

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого

На правах рукописи

Соколов Олег Владимирович

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ РЕЗОНАНСНЫХ
ЯВЛЕНИЙ МЕТОДОМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

Специальность: 01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат ф.-м. наук,
доцент Ковалевский М. М.

Великий Новгород

2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	9
1.1. Мультипликативный интеграл.....	10
1.2. Спиновые и другие виды эха.....	15
1.2.1. Спиновое эхо.....	18
1.2.2. Другие виды эха.....	21
2. СТРУКТУРА ФУНКЦИОНАЛЬНО-НИЛЬПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ.....	24
3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СПИНОВОГО И СВЕТОВОГО ЭХА В НЕСКОЛЬКИХ ВАЖНЫХ СЛУЧАЯХ	37
3.1. Учет релаксационных процессов.....	37
3.2. Влияние помехи на форму эхо-сигнала.....	46
3.3. Эхо-сигнал от перекрывающихся импульсов.....	48
3.4. Особенности сигналов спинового эха в ферромагнитных поликристаллах.....	50
3.5. Условия получения спектров сигналов в спиновых эхо-процессорах в реальном масштабе времени.....	60
4. ДВУХЧАСТОТНОЕ ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭХО-СИГНАЛА В ЯДЕРНОМ КВАДРУПОЛЬНОМ РЕЗОНАНСЕ.....	70
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	77
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	78
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	81
ПРИЛОЖЕНИЕ 3.....	84
ЛИТЕРАТУРА.....	86

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы.

Импульсные резонансные явления, включая ядерное квадрупольное, спиновое и световое эхо, применяются для изучения внутренних движений в кристаллах, природы химической связи, комплексных соединений, дефектов в твердых телах. Эксперименты по ядерному квадрупольному эху, в отличие от экспериментов по обычному ядерному квадрупольному резонансу (ЯКР), позволяют не только получать сведения о константах квадрупольного взаимодействия, параметрах асимметрии и величинах химического сдвига, но и дают возможность исследования неравновесных состояний спин-систем (релаксационные процессы), внутренних электрических и магнитных локальных полей в кристаллах. Импульсные методы ЯКР позволяют наблюдать сигналы в неупорядоченных кристаллах, что существенно расширяет возможности метода.

При исследовании импульсных резонансных явлений необходимо решать либо уравнение Шредингера, либо уравнения Блоха. И в том и в другом случае получается система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (СЛДУПК). В связи с этим актуальна проблема нахождения решений таких систем.

Случаи точного решения систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами исключительно редки. Поэтому актуальна проблема разработки приближенных методов нахождения решения систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами общего вида в форме аналитических выражений.

Метод мультипликативного интегрирования существенно расширяет класс задач, для которых могут быть получены точные и приближенные

аналитические решения систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами общего вида.

Общее решение СЛДУПК допускает точное представление с помощью мультипликативного интеграла (МИ). В связи с этим возникает проблема вычисления МИ. Известно, что в случаях функционально-коммутативных и функционально-нильпотентных матриц МИ допускает точное аналитическое вычисление. Ранее в работе [1] был разработан итерационный метод вычисления мультипликативного интеграла от матриц произвольной структуры, основанный на использовании в качестве начального приближения матричной экспоненты и доказана сходимость полученного произведения счетного множества сомножителей. Также в [1] найдены некоторые варианты структур функционально-коммутативных и функционально-нильпотентных матриц.

Настоящая работа частично посвящена нахождению структур функционально-нильпотентных матриц. Знание структуры функционально-нильпотентных матриц позволяет упростить вычисление мультипликативного интеграла от произвольной матрицы путем выделения из нее функционально-нильпотентной матрицы и последующего применения интегрирования по частям. С помощью метода мультипликативного интегрирования удалось получить новые оригинальные результаты по теории импульсных резонансных явлений.

Цель и задачи работы.

Целью диссертационной работы является исследование импульсных резонансных явлений, описываемых СЛДУПК, с помощью метода мультипликативного интегрирования. Для достижения поставленной цели в диссертационной работе решаются следующие **задачи**:

1. Создание алгоритма нахождения всех структур функционально-нильпотентных матриц третьего и четвертого порядков.

2. Исследование явлений ядерного квадрупольного, спинового и светового эха на основе метода мультипликативного интегрирования.

Методы исследований. Для решения поставленных в диссертационной работе задач были использованы методы теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, теории мультипликативного интегрирования, теории матриц, теории интегральных преобразований, теории интегральных уравнений и численные методы.

Достоверность результатов исследований. Обоснованность и достоверность положений, выводов и рекомендаций подтверждается корректным использованием математических методов, а также тем, что полученные выводы соответствуют ранее известным результатам теоретических расчетов и экспериментов, выполненных в этой области знаний другими авторами.

Положения, выносимые на защиту.

1. Ранг функционально-нильпотентной матрицы n -го порядка не превосходит $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (целой части от $(n/2)$).
2. Учет релаксации в явлениях ядерного квадрупольного и спинового эха влияет как на величину, так и на форму эхо-сигнала. Если длительность эхо-сигнала мала по сравнению с временами релаксации, то асимметрия формы эхо-сигнала явно не выражена. Если длительность эхо-сигнала сравнима по величине с временами релаксации, то асимметрия, напротив, — сильно выражена.
3. Наличие помехи влияет на результат при корреляционной обработке сигнала: при небольшой мощности шума полезный эхо-

сигнал достаточно хорошо выделяется на фоне шума, а при значительной — сигнал совершенно неразличим на фоне помех.

4. Двухчастотное импульсное возбуждение позволяет усилить эхо-сигнал по сравнению с одночастотным возбуждением.

Научная новизна. В ходе исследования были получены следующие новые результаты:

1) разработан алгоритм нахождения всех структур функционально-нильпотентных матриц третьего и четвертого порядков, определено полное количество структур функционально-нильпотентных матриц третьего порядка;

2) доказано, что ранг функционально-нильпотентной матрицы n -го порядка не может превосходить $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$;

3) создан общий алгоритм нахождения некоторых структур функционально-нильпотентных матриц, порядок которых выше четвертого;

4) в явлениях спинового и светового эха установлена связь между временами релаксации с одной стороны, и формой и величиной эхо-сигнала с другой стороны;

5) получена зависимость амплитуды эхо-сигнала от площади радиочастотного импульса при двухимпульсном возбуждении спинового эха в ферромагнитном поликристалле.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на международных научных конференциях: на конференциях «Математика в ВУЗе» (Великий Новгород, 2005 г.; Санкт-Петербург, 2008 г.), на 4-м Международном семинаре «Физико-математическое моделирование систем» (Воронеж, 2007 г.), на 11-й Международной конференции «Физика диэлектриков» (Диэлектрики-2008) (Санкт-Петербург, июнь 2008 г.) и на

международной научно-практической конференции «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании» (Одесса, 2009 г.).

Публикации. Всего по теме диссертации опубликовано 10 работ. Из них 4 работы опубликованы в рецензируемых научных журналах, рекомендованных перечнем ВАК, 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, 5 публикаций в материалах международных научных конференций и одна публикация в электронном журнале.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, трех приложений, библиографического списка. Она изложена на 92 страницах машинописного текста, содержит 18 рисунков, библиографический список включает 81 наименование.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из четырех глав. В первой главе – обзоре литературы – сначала изложены основы теории мультипликативного интегрирования, а затем – явления спинового и других видов эха.

В параграфе 1.1 рассматриваются основы теории мультипликативного интегрирования. В параграфе 1.2 описываются спиновые и другие виды эха, соответственно в параграфе 1.2.1 спиновые, а в параграфе 1.2.2 – другие виды эха.

Во второй главе найдены все структуры функционально-нильпотентных матриц третьего порядка, найден алгоритм нахождения всех структур матриц четвертого порядка, приводятся примеры. Показано, что ранг функционально-нильпотентной матрицы не может превосходить целой части от $(n/2)$.

В третьей главе рассматриваются различные аспекты образования сигналов спинового и светового эха. В параграфе 3.1 произведен учет релаксационных процессов. В параграфе 3.2 изучено влияние помехи на форму эхо-сигнала. В параграфе 3.3 рассмотрено влияние частичного наложения исходных сигналов на форму эхо-сигнала. В параграфе 3.4 рассмотрены особенности сигналов спинового эха в ферромагнитных поликристаллах. В параграфе 3.5 исследованы возможности анализа спектров сигналов в спиновых эхо-процессорах в реальном масштабе времени.

Четвертая глава посвящена рассмотрению особенностей ЯКР при двухчастотном возбуждении по сравнению с одночастотным возбуждением.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Для решения систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих рассматриваемые в данной работе явления, применяются методы мультипликативного интегрирования.

Необходимо отметить, что результаты численного решения систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами имеют существенно неустранимый недостаток: они всегда конкретны, что затрудняет их общий анализ, особенно если анализируемые величины зависят от нескольких параметров.

Метод мультипликативного интеграла, по сравнению с обычными численными методами решения, обладает тем преимуществом, что с его помощью можно *аналитически* одновременно проследить зависимость решений от поведения всей совокупности параметров исследуемых импульсных резонансных явлений. Также преимущество этого метода в том, что применение последовательных приближений для вычисления мультипликативного интеграла с выбором в качестве нулевого приближения матричной экспоненты позволяет получить решение соответствующей задачи с удовлетворительной точностью значительно быстрее, чем другие методы.

Во второй половине XX в. наибольший прогресс был достигнут в развитии методов математических расчетов, связанных с использованием средств вычислительной техники. Это обусловлено с одной стороны гигантским прогрессом в области создания быстродействующих средств вычислительной техники с большими объемами памяти и с другой стороны – необходимостью анализировать динамику систем, описываемых либо нелинейными дифференциальными и интегральными уравнениями и их системами, либо системами дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, либо их комбинациями. Существует обширная

библиография, посвященная анализу и перспективам развития численных методов, например [2-5].

Первая часть литературного обзора будет посвящена теории мультипликативного интегрирования, а другая - явлению спинного и других видов эха.

1.1 Мультипликативный интеграл

Если рассматривается неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, то наиболее удобным в этом случае является представление системы в матричной форме

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + B(t), \quad (1.1)$$

где $A(t), B(t)$ – квадратные матрицы соответствующего порядка, элементы которых являются переменными коэффициентами системы линейных дифференциальных уравнений, $X(t)$ – фундаментальная матрица решений системы линейных дифференциальных уравнений, при этом фундаментальная матрица решений системы представима в виде:

$$X(t) = \Omega(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)B(\tau)d\tau, \quad (1.2)$$

где

$$\Omega(t, t_0) = \int_{t_0}^{\cap t} A(\tau)d\tau \quad (1.3)$$

– мультипликативный интеграл, а

$$K(t, \tau) = \Omega(t, t_0)[\Omega(\tau, t_0)]^{-1} \quad (1.4)$$

– так называемая матрица Коши [6], $X(t_0)$ – начальное значение решения при $t = t_0$.

Понятие мультипликативного интеграла впервые ввёл В. Вольтерра в 1887 г. На базе этого понятия В. Вольтерра построил своеобразное инфинитезимальное исчисление для матричных функций [7]. В начале XX в. теория мультипликативного интеграла получила развитие в работах Л. Шлезингера [8], [9] при исследовании систем линейных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами. В 30-е гг. XX в. к вопросу мультипликативного интегрирования обращались Г. Раш [10] и Г. Биркхоф [11]. Краткий обзор основных понятий и свойств мультипликативного интеграла был дан в монографии Ф. Р. Гантмахера [6] и работе С. Г. Крейна и Н. И. Яцкина [12]. В последние 20 лет теория получила развитие в работах О. В. Мантурова [13-15], Л. Ж. Паланджянца [16], А. Н. Мартынюка [17], Д. Е. Кумпяка [18], [19]. В 1979 г. в США было опубликовано исследование Дж. Долларда и Ч. Фридмана [20], содержащее, помимо элементов теории, большое количество возможных приложений мультипликативного интеграла.

Однако, хотя теория мультипликативного интегрирования и имеет обширную библиографию, полученные результаты не являются полными, и она не получила широкого применения при теоретическом исследовании физических процессов, что обусловлено неразвитостью техники вычисления мультипликативного интеграла. Это связано с трудностями вычисления мультипликативного интеграла от матриц произвольной структуры (в [12] приведён метод вычисления мультипликативного интеграла от матриц с переменными коэффициентами специального вида (полиномиальных матриц)).

