

51
Г96

Н.И. ГУСЕВА, Н.С. ДЕНИСОВА, О.Ю. ТЕСЛЯ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

В 2-х ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ I

Рекомендовано УМО
по специальностям педагогического образования
в качестве **учебного пособия**
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 050201.65 «Математика»

55.1010

Новгородский государственный
университет им. Ярослава Мудрого
**НАУЧНАЯ
БИБЛИОТЕКА**

КНОРУС

МОСКВА
2012

Новгородский государственный
университет им. Ярослава Мудрого
Научная библиотека Ф 1
Учебный абонемент

Основная теорема о движениях. На плоскости даны два ортонормированных репера R и R' , тогда существует единственное движение f , при котором репер R переходит в репер R' . При этом любая точка M с координатами (x, y) в репере R переходит в точку M' с такими же координатами (x, y) в репере R' .

Движением 1-го рода называется такое движение, которое не меняет ориентацию плоскости (т.е. любой репер переходит в репер той же ориентации). **Движением 2-го рода** называется такое движение, которое меняет ориентацию плоскости (т.е. любой репер переходит в репер противоположной ориентации).

Движение 1-го рода имеет формулы:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + x_0, \quad y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + y_0.$$

Движение 2-го рода имеет формулы:

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi + x_0, \quad y' = x \sin \varphi - y \cos \varphi + y_0.$$

Если на плоскости дана прямоугольная декартова система координат и формулы

$$x' = ax + by + x_0, \quad y' = cx + dy + y_0,$$

то эти формулы являются формулами движения f , если матрица, составленная из коэффициентов при x и y является ортогональной, т.е.

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

При этом если определитель этой матрицы $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = +1$, то f — движение первого рода, а если $\Delta = -1$, то f — движение второго рода.

Задачи

5.13. Выяснить, какие из данных формул являются формулами движения, и найти род этого движения:

$$\begin{aligned} \text{а) } x' &= x + y + 5, & \text{б) } x' &= y + 5, & \text{в) } x' &= \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 4, \\ y' &= x - y + 4; & y' &= -x - 6; & y' &= \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2. \end{aligned}$$

5.14. Для данных движений найти образ и прообраз точки $M(1, -1)$, образ и прообраз прямой $x - 4y + 2 = 0$:

$$\begin{aligned} \text{а) } x' &= y - 5, & \text{б) } x' &= \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1, \\ y' &= -x + 2; & y' &= \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1. \end{aligned}$$

Пример 5.2. Даны формулы

$$x' = ax + by + x_0, \quad y' = cx + dy + y_0, \quad (5.1)$$

которые являются формулами движения f . Определить вид движения и найти элементы, его определяющие.

Решение:

1. Определим род движения: если $\Delta = +1$, то f — движение 1-го рода, если $\Delta = -1$, то f — движение 2-го рода.

2. Пусть f — движение первого рода, тогда возможны три случая:

а) если формулы движения f имеют вид

$$x' = x, \quad y' = y, \quad (5.2)$$

то f — тождественное преобразование;

б) если формулы движения f имеют вид

$$x' = x + a_1, \quad y' = y + a_2, \quad (5.3)$$

то f — параллельный перенос на вектор $\mathbf{a}(a_1, a_2)$;

в) если формулы движения f не являются формулами вида (5.2) и не являются формулами вида (5.3), то f — поворот плоскости R_M^φ .

Координаты центра поворота M — это координаты единственной инвариантной точки этого движения. Если f — поворот, то, как следует из формул поворота, $\cos \varphi$ равен коэффициенту a из формул (5.1), $\sin \varphi$ равен коэффициенту c из формул (5.1).

3. Пусть f — движение 2-го рода, тогда возможны случаи:

а) движение f имеет прямую a инвариантных точек, тогда f — это осевая симметрия с осью a ;

б) движение f не имеет инвариантных точек, тогда $f = T_a \cdot S_a$ — скользящая симметрия.

Найдем прямую a и вектор $\mathbf{a}$. При скользящей симметрии для любой точки M и ее образа M' середина M_1 отрезка MM' принадлежит прямой a . Так как точка M_1 принадлежит прямой a , то вектор $\overline{M_1 M_1'} = \mathbf{a}$.

Следовательно, прямая a проходит через точку M_1 параллельно вектору $\overline{M_1 M_1'}$, а вектор $\mathbf{a}$ равен вектору $\overline{M_1 M_1'}$.

