределения. Интервальные оценки параметров распределения.

Темы домашнего задания СРС:

1. Числовые характеристики статистического распределения.
2. Элементы теории корреляции.

Коллоквиум (КЛ2).

Контрольная работа 2

Демонстрационный вариант СРС 1.

1. Найдите, какие возможны остатки при делении числа $n_3 + 2$ ($n \in N$) на 9.
2. Докажите, что $S = 3^3 - 3^6 + 3^9 - \dots - 3^{6n}$, $n \in N$ делится на 13 при любом натуральном n .

- Найдите НОД и НОК для чисел (с помощью алгоритма Евклида и разложения на множители): 12606 и 6494.
- Представьте в виде цепной дроби $\frac{875}{576}$. Найдите значение цепной дроби $[0;4,1,3,2,5]$.

Демонстрационный вариант СРС 2.

- Найти остаток от деления : 34^{3741} на 26.
- Решить сравнения: а) $15x \equiv 21 \pmod{18}$ б) $95x \equiv 59 \pmod{308}$
- Вычислить символ Лежандра: $\left(\frac{241}{593}\right)$
- Решить сравнение с помощью индексов: $7x^4 \equiv 10 \pmod{17}$

Демонстрационный вариант КР 1.

- Найдите остаток от деления натурального числа n на 45, если известно, что остатки от деления n на 15 и на 9 соответственно равны 2 и 5.
- Докажите, что $S = 2^2 + 2^4 + 3^6 + \dots + 2^{8n}$, $n \in \mathbb{N}$ делится на 17 при любом натуральном n .
- Найти остаток от деления : 178^{2741} на 22.
- Решить сравнения: а) $20x \equiv 35 \pmod{45}$, б) $91x \equiv 1 \pmod{132}$
- Вычислить символ Лежандра: $\left(\frac{241}{593}\right)$
- Решить сравнение с помощью индексов: $40x^{10} \equiv 3 \pmod{17}$
- Запишите числа a и b в системе счисления с основанием g и разделите большее на меньшее: $a = 1653_7$, $b = 201_{10}$, $g = 4$.
- Разложите число 134 на два положительных слагаемых, одно из которых кратно 13, а второе – 19.
- Вычислить символ Лежандра: $\left(\frac{251}{577}\right)$.
- Решить сравнение с помощью индексов: $40x^{10} \equiv 3 \pmod{17}$

Демонстрационный вариант СРС 3.

- Какими свойствами обладают бинарные отношения ρ , заданные на множестве $\mathbb{N}(\mathbb{Z})$:

хру	Реф- лек- ность	Сим- метр.	Тран- зитив.	Отн. эквив.	Анти- симм.	Связ- ность	Отн. поряд- ка	Част. поряд- док	Лин. поряд- док
$x \leq y$									
$x = y$									
$x < y$									
$x^2 = y$									
$x^2 = y^2$									
x/y									
$x+y=1$									
$2x=3y$									
$ x-y < 5$									
$\text{НОД}(x,y) \neq 1$									

- Доказать существование и единственность сложения (умножения).

3. Привести примеры интерпретаций «системы натуральных чисел», показывающие независимость аксиомы индукции и роль ее в обосновании теории неравенств, теории делимости и свойств арифметических действий.
4. Построение кольца целых чисел.

Контрольные вопросы к УЭМ 1 (КЛ1)

1. Отношение делимости в $\mathbb{Z}$, свойства Деление с остатком. Теорема.
2. НОД и НОК целых чисел, свойства, алгоритм Евклида.
3. Простые и составные числа, свойства. Основная теорема арифметики.
4. Конечные цепные дроби. Подходящие дроби, свойства.
5. Отношение сравнимости в $\mathbb{Z}$, свойства.
6. Функция Эйлера и ее свойства.
7. Теоремы Эйлера и Ферма.
8. Сравнения первой степени с одним неизвестным.
9. Способы решения сравнений первой степени.
10. Сравнения второй степени. Квадратичные вычеты и невычеты. Число решений сравнения.
11. Показатель числа по заданному модулю, его свойства.
12. Индексы (дискретный логарифм) по заданному модулю, их свойства.
13. Арифметические приложения: а) нахождение остатков от деления некоторого числа на заданное число, б) признаки делимости, в) систематические дроби (определение длины периода при обращении обыкновенной дроби в десятичную дробь), г) проверка результатов арифметических действий, д) приложения теории чисел в криптографии.