В теории дифференциальных уравнений [6], [12], [20] доказано, что в случае функциональной коммутативности матриц [21]

$$[A(t)A(t')] \stackrel{\text{def}}{=} A(t)A(t') - A(t')A(t) = 0 \quad (1.5)$$

мультипликативный интеграл сводится к вычислению матричной экспоненты

$$\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \exp \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right). \quad (1.6)$$

Наиболее просто мультипликативный интеграл вычисляется от функционально-нильпотентных матриц, удовлетворяющих условию

$$A(t)A(t') = 0 \quad (1.7)$$

для любых $t, t' \in R$:

$$\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = E + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau. \quad (1.8)$$

В 1952 г. В. Морозовым [22] впервые был поставлен вопрос о структуре функциональных абелевых матриц (ФАМ), то есть матриц, удовлетворяющих (1.5), но рассматривался только случай невырожденных матриц. При решении же практических задач в общем случае может возникать необходимость вычисления мультипликативного интеграла как от невырожденных, так и от вырожденных ФАМ.

Таким образом, задача о практическом вычислении мультипликативного интеграла может быть разбита на несколько связанных между собой задач:

1. Определение структур матриц, удовлетворяющих (1.5) и позволяющих точно вычислить мультипликативный интеграл по соотношению (1.6).

2. Определение структур матриц, изначально не удовлетворяющих (1.5), но мультипликативный интеграл от которых может быть вычислен точно путём использования процедуры интегрирования по частям [6], [13].

3. Разработка методов приближённого вычисления мультипликативного интеграла от матриц произвольной структуры.

Если матрица не является функционально-коммутативной, то можно представить ее в виде суммы функционально-коммутативной и обычной матрицы и применить интегрирование по частям. Если получившийся в

результате мультипликативный интеграл содержит опять матрицу, не являющуюся функционально-коммутативной, то можно снова применить описанную выше процедуру.

В [1] разработан итерационный метод вычисления мультипликативного интеграла от матриц произвольной структуры, основанный на использовании в качестве приближения матричной экспоненты. Доказана сходимость полученного произведения счетного множества сомножителей. Также найдены варианты структур функционально-коммутативных и функционально-нильпотентных матриц.

В настоящей работе найдены все структуры функционально-нильпотентных матриц третьего порядка и дан алгоритм нахождения всех структур матриц четвертого порядка, найден общий алгоритм нахождения некоторых структур функционально-нильпотентных матриц, порядок которых выше четвертого.

Существует несколько способов построения мультипликативного интеграла [6], [12], [13], [20], [23].

Например, в [6] описываются базовые конструкции мультипликативного интеграла. Сам мультипликативный интеграл вводится через матрицант системы (1.1) $\Omega_{t_0}^t(A)$. Основной интервал интегрирования (t_0, t) разбивается на n частей ($k = 1, 2, \dots, n; t_n = t$) и $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Промежуточная точка τ_k такова, что $\tau_k \in \Delta t_k$. Тогда, считая Δt_k малыми величинами первого порядка, при вычислении $\Omega_{t_0}^t(A)$ с точностью до малых второго порядка, можно принять $A(t) \approx \text{const} = A(\tau_k)$. Тогда

$$\Omega_{t_0}^t(A) = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \left[(E + A(\tau_n) \Delta t_n) \dots (E + A(\tau_1) \Delta t_1) \right].$$

Выражение, стоящее под знаком предела в правой части данного равенства, представляет собой интегральное произведение. Предел этого произведения называется мультипликативным интегралом и обозначается

$$\text{символом } \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau, \text{ т.е. } \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \Omega_{t_0}^t(A).$$

Основные свойства и некоторые оценки для матрицантов (то есть для мультипликативных интегралов) приводятся также в [21] и [24].

В [20] используется аналогичный [6] метод построения интегрального произведения в конструкции мультипликативного интеграла от некоторой матрицы $A(t)$, но уже без привязки к системе ОДУ:

$$\int_a^x A(s)ds = \lim_{\mu(P) \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n e^{A(s'_k)\Delta s_k},$$

где $P = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ - разбиение $[a, x]$; $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$ и $s'_k \in \Delta s_k$, $\mu(P) = \max(\Delta s_k)$.

В [13] предложен несколько иной подход к определению мультипликативного интеграла (через ассоциативную алгебру матриц A): пусть A - произвольная ассоциативная топологическая алгебра с единицей E и $f(t)$ - матричная функция вещественной переменной t , принимающая значения в алгебре A , $a, b \in R(a \leq b)$; $[a, b] = \{t \in R; a \leq t \leq b\}$; T - разбиение отрезка $[a, b]$ точками $t_i (i = 0, 1, \dots, n-1): a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$. Пусть $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ и $l(T) = \max \Delta t_i$.

Рассматривается произведение

$$(E + f(t_n)\Delta t_n)(E + f(t_{n-1})\Delta t_{n-1}) \dots (E + f(t_0)\Delta t_0) = \prod(f, T).$$

Если при любом изменении T , при котором $l(T) \rightarrow 0$, произведение $\prod(f, T)$ стремится к некоторому пределу, то этот предел называется мультипликативным интегралом функции $f(t)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается через

$$\int_a^b f(t)dt. \quad (1.9)$$

Аналогичным образом по $f(t)$ и T можно построить произведение

$$(E + f(t_0)\Delta t_0)(E + f(t_1)\Delta t_1) \dots (E + f(t_n)\Delta t_n) = \prod(f, T),$$

и, в случае существования предела этого произведения, получить другой тип мультипликативного интеграла, обозначаемый через

$$\int_a^{\cup b} f(t) dt. \quad (1.10)$$

Интегралы (1.9) и (1.10) называются обратным и прямым соответственно.

Описанные конструкции во многом аналогичны конструкции интеграла Римана. Действительно, если риманов интеграл является пределом суммы большого числа слагаемых, близких к нулю, то мультипликативный интеграл равен пределу произведения большого количества сомножителей, близких к единичной матрице.

Существует ещё одна точка зрения [13] на риманов и мультипликативный интегралы. Как в одном, так и в другом случае речь идёт о пределе группового произведения элементов, близких к единице группы, только групповое произведение понимается в разных смыслах: в римановом случае групповое произведение понимают в смысле групповой операции сложения в аддитивной группе R , а в случае мультипликативного интеграла групповое произведение понимают в смысле операции в ассоциативной алгебре матриц. С этой точки зрения главное различие между Римановым и мультипликативным интегралом состоит в том, что групповое произведение, лежащее в основе определения, является в одном случае коммутативным, а в другом – вообще говоря, некоммутативным.

Свойства мультипликативного интеграла во многом определяются алгебраическими свойствами алгебры A , не говоря уже об её топологических свойствах.

1.2 Спиновое и другие виды эха

Эффект поляризационного эха – одно из наиболее ярких явлений, позволяющих исследовать структуру энергетических спектров и, следовательно, и структуру вещества [25]. Именно поэтому последние

тридцать лет бурно развивается такая область исследований, как эхоспектроскопия [26-28]. Применение различных типов устройств: релаксометров, спектрометров, Фурье-спектрометров, двумерных Фурье-спектрометров и так далее, дает возможность проводить количественные измерения содержания в образце тех или иных атомов и молекул [29], исследовать кинетику химических реакций [30], проводить структурный анализ сложных молекул [31-33], измерять величины полей на ядрах [34], расстояние между атомами [35], их ориентацию, величины мультипольных моментов и так далее.

На основе явления поляризационного эха созданы многочисленные приборы, используемые в физике и химии, сельском хозяйстве и нефтеразведке, медицине. Все они используют тот факт, что спектры эхосигналов зависят от формы исследуемой линии поглощения при условии, что спектры импульсов возбуждения равномерны в ее пределах. В значительной степени именно это требование заставляет использовать короткие (с длительностью много меньшей времени релаксации) прямоугольные радиоимпульсы, при этом чем короче эти радиоимпульсы, тем меньше искажений они вносят, а так как площадь импульса должна быть строго определенной, то мощности импульсов возбуждения в некоторых экспериментах могут достигать нескольких десятков киловатт, что создает значительные трудности при разработке и конструировании спектрометров.

Исследования, проведенные для двухуровневой модели энергетического спектра, показали, что спектры эхосигналов зависят определенным образом не только от формы линии поглощения, но и от спектров импульсов возбуждения [36-39]. Именно это позволяет создавать на основе явления поляризационного эха многофункциональные квантовые устройства обработки сигналов – эхо-процессоры [40], использовать для возбуждения рабочего вещества не только короткие радиоимпульсы, называемые обычно дельта-импульсами, но и сложные сигналы.

В [41] было показано, что трехимпульсное эхо представляет собой сечение функции неопределенности двух финитных сигналов, причем расстройка при этом определяется амплитудами обрабатываемых сигналов. Описаны также условия, при которых может произойти развал эхо-сигнала.

Большинство устройств, созданных на основе явления поляризационного эха, работают в одночастотном режиме, то есть исследуют только один переход между двумя уровнями в энергетическом спектре, что позволяет считать его двухуровневым. Реальные ситуации бывают значительно сложнее, так как энергетический спектр вещества является многоуровневым, при этом частоты переходов, как правило, неравны между собой. Учет влияния близкорасположенных энергетических уровней или смежных уровней при многочастотном возбуждении на формирование эхо-сигналов представляет значительный интерес, так как позволяет исследовать квантовые переходы частицы не только между двумя соседними энергетическими уровнями, но и между некоторой окружающей их совокупностью.

Некоторые работы [42-46] были посвящены исследованию квантовых систем с трехуровневым неэквидистантным энергетическим спектром. Анализировались времена появления эхо-сигналов, их частоты, условия наблюдения для различных типов поляризационного эха, соотношения между частотами переходов, спектральные же соотношения для них получены не были.

Для возможности учета влияния спектров импульсов возбуждения на форму эхо-откликов в многоуровневых квантовых системах, а также использования сложных сигналов в качестве возбуждающих необходимо разработать метод расчета спектров сигналов эха при многочастотном возбуждении.

1.2.1 Спиновое эхо

В 1950-м году Эрвин Хан [42] открыл очень интересное явление – спиновое эхо. Его открытие можно отнести к наиболее значительным вкладам в исследование свойств вещества с помощью магнитного резонанса, оно положило начало развитию импульсных методов в ЯМР.

Одной из основных характеристик радиоимпульса является площадь радиоимпульса, определяемая выражением $\int \gamma H(\tau) d\tau$, где γ – гиромагнитное отношение, $H(\tau)$ – зависимость огибающей радиоимпульса магнитного поля от времени. Если площадь импульса равна $\pi/2$ или π , то для краткости такие импульсы так и называются: импульс $\pi/2$, импульс π .

Предположим, что к группе спинов прикладывается импульс $\pi/2$ для наблюдения следующего за ним сигнала свободной индукции. Согласно уравнению Блоха

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \cdot [\vec{M} \times \vec{H}] - \frac{M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j}}{T_2} - \frac{M_z - M_0}{T_1} \cdot \vec{k}, \quad (1.11)$$

$$\vec{H} = \vec{k} \cdot H_0 + \vec{H}_1(t),$$

где $\vec{M}$ – магнитный момент системы, t – время, $\vec{H}$ – внешнее магнитное поле, состоящее из постоянного поляризирующего магнитного поля H_0 и перпендикулярного ему радиочастотного поля H_1 , T_1 – время продольной (спин-решеточной) релаксации, T_2 – время поперечной (спин-спиновой) релаксации, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты системы координат, сигнал свободной индукции экспоненциально затухает с постоянной времени T_2 (см. рис. 1). Затухание сигнала эха, начиная с момента времени 2τ , совпадает по форме с затуханием сигнала свободной индукции, начиная с момента времени $t=0$. Нарастание сигнала эха до момента времени $t=2\tau$ является зеркальным отображением во времени затухания сигнала после 2τ . Заметим, что сразу за импульсом π никакого сигнала свободной

индукции не возникает. Для твердых тел T_2 может составлять доли миллисекунды, что соответствует ширине резонансной линии в несколько гаусс. Для жидкостей линии обычно значительно уже и возможные времена имеют порядок нескольких секунд. Правда, уравнения Блоха обеспечивают правильное количественное описание в основном для жидких образцов, меньше применимы к твердым телам, совсем не подходят к ферромагнетикам. Ширина таких линий меньше величины обычной неоднородности поля магнита в объеме образца. Вызванный неоднородностью поля разброс частот прецессии спинов в различных частях образца приводит к расфазировке прецессии спинов. Сигнал свободной индукции определяется суммой вкладов от всех частей образца. Так как отдельные группы спинов выходят из синхронной прецессии, то сигнал затухает. Постоянная времени затухания по порядку величины равна $1/(\gamma\Delta H)$, где ΔH — неоднородность постоянного поля по образцу.