Поместим результаты, полученные в примере 5.2, в табл. 5.1.

Пусть формулы движения f имеют вид:

$$x' = ax + by + x_0, \quad y' = cx + dy + y_0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Таблица 5.1

Определения вида движения по его формулам				
$\Delta = +1 \Rightarrow f$ — движение 1-го рода		$\Delta = -1 \Rightarrow f$ — движение 2-го рода		
$f: x' = x$ $y' = y$ f — тождественное преобразование	$f: x' = x + a_1$ $y' = y + a_2$ f — параллельный перенос $Ta(a_1, a_2)$	В остальных случаях f — поворот R_M^φ , M — инвариантная точка, $\cos \varphi = a$, $\sin \varphi = c$	f имеет прямую инвариантных точек a , f — осевая симметрия с осью a	f не имеет инвариантных точек. f — скользящая симметрия $T_a \cdot S_a$. $\forall M \rightarrow M'$ M_1 — середина MM' $f: M_1 \rightarrow M'_1$ $a = \overline{M_1 M'_1}$, $a = (M_1, a)$

Пример 5.3. Определить вид движения $x' = -y + 4$, $y' = -x + 8$ и найти элементы, его определяющие, используя табл. 5.1.

Решение:

1. Определим род данного движения. Для этого найдем определитель, составленный из коэффициентов при x и y в его формулах.

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, то данное движение является движением 2-го рода.

2. Определим вид этого движения, для чего найдем его инвариантные точки, решив систему

$$\begin{cases} x = -y + 4, \\ y = -x + 8. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений, следовательно, данное движение является скользящей симметрией $T_a \cdot S_a$.

3. Найдем элементы, определяющие эту скользящую симметрию, т.е. уравнение прямой a и координаты вектора a :

а) рассмотрим точку $O(0, 0)$ и найдем ее образ $O'(4, 8)$. При данном движении точка $O(0, 0)$ переходит в точку $O'(4, 8)$. Найдем середину отрезка OO' . Это точка $A(2, 4)$. Теперь найдем образ A' точки A при данном движении. Получим $A'(0, 6)$. Тогда вектор $a = \overline{AA'}(-2, 2)$;

б) прямая a проходит через точку $A(2, 4)$ и параллельна вектору $a(-2, 2)$, поэтому прямая a имеет уравнение: $x + y - 6 = 0$.

Ответ. Данное движение является скользящей симметрией $T_a \cdot S_a$, где $a: x + y - 6 = 0$, $a(-2, 2)$.

Задачи

5.15. Определить вид движения и найти элементы, его определяющие:

$$\begin{aligned} \text{а)} \begin{cases} x' = -x + 2, \\ y' = -y - 4; \end{cases} & \quad \text{б)} \begin{cases} x' = x - 5, \\ y' = y + 2; \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1, \\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3; \end{cases} & \quad \text{г)} \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y; \end{cases} \\ \text{д)} \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y; \end{cases} & \quad \text{е)} \begin{cases} x' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4, \\ y' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + 2; \end{cases} \\ \text{ж)} \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y - 3; \end{cases} & \quad \text{з)} \begin{cases} x' = x + 8, \\ y' = y + 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Составим таблицу инвариантных прямых всех видов движения (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Инвариантные прямые всех видов движений

Тождественное преобразование	Параллельный перенос T_a ($a \neq 0$)	Поворот R_a^φ ($\varphi \neq 0^\circ$)	Осевая симметрия S_a	Скользящая симметрия $T_a \cdot S_a$
Любая прямая инвариантна	Любая прямая, параллельная вектору a , инвариантна	Если $\varphi \neq \pi$, то нет инвариантных прямых. Если $\varphi = \pi$, то любая прямая, проходящая через точку O , инвариантна	Прямая a и любая прямая d , перпендикулярная прямой a , инвариантны	Прямая a — единственная инвариантная прямая

5.16. Найти уравнения инвариантных прямых движения, используя табл. 5.2:

$$\begin{aligned} \text{а)} \begin{cases} x' = x + 5, \\ y' = y + 2; \end{cases} & \quad \text{б)} \begin{cases} x' = y - 1, \\ y' = x + 1; \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} x' = -x - 1, \\ y' = -y + 2; \end{cases} & \quad \text{г)} \begin{cases} x' = x + 2, \\ y' = -y - 2; \end{cases} \\ \text{д)} \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 3; \end{cases} & \quad \text{е)} \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2, \\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y. \end{cases} \end{aligned}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

8.1. Движения пространства

Движением пространства называется преобразование пространства, сохраняющее расстояния между точками.

