

КЛАСС ГЕОМЕТРИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ С ЗАВИСИМЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

И.В.Золотухин

A NEW CLASS OF GEOMETRICALLY DISTRIBUTED RANDOM VECTORS WITH DEPENDENT COMPONENTS

I.V.Zolotukhin

Санкт-Петербургский филиал института океанологии им. П.П.Ширшова РАН, igor.zolotukhin@gmail.com

В работе вводится многомерное геометрическое распределение (MVE) с зависимыми компонентами. Найдены функции надежности и характеристические функции как для самого распределения, так и для его проекций на координатные гиперплоскости. Показано, что проекции также имеют MVG-распределение. Аналогично одномерному геометрическому закону, распределение обладает свойством отсутствия последействия и имеет в качестве предельного (при соответствующей нормировке) многомерное экспоненциальное распределение Маршалла—Олкина.

Ключевые слова: многомерное геометрическое распределение, отсутствие последействия, многомерное экспоненциальное распределение Маршалла—Олкина

The paper introduces the multivariate geometric distribution (MVE) with dependent components. The characteristic functions and the reliability functions as well as their projections on any coordinate hyperplanes have been found. It is proved that these projections also have MVG distribution. By analogy with the univariate geometric law the MVG distribution has characteristic property of aftereffect absence and has the multivariate exponential distribution of Marshall—Olkin as a limit (at an appropriate normalization).

Keywords: multivariate geometric distribution, absence of aftereffect, multivariate exponential distribution of Marshall—Olkin

Введение

При введении многомерных аналогов известных распределений важно, чтобы они обладали свойствами подобными свойствам одномерных законов. В настоящей работе вводится многомерное распределение, чьи одномерные проекции распределены геометрически, а само распределение обладает свойствами подобными свойствам геометрического распределения.

Для дальнейшего изложения нам понадобится ряд обозначений.

Пусть $E = \{\varepsilon\}$ — совокупность k -мерных индексов $\varepsilon = (\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(k)})$, каждая компонента которых равна 0 или 1; $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$; $\bar{\varepsilon} = \mathbf{1} - \varepsilon$, $\|\varepsilon\| = \sum_{i=1}^k \varepsilon^{(i)}$. Обозначим E_i — совокупность индексов, у которых $\varepsilon^{(i)} = 1$, $\varepsilon_1 \vee \varepsilon_2$ — вектор, каждая i -я координата которого равна $\max\{\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}\}$.

На множестве E зададим отношение частичного порядка:

$$\forall \varepsilon, \delta \in E \quad \delta \leq \varepsilon, \text{ если } \forall j (j=1, \dots, k) \quad \delta_j \leq \varepsilon_j.$$

Положим $\delta < \varepsilon$, если $\delta \leq \varepsilon$ и $\delta \neq \varepsilon$.

Запись (a, b) будет обозначать скалярное произведение векторов a и b , а запись ab и $\prod_{i=1}^j a_i$ — покомпонатное произведение соответствующих векторов.

Пусть N_ε — независимые геометрически распределенные случайные величины:

$$P(N_\varepsilon = n) = p_\varepsilon q_\varepsilon^{n-1}, n=1, 2, \dots, p_\varepsilon = 1 - q_\varepsilon$$

с характеристическими функциями

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{p_\varepsilon e^{it}}{1 - q_\varepsilon e^{it}}.$$

Класс распределений будем обозначать $G(q_\varepsilon)$.

Рассмотрим случайные величины

$$M_i = \min_{\varepsilon \in E_i} \{N_\varepsilon\}, i=1, \dots, k.$$

Положим $N_\varepsilon = \infty$, если $p_\varepsilon = 0$.

По известному свойству геометрического распределения

$$M_i \in G\left(\prod_{\varepsilon \in E_i} q_\varepsilon\right).$$

Определение. Распределение вектора

$$M = (M_1, \dots, M_k) = (\min_{\varepsilon \in E_1} \{N_\varepsilon\}, \dots, \min_{\varepsilon \in E_k} \{N_\varepsilon\})$$

назовем *многомерным геометрическим распределением*, а сам вектор M — *геометрически распределенным случайным вектором*.

Ясно, что компоненты вектора M зависимы. Вместо функции распределения удобно рассматривать функцию надежности вектора M , которая, очевидно, равна

$$\begin{aligned} \bar{P}(\mathbf{m}) &= \bar{P}(m_1, \dots, m_k) = \\ &= P(\min_{\varepsilon \in E_1} \{N_\varepsilon\} > m_1, \dots, \min_{\varepsilon \in E_k} \{N_\varepsilon\} > m_k) = \prod_{\varepsilon \in E} q_\varepsilon^{\max_{1 \leq i \leq k} m_i}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$, $m_j (j=1, \dots, k)$ — натуральные числа.

