УДК 621.396

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМПЕДАНСНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СПИРАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

А.В.Сочилин, В.С.Эминова, С.И.Эминов

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION FOR AN IMPEDANCE SPIRAL ANTENNA

A.V.Sochilin, V.S.Eminova, S.I.Eminov

Институт электронных и информационных систем НовГУ, eminovsi@mail.ru

В работе получено новое одномерное интегро-дифференциальное уравнение относительно тока для импедансной цилиндрической спиральной антенны. Развит численно-аналитический метод решения уравнения и продемонстрирована его эффективность.

Ключевые слова: импедансная спиральная антенна, метод Галеркина, сходимость, логарифмическая особенность

In the article, the new integro-differential equation concerning current for an impedance spiral antenna is presented. The numerical-analytic method for the equation solution is evolved, and its effectiveness is demonstrated.

Keywords: impedance spiral antenna, Galerkin method, convergence, logarithmic singularity

Исходное уравнение

Рассмотрим цилиндрический спиральный вибратор, образующая которого в пространстве описывается соотношениями

$$x=R_0\cos(\varphi_0\tau),\ y=R_0\sin(\varphi_0\tau),\ z=b\tau,\ -1\le\tau\le1. \quad (1)$$

Вибратор предполагаем тонким, его радиус a много меньше длины волны и длины антенны. Вычислим коэффициент Ламе, исходя из (1):

$$H_\tau(\tau)=\sqrt{R_0^2\varphi_0^2+b^2}. \quad (2)$$

Заметим, что (2) не зависит от переменной τ, $H_\tau(\tau)=H$.

Также найдем орт, единичный вектор, касательный к образующей:

$$\vec{e}_{\tau_t}=\frac{-R_0\varphi_0\sin(\varphi_0\tau)\vec{i}+R_0\varphi_0\cos(\varphi_0\tau)\vec{j}+b\vec{k}}{H}. \quad (3)$$

На поверхности вибраторной антенны выполняется граничное условие вида [1]

$$E_\tau^{\text{вт}}+E_\tau^0=Zj_\tau, \quad (4)$$

где $E_\tau^{\text{вт}}$ — вторичное электрическое поле, E_τ^0 — первичное электрическое поле, j_τ — плотность поверхностных токов, Z — поверхностный импеданс. Если поверхность антенны идеально-проводящая, то правая часть уравнения (3) равна нулю. Этот случай рассмотрен в работе [2].

Интегро-дифференциальное уравнение относительно продольной компоненты полного тока $I(\tau)$ можно записать в виде [2]

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}I(t)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}S(\tau,t)dt-$$

$$-\frac{(kH)^2}{4\pi}\int_{-1}^{1}I(t)\vec{e}_\tau\bullet\vec{e}_t S(\tau,t)dt+iH\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{Z}{2\pi a}I(\tau)=iH\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_\tau^0(\tau), \quad (5)$$

где

$$S(\tau,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\exp(-ikR)}{kR}d\psi, \quad (6)$$

$$R=\sqrt{4R_0^2\sin^2\left(\varphi_0\frac{\tau-t}{2}\right)+b^2(\tau-t)^2+4a^2\sin^2\frac{\psi}{2}}. \quad (7)$$

Выделение логарифмической особенности и вывод одномерного интегро-дифференциального уравнения

В ядре уравнения (5) выделим логарифмическую особенность. После преобразований получим одномерное интегро-дифференциальное гиперсингулярное уравнение

$$\frac{1}{4\pi^2(ka)}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}I(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt+iH\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{Z}{2\pi a}I(\tau)-$$

$$-\frac{(kH)^2}{4\pi^2(ka)}\int_{-1}^{1}I(t)\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt+\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}I(t)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}S_1(\tau,t)dt-$$

$$-\frac{(kH)^2}{4\pi}\int_{-1}^{1}I(t)S_2(\tau,t)dt=iH\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_\tau^0(\tau), \quad (8)$$

где

$$S_1(\tau,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\exp(-ikR)}{kR}-\frac{1}{\widetilde{R}}\right)d\psi+\frac{1}{\pi a}\ln\left(\beta+\sqrt{\beta^2+(\tau-t)^2}\right),$$

$$S_2(\tau,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\vec{e}_\tau\bullet\vec{e}_t\frac{\exp(-ikR)}{kR}-\frac{1}{\widetilde{R}}\right)d\psi+\frac{1}{\pi a}\ln\left(\beta+\sqrt{\beta^2+(\tau-t)^2}\right),$$

$$\widetilde{R}=\sqrt{H^2(\tau-t)^2+a^2\psi^2},\ \beta=\frac{\pi a}{H}. \quad (9)$$

Важно отметить, что в записи уравнения (8) указан метод аналитического выделения особенности, какая функция (9) отнимается и прибавляется. Метод использует вид расстояния (7) между точкой наблюдения и точкой излучения.

Операторная форма интегро-дифференциального уравнения

Запишем уравнение (8) в операторной форме

$$\frac{1}{4\pi(ka)}(AI)(\tau)+CI(\tau)-$$

$$-\frac{(kH)^2}{4\pi^2(ka)}(LI)(\tau)+(MI)(\tau)=i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}HE_\tau^0(\tau), \quad (10)$$

где

$$AI=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}I(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt,\ C=iH\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{Z}{2\pi a}, \quad (11)$$

$$LI=\int_{-1}^{1}I(t)\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt, \quad (12)$$

$$MI=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}I(t)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}S_1(\tau,t)dt-\frac{(kH)^2}{4\pi}\int_{-1}^{1}I(t)S_2(\tau,t)dt. \quad (13)$$

В уравнении (10) появился оператор умножения на постоянную $CI(\tau)$. Оператор умножения на постоянную, как и единичный оператор, является ограниченным в пространстве $L_2[-1,1]$, однако не является вполне непрерывным. Для преодоления этой трудности применим результаты работы [3].