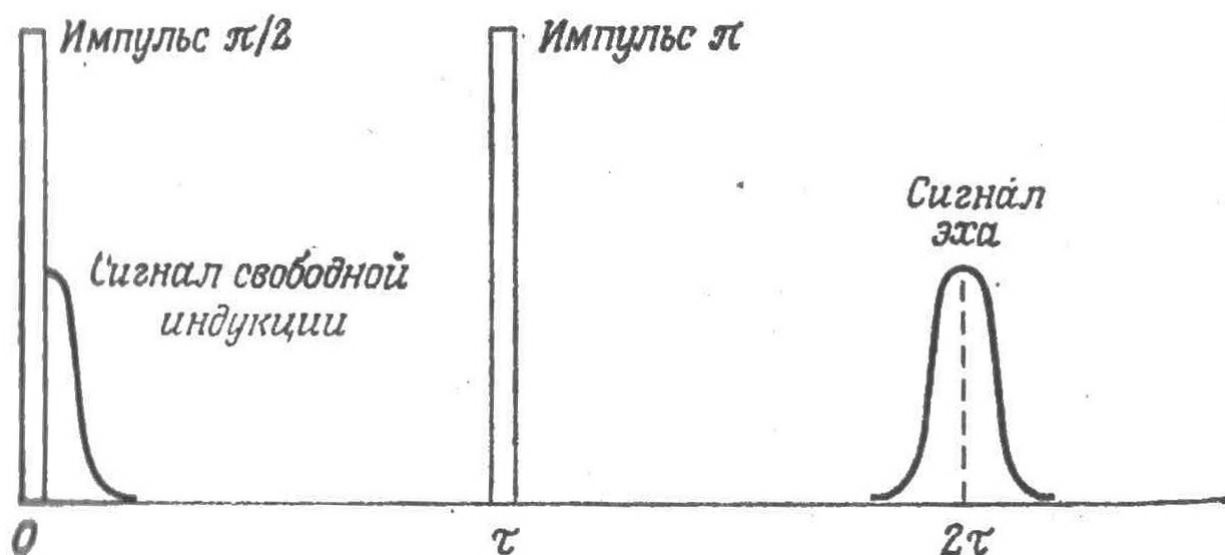


Рис. 1. Схема возникновения сигнала эха при двухимпульсном возбуждении.

Открытие Хана состояло в том, что он возбудил спины вторым импульсом $\pi/2$, приложенным вслед за первым через интервал времени τ , и спустя время 2τ после первого импульса наблюдал другой сигнал свободной индукции. Этот сигнал Хан назвал спиновым эхом.

Впоследствии было установлено, что для получения максимального эхо-сигнала, в качестве второго импульса нужно взять π импульс. Чтобы возникло спиновое эхо, спины должны были каким-то образом снова сфазироваться и прецессировать в фазе. Хан открыл спиновое эхо экспериментально, однако вскоре он теоретически из уравнений Блоха подтвердил его существование. Из решений уравнений следовало, что при увеличении τ амплитуда спинового эха экспоненциально уменьшается с постоянной времени T_2 .

$$M(2\tau) = M_0 e^{-2\tau/T_2} \quad (1.12)$$

Таким образом, наблюдая эхо, можно измерять ширину резонансных линий, меньшую, чем неоднородность поля магнита. Понимание физической основы образования эха привело к более глубокому проникновению в сущность явления резонанса в целом и в импульсный метод в частности.

Физический смысл образования эхо-сигналов обычно разъясняется с помощью векторной модели спинового эха, которая подробно рассмотрена в [47, 48].

Интересно выяснить, не будет ли сигнал эха в случае двух импульсов включать экспоненциальную зависимость с постоянной времени T_1 . Анализ показывает, что такой зависимости нет.

Таким образом, спин-решеточная релаксация, ответственная за появление составляющей z намагниченности, после первого импульса не влияет на сигнал эха. Для наблюдения такого влияния необходимо произвести перефазировку спинов рассмотренной группы. Для перефазировки необходим еще один дополнительный импульс. Влияние спин-решеточной релаксации на сигнал эха можно наблюдать с помощью трех радиочастотных импульсов.

Хан действительно обнаружил такие сигналы эха. Он наблюдал, что если приложить третий импульс в момент T (т. е. спустя $T - \tau$ после второго

импульса), то спустя $2(T-\tau)$ после второго импульса или в момент времени $t=2T-\tau$ индуцируется сигнал эха. Кроме того, Хан обнаружил сигналы эха в моменты времени $T+\tau$, $2T-2\tau$ и $2T$. Эхо, индуцированное третьим импульсом в момент времени $T+\tau$, обычно называют стимулированным.

1.2.2 Другие виды эха

С момента своего открытия спиновое эхо в течение многих лет оставалось уникальным явлением своего рода. Модель образования спинового эха привязывалась специфически к динамике прецессирующих спинов и не указывала на универсальность лежащего в его основе процесса. Теория формирования эхо-сигналов в спиновых системах от простых импульсов подробно изложена в работах [44-47]. Она позволяет предсказывать амплитуду и временное положение эхо-сигналов в зависимости от параметров и временного расположения воздействующих на спиновую систему радиоимпульсов с учетом процессов релаксации и спиновой диффузии, хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Однако в дальнейшем были обнаружены разновидности эхо-сигналов и в других физических системах. К настоящему времени известны, например, следующие виды поляризационного эха:

1. Ядерное спиновое эхо [42].
2. Электронное спиновое эхо [49].
3. Ядерное квадрупольное эхо [50].
4. Фотонное эхо [48, 51].
5. Фононное эхо [52, 53].
6. Циклотронное эхо [54, 55].
7. Магнитостатическое эхо [56].
8. Магнитоакустическое эхо [57-59].
9. Электроакустическое эхо [60].
10. Эхо в плазме [61].

11. Эхо в сверхпроводниках [62].
12. Эхо на вращательных переходах молекул [63].
13. Эхо на электронах проводимости [64, 65].
14. Туннельное эхо в стеклах [66].

Было замечено, что все или почти все из известных эхо-сигналов обладают некоторыми основными свойствами спинового эха Хана. Эхо-сигналы могут формироваться как по двухимпульсной, так и по трехимпульсной методике. В малосигнальном приближении амплитуда двухимпульсного эха прямо пропорциональна амплитуде первого импульса и квадрату амплитуды второго импульса. Наличие общих свойств указывает на наличие общих закономерностей в механизмах формирования и на возможность использования новых видов поляризационного эха для исследования структуры веществ (спектрометрических исследований) и в устройствах обработки сигналов.

Сравнение различных физических систем, в которых наблюдались эхо-сигналы, показало [44], что все эти системы могут рассматриваться как очень большие совокупности осцилляторов, частоты которых распределены в интервале, сравнимом с интервалом частот, содержащимся в спектре импульсов возбуждения. Непременным условием для формирования эха является некоторая нелинейность. Каждый импульс вызывает определенные возмущения в среде. Однако эхо-сигналы не могут являться результатом только линейного наложения этих возмущений. Для образования эхо-откликов требуются нелинейные взаимодействия между возмущениями. При достаточно мощных импульсах любая квантовая система изобилует нелинейностями, и обычно это требование нетрудно удовлетворить.

Очевидно, что специфический механизм, ответственный за формирование спинового эха, является только одним из многих возможных механизмов образования эха, и что эхо-процессы составляют большой класс явлений, сходных с определенными точками зрения по физическому происхождению.

ГЛАВА 2. СТРУКТУРА ФУНКЦИОНАЛЬНО-НИЛЬПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ

Найдены все структуры функционально-нильпотентных матриц для третьего порядка и дан алгоритм нахождения всех структур матриц для четвертого порядка, описан общий алгоритм нахождения некоторых структур функционально-нильпотентных матриц, порядок которых выше четвертого. Показано, что ранг функционально-нильпотентной матрицы не может превосходить целой части от $(n/2) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Квадратная матрица $A(t)$ размером $n \times n$ называется функционально-нильпотентной, если выполняется соотношение

$$A(t)A(t') = 0 \quad (2.1)$$

для любых $t, t' \in R$.

Мультипликативный интеграл от такой матрицы вычисляется точно и особенно просто

$$\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = E + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Условие (2.1) можно рассматривать как однородную систему n^2 линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^{n^2} A_{kl} a'_l = 0, \quad (2.3)$$

где a'_l — элементы матрицы $A(t')$, $l, k = 1..n^2$, а матрица системы $A_{kl}(t)$ вычисляется с помощью кронекеровского (прямого) произведения

$$A_{kl} = A \otimes E, \quad A = A(t). \quad (2.4)$$

Для разрешимости данной системы необходимо, чтобы определитель матрицы ее коэффициентов обращался в нуль, то есть

$$\det A_{kl}(t) = 0. \quad (2.5)$$

С другой стороны, по свойству кронекеровского произведения $\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^n$, где n - порядок матриц A и B . Так как в данном случае $B \equiv E$, то

$$\det A_{kl}(t) = (\det A)^n. \quad (2.6)$$

Поэтому система будет иметь нетривиальное решение, если

$$\det A = 0, \quad (2.7)$$

то есть матрица $A = A(t)$ должна быть особой.

Из определения произведения матриц следует, что для матрицы $X = A(t)A(t')$

$$x_{rs} = \sum_{i=1}^n a_{ri}(t)a_{is}(t'), \quad r, s = 1..n, \quad (2.8)$$

и условия нильпотентности матрицы A можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^n a_{ri}a'_{is} = 0, \quad r, s = 1..n, \quad (2.9)$$

где $a'_{is} = a_{is}(t')$.

Рассмотрим случай $n = 3$. Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Так как матрица A должна быть особой, то ее ранг не может превышать двух. Поэтому одна ее строка является линейной комбинацией оставшихся двух строк, и аналогично один ее столбец является линейной комбинацией оставшихся двух столбцов. Пусть речь идет о третьей строке и третьем столбце:

$$a_{31} = c_1 a_{11} + c_2 a_{21}, \quad a_{32} = c_1 a_{12} + c_2 a_{22}, \quad a_{33} = c_1 a_{13} + c_2 a_{23}, \quad (2.10)$$

$$a_{13} = b_1 a_{11} + b_2 a_{12}, \quad a_{23} = b_1 a_{21} + b_2 a_{22}, \quad a_{33} = b_1 a_{31} + b_2 a_{32}. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.10) и (2.11) в условия нильпотентности (2.9), получаем следующую систему

$$\begin{cases} D_{11}a'_{11} + D_{12}a'_{21} = 0 \\ D_{11}a'_{12} + D_{12}a'_{22} = 0 \\ D_{21}a'_{11} + D_{22}a'_{21} = 0 \\ D_{21}a'_{12} + D_{22}a'_{22} = 0 \end{cases}, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} D_{11} &= a_{11} + b_1c_1a_{11} + b_2c_1a_{12} \\ D_{12} &= a_{12} + b_1c_2a_{11} + b_2c_2a_{12} \\ D_{21} &= a_{21} + b_1c_1a_{21} + b_2c_1a_{22} \\ D_{22} &= a_{22} + b_1c_2a_{21} + b_2c_2a_{22} \end{aligned}. \quad (2.13)$$

Эту систему можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \\ a'_{12} \\ a'_{22} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.14)$$

Так как нам нужны нетривиальные решения, то, повторяя приведенные выше рассуждения для матрицы системы (2.14), получаем

$$\begin{aligned} D_{12} &= \gamma_1 D_{11} \\ D_{22} &= \gamma_1 D_{21} \end{aligned}. \quad (2.15)$$