Класс многомерных геометрических распределений с функцией надежности (1) обозначим $MVG(q_\varepsilon, \varepsilon \in E)$.

1. Свойства распределения MVG

Свойства распределения MVG естественно описывать в виде аналогов свойств одномерного геометрического закона.

Теорема 1. Многомерное геометрическое распределение обладает свойством отсутствия последовательности при сдвиге всех аргументов на одну и ту же величину:

$$P(M > \mathbf{n} + \mathbf{m} / M > \mathbf{n}) = P(M > \mathbf{m}), \mathbf{n} = (n, n, \dots, n). \quad (2)$$

Известно, что если $N \in G(q)$, то $pN \xrightarrow[p \rightarrow 0]{P} Z$, где

$Z \in E(1)$. Здесь через $E(\lambda)$ обозначен класс экспоненциальных распределений. Многомерным аналогом экспоненциального распределения является MVE -распределение, введенное Маршаллом и Олкиным в [1], с функцией надежности

$$\bar{F}(z) = \bar{F}(z_1, \dots, z_k) = \exp\left[-\sum_{\varepsilon \in E} \lambda_\varepsilon \max_{1 \leq i \leq k} \varepsilon z_i\right], z_i > 0,$$

$\lambda_\varepsilon \geq 0$ — параметры распределения.

В [1] были исследованы ряд свойств MVE , в частности, показано, что MVE -распределение обладает свойством отсутствия последовательности при сдвиге всех аргументов z_i на положительную константу. Дальнейшие свойства MVE исследовались в [2], в частности, показано, что вектор $Z = (Z_1, \dots, Z_k) \in MVE(\lambda_\varepsilon, \varepsilon \in E)$ может быть представлен в виде

$$Z = \left(\min_{\varepsilon \in E_1} \{X_\varepsilon\}, \dots, \min_{\varepsilon \in E_k} \{X_\varepsilon\} \right),$$

где X_ε — независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами $\lambda_\varepsilon (X_\varepsilon \in E(\lambda_\varepsilon))$.

Теорема 2. Пусть $M \in MVG(q_\varepsilon, \varepsilon \in E)$ и $p_\varepsilon = \lambda_\varepsilon p$, тогда

$$pM \xrightarrow[p \rightarrow 0]{P} Z,$$

где $Z \in MVE(\lambda_\varepsilon, \varepsilon \in E)$, т.е. MVE -распределение является предельным для многомерного геометрического.

2. Распределения проекций вектора M на координатные гиперплоскости

Вектор ε будем использовать для задания координатной гиперплоскости в k -мерном пространстве.

Теорема 3. Проекция εM вектора M на координатную гиперплоскость ε имеет многомерное геометрическое распределение с функцией надежности

$$\bar{P}(\varepsilon \mathbf{m}) = \prod_{\delta \leq \varepsilon} \left(\prod_{\gamma: \gamma \varepsilon = \delta} q_\gamma \right)^{\max_{1 \leq i \leq k} \delta m_i}.$$

Другими словами,

$$\varepsilon M \in MVG\left(\prod_{\gamma: \gamma \varepsilon = \delta} q_\gamma, \delta \leq \varepsilon\right).$$

Теорема 4. Характеристическая функция проекции вектора M на гиперплоскость ε равна

$$\psi(\varepsilon \mathbf{t}) = E e^{i(\varepsilon \mathbf{t}, M)} = \frac{e^{i(\varepsilon \mathbf{t}, \varepsilon)}}{1 - e^{i(\varepsilon \mathbf{t}, \varepsilon)} \prod_{\delta: \delta \varepsilon > 0} q_\delta} \sum_{j=1}^{\|\varepsilon\|} I_{j, \varepsilon},$$

$$\text{где } I_{j, \varepsilon} = \sum_{\substack{\delta: \delta \varepsilon > 0 \\ 1 \leq v \leq j}} \prod_{v=1}^j p_{\delta_v} \prod_{\substack{\gamma: \gamma \varepsilon > 0 \\ \gamma \neq \delta_v \\ 1 \leq v \leq j}} q_\gamma \psi\left(\sqrt{\delta_v} \varepsilon \mathbf{t}\right), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k).$$