Демонстрационный вариант СРС 4

1. В первой урне 3 белых шара и 4 черных шара, во второй урне 2 белых шара и 6 черных шара. Из первой урны вынимают один шар и перекладывают во вторую урну. Какова вероятность, что из второй урны вынутый шар окажется белым.
2. На первом станке изготавливают 90% стандартных деталей, на втором 80%. Взяли наугад одну деталь. Какова вероятность, что она стандартная.
3. Вероятность попадания в цель первого стрелка – 0,6 второго и третьего – 0,8, четвертого – 0,7; каждый стрелок сделал по выстрелу. Какова вероятность, что в цель попал хотя бы один.
4. Цех изготавливает детали. Их проверяют два контролёра. Вероятность того, что деталь попала к первому контролёру, равна 0,6, ко второму – 0,4. Вероятность того, что деталь признана стандартной первым контролёром – 0,94, вторым – 0,98. Деталь при проверке оказалась стандартной. Найти вероятность, что её проверял первый контролёр.

Демонстрационный вариант СРС5

1. Случайная величина X задана функцией распределения
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0] \\ a \sin \alpha, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \infty\right] \end{cases}$$

При каких значениях параметра a функция определяет непрерывную случайную величину. Найти функцию распределения плотности вероятности.

- Случайная величина задана плотностью вероятностей. Найти функцию распределения, если $f(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0;1) \\ 0, & x \notin (0;1) \end{cases}$. Найти числовые характеристики.
- Найти параметр C ; $M(X)$ и $D(X)$ равномерно распределенной случайной величины X , заданной плотностью вероятностей $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (3;5) \\ 0, & x \notin (3;5) \end{cases}$.
- Известно, случайная величина X подчинена нормальному закону распределения $M(X) = 4$ $D(X) = 16$. Найти плотность вероятностей случайной величины X .

Демонстрационный вариант СРС 6

Задача 1. Выборка дана в виде распределения частот. Найти:

- Распределение относительных частот;
- Эмпирическую функцию по данному распределению выборки, построить график функции $F^*(x)$.

x_i	2	5	6
n_i	10	15	20

Задача 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки $h = 2$.

Частичный интервал	2-4	4-6	6-8	8-10
Сумма частот	10	12	16	14
Вариант интервала; $h = 2$				
Плотность частоты; $h_i : h$	5	6	8	7

Задача 3. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 120$:

x_i	3832	3848	3850	3900
n_i	13	24	350	48

Задача 4. Вычислить выборочный коэффициент корреляции и найти выборочное уравнение прямой регрессии y на x .

x	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
y	8	9	10	13	15	18	21	25	29	32

Демонстрационный вариант КР2

- В закрытой урне находится 5 шаров белого и 12 шаров черного цвета. Вынимают 4 шара. Какова вероятность, что из них 2 шара будут черными, а 2 – белыми?
- Вычислить $P(AB)$, если $P(\bar{A}) = 0,3$, $P(B) = 0,6$, $P(B + A) = 0,8$.
- Вероятность попадания в мишень из обычной винтовки равна 0,7, а из винтовки с оптическим прицелом – 0,9. В пирамиду сложено 6 обычных винтовок и 4 винтовки с оптическим прицелом. Стрелок, не глядя, берет винтовку из пирамиды и производит выстрел. Какова вероятность, что он взял винтовку с оптическим прицелом, если известно, что он попал в мишень?
- Вероятность поломки прибора составляет 0,1. Какова вероятность, что из 5 таких приборов сломаются ровно 2? Сломаются все, кроме одного?
- Вероятность всхода посеянных семян составляет 0,8. Какова вероятность, что из 100 посеянных семян взойдут ровно 40 семян? Взойдут от 30 до 50 семян?
- Случайная величина X задана своим законом распределения:

x_i	-1	-3	0	5
-------	----	----	---	---

p_i	p	0,2	0,3	0,3
-------	-----	-----	-----	-----

Найти p , вычислить математическое ожидание и дисперсию величины X .

7. Задана плотность вероятности непрерывной случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 2 \cdot x - 2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

8. Найти функцию распределения величины X , математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, а также вероятность $P(0 < X < 1,5)$.

9. Известны результаты измерений роста X и веса Y у 10 мужчин:

X	172	190	182	172	180	193	179	181	191
Y	60	104	92	75	73	95	80	67	84

1. Построить вариационный и статистический ряд величины X .

2. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию величины X .