Подставляя (2.15) в (2.12), имеем следующую систему

$$\begin{cases} D_{11}(a'_{11} + \gamma_1 a'_{21}) = 0 \\ D_{21}(a'_{11} + \gamma_1 a'_{21}) = 0 \\ D_{11}(a'_{12} + \gamma_1 a'_{22}) = 0 \\ D_{21}(a'_{12} + \gamma_1 a'_{22}) = 0 \end{cases}. \quad (2.16)$$

Система разрешима, в частности, при

$$\begin{aligned} D_{11} &= 0, \\ D_{21} &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Отсюда сразу следует, что и

$$\begin{aligned} D_{12} &= 0, \\ D_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Система однородных уравнений

$$\begin{cases} (1 + b_1 c_1) a_{11} + b_2 c_1 a_{12} = 0 \\ b_1 c_2 a_{11} + (1 + b_2 c_2) a_{12} = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

имеет ненулевое решение при равенству нулю определителя ее матрицы, откуда получаем следующее ограничение на коэффициенты

$$1 + b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0. \quad (2.20)$$

Выразим из (2.20)

$$1 + b_1 c_1 = -b_2 c_2 \quad (2.21)$$

и подставим в (2.17), получим

$$\begin{aligned} b_2 (c_1 a_{12} - c_2 a_{11}) &= 0, \\ b_2 (c_1 a_{22} - c_2 a_{21}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Аналогично, выразив

$$1 + b_2 c_2 = -b_1 c_1 \quad (2.23)$$

и подставив в (2.18), получим

$$\begin{aligned} b_1 (c_1 a_{12} - c_2 a_{11}) &= 0, \\ b_1 (c_1 a_{22} - c_2 a_{21}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Так как b_1 и b_2 не могут одновременно равняться нулю (см. (2.20)), то

$$\begin{aligned} c_1 a_{12} &= c_2 a_{11}, \\ c_1 a_{22} &= c_2 a_{21}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Из (2.25) непосредственной проверкой сразу устанавливается, что единственный минор второго порядка матрицы A , который может быть отличен от нуля $M = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ на самом деле тоже равен нулю.

Вторая возможность удовлетворить системе (2.16)

$$\begin{aligned} a_{11} + \gamma_1 a_{21} &= 0, \\ a_{12} + \gamma_1 a_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

приводит к этому же выводу.

Таким образом, доказано, что нильпотентная матрица третьего порядка не может иметь ранг больше единицы.

Из (2.25) получается такая структура нильпотентной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} c_1 a_{11} & c_2 a_{11} & -a_{11} \\ c_1 a_{21} & c_2 a_{21} & -a_{21} \\ c_1^2 a_{11} + c_1 c_2 a_{21} & c_1 c_2 a_{11} + c_2^2 a_{21} & -c_1 a_{11} - c_2 a_{21} \end{pmatrix}, \quad (2.27),$$

а из (2.26) такая:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 a_{21} & b_1 a_{22} & b_1^2 a_{21} + b_1 b_2 a_{22} \\ b_2 a_{21} & b_2 a_{22} & b_1 b_2 a_{21} + b_2^2 a_{22} \\ -a_{21} & -a_{22} & -b_1 a_{21} - b_2 a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.28).$$

Видно, что структуры (2.27) и (2.28) по сути являются транспонированными друг к другу.

Строку и столбец в этой схеме для матрицы третьего порядка можно выбрать девятью способами. В частности, выбирая первую строку и второй столбец, можно получить следующие структуры

$$A = \begin{pmatrix} c_2 a_{21} + c_3 a_{31} & -c_2^2 a_{21} - c_2 c_3 a_{31} & -c_2 c_3 a_{21} + c_3^2 a_{31} \\ a_{21} & -c_2 a_{21} & -c_3 a_{21} \\ a_{31} & -c_2 a_{31} & -c_3 a_{31} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

$$A = \begin{pmatrix} -b_1 a_{21} & -b_1^2 a_{21} - b_1 b_3 a_{23} & -b_1 a_{23} \\ a_{21} & b_1 a_{21} + b_3 a_{23} & a_{23} \\ -b_3 a_{21} & -b_1 b_3 a_{21} - b_3^2 a_{23} & -b_3 a_{23} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Транспонируя (2.29) и (2.30), получим еще две новые структуры.

Анализируя полученные структуры, нетрудно заметить, что структура нильпотентной матрицы третьего порядка обладает тем свойством, что в ней либо элементы двух строк пропорциональны двум соответствующим произвольным функциям времени, а третья строка является линейной комбинацией этих строк, либо эта ситуация относится к столбцам матрицы. Зависимую строку мы можем выбрать тремя способами, то же самое относится к зависимому столбцу, значит, всего существует шесть типов структур нильпотентных матриц третьего порядка.

Рассмотрим теперь случай $n = 4$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Полностью аналогично случаю $n = 3$ записываем

$$a_{41} = c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + c_3 a_{31}, \quad a_{42} = c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + c_3 a_{32}, \quad a_{43} = c_1 a_{13} + c_2 a_{23} + c_3 a_{33}, \quad a_{44} = c_1 a_{14} + c_2 a_{24} + c_3 a_{34}, \quad (2.32)$$

$$a_{14} = b_1 a_{11} + b_2 a_{12} + b_3 a_{13}, \quad a_{24} = b_1 a_{21} + b_2 a_{22} + b_3 a_{23}, \quad a_{34} = b_1 a_{31} + b_2 a_{32} + b_3 a_{33}, \quad a_{44} = b_1 a_{41} + b_2 a_{42} + b_3 a_{43}. \quad (2.33)$$

Подставляя (2.32) и (2.33) в условия нильпотентности (2.9), получаем следующую систему

$$\begin{cases} D_{11}a'_{11} + D_{12}a'_{21} + D_{13}a'_{31} = 0 \\ D_{21}a'_{11} + D_{22}a'_{21} + D_{23}a'_{31} = 0 \\ D_{31}a'_{11} + D_{32}a'_{21} + D_{33}a'_{31} = 0 \\ D_{11}a'_{12} + D_{12}a'_{22} + D_{13}a'_{32} = 0 \\ D_{21}a'_{12} + D_{22}a'_{22} + D_{23}a'_{32} = 0, \\ D_{31}a'_{12} + D_{32}a'_{22} + D_{33}a'_{32} = 0 \\ D_{11}a'_{13} + D_{12}a'_{23} + D_{13}a'_{33} = 0 \\ D_{21}a'_{13} + D_{22}a'_{23} + D_{23}a'_{33} = 0 \\ D_{31}a'_{13} + D_{32}a'_{23} + D_{33}a'_{33} = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} D_{11} &= a_{11} + b_1 c_1 a_{11} + b_2 c_1 a_{12} + b_3 c_1 a_{13} \\ D_{12} &= a_{12} + b_1 c_2 a_{11} + b_2 c_2 a_{12} + b_3 c_2 a_{13} \\ D_{13} &= a_{13} + b_1 c_3 a_{11} + b_2 c_3 a_{12} + b_3 c_3 a_{13} \\ D_{21} &= a_{21} + b_1 c_1 a_{21} + b_2 c_1 a_{22} + b_3 c_1 a_{23} \\ D_{22} &= a_{22} + b_1 c_2 a_{21} + b_2 c_2 a_{22} + b_3 c_2 a_{23} . \\ D_{23} &= a_{23} + b_1 c_3 a_{21} + b_2 c_3 a_{22} + b_3 c_3 a_{23} \\ D_{31} &= a_{31} + b_1 c_1 a_{31} + b_2 c_1 a_{32} + b_3 c_1 a_{33} \\ D_{32} &= a_{32} + b_1 c_2 a_{31} + b_2 c_2 a_{32} + b_3 c_2 a_{33} \\ D_{33} &= a_{33} + b_1 c_3 a_{31} + b_2 c_3 a_{32} + b_3 c_3 a_{33} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Систему (2.34) можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \\ a'_{31} \\ a'_{12} \\ a'_{22} \\ a'_{32} \\ a'_{13} \\ a'_{23} \\ a'_{33} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.36)$$

Так как необходимо найти нетривиальные решения, то один столбец матрицы системы (2.36), например, третий, должен быть линейной комбинацией оставшихся восьми, откуда получаем

$$\begin{aligned} D_{13} &= \beta_1 D_{11} + \beta_2 D_{12} \\ D_{23} &= \beta_1 D_{21} + \beta_2 D_{22} \\ D_{33} &= \beta_1 D_{31} + \beta_2 D_{32} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Подставляя (2.37) в (2.34), имеем следующую систему

$$\begin{cases} D_{11}(a'_{11} + \beta_1 a'_{31}) + D_{12}(a'_{21} + \beta_2 a'_{31}) = 0 \\ D_{21}(a'_{11} + \beta_1 a'_{31}) + D_{22}(a'_{21} + \beta_2 a'_{31}) = 0 \\ D_{31}(a'_{11} + \beta_1 a'_{31}) + D_{32}(a'_{21} + \beta_2 a'_{31}) = 0 \\ D_{11}(a'_{12} + \beta_1 a'_{32}) + D_{12}(a'_{22} + \beta_2 a'_{32}) = 0 \\ D_{21}(a'_{12} + \beta_1 a'_{32}) + D_{22}(a'_{22} + \beta_2 a'_{32}) = 0 \\ D_{31}(a'_{12} + \beta_1 a'_{32}) + D_{32}(a'_{22} + \beta_2 a'_{32}) = 0 \\ D_{11}(a'_{13} + \beta_1 a'_{33}) + D_{12}(a'_{23} + \beta_2 a'_{33}) = 0 \\ D_{21}(a'_{13} + \beta_1 a'_{33}) + D_{22}(a'_{23} + \beta_2 a'_{33}) = 0 \\ D_{31}(a'_{13} + \beta_1 a'_{33}) + D_{32}(a'_{23} + \beta_2 a'_{33}) = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Разделим в каждом из уравнений системы (2.38) переменные, зависящие от t и t' , предполагая при этом, что знаменатели не равны нулю

$$\begin{cases} \frac{a'_{11} + \beta_1 a'_{31}}{a'_{21} + \beta_2 a'_{31}} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}, \frac{a'_{11} + \beta_1 a'_{31}}{a'_{21} + \beta_2 a'_{31}} = -\frac{D_{22}}{D_{21}}, \frac{a'_{11} + \beta_1 a'_{31}}{a'_{21} + \beta_2 a'_{31}} = -\frac{D_{32}}{D_{31}} \\ \frac{a'_{12} + \beta_1 a'_{32}}{a'_{22} + \beta_2 a'_{32}} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}, \frac{a'_{12} + \beta_1 a'_{32}}{a'_{22} + \beta_2 a'_{32}} = -\frac{D_{22}}{D_{21}}, \frac{a'_{12} + \beta_1 a'_{32}}{a'_{22} + \beta_2 a'_{32}} = -\frac{D_{32}}{D_{31}} \\ \frac{a'_{13} + \beta_1 a'_{33}}{a'_{23} + \beta_2 a'_{33}} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}, \frac{a'_{13} + \beta_1 a'_{33}}{a'_{23} + \beta_2 a'_{33}} = -\frac{D_{22}}{D_{21}}, \frac{a'_{13} + \beta_1 a'_{33}}{a'_{23} + \beta_2 a'_{33}} = -\frac{D_{32}}{D_{31}} \end{cases} \quad (2.39)$$

Так как левые части уравнений зависят только от t' , а правые части – только от t , то, очевидно, что все они равны какой-то одной константе. Таким образом, получаем

$$\begin{cases} a'_{11} + \beta_1 a'_{31} = k(a'_{21} + \beta_2 a'_{31}) \\ a'_{12} + \beta_1 a'_{32} = k(a'_{22} + \beta_2 a'_{32}) \\ a'_{13} + \beta_1 a'_{33} = k(a'_{23} + \beta_2 a'_{33}) \\ D_{12} = -kD_{11} \\ D_{22} = -kD_{21} \\ D_{32} = -kD_{31} \end{cases} \quad (2.40)$$

Выразим при помощи уравнений (2.40) элементы третьего столбца и третьей строки усеченной матрицы третьего порядка, получающейся вычеркиванием четвертой строки и четвертого столбца исходной матрицы четвертого порядка:

$$\begin{cases} a_{31} = \frac{a_{11}}{k\beta_2 - \beta_1} - \frac{ka_{21}}{k\beta_2 - \beta_1} \\ a_{32} = \frac{a_{12}}{k\beta_2 - \beta_1} - \frac{ka_{22}}{k\beta_2 - \beta_1} \\ a_{33} = \frac{a_{13}}{k\beta_2 - \beta_1} - \frac{ka_{23}}{k\beta_2 - \beta_1} \\ a_{13} = -\frac{c_2 b_1 + k + kc_1 b_1}{c_2 b_3 + kc_1 b_3} a_{11} - \frac{1 + c_2 b_2 + kc_1 b_2}{c_2 b_3 + kc_1 b_3} a_{12} \\ a_{23} = -\frac{c_2 b_1 + k + kc_1 b_1}{c_2 b_3 + kc_1 b_3} a_{21} - \frac{1 + c_2 b_2 + kc_1 b_2}{c_2 b_3 + kc_1 b_3} a_{22} \\ a_{33} = -\frac{c_2 b_1 + k + kc_1 b_1}{c_2 b_3 + kc_1 b_3} a_{31} - \frac{1 + c_2 b_2 + kc_1 b_2}{c_2 b_3 + kc_1 b_3} a_{32} \end{cases} \quad (2.41)$$

Из (2.41) непосредственно ясно, что третья строка матрицы третьего порядка является линейной комбинацией оставшихся двух, и третий столбец матрицы третьего порядка является линейной комбинацией оставшихся двух. Следовательно, соответствующий минор третьего порядка исходной матрицы четвертого порядка равен нулю, и ранг матрицы A не может превышать двух.