Следствие 1. Характеристическая функция многомерного геометрического распределения равна

$$\psi(\mathbf{t}) = E e^{i(\mathbf{t}, M)} = \frac{e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{1})}}{1 - e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{1})} \prod_{\delta \in E} q_\delta} \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{\delta_v \neq \delta_{v+1} \\ \delta_v \in E \\ 1 \leq v \leq j}} \prod_{v=1}^j p_{\delta_v} \prod_{\substack{\gamma \in E \\ \gamma \neq \delta_v \\ 1 \leq v \leq j}} q_\gamma \psi\left(\sqrt{\delta_v} \mathbf{t}\right).$$

Следствие 2. Характеристическая функция проекции вектора M на ось $\varepsilon = (1, 0, \dots, 0)$ равна

$$\psi(\varepsilon \mathbf{t}) = E e^{i(t_1, M_1)} = \frac{e^{it_1}}{1 - e^{it_1} \prod_{\delta \in E_1} q_\delta} \sum_{\delta \in E_1} p_\delta \prod_{\substack{\gamma \in E_1 \\ \gamma \neq \delta}} q_\gamma.$$

3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Согласно (1)

$$\bar{P}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) = \prod_{\varepsilon \in E} q_\varepsilon^{\max_{\varepsilon}(\mathbf{m} + \mathbf{n})} = \prod_{\varepsilon \in E} q_\varepsilon^{\max_{\varepsilon} \mathbf{m}} \prod_{\varepsilon \in E} q_\varepsilon^n = \bar{P}(\mathbf{m}) \bar{P}(\mathbf{n}), \quad (3)$$

где

$$\bar{P}(\mathbf{n}) = \prod_{\varepsilon \in E} q_\varepsilon^n. \quad (4)$$

Из (3) следует (2).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Положим параметры MVG -распределения равными $p_\varepsilon = \lambda_\varepsilon p$ и рассмотрим вектор $pM = (\min_{\varepsilon \in E_1} \{pN_\varepsilon\}, \dots, \min_{\varepsilon \in E_k} \{pN_\varepsilon\})$.

По известному свойству геометрического распределения

$$pN_\varepsilon \xrightarrow[p \rightarrow 0]{P} X_\varepsilon,$$

где $X_\varepsilon \in E(\lambda_\varepsilon)$. Значит,

$$pM \xrightarrow[p \rightarrow 0]{P} \left(\min_{\varepsilon \in E_1} \{X_\varepsilon\}, \dots, \min_{\varepsilon \in E_k} \{X_\varepsilon\} \right) = Z \in MVE(\lambda_\varepsilon, \varepsilon \in E).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.

$$\bar{P}(\varepsilon \mathbf{m}) = \prod_{\gamma \in E} q_\gamma^{\max_{1 \leq i \leq k} \delta m_i}. \quad (5)$$

Обозначим $\delta = \gamma \varepsilon$.

Меняя порядок сомножителей в (5) и учитывая, что $\forall \gamma \in E \quad \gamma \varepsilon \leq \varepsilon$, получим

$$\bar{P}(\varepsilon \mathbf{m}) = \prod_{\delta \leq \varepsilon} \left(\prod_{\gamma: \gamma \varepsilon = \delta} q_\gamma \right)^{\max_{1 \leq i \leq k} \delta m_i}.$$

Теорема доказана.

При доказательстве теоремы 4 будем использовать следующую лемму.

Лемма.

$$E(e^{i(t, \varepsilon M)}; \varepsilon M > \varepsilon n) = e^{in(t, \varepsilon)} \prod_{\delta \delta \varepsilon > 0} q_{\delta}^n E e^{i(t, \varepsilon M)}.$$

Доказательство леммы.

$$E(e^{i(t, \varepsilon M)}; \varepsilon M > \varepsilon n) = e^{in(t, \varepsilon)} P(\varepsilon M > \varepsilon n) E e^{i(t, \varepsilon M)} = e^{in(t, \varepsilon)} \prod_{\delta \delta \varepsilon > 0} q_{\delta}^n E e^{i(t, \varepsilon M)}. \quad (6)$$

В равенстве (6) используются свойство отсутствия последствия распределения вектора M и формула (4).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Обозначим через W_{ε} минимум среди компонент вектора εM :

$$W_{\varepsilon} = \min_{i \in I} \varepsilon M = \min_{\delta \delta \varepsilon > 0} \{N_{\delta}\}.$$

В дальнейшем используем обозначение $E(\xi; B) = \int_B \xi(\omega) P(d\omega)$, предложенное в [3].