Основная теорема о движениях пространства. Если даны два ортонормированных репера пространства R и R' , то существует единственное движение пространства, при котором репер R переходит в репер R' , при этом любая точка M с координатами (x, y, z) в репере R переходит в точку M' с такими же координатами (x, y, z) в репере R' .

При любом движении пространства:

репер переходит в репер, ортонормированный репер переходит в ортонормированный репер;

плоскость переходит в плоскость;

параллельные плоскости переходят в параллельные плоскости;

пересекающиеся плоскости переходят в пересекающиеся плоскости;

прямая переходит в прямую;

пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся прямые;

параллельные прямые переходят в параллельные прямые;

скрещивающиеся прямые переходят в скрещивающиеся прямые;

сохраняется простое отношение трех точек;

сохраняется понятие «лежать между»;

отрезок переходит в отрезок;

луч переходит в луч;

угол переходит в угол той же величины;

полуплоскость переходит в полуплоскость;

двугранный угол переходит в двугранный угол той же величины;

сужение движения на любую инвариантную плоскость является движением этой плоскости.

Параллельным переносом на вектор $\mathbf{p}$ называется такое преобразование пространства $T_{\mathbf{p}}$, при котором каждая точка M переходит в такую точку M' , что $\overline{MM'} = \mathbf{p}$. Параллельный перенос является движением пространства.

Центральной симметрией с центром O называется такое преобразование пространства, при котором каждая точка M переходит в такую точку M' , что $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$. Центральная симметрия является движением пространства.

Симметрией относительно плоскости γ (или отражением от плоскости γ) называется такое преобразование пространства S_γ , при котором любая точка A плоскости γ переходит в себя, а любая точка M , не принадлежащая плоскости γ , переходит в такую точку M' , что прямая MM' перпендикулярна плоскости γ и середина отрезка MM' принадлежит плоскости γ (рис. 8.1).

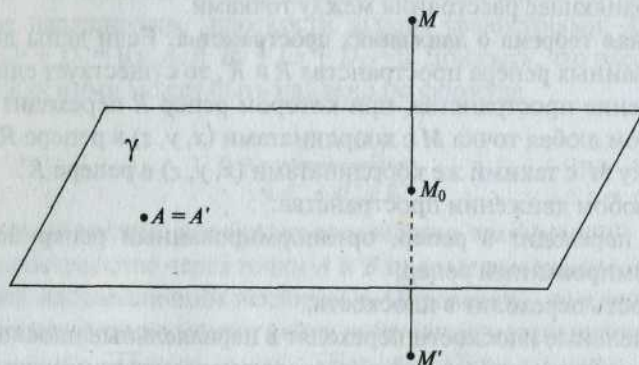


Рис. 8.1

Симметрия относительно плоскости является движением пространства.

Поворотом вокруг прямой t на угол φ называется такое преобразование пространства R_t^φ , при котором любая точка A , принадлежащая прямой t , переходит в себя, а любая точка M , не принадлежащая прямой t , переходит в такую точку M' , что точки M и M' лежат в плоскости, перпендикулярной прямой t и пересекающей прямую t в точке M_0 , расстояния от точек M и M' до точки M_0 равны и направленный угол $\angle MM_0M'$ равен данному углу φ (рис. 8.2).

Поворот вокруг прямой является движением пространства.

Замечание. Во всех задачах этого раздела предполагается, что данный репер ортонормированный.

Задачи

8.1. Даны два куба. Существует ли движение пространства, при котором первый куб переходит во второй?

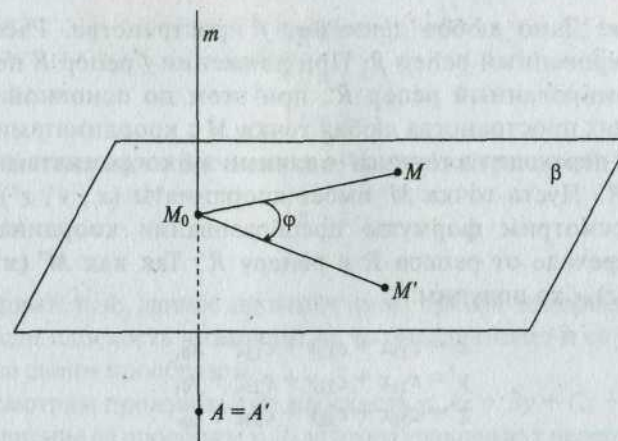


Рис. 8.2

8.2. Даны два прямоугольных параллелепипеда, измерения которых соответственно равны. Доказать, что существует движение пространства, при котором первый параллелепипед переходит во второй. Сколько таких движений существует?