10. Известны результаты измерений роста X и веса Y у 10 мужчин:

X	172	190	182	172	180	193	179	181	191
Y	60	104	92	75	73	95	80	67	84

1) Построить доверительный интервал для математического ожидания величины X с надежностью 0,95 в предположении, что X распределена нормально.

2) Вычислить выборочный коэффициент корреляции между величинами X и Y .

3) Составить уравнения прямой регрессии Y на X .

Контрольные вопросы к УЭМ2 (КЛ2)

1. Аксиоматика Пеано.
2. Существование и единственность сложения и умножения натуральных чисел.
3. Порядок во множестве натуральных чисел. Закон трихотомии.
4. Теорема Архимеда, дискретность множества натуральных чисел и другие свойства.
5. Различные формы принципа полной математической индукции.
6. Интерпретации системы натуральных чисел. Независимость аксиом Пеано.
7. Независимость аксиомы индукции и ее роль в построении арифметики.
8. Построение кольца целых чисел.
9. Категоричность аксиоматической теории целых чисел.
10. Построение поля рациональных чисел.
11. Категоричность аксиоматической теории рациональных чисел.
12. Построение поля действительных чисел.
13. Построение поля комплексных чисел.
14. Основные правила и формулы комбинаторики. Размещения, перестановки, сочетания.
15. Операции с событиями. Правила действия с вероятностями: теорема сложения вероятностей, теорема умножения вероятностей, вероятность противоположного события.
16. Правила действия с вероятностями: формула полной вероятности, формула Байеса.
17. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли.
18. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Вопросы к экзамену учебного модуля «Числовые структуры, вероятности, статистика»

1. Отношение делимости в $\mathbb{Z}$, свойства Деление с остатком. Теорема.
2. НОД и НОК целых чисел, свойства, алгоритм Евклида.
3. Простые и составные числа, свойства. Основная теорема арифметики.
4. Конечные цепные дроби. Подходящие дроби, свойства.
5. Отношение сравнимости в $\mathbb{Z}$, свойства.

6. Функция Эйлера и ее свойства.
7. Теоремы Эйлера и Ферма.
8. Сравнения первой степени с одним неизвестным.
9. Способы решения сравнений первой степени.
10. Сравнения второй степени. Квадратичные вычеты и невычеты. Число решений сравнения.
11. Показатель числа по заданному модулю, его свойства.
12. Индексы (дискретный логарифм) по заданному модулю, их свойства.
13. Аксиоматика Пеано.
14. Существование и единственность сложения и умножения натуральных чисел.
15. Порядок во множестве натуральных чисел. Закон трихотомии.
16. Теорема Архимеда, дискретность множества натуральных чисел и другие свойства.
17. Различные формы принципа полной математической индукции.
18. Интерпретации системы натуральных чисел. Независимость аксиом Пеано.
19. Независимость аксиомы индукции и ее роль в построении арифметики.
20. Построение кольца целых чисел.
21. Категоричность аксиоматической теории целых чисел.
22. Построение поля рациональных чисел.
23. Категоричность аксиоматической теории рациональных чисел.
24. Построение поля действительных чисел.
25. Построение поля комплексных чисел.
26. Основные правила и формулы комбинаторики. Размещения, перестановки, сочетания.
27. Операции с событиями. Правила действия с вероятностями: теорема сложения вероятностей, теорема умножения вероятностей, вероятность противоположного события.
28. Правила действия с вероятностями: формула полной вероятности, формула Байеса.
29. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли.
30. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.
31. Понятие случайной величины. Виды случайных величин. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.
32. Математическое ожидание случайной величины, его свойства.
33. Дисперсия дискретной случайной величины, ее свойства. Среднее квадратическое отклонение.
34. Функция распределения, ее свойства.
35. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, ее свойства.
36. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
37. Виды распределения дискретных случайных величин: биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение.
38. Виды распределения непрерывных случайных величин: равномерное распределение, показательное распределение, нормальное распределение. Устойчивость нормального распределения.
39. Виды выборок. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.
40. Выборочная средняя. Выборочная дисперсия. Исправленная (несмещенная) дисперсия.
41. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения нормально распределенной величины.
42. Корреляция двух случайных величин. Выборочный коэффициент корреляции. Выборочное уравнение регрессии.

Экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов и задачи ([5],[6], источники из Приложения Б)

Образец билета к экзамену

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

Кафедра алгебры и геометрии

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

Числовые структуры, вероятности, статистика

Направление подготовки 44.03.05 –Педагогическое образование

Профили «Математики и информатика»

- 1 Отношение делимости в кольце целых чисел, свойства.
- 2 Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли.
- 3 Решите сравнение: $20 \cdot x \equiv 10 \pmod{25}$.