По формуле сложения для несовместных событий

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon t) &= E e^{i(t, \varepsilon M)} = \\ &= \sum_{j=1}^{\|\varepsilon\|} \sum_{\substack{\delta, \delta \varepsilon > 0 \\ 1 \leq v \leq j}} E(e^{i(t, \varepsilon M)}; W_{\varepsilon} = N_{\delta_v} \ (v=1, \dots, j), \\ N_{\gamma} > N_{\delta_v}, \gamma \varepsilon > 0, \gamma \neq \delta_v, 1 \leq v \leq j) &= \sum_{j=1}^{\|\varepsilon\|} I_{j, \varepsilon}. \end{aligned} \quad (7)$$

Вычислим первое слагаемое $I_{1, \varepsilon}$ в (7).

По свойству условного математического ожидания

$$I_{1, \varepsilon} = \sum_{\delta \delta \varepsilon > 0} \sum_{n_{\delta}=1}^{\infty} p_{\delta} q_{\delta}^{n_{\delta}-1} E(e^{i(t, \varepsilon M)}; N_{\delta} = n_{\delta}, N_{\gamma} > n_{\delta}, \gamma \varepsilon > 0, \gamma \neq \delta). \quad (8)$$

При $N_{\delta} = n_{\delta}$ $\delta \varepsilon M = \delta \varepsilon n_{\delta}$, $n_{\delta} = (n_{\delta}, \dots, n_{\delta})$ и

$$\begin{aligned} E(e^{i(t, \varepsilon M)}; N_{\delta} = n_{\delta}, N_{\gamma} > n_{\delta}, \gamma \varepsilon > 0, \gamma \neq \delta) &= \\ = E(e^{i(t, \delta \varepsilon M)} e^{i(t, \bar{\delta} \varepsilon M)}; N_{\delta} = n_{\delta}, N_{\gamma} > n_{\delta}, \gamma \varepsilon > 0, \gamma \neq \delta) &= \\ = e^{in_{\delta}(t, \delta \varepsilon)} E(e^{i(t, \bar{\delta} \varepsilon M)}; N_{\gamma} > n_{\delta}, \gamma \varepsilon > 0, \gamma \neq \delta). \end{aligned} \quad (9)$$

Запишем событие $\{N_{\gamma} > n_{\delta}, \gamma \varepsilon > 0, \gamma \neq \delta\}$ в виде суммы двух несовместных событий:

$$\{N_{\gamma} > n_{\delta}, \gamma \bar{\delta} \varepsilon > 0\} \cup \{N_{\gamma} > n_{\delta}, \gamma \in \{\{\gamma \varepsilon > 0\} \setminus \{\delta\} \setminus \{\gamma \bar{\delta} \varepsilon > 0\}\}\}. \quad (10)$$

Вектор $\bar{\delta} \varepsilon M$ от второго события в (10) не зависит, поэтому

$$\begin{aligned} E(e^{i(t, \bar{\delta} \varepsilon M)}; N_{\gamma} > n_{\delta}, \gamma \varepsilon > 0, \gamma \neq \delta) &= \\ = P(N_{\gamma} > n_{\delta}, \gamma \in \{\{\gamma \varepsilon > 0\} \setminus \{\delta\} \setminus \{\gamma \bar{\delta} \varepsilon > 0\}\}) \times \\ \times E(e^{i(t, \bar{\delta} \varepsilon M)}; N_{\gamma} > n_{\delta}, \gamma, \gamma \bar{\delta} \varepsilon > 0). \end{aligned} \quad (11)$$

Первый сомножитель в правой части (11) равен

$$\prod_{\gamma \in \{\{\gamma \varepsilon > 0\} \setminus \{\delta\} \setminus \{\gamma \bar{\delta} \varepsilon > 0\}\}} q_{\gamma}^{n_{\gamma}}, \quad (12)$$

а второй согласно лемме равен

$$e^{in_{\delta}(t, \bar{\delta} \varepsilon)} \prod_{\gamma \bar{\delta} \varepsilon > 0} q_{\gamma}^{n_{\delta}} E e^{i(t, \bar{\delta} \varepsilon M)}. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (11), затем (11) в (9), (9) в (8) и суммируя по n_{δ} , получим

$$I_{1, \varepsilon} = \frac{e^{i(t, \varepsilon)}}{1 - e^{i(t, \varepsilon)}} \sum_{\gamma, \gamma \varepsilon > 0} p_{\delta} \prod_{\substack{\delta \delta \varepsilon > 0 \\ \gamma \neq \delta}} q_{\gamma} E(e^{i(t, \bar{\delta} \varepsilon M)}).$$