Теперь выразим элементы третьего столбца из (2.37)

$$\begin{cases} a_{13} = \frac{c_3 b_1 - \beta_1 - \beta_1 c_1 b_1 - \beta_2 c_2 b_1}{\beta_1 c_1 b_3 + \beta_2 c_2 b_3 - 1 - c_3 b_3} a_{11} + \frac{c_3 b_2 - \beta_2 - \beta_1 c_1 b_2 - \beta_2 c_2 b_2}{\beta_1 c_1 b_3 + \beta_2 c_2 b_3 - 1 - c_3 b_3} a_{12} \\ a_{23} = \frac{c_3 b_1 - \beta_1 - \beta_1 c_1 b_1 - \beta_2 c_2 b_1}{\beta_1 c_1 b_3 + \beta_2 c_2 b_3 - 1 - c_3 b_3} a_{21} + \frac{c_3 b_2 - \beta_2 - \beta_1 c_1 b_2 - \beta_2 c_2 b_2}{\beta_1 c_1 b_3 + \beta_2 c_2 b_3 - 1 - c_3 b_3} a_{22} \\ a_{33} = \frac{c_3 b_1 - \beta_1 - \beta_1 c_1 b_1 - \beta_2 c_2 b_1}{\beta_1 c_1 b_3 + \beta_2 c_2 b_3 - 1 - c_3 b_3} a_{31} + \frac{c_3 b_2 - \beta_2 - \beta_1 c_1 b_2 - \beta_2 c_2 b_2}{\beta_1 c_1 b_3 + \beta_2 c_2 b_3 - 1 - c_3 b_3} a_{32} \end{cases} \quad (2.42)$$

Из сравнения (2.41) и (2.42) находим систему уравнений, которой должны удовлетворять k, β_1, β_2

$$\begin{cases} -\frac{c_2 b_1 + k + k c_1 b_1}{c_2 b_3 + k c_1 b_3} = \frac{c_3 b_1 - \beta_1 - \beta_1 c_1 b_1 - \beta_2 c_2 b_1}{\beta_1 c_1 b_3 + \beta_2 c_2 b_3 - 1 - c_3 b_3} \\ -\frac{1 + c_2 b_2 + k c_1 b_2}{c_2 b_3 + k c_1 b_3} = \frac{c_3 b_2 - \beta_2 - \beta_1 c_1 b_2 - \beta_2 c_2 b_2}{\beta_1 c_1 b_3 + \beta_2 c_2 b_3 - 1 - c_3 b_3} \end{cases} \quad (2.43)$$

Отсюда получим систему

$$\begin{cases} -(c_2 b_1 + k + k c_1 b_1)(\beta_1 c_1 b_3 + \beta_2 c_2 b_3 - 1 - c_3 b_3) = (c_2 b_3 + k c_1 b_3)(c_3 b_1 - \beta_1 - \beta_1 c_1 b_1 - \beta_2 c_2 b_1) \\ -(1 + c_2 b_2 + k c_1 b_2)(\beta_1 c_1 b_3 + \beta_2 c_2 b_3 - 1 - c_3 b_3) = (c_2 b_3 + k c_1 b_3)(c_3 b_2 - \beta_2 - \beta_1 c_1 b_2 - \beta_2 c_2 b_2) \end{cases} \quad (2.44)$$

которая имеет решение

$$\begin{cases} k = -\frac{c_2}{c_1} \\ \beta_1 = \frac{1 + c_3 b_3 - \beta_2 c_2 b_3}{c_1 b_3} \end{cases} \quad (2.45)$$

Подставляя найденное k в последние три уравнения системы, (2.41) взятых в виде

$$\begin{cases} (c_2 b_3 + k c_1 b_3) a_{13} = -(c_2 b_1 + k + k c_1 b_1) a_{11} - (1 + c_2 b_2 + k c_1 b_2) a_{12} \\ (c_2 b_3 + k c_1 b_3) a_{23} = -(c_2 b_1 + k + k c_1 b_1) a_{21} - (1 + c_2 b_2 + k c_1 b_2) a_{22} \\ (c_2 b_3 + k c_1 b_3) a_{33} = -(c_2 b_1 + k + k c_1 b_1) a_{31} - (1 + c_2 b_2 + k c_1 b_2) a_{32} \end{cases} \quad (2.46)$$

получаем

$$\begin{cases} a_{12} = \frac{c_2}{c_1} a_{11} \\ a_{22} = \frac{c_2}{c_1} a_{21} \\ a_{32} = \frac{c_2}{c_1} a_{31} \end{cases} \quad (2.47)$$

Подставив (2.45) и (2.47) в (2.37), получим следующее ограничение на коэффициенты

$$1 + b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0. \quad (2.48)$$

Выразим из (2.48) например b_3

$$b_3 = -\frac{1 + b_1 c_1 + b_2 c_2}{c_3}. \quad (2.49)$$

Из (2.41) найдем a_{31}, a_{33} . С помощью (2.32) и (2.33) найдем элементы четвертой строки и четвертого столбца. Таким образом, получим следующие выражения для элементов нильпотентной матрицы четвертого порядка

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_1 c_3^2 (b_1 c_1 + b_2 c_2) \tilde{a}_{11} \\ a_{12} &= c_2 c_3^2 (b_1 c_1 + b_2 c_2) \tilde{a}_{11} \\ a_{13} &= c_1 c_3^2 (b_1 c_1 + b_2 c_2) \tilde{a}_{13} \\ a_{21} &= c_1 c_3^2 (b_1 c_1 + b_2 c_2) \tilde{a}_{21} \\ a_{22} &= c_2 c_3^2 (b_1 c_1 + b_2 c_2) \tilde{a}_{21} \\ a_{23} &= c_1 c_3^2 (b_1 c_1 + b_2 c_2) \tilde{a}_{23} \\ a_{31} &= -c_1 c_3 (1 + b_1 c_1 + b_2 c_2) (c_1 \tilde{a}_{11} + c_2 \tilde{a}_{21}) \\ a_{32} &= -c_2 c_3 (1 + b_1 c_1 + b_2 c_2) (c_1 \tilde{a}_{11} + c_2 \tilde{a}_{21}) \\ a_{33} &= -c_1 c_3 (1 + b_1 c_1 + b_2 c_2) (c_1 \tilde{a}_{13} + c_2 \tilde{a}_{23}) \\ a_{14} &= c_3 (b_1 c_1 + b_2 c_2) (c_1 c_3 b_1 \tilde{a}_{11} + c_2 c_3 b_2 \tilde{a}_{11} - c_1 \tilde{a}_{13} - c_1^2 b_1 \tilde{a}_{13} - c_1 c_2 b_2 \tilde{a}_{13}) \\ a_{24} &= c_3 (b_1 c_1 + b_2 c_2) (c_1 c_3 b_1 \tilde{a}_{21} + c_2 c_3 b_2 \tilde{a}_{21} - c_1 \tilde{a}_{23} - c_1^2 b_1 \tilde{a}_{23} - c_1 c_2 b_2 \tilde{a}_{23}) \\ a_{34} &= -(1 + b_1 c_1 + b_2 c_2) (c_1^2 c_3 b_1 \tilde{a}_{11} + c_1 c_2 c_3 b_1 \tilde{a}_{21} + c_1 c_2 c_3 b_2 \tilde{a}_{11}) \\ a_{41} &= -c_1 c_3^2 (c_1 \tilde{a}_{11} + c_2 \tilde{a}_{21}) \\ a_{42} &= -c_2 c_3^2 (c_1 \tilde{a}_{11} + c_2 \tilde{a}_{21}) \\ a_{43} &= -c_1 c_3^2 (c_1 \tilde{a}_{13} + c_2 \tilde{a}_{23}) \\ a_{44} &= c_3 (c_1^2 \tilde{a}_{13} + c_1^3 b_1 \tilde{a}_{13} + c_1^2 c_2 b_2 \tilde{a}_{13} + c_1 c_2 \tilde{a}_{23} + c_1^2 c_2 b_1 \tilde{a}_{23} + c_1 c_2^2 b_2 \tilde{a}_{23} - c_1^2 c_3 b_1 \tilde{a}_{11} - c_1 c_2 c_3 b_1 \tilde{a}_{21} - c_1 c_2 c_3 b_2 \tilde{a}_{11} - c_2^2 c_3 b_2 \tilde{a}_{21}), \end{aligned} \quad (2.50)$$

где $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{13}, \tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{23}$ — произвольные функции t .

Рассмотрим еще один из возможных случаев, при котором нельзя использовать метод разделения переменных.

Система (2.38) разрешима, в частности, при

$$\begin{aligned} D_{11} &= 0, \quad D_{21} = 0, \quad D_{31} = 0, \\ a_{21} + \beta_2 a_{31} &= 0, \quad a_{22} + \beta_2 a_{32} = 0, \quad a_{23} + \beta_2 a_{33} = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned}
D_{13} &= \beta_2 D_{12} \\
D_{23} &= \beta_2 D_{22} \cdot \\
D_{33} &= \beta_2 D_{32}
\end{aligned}
\tag{2.52}$$

Выразим a_{13}, a_{23}, a_{33} сначала из верхней строчки (2.51)

$$\begin{cases}
a_{13} = -\frac{1+b_1c_1}{b_3c_1}a_{11} - \frac{b_2}{b_3}a_{12} \\
a_{23} = -\frac{1+b_1c_1}{b_3c_1}a_{21} - \frac{b_2}{b_3}a_{22} \cdot \\
a_{33} = -\frac{1+b_1c_1}{b_3c_1}a_{31} - \frac{b_2}{b_3}a_{32}
\end{cases}
\tag{2.53}$$

а затем из (2.52)

$$\begin{cases}
a_{13} = \frac{b_1c_3 - \beta_2b_1c_2}{\beta_2b_3c_2 - 1 - b_3c_3}a_{11} + \frac{b_2c_3 - \beta_2 - \beta_2b_2c_2}{\beta_2b_3c_2 - 1 - b_3c_3}a_{12} \\
a_{23} = \frac{b_1c_3 - \beta_2b_1c_2}{\beta_2b_3c_2 - 1 - b_3c_3}a_{21} + \frac{b_2c_3 - \beta_2 - \beta_2b_2c_2}{\beta_2b_3c_2 - 1 - b_3c_3}a_{22} \cdot \\
a_{33} = \frac{b_1c_3 - \beta_2b_1c_2}{\beta_2b_3c_2 - 1 - b_3c_3}a_{31} + \frac{b_2c_3 - \beta_2 - \beta_2b_2c_2}{\beta_2b_3c_2 - 1 - b_3c_3}a_{32}
\end{cases}
\tag{2.54}$$