8.3. Доказать, что при параллельном переносе на ненулевой вектор $\mathbf{p}$: а) плоскость, параллельная вектору $\mathbf{p}$, переходит в себя; б) плоскость, не параллельная вектору $\mathbf{p}$, переходит в параллельную ей плоскость; в) прямая, параллельная вектору $\mathbf{p}$, переходит в себя; г) прямая, не параллельная вектору $\mathbf{p}$, переходит в параллельную ей прямую.

8.4. Доказать, что при симметрии относительно плоскости γ : а) плоскость, перпендикулярная плоскости γ , переходит в себя; б) плоскость, параллельная плоскости γ , переходит в параллельную ей плоскость; в) прямая, перпендикулярная плоскости γ , переходит в себя; г) прямая, параллельная плоскости γ , переходит в параллельную ей прямую.

Пример 8.1. Доказать, что любое движение пространства в ортонормированном репере задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + x_0, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + y_0, \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + z_0, \end{aligned}$$

где $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ — ортогональная матрица.

Решение. Дано любое движение f пространства. Рассмотрим ортонормированный репер R . При движении f репер R переходит в ортонормированный репер R' , при этом по основной теореме о движениях пространства любая точка M с координатами (x, y, z) в репере R переходит в точку M' с такими же координатами (x, y, z) в репере R' . Пусть точка M' имеет координаты (x', y', z') в репере R . Рассмотрим формулы преобразования координат точек M' при переходе от репера R к реперу R' . Так как $M' (x', y', z')_R$ и $M' (x, y, z)_{R'}$, то получим:

$$\begin{aligned}x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + x_0, \\y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + y_0, \\z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + z_0,\end{aligned}$$

где $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ — ортогональная матрица.

Теперь в этих формулах будем рассматривать x, y, z не как координаты точки M' в репере R' , а как координаты точки M в репере R . Тогда если любая точка M при движении f переходит в точку M' , то эти формулы связывают координаты любой точки M и ее образа M' в репере R , т.е. эти формулы являются формулами движения f .

Задача 8.5. Выяснить, какие из данных формул являются формулами движения пространства:

$$\begin{aligned}\text{а) } x' &= x + 1, & \text{б) } x' &= x + 2y + 4z, \\y' &= -y + 2, & y' &= y - z, \\z' &= -z - 1; & z' &= \frac{1}{2}y + 3z; \\ \text{в) } x' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z + 5, & \text{г) } x' &= x + y + z, \\y' &= -y + 8, & y' &= x - y - z, \\z' &= \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z - 3; & z' &= -x - y + z.\end{aligned}$$

Пример 8.2. Для движения $x' = z - 2$, $y' = x + 3$, $z' = y - 1$ найти: а) координаты инвариантных точек; б) уравнения инвариантных плоскостей; в) уравнения инвариантных прямых.

Решение:

а) чтобы найти координаты инвариантной точки данного движения, в формулах движения вместо x', y', z' поставим x, y, z и решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x = z - 2, \\ y = x + 3, \\ z = y - 1. \end{cases}$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} x = z - 2, \\ z = y - 1. \end{cases}$$

Следовательно, данное движение имеет прямую инвариантных точек;

б) если плоскость инвариантна, то она совпадает и со своим образом, и со своим прообразом.

Рассмотрим произвольную плоскость $\gamma: Ax + By + Cz + D = 0$, найдем уравнение ее прообраза γ_1 . Для этого уравнение γ перепишем в виде $Ax' + By' + Cz' + D = 0$ и вместо x', y', z' в это уравнение подставим их выражения из формул движения. Получим уравнение $\gamma_1: A(z - 2) + B(x + 3) + C(y - 1) + D = 0$, или $\gamma_1: Bx + Cy + Az + D - 2A + 3B - C = 0$.