В общем случае $I_{j, \varepsilon}$ вычисляем по аналогичному алгоритму.

$$I_{j, \varepsilon} = \sum_{\substack{\delta_v, \delta_v \varepsilon > 0 \\ 1 \leq v \leq j}} \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{v=1}^j p_{\delta_v} \left(\prod_{v=1}^j q_{\delta_v} \right)^{l-1} \times \\ \times E(e^{i(t, \varepsilon M)}; N_{\delta_v} = l, N_j > l, \gamma \varepsilon > 0, \gamma = \delta_v, v=1, \dots, j). \quad (14)$$

При $N_{\delta_v} = l$, $\delta_v M = \delta_v \varepsilon(l, \dots, l)$, $1 \leq v \leq j$ и

$$\begin{aligned} E(e^{i(t, \varepsilon M)}; N_{\delta_v} = l, N_j > l, \gamma \varepsilon > 0, \gamma \neq \delta_v, 1 \leq v \leq j) &= \\ = e^{il(t, \sqrt{j} \delta_v \varepsilon)} E \left(e^{i(t, \sqrt{j} \delta_v \varepsilon M)}; N_{\gamma} > l, \gamma \varepsilon > 0, \gamma \neq \delta_v, 1 \leq v \leq j \right) &= \\ = e^{il(t, \sqrt{j} \delta_v \varepsilon)} P \left(N_{\gamma} > l, \right. & \\ \left. \gamma \in \{\{\gamma \varepsilon > 0\} \setminus \{\delta_1\} \setminus \dots \setminus \{\delta_j\} \setminus \{\gamma \sqrt{j} \delta_v \varepsilon > 0\}\} \right) \times & \\ \times E \left(e^{i(t, \sqrt{j} \delta_v \varepsilon M)}; N_{\gamma} > l, \gamma \sqrt{j} \delta_v \varepsilon > 0 \right) &= \\ = e^{il(t, \sqrt{j} \delta_v \varepsilon)} \prod_{\substack{\gamma \in \{\{\gamma \varepsilon > 0\} \setminus \{\delta_1\} \setminus \dots \setminus \{\delta_j\} \setminus \{\gamma \sqrt{j} \delta_v \varepsilon > 0\}\} \\ v=1}} \prod_{j} \times & \\ \times q_{\gamma}^l \prod_{\substack{j \\ \gamma, \gamma \sqrt{j} \delta_v \varepsilon > 0}} q_{\gamma}^l e^{il \left(\sqrt{j} \delta_v \varepsilon, t \right)} E \left(e^{i(t, \sqrt{j} \delta_v \varepsilon M)} \right) &= \\ = e^{il(t, \varepsilon)} \prod_{\substack{\gamma, \gamma \varepsilon > 0 \\ \gamma \neq \delta_v \\ 1 \leq v \leq j}} q_{\gamma}^l E e^{i \left(t, \sqrt{j} \delta_v \varepsilon M \right)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив (15) в (14) и просуммировав по l , получим

$$I_{j, \varepsilon} = \frac{e^{i(t, \varepsilon)}}{1 - e^{i(t, \varepsilon)}} \sum_{\gamma, \gamma \varepsilon > 0} \sum_{\substack{\delta_v, \delta_v \varepsilon > 0 \\ 1 \leq v \leq j}} p_{\delta_v} \prod_{\substack{\gamma, \gamma \varepsilon > 0 \\ \gamma \neq \delta_v \\ 1 \leq v \leq j}} q_{\gamma} \psi \left(\sqrt{j} \delta_v \varepsilon t \right).$$

Теорема доказана.

References

-
1. Marshall A.W., Olkin I.A. Multivariate exponential distribution // J. Amer. Statis. Assoc. 1967. V.62. №317. P.30-44.
 2. Zolotukhin I.V. The study of the Laplace transform of Marshall-Olkin multivariate exponential distribution //Topics from the 7th International Workshop on Statistical Simulation, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2013, (в печати).
 3. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 431 с.
 1. Marshall A.W., Olkin I.A. Multivariate exponential distribution. J. Amer. Statis. Assoc., 1967, vol. 62, no. 317, pp. 30-44.
 2. Zolotukhin I.V. The study of the Laplace transform of Marshall-Olkin multivariate exponential distribution. Topics from the 7th International Workshop on Statistical Simulation, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2013, (in print).
 3. Borovkov A.A. Teoriia veroiatnostei [Theory of probability]. Moscow, "Nauka" Publ., 1986, 431 p.