Из сравнения (2.53) и (2.54) находим систему уравнений, которой должны удовлетворять b_1, β_2

$$\begin{cases}
-\frac{1+b_1c_1}{b_3c_1} = \frac{b_1c_3 - \beta_2b_1c_2}{\beta_2b_3c_2 - 1 - b_3c_3} \\
-\frac{b_2}{b_3} = \frac{b_2c_3 - \beta_2 - \beta_2b_2c_2}{\beta_2b_3c_2 - 1 - b_3c_3}
\end{cases}
\tag{2.55}$$

Решение этой системы

$$\begin{cases}
b_1 = -\frac{1+b_2c_2+b_3c_3}{c_1} \\
\beta_2 = -\frac{b_2}{b_3}
\end{cases}
\tag{2.56}$$

Теперь, используя (2.56), по формулам (2.53), (2.51) и (2.32), (2.33) найдем все элементы матрицы A и получим такую структуру нильпотентной матрицы четвертого порядка

$$\begin{aligned}
a_{11} &= c_1 b_2 b_3 \tilde{a}_{11} \\
a_{12} &= c_1 b_2 b_3 \tilde{a}_{12} \\
a_{13} &= b_2 (c_2 b_2 \tilde{a}_{11} + c_3 b_3 \tilde{a}_{11} - c_1 b_2 \tilde{a}_{12}) \\
a_{21} &= c_1 b_2 b_3 \tilde{a}_{21} \\
a_{22} &= c_1 b_2 b_3 \tilde{a}_{22} \\
a_{23} &= b_2 (c_2 b_2 \tilde{a}_{21} + c_3 b_3 \tilde{a}_{21} - c_1 b_2 \tilde{a}_{22}) \\
a_{31} &= c_1 b_3^2 \tilde{a}_{21} \\
a_{32} &= c_1 b_3^2 \tilde{a}_{22} \\
a_{33} &= b_3 (c_2 b_2 \tilde{a}_{21} + c_3 b_3 \tilde{a}_{21} - c_1 b_2 \tilde{a}_{22}) \\
a_{14} &= -b_2 b_3 \tilde{a}_{11} \\
a_{24} &= -b_2 b_3 \tilde{a}_{21} \\
a_{34} &= -b_3^2 \tilde{a}_{21} \\
a_{41} &= c_1 b_3 (c_1 b_2 \tilde{a}_{11} + c_2 b_2 \tilde{a}_{21} + b_3 c_3 \tilde{a}_{21}); a_{42} = c_1 b_3 (c_1 b_2 \tilde{a}_{12} + c_2 b_2 \tilde{a}_{22} + b_3 c_3 \tilde{a}_{22}); \\
a_{43} &= c_1 c_2 b_2^2 \tilde{a}_{11} + c_1 c_3 b_2 b_3 \tilde{a}_{11} - c_1^2 b_2^2 \tilde{a}_{12} + c_2^2 b_2^2 \tilde{a}_{21} + 2c_2 c_3 b_2 b_3 \tilde{a}_{21} - c_1 c_2 b_2^2 \tilde{a}_{22} + c_3^2 b_3^2 \tilde{a}_{21} - c_1 c_3 b_2 b_3 \tilde{a}_{22}; \\
a_{44} &= -b_3 (c_1 b_2 \tilde{a}_{11} + c_2 b_2 \tilde{a}_{21} + b_3 c_3 \tilde{a}_{21})
\end{aligned} \tag{2.57}$$

где $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}$ - произвольные функции t .

Рассмотрим теперь общий случай квадратной матрицы A n -го порядка. Матрица A должна быть особой (аргументация точно такая же как для частного случая) и у нее, как минимум, одна строка и один столбец являются линейными комбинациями оставшихся строк и столбцов:

$$\begin{aligned}
a_{ni} &= \sum_{k=1}^{n-1} c_k a_{ki}, \\
a_{in} &= \sum_{m=1}^{n-1} b_m a_{im}, \\
i &= 1 \dots n.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

После подстановки соотношений (2.58) в условия нильпотентности матрицы A (2.9) получим

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} D_{ri} a'_{il} &= 0, \\
r, l &= 1 \dots n-1,
\end{aligned} \tag{2.59}$$

где

$$D_{ri} = a_{ri} + \sum_{m=1}^{n-1} c_i b_m a_{rm}. \tag{2.60}$$

По аналогии с рассмотренным частным случаем для системы (2.59) получается матрица, соответствующая (2.14) и (2.36). И в этой матрице одна

строка и один столбец должны быть линейными комбинациями оставшихся строк и столбцов. Откуда

$$D_{r,n-1} = \sum_{k=1}^{n-2} \gamma_k D_{rk}, \quad r = 1..n-1. \quad (2.61)$$

Используя соотношения (2.61), получаем систему аналогичную (2.16)

$$\sum_{k=1}^{n-2} D_{rk} (a'_{kl} + \gamma_k a'_{n-1,l}) = 0. \quad (2.62)$$

Примем $(a'_{kl} + \gamma_k a'_{n-1,l})$ за новые переменные, тогда систему (2.62) можно записать в матричном виде, и матрица системы по виду будет похожа на (2.36). Для выяснения максимально возможного ранга функционально-нильпотентной матрицы опять потребуем, чтобы система имела нетривиальное решение, при этом один столбец матрицы должен быть линейно зависим от остальных столбцов

$$D_{r,n-2} = \sum_{k=1}^{n-3} f_k D_{rk}. \quad (2.63)$$

Подставляя (2.63) в (2.62), получаем систему из уравнений типа

$$\begin{aligned} & D_{11} (a'_{11} + \gamma_1 a'_{n-1,1} + f_1 a'_{n-2,1} + f_1 \gamma_{n-2} a'_{n-1,1}) + \\ & + D_{12} (a'_{21} + \gamma_2 a'_{n-1,1} + f_2 a'_{n-2,1} + f_2 \gamma_{n-2} a'_{n-1,1}) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Такой редукцией получаем, что ранг функционально-нильпотентной матрицы не может превосходить $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, где квадратные скобки обозначают целую часть соответствующего числа.

Из (2.62) можно получить 2^{n-2} различных систем, подобных (2.17) и (2.26), каждой системе соответствует своя структура нильпотентной матрицы. Транспонирование этих матриц дает еще столько же структур, причем может оказаться, что все они представляют новые типы, но может случиться и так, что некоторые из них будут повторять уже найденные.

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СПИНОВОГО И СВЕТОВОГО ЭХА В НЕСКОЛЬКИХ ВАЖНЫХ СЛУЧАЯХ

Ранее рядом авторов рассматривались вопросы резонансной обработки сигналов различными методами. Например, в [67] с помощью метода матрицы плотности были получены результаты, указывающие на то, что релаксационные процессы влияют на величину эхо-сигнала, но влияние на его форму не обнаружилось. Эти результаты совпадают с более ранними результатами [47]. В [68] авторами качественно было показано, что учет релаксации влияет как на величину, так и на форму эхо-сигнала. Здесь это сделано более строго и доказательно, рассмотрены конкретные примеры и также рассмотрен вопрос влияния помех.

В первой части главы в рамках модели Блоха, пригодной для спинового и светового эха, рассмотрено влияние релаксационных процессов, связанных со спин-спиновыми взаимодействиями, а также связью спинов с решеткой, на форму эхо-сигналов. Во второй части изучено влияние наличия помехи при корреляционной обработке сигнала и рассмотрен вопрос помехозащищенности. В третьей части главы рассмотрен случай, когда при образовании трехимпульсного эха первый и второй сигналы частично перекрываются. В четвертой части главы рассмотрены особенности сигналов спинового эха в ферромагнитных поликристаллах. В пятой части главы исследованы возможности анализа спектров сигналов в спиновых эхо-процессорах в реальном масштабе времени.

3.1 Учет релаксационных процессов

Рассмотрим воздействие на вещество внешнего поля, состоящего из постоянного поляризующего магнитного поля H_0 и перпендикулярного ему радиочастотного поля H_1

$$\vec{H} = \vec{k} \cdot H_0 + \vec{H}_1(t). \quad (3.1)$$

Поведение двухуровневой системы с учетом релаксационных процессов может быть описано уравнением Блоха [45]:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \cdot [\vec{M} \times \vec{H}] - \frac{M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j}}{T_2} - \frac{M_z - M_0}{T_1} \cdot \vec{k}. \quad (3.2)$$

Произведем в уравнении (3.2) замену переменных

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} M_+ \\ M_- \\ M_z \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} M_+ &= M_x + i \cdot M_y, \\ M_- &= M_x - i \cdot M_y. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} R(t) &= \gamma \cdot \{H_x(t) + i \cdot H_y(t)\}, \\ R^*(t) &= \gamma \cdot \{H_x(t) - i \cdot H_y(t)\}, \\ \omega_0 &= \gamma \cdot H_0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

перепишем (3.2) в матричной форме

$$\frac{dM}{dt} = A \cdot M + B, \quad (3.6)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} M_+ \\ M_- \\ M_z \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} - i \cdot \omega_0 & 0 & i \cdot R \\ 0 & -\frac{1}{T_2} + i \cdot \omega_0 & -i \cdot R^* \\ \frac{i}{2} \cdot R^* & -\frac{i}{2} \cdot R & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_0}{T_1} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Общее решение неоднородного уравнения (3.6) представимо в виде суммы [6]

$$M = M_1 + M_2 \quad (3.10)$$

общего решения однородного уравнения

$$\frac{dM_1}{dt} = A \cdot M_1 \quad (3.11)$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$\frac{dM_2}{dt} = A \cdot M_2 + B. \quad (3.12)$$

Рассмотрим сначала решение однородного уравнения (3.11). Представим матрицу A в виде суммы диагональной матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\delta - i \cdot \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta + i \cdot \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

где $\delta = \frac{1}{T_2}$, $\beta = \frac{1}{T_1}$,

и матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \cdot R \\ 0 & 0 & -i \cdot R^* \\ \frac{i}{2} \cdot R^* & -\frac{i}{2} \cdot R & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Тогда фундаментальную матрицу решений уравнения (3.11) можно записать в виде

$$X = X_0 \cdot X_1, \quad (3.15)$$

где X_0 – решение уравнения

$$\frac{dX_0}{dt} = A_0 \cdot X_0, \quad (3.16)$$

а X_1 – решение уравнения

$$\frac{dX_1}{dt} = V \cdot X_1, \quad (3.17)$$

где матрица V определяется соотношением [6]

$$V = X_0^{-1} \cdot A_1 \cdot X_0. \quad (3.18)$$

Поскольку матрица A_0 постоянная и диагональная, следовательно, функционально-коммутативная, то решение (3.16) может быть представлено в форме

$$X_0 = \exp\left(\int_0^t A_0 d\tau\right) = \begin{pmatrix} e^{-(\delta+i\omega_0)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(\delta-i\omega_0)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Тогда матрица V имеет вид

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \cdot R(t) \cdot e^{(\delta-\beta+i\omega_0)t} \\ 0 & 0 & -i \cdot R^*(t) \cdot e^{(\delta-\beta-i\omega_0)t} \\ \frac{i}{2} \cdot R^*(t) \cdot e^{-(\delta-\beta+i\omega_0)t} & -\frac{i}{2} \cdot R(t) \cdot e^{-(\delta-\beta-i\omega_0)t} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Поскольку в общем случае явления спинового эха $R(t)$ произвольная финитная функция, фундаментальная матрица решений уравнения (3.17) в общем виде может быть представлена с помощью мультипликативного интеграла

$$X_1 = \int_0^t V(\tau) d\tau. \quad (3.21)$$

Нахождение точного значения мультипликативного интеграла в данном случае сопряжено с большими математическими трудностями в связи с функциональной некоммутативностью матрицы V : $[V(t), V(t')] \neq 0$.

В нулевом приближении мультипликативный интеграл может быть заменен матричной экспонентой

$$X_1 = \exp(N(t, \omega_0)), \quad (3.22)$$

где

$$N(t, \omega_0) = \int_0^t V(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \cdot S_1^*(t) \\ 0 & 0 & -i \cdot S_1(t) \\ \frac{i}{2} \cdot S_2(t) & -\frac{i}{2} \cdot S_2^*(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Здесь $S_1(t) = \int_0^t R(\tau) \cdot e^{\alpha \cdot \tau} \cdot e^{-i \cdot \omega_0 \cdot \tau} d\tau$, $S_2(t) = \int_0^t R(\tau) \cdot e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot e^{-i \cdot \omega_0 \cdot \tau} d\tau$ — текущие,

зависящие от времени спектры сигнала с возрастающей и убывающей экспонентой, а $\alpha = \delta - \beta = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}$.