Так как плоскости γ и γ_1 совпадают, то существует такое число $t \neq 0$, что

$$B = tA, \quad (8.1)$$

$$C = tB, \quad (8.2)$$

$$A = tC, \quad (8.3)$$

$$D - 2A + 3B - C = tD. \quad (8.4)$$

Из (8.1) и (8.2) получаем, что $C = t^2A$, подставляем это выражение в (8.3) и получаем $A(t^3 - 1) = 0$. Если $A = 0$, то из (8.1) и (8.2) следует, что $B = C = 0$, чего быть не может, следовательно, $A \neq 0$ и $t^3 - 1 = 0$. Отсюда $t = 1$ (заметим, что $t = 1$ — единственное вещественное решение этого кубического уравнения), подставляем в (8.1), (8.2), (8.3) $t = 1$ и получаем $B = A$, $C = B$, $A = C$. Отсюда $B = A$, $C = A$, подставляем эти значения B и C и $t = 1$ в (8.4), получаем $D - 2A + 3A - A = D$, т.е. $0 = 0$ и значит D может быть любым вещественным числом.

Таким образом, данное движение имеет бесчисленное множество параллельных инвариантных плоскостей, имеющих уравнения: $x + y + z + D = 0$;

в) найдем уравнение инвариантной прямой данного движения. Если m — инвариантная прямая, то для любых двух различных точек $M'(x, y, z)$ и $P'(x_1, y_1, z_1)$, принадлежащих этой прямой m , прообразы этих точек $M(z - 2, x + 3, y - 1)$ и $P(z_1 - 2, x_1 + 3, y_1 - 1)$ также принадлежат прямой m . То есть точки M, P, M' и P' принадлежат одной прямой, следовательно, векторы $\overline{MP}, \overline{M'P'}, \overline{MM'}$ попарно коллинеарны.

Векторы $\overline{MP}$ ($z_1 - z, x_1 - x, y_1 - y$) и $\overline{M'P'}$ ($x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z$) коллинеарны, так как это направляющие векторы прямой m , тогда обозначим $x_1 - x = p_1, y_1 - y = p_2, z_1 - z = p_3$. Получим, что векторы $\overline{MP}$ (p_3, p_1, p_2) и $\overline{M'P'}$ (p_1, p_2, p_3) коллинеарны. Так как длины этих векторов равны, то возможны два случая:

1) $\overline{MP} = \overline{M'P'}$ и $p_1 = p_3, p_2 = p_1, p_3 = p_2$, откуда $\overline{MP}$ (p_1, p_1, p_1), значит направляющий вектор прямой m — это вектор $\mathbf{p}$ (1, 1, 1);

2) $\overline{MP} = -\overline{M'P'}$ и $p_1 = -p_3, p_2 = -p_1, p_3 = -p_2$, откуда $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, чего не может быть, так как точки M и P различны.

Из того что векторы $\overline{MM'}$ ($x - z + 2, y - x - 3, z - y + 1$) и $\mathbf{p}$ (1, 1, 1) коллинеарны, следует, что

$$\begin{cases} x - z + 2 = y - x - 3, \\ x - z + 2 = z - y + 1. \end{cases}$$

Из этого следует, что данное движение имеет единственную инвариантную прямую заданную уравнениями

$$\begin{cases} 2x - y - z + 5 = 0, \\ x + y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Ответ: а) прямая инвариантных точек: $\begin{cases} x = z - 2, \\ z = y - 1; \end{cases}$

б) бесчисленное множество параллельных инвариантных плоскостей, имеющих уравнения: $x + y + z + D = 0$;

в) единственная инвариантная прямая: $\begin{cases} 2x - y - z + 5 = 0, \\ x + y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$

Задачи

8.6. Для движения $x' = y + 1, y' = -x + 2, z' = -z + 4$ найти:

- координаты образа и прообраза точки (2, 4, 1);
- уравнения образа и прообраза прямой $x = t, y = t, z = t$;
- уравнение образа и прообраза плоскости $x + y + z + 1 = 0$;
- координаты инвариантных точек;
- уравнения инвариантных прямых;
- уравнения инвариантных плоскостей.

8.7. Для движения $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z, y' = -y + 1, z' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z$ найти:

- уравнение образа и прообраза сферы $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$;
- уравнение образа и прообраза прямой $x = -5 - t, y = 5 + t, z = -t$;
- уравнение образа и прообраза плоскости $z - 8 = 0$;