Принято на заседании кафедры _____ . Протокол №
Заведующий кафедрой АГ _____ Сукачева Т.Г.

Приложение Б
(обязательное)

Технологическая карта
учебного модуля « Числовые структуры, вероятности, статистика»
семестр 5, ЗЕТ 9, вид аттестации: экзамен, акад.часов 324 , баллов рейтинга 450

№ и наименование раздела учебного модуля, КП/КР	№ недели сем.	Трудоемкость, ак.час					Форма текущего контроля успеваемости (в соответствии с паспортом ФОС)	Максимальное количество баллов рейтинга
		Аудиторные занятия				СРС		
		Лекции	ПЗ	ЛР	АСРС			
УЭМ 1 Теория чисел и числовые системы	1-12	36	60		24	96		200
1.1 Элементы теории делимости целых чисел	1-4	12	20		8	32	СРС-1	30
1.2 Элементы теории сравнений в кольце целых чисел	5-8	12	20		8	32	СРС-2, КЛ 1	30
1.3 Аксиоматические теории натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел	9-12	12	20		8	32	СРС-3	30
							КР-1	110
УЭМ 2 Вероятности и статистика	13-18	18	30		12	48		200
2.1 Случайные события	13-14	6	10		4	16	СРС-4	30
2.2 Случайные величины	15-17	9	15		6	24	СРС-5, КЛ 2	30
2.3 Элементы математической статистики	18	3	5		2	8	СРС-6	30
							КР-2	110
							ЭКЗ	50
Итого:		54	90		36	144		450

В соответствии с Положением «Об организации учебного процесса по образовательным программам высшего образования» перевод баллов рейтинга в традиционную систему оценок осуществляется по шкале:
отлично – 405 – 450, хорошо – 315 – 404, удовлетворительно – 225 - 314, неудовлетворительно – менее 225

Приложение В

(обязательное)

Карта учебно-методического обеспечения

Модуля «Числовые структуры, вероятности, статистика»

Направление (специальность) 44.0305 – Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профиль – Математика и информатика

Формы обучения очная

Курс 3 Семестр 5

Часов: всего – 324, лекций- 54, практ. зан. – 90, СРС внеаудиторная – 180

Обеспечивающая кафедра алгебры и геометрии

Таблица 1- Обеспечение учебного модуля учебными изданиями

Библиографическое описание* издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол. стр.)	Кол. экз. в библ. НовГУ	Наличие в ЭБС
Учебники и учебные пособия		
1 Бухштаб А.А. Теория чисел: учебное пособие для вузов. – СПб.: Лань, 2008. – 384 с.	3	
2 Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел: учебное пособие для вузов. – СПб.: Лань, 2008. – 222 с.	31	
3 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов. – 12-е изд., перераб. – М. : Юрайт: Высшее образование, 2009. – 480 с. – [2005], [2006].	52	
4 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие. – М.: Высшее образование, 2006. – 476 с.	39	
Учебно-методические издания		
5 Неустроев Н.В. Элементы прикладной теории чисел: Книга для студентов специальности «учитель математики» и «прикладная математика» / Авторы Н.В. Неустроев, О.Н. Неустроева НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2007. – 188 с.	4	
6 Теория вероятностей и математическая статистика : метод. указания / сост.: Н. В. Манова, С. В. Мельникова ; Новгород. Гос. ун-т им. Ярослава Мудрого. – 2-е изд., испр. И доп. – Великий Новгород, 2011. – 84с.	142	
7 Числовые структуры, вероятность, статистика. Рабочая программа. / Авт.-сост. Н.В. Неустроев. – Великий Новгород, 2016. 19 с.		

Таблица 2 – Информационное обеспечение модуля

Название программного продукта, интернет-ресурса	Электронный адрес	Примечание

Таблица 3 – Дополнительная литература

Библиографическое описание* издания (автор, наименование, вид, место и год издания, кол. стр.)	Кол. экз. в библ. НовГУ	Наличие в ЭБС
1 Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов. – 8-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2010. – 493 с. – [2000], [2006].	17	
2		

Действительно для учебного года ____/____

Зав. кафедрой _____
подпись И.О.Фамилия

_____ 20..... г.

СОГЛАСОВАНО

НБ НовГУ: _____
должность подпись
расшифровка