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{S_1^*(t) \cdot S_2(t) + S_1(t) \cdot S_2^*(t) \cdot a(t)}{m(t)} & \frac{S_1(t) \cdot S_2(t) \cdot (1 - a(t))}{m(t)} & 2 \cdot i \cdot S_1(t) \cdot b(t) \\ \frac{S_1^*(t) \cdot S_2^*(t) \cdot (1 - a(t))}{m(t)} & \frac{S_1(t) \cdot S_2^*(t) + S_1^*(t) \cdot S_2(t) \cdot a(t)}{m(t)} & -2 \cdot i \cdot S_1^*(t) \cdot b(t) \\ i \cdot S_2^*(t) \cdot b(t) & -i \cdot S_2(t) \cdot b(t) & a(t) \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

где $m(t) = S_1(t) \cdot S_2^*(t) + S_1^*(t) \cdot S_2(t)$, $b(t) = \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{m(t)}{2}}\right)}{\sqrt{2 \cdot m(t)}}$, $a(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{m(t)}{2}}\right)$.

Частное решение неоднородного уравнения (3.12) можно представить в виде [6]

$$M_2 = X \cdot C(t, \omega_0), \quad (3.25)$$

где

$$C(t, \omega_0) = \int_0^t X^{-1} \cdot B d\tau = \begin{pmatrix} -2 \cdot i \cdot \beta \cdot M_0 \cdot \int_0^t S_1(\tau) \cdot b(\tau) \cdot e^{\beta\tau} d\tau \\ 2 \cdot i \cdot \beta \cdot M_0 \cdot \int_0^t S_1^*(\tau) \cdot b(\tau) \cdot e^{\beta\tau} d\tau \\ \beta \cdot M_0 \cdot \int_0^t a(\tau) \cdot e^{\beta\tau} d\tau \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Подставляя в (3.25) фундаментальную матрицу (3.15) и (3.26), получаем

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{(c_1(t) \cdot S_1^*(t) \cdot S_2(t) + c_1(t) \cdot S_1(t) \cdot S_2^*(t) \cdot a(t) + c_2(t) \cdot S_1(t) \cdot S_2(t) \cdot [1 - a(t)] + 2 \cdot i \cdot c_3(t) \cdot S_1(t) \cdot b(t) \cdot m(t)) \cdot e^{-(\delta + i \cdot \omega_0) \cdot t}}{m(t)} \\ \frac{(c_1(t) \cdot S_1^*(t) \cdot S_2^*(t) \cdot [1 - a(t)] + c_2(t) \cdot S_1(t) \cdot S_2^*(t) + c_2(t) \cdot S_1^*(t) \cdot S_2(t) \cdot a(t) - 2 \cdot i \cdot c_3(t) \cdot S_1^*(t) \cdot b(t) \cdot m(t)) \cdot e^{-(\delta - i \cdot \omega_0) \cdot t}}{m(t)} \\ (i \cdot c_1(t) \cdot S_2^*(t) \cdot b(t) - i \cdot c_2(t) \cdot S_2(t) \cdot b(t) + a(t) \cdot c_3(t)) \cdot e^{-\beta \cdot t} \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

где $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$ – элементы матрицы $C(t, \omega_0)$ (3.26).

Общее решение неоднородного уравнения (3.6) получается в виде

$$M = X \cdot C_0 + M_2, \quad (3.28)$$

где C_0 – столбец начальных условий. Обычно полагают $C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим воздействие на систему трех последовательных импульсов длительностью t_1, t_2, t_3 соответственно (рис. 2), на котором показано только интересующее нас стимулированное эхо, возникающее в момент времени $T + T_3$.

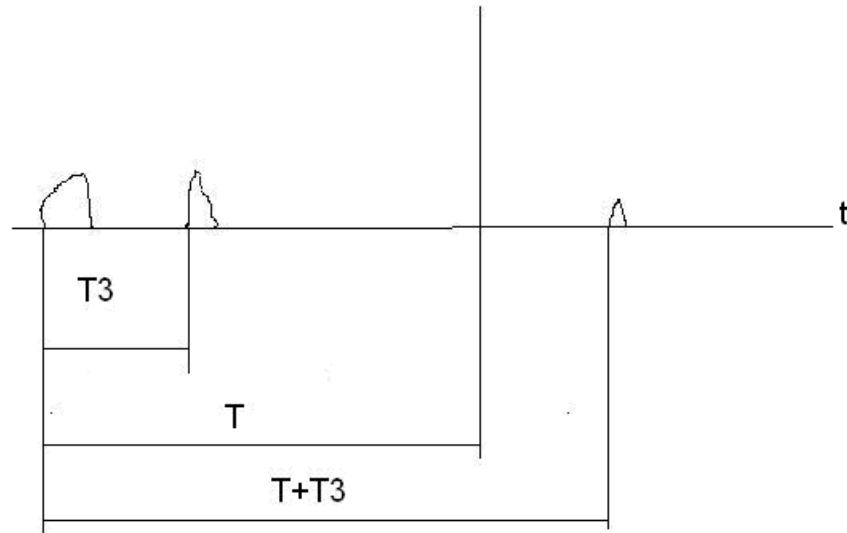


Рис. 2. Схема возникновения стимулированного эха при трехимпульсном воздействии.

Состояние системы сразу после первого импульса описывается выражением

$$K_1 = X_{-1} \cdot C_0 + M_{2_{-1}}, \quad (3.29)$$

индекс 1 после подчеркивания указывает номер импульса.

Так как вектор K_1 является начальным условием для дальнейшей эволюции системы, то перед началом второго импульса

$$KR_1 = D_1 \cdot K_1 + MR_{2_{-1}}, \quad (3.30)$$

где

$$D_1 = \begin{pmatrix} e^{-\delta \cdot (T_3 - t_1) - i \cdot \omega_0 \cdot (T_3 - t_1)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\delta \cdot (T_3 - t_1) + i \cdot \omega_0 \cdot (T_3 - t_1)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta \cdot (T_3 - t_1)} \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

$$MR_{2_{-1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \cdot (1 - e^{-\beta \cdot (T_3 - t_1)}) \end{pmatrix}$$

соответствуют свободной эволюции системы между импульсами.

Повторяя далее эту схему для второго и третьего импульса, находим окончательное выражение для спектра эхо-сигнала. Члены, соответствующие

сигналу стимулированного эха, образованного первым и вторым сигналами (короткий третий сигнал будем считать управляющим с постоянным спектром в пределах линии поглощения)

$$E(t) = \int 2 \cdot g(\omega_0) S_{1_1}^*(t_1) \cdot S_{2_2}(t_2) \cdot S_{1_3}(t_3) \cdot b_2(t_2) \cdot b_3(t_3) \cdot \left[2 \cdot i \cdot b_1(t_1) \cdot (M_0 + c_{3_1}(t_1)) + \right. \\ \left. + \frac{1-a_1(t_1)}{m_1(t_1)} \cdot c_{2_1}(t_1) \cdot S_{2_1}(t_1) + \frac{a_1(t_1)}{m_1(t_1)} \cdot c_{1_1}(t_1) \cdot S_{2_1}^*(t_1) \right] \cdot \exp \left\{ -\frac{t}{T_2} + \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \cdot (T - T_3) + i \cdot \omega_0 \cdot (t - T_3 - T) \right\} d\omega_0, \quad (3.32)$$

где

$$S_{1_j}(t) = \int_0^t R_j(\tau) \cdot e^{\alpha\tau} \cdot e^{-i\omega_0\tau} d\tau, \quad S_{2_j}(t) = \int_0^t R_j(\tau) \cdot e^{-\alpha\tau} \cdot e^{-i\omega_0\tau} d\tau,$$

$S_{1_j}(t)$ – текущий спектр сигнала с возрастающей экспонентой, $S_{2_j}(t)$ – текущий спектр сигнала с убывающей экспонентой, $R_j(\tau)$ – радиочастотный сигнал, $j = 1, 2, 3$ – номер сигнала;

$$m_j(t) = S_{1_j}(t) \cdot S_{2_j}^*(t) + S_{1_j}^*(t) \cdot S_{2_j}(t), \quad b_j(t) = \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{m_j(t)}{2}}\right)}{\sqrt{2 \cdot m_j(t)}}, \quad a_j(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{m_j(t)}{2}}\right);$$

$g(\omega_0)$ – неоднородно уширенная линия, которую считаем постоянной в пределах ширины спектров радиочастотных импульсов

Полученный экспоненциальный множитель в (3.32) согласуется с классическими результатами, полученными ранее [47]. Из (3.32) видно, что наличие релаксационных процессов приводит не только к уменьшению величины эхо-сигнала, но и к асимметрии его формы. Времена релаксации T_1 и T_2 участвует в изменении формы сигнала через спектры сигналов, содержащих возрастающую и убывающую экспоненты. T_2 также непосредственно входит в экспоненту совместно с текущим временем.

Рассмотрим сначала работу эхо-процессора в режиме получения автокорреляционной функции. Для этого в качестве первого и второго сигнала возьмем импульсы с линейной частотной модуляцией

$$R = d \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + b \cdot t^2) \cdot [\theta(\tau - t) - \theta(-t)], \quad (3.33)$$

где d – амплитуда, ω_0 – начальная частота, b – девиация ЛЧМ-сигнала, $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Числовые параметры, использованные для расчетов, призваны подчеркнуть зависимость от них эхо-сигнала. На рис. 3 и 4 показана рассчитанная зависимость величины эхо-сигнала (E) от времени для следующих параметров:

$$d_1 = \frac{\pi}{2}, d_2 = \frac{\pi}{2}, \omega_0 = 750, b = 800, \tau = 1, T_3 = 6, T = 10.$$

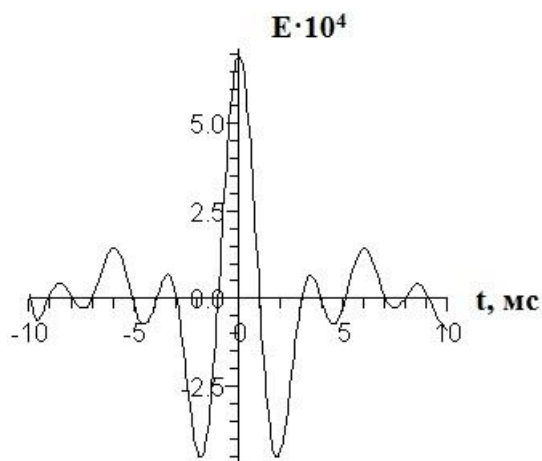


Рис. 3. Рассчитанная зависимость величины эхо-сигнала от времени для двух сигналов ЛЧМ при значениях времен релаксации $T_1 = 4$ и $T_2 = 1$.

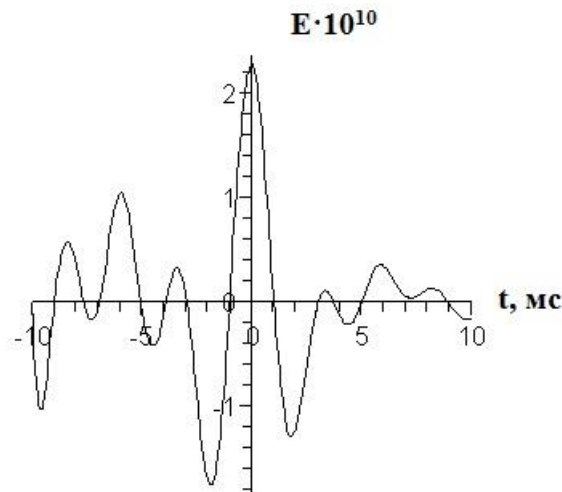


Рис. 4. Рассчитанная зависимость величины эхо-сигнала от времени для двух сигналов ЛЧМ при значениях времен релаксации $T_1 = 0,0105$ и $T_2 = 0,01$.

Асимметрия формы эхо-сигнала на рис. 3 явно не выражена, что связано с тем, что длительность эхо-сигнала мала по сравнению со временами релаксации. На рис. 4 асимметрия заметна, так как длительность эхо-сигнала сравнима по величине с временами релаксации. Подобные малые времена релаксации встречаются при наблюдении светового эха.