Оператор A является симметричным положительно-определенным оператором в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ и имеет плотную область определения.

Обратный оператор A^{-1} определяется по формуле [3]

$$\left(A^{-1}f\right)(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\left|\frac{\tau-t}{1-\tau t+\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-t^2}}\right|f(t)dt$$

и является вполне непрерывным в пространстве $L_2[-1,1]$.

Отсюда, с учетом результатов [4], оператор A^{-1} вполне непрерывен также в энергетическом пространстве H_A оператора A. А все уравнение эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода в пространстве H_A оператора A, и это уравнение можно решать методом Галеркина.

Численно-аналитический метод

Решение уравнения (9), как и в работе [2], ищем в виде

$$I(\tau)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\varphi_n(\tau)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sin[n\arccos(\tau)]. \quad (14)$$

Матрица оператора A в данном базисе $\{\varphi_n\}$ является единичной [3]. Поэтому уравнение (10) эквивалентно бесконечной системе в l_2 вида

$$\frac{1}{4\pi(ka)}c_n+\sum_{m=1}^{+\infty}c_mM_{mn}=e_n,\ 1\le n<+\infty. \quad (15)$$

Система (15) является системой Фредгольма второго рода, т.е. матрица M_{mn} образует вполне непрерывный в l_2 оператор. Уравнение (15) будем решать численно-аналитическим методом.

Согласно численно-аналитическому методу, первые N неизвестных находятся из решения усеченной системы:

$$\frac{1}{4\pi(ka)}c_n+\sum_{m=1}^{N}c_mM_{mn}=e_n,\ \ 1\le n\le N, \quad (16)$$

остальные неизвестные определяются по формуле

$$\frac{1}{4\pi(ka)}c_n=e_n,\ \ N<n<+\infty.$$

Матрица оператора умножения, а также оператора L, находится аналитически. При численном вычислении матрицы оператора M применялись интегрирование по частям и замены вида: $\tau=\cos u$, $t=\cos v$.

Правая часть задавалась в виде

$$HE_\tau^0(\tau)=U_0f(\tau),\ \ f(\tau)=\frac{1}{2T}\begin{cases}1,|\tau|\le T,\\ 0,|\tau|>T,\end{cases} \quad (17)$$

напряжение $U_0=1B$.

Результаты численных расчетов

В таблице приведены результаты исследования сходимости значения входного сопротивления импедансной цилиндрической спиральной антенны, рассчитанного численно-аналитическим методом в зависимости от числа базисных функций N. Результаты расчетов демонстрируют высокую скорость сходимости. Выражением ImZ обозначено значение мнимой составляющей поверхностного импеданса. При численных экспериментах параметры антенны изменялись в широких пределах, и развиваемый численно-аналитический метод показывал достаточно быструю сходимость. Была также подтверждена ранее выявленная закономерность ухудшения скорости сходимости по мере уменьшения области возбуждения антенны.

Сходимость значений входных сопротивлений импедансной цилиндрической спиральной антенны, рассчитанных численно-аналитическим методом в зависимости от числа базисных функций

N	$ka=\frac{\pi}{120}$, $\frac{R_0}{\lambda}=0{,}2$, $\varphi_0=0{,}16$, Im$Z=12\pi$, $\frac{b}{\lambda}=0{,}15$, $T=0{,}01$		$ka=\frac{\pi}{120}$, $\frac{R_0}{\lambda}=0{,}2$, $\varphi_0=0{,}16$, Im$Z=12\pi$, $\frac{b}{\lambda}=0{,}15$, $T=1$	
	R, Ом	X, Ом	R, Ом	X, Ом
2	33,4927	3,0141	48,6683	6,5769
3	33,8573	2,9269	48,9269	6,7328
4	33,8088	2,8739	48,8739	6,7352
5	33,7919	2,8469	48,8409	6,7348
10	33,8172	2,8221	48,8549	6,7449
15	33,8138	2,8243	48,8528	6,7446
20	33,8133	2,8292	48,8529	6,7446

Таким образом, рассмотрен еще один тип вибраторных антенн — импедансные цилиндрические спиральные антенны, характеристики которых успешно рассчитываются методом Галеркина на основе полиномов Чебышева и модификацией метода Галеркина — численно-аналитическим методом.

1. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987. 271 с.
2. Сочилин А.В., Эминов И.С., Эминов С.И. Интегро-дифференциальные уравнения линейных, биконических и криволинейных вибраторных антенн // Антенны. 2010. №12. С.27-34.
3. Эминов С.И. Аналитическое обращение гиперсингулярного оператора и его приложения в теории антенн // Письма в ЖТФ. 2004. Т.30. Вып.22. С.8-16.
4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

References

1. Vasil'ev E.N. Vozbuzhdenie tel vrashcheniia [Actuation of solids of revolution]. Moscow, Radio i sviaz', 1987. 271 p.
2. Sochilin A.V., Eminov I.S., Eminov S.I. Integro-differentsial'nye uravneniia lineinykh, bikonicheskikh i krivolineinykh vibratornykh antenn [Integro-differential equations of linear, biconical and curvilinear dipole antennas]. Antenny – Antennas, 2010, no. 12, pp. 27-34.
3. Eminov S.I. Analiticheskoe obrashchenie gipersinguliarnogo operatora i ego prilozheniia v teorii antenn [Analytical inversion of hypersingular operator and of its application in antenna theory]. Pis'ma v ZhTF – Technical Physics Letters, 2004, vol. 30. issue 22, pp. 8–16.
4. Mikhlin S.G. Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, “Nauka” Publ., 1970. 512 p.