В режиме воспроизведения первый сигнал, также как и третий, должен быть очень коротким, чтобы его спектр можно было считать постоянным в пределах линии поглощения. Второй сигнал возьмем в виде простого прямоугольного импульса

$$R_2 = d_2 \cdot \left(\theta \left(\frac{\tau_2}{2} - t \right) - \theta \left(-\frac{\tau_2}{2} - t \right) \right), \quad (3.34)$$

где d_2 – величина импульса.

На рис. 5 показана рассчитанная зависимость эхо-сигнала (E) от времени для следующих параметров:

$$d_2 = \frac{\pi}{2}, \quad T_2 = 3, \quad \tau_2 = 1, \quad T_3 = 6.$$

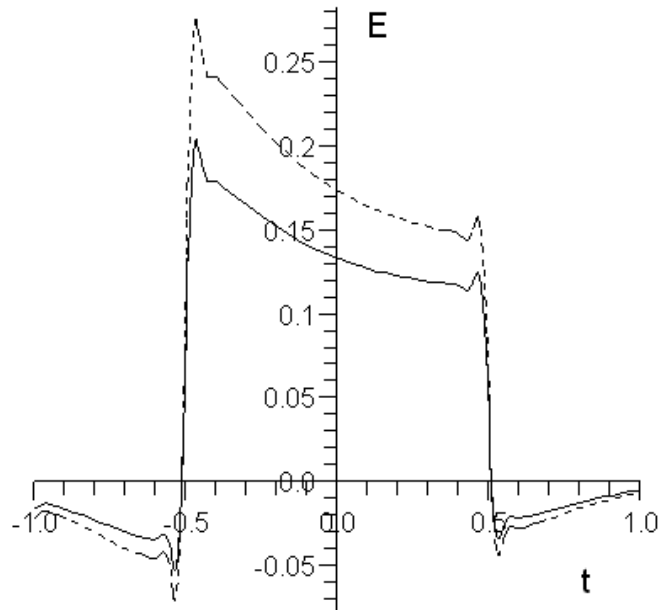


Рис. 5. Рассчитанная зависимость величины эхо-сигнала от времени для двух сигналов при двух значениях времени продольной релаксации: $T_1 = 6$ – сплошная линия, $T_1 = 10$ – пунктирная линия.

Из рисунка видно, что форма эхо-сигнала зависит не только от времени поперечной релаксации T_2 , но и от времени продольной релаксации T_1 .

3.2 Влияние помехи на форму эхо-сигнала

Рассмотрим формирование эхо-сигнала в случае, когда первый сигнал является радиоимпульсом с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ), а второй представляет собой смесь ЛЧМ-сигнала и шума. Длительность шумового сигнала в 5 раз больше, чем длительность ЛЧМ.

Шум моделируется следующим образом

$$R_s = Q \cdot \sum_{i=1}^n (a_i \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \cdot [\theta(t_{i+1} - t) - \theta(t_i - t)]), \quad (3.35)$$

где Qa_i – амплитуды шума, a_i – случайные числа от минус единицы до единицы, ω_1 – несущая частота шума, t_i – равномерное разбиение по длительности шумового сигнала.

На рис. 6 и 7 показаны рассчитанные зависимости величины эхо-сигнала (E) от времени для следующих параметров:

$$d_1 = \frac{\pi}{2}, \quad d_2 = \frac{\pi}{6}, \quad \omega_0 = 750, \quad b = 800, \quad T_1 = 50, \quad T_2 = 20, \quad \tau = 1, \quad T_3 = 4, \quad T = 10, \\ \omega_1 = 250\pi, \quad \tau_u = 5.$$

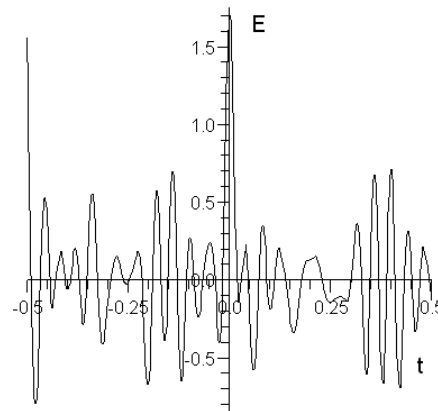


Рис. 6. Зависимость эхо-сигнала от времени при $Q = \pi$.

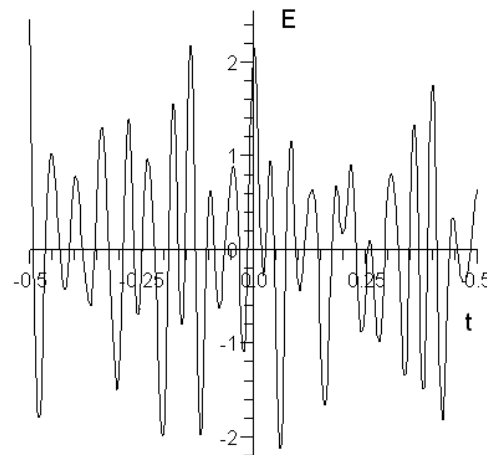


Рис. 7. Зависимость эхо-сигнала от времени при $Q = 4\pi$.

Из рисунков видно, что при отношении площади импульсов шума и сигнала 30:1 полезный эхо-сигнал достаточно хорошо выделяется на фоне шума, а при соотношении 120:1 (см. рис. 7) сигнал совершенно неразличим на фоне помех.

На рис. 8 показана зависимость отношения сигнал-шум на выходе (S) от отношения сигнал-шум на входе (I), оба отношения отложены в дБ. Видно, что при небольших мощностях шума зависимость практически линейная, а с ростом мощности шума проявляется нелинейность, что легко понять из формулы (3.32), так как при больших шумах сказываются входящие в нее нелинейные члены.

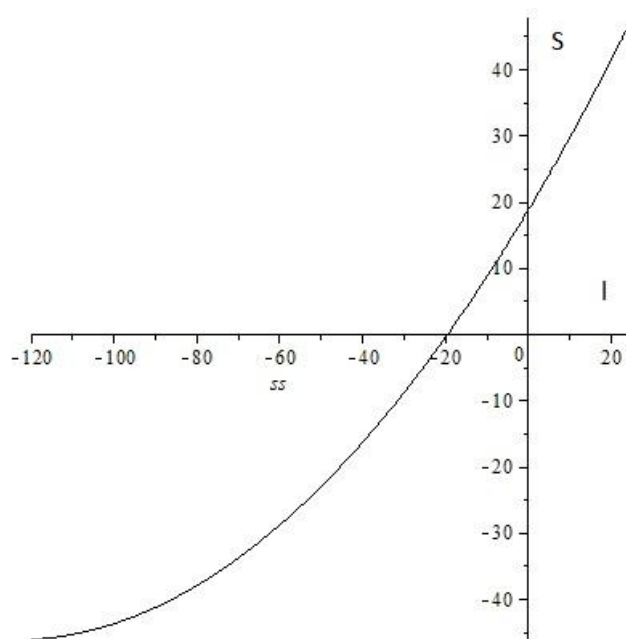


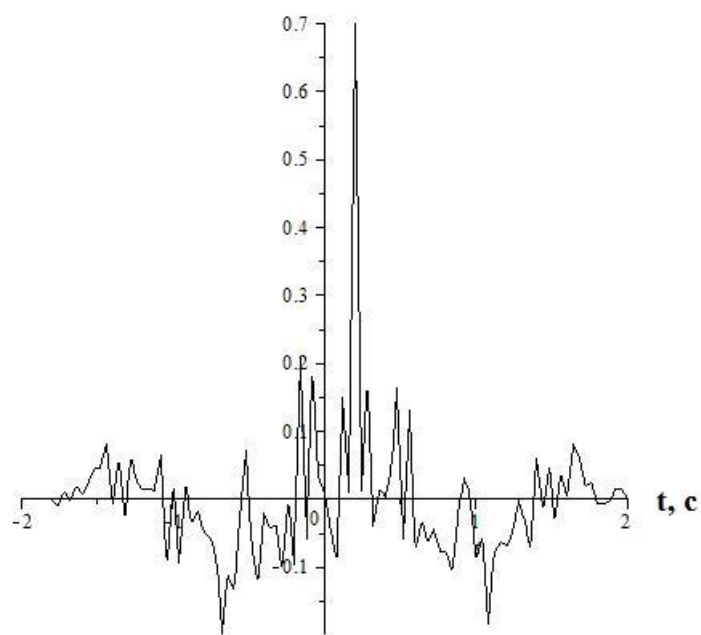
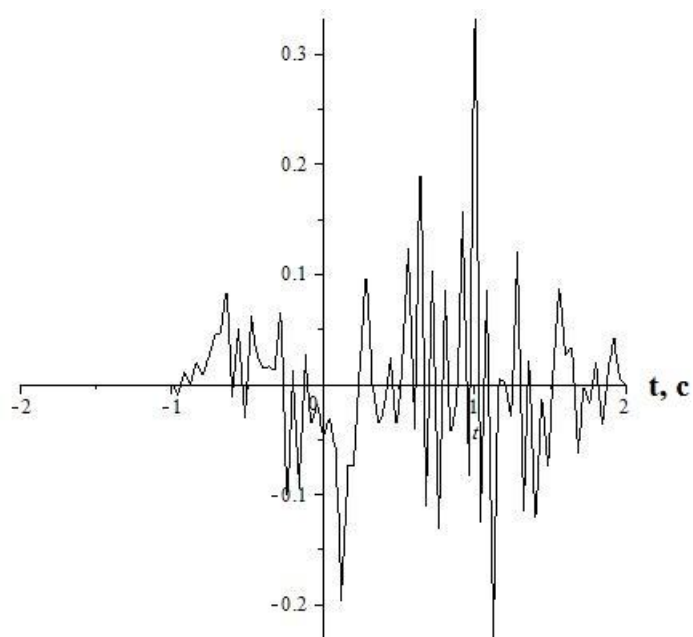
Рис. 8. Зависимость отношения сигнал-шум на выходе в дБ от отношения сигнал-шум на входе в дБ.

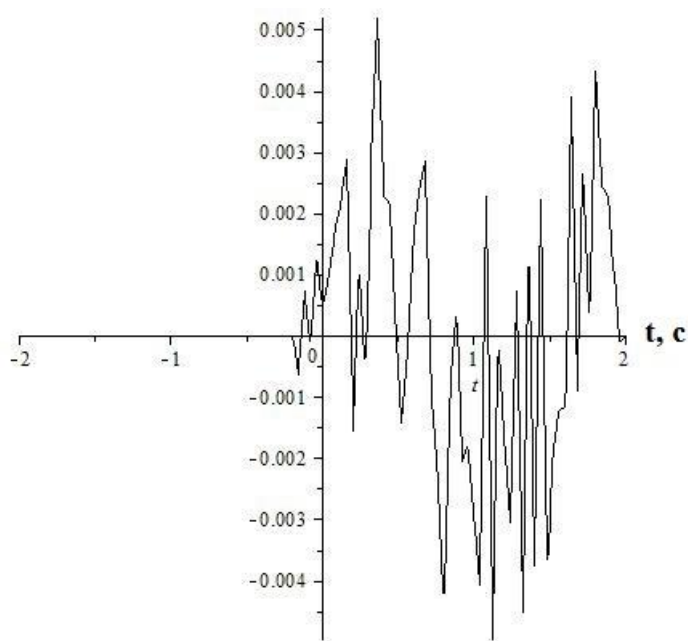
3.3 Эхо-сигнал от перекрывающихся импульсов

Рассмотрим случай, когда первый и второй сигналы являются псевдошумовыми, смоделированными следующим образом

$$R = \sum_{i=1}^n \left(a_i \cdot [\theta(t_{i+1} - t) - \theta(t_i - t)] \right), \quad (3.36)$$

a_i – случайные числа, принадлежащие промежутку от минус единицы до единицы, t_i – равномерное разбиение по длительности псевдошумового сигнала. Первый и второй сигналы частично перекрываются, длительность первого импульса больше промежутка времени между началами импульсов $\tau > T_3$. В малосигнальном приближении при значениях параметров $\tau = 2$ с, $n = 50$ получены следующие зависимости эхо-сигнала от времени

a) $T_3 = 1,80 \text{ c}$ b) $T_3 = 1,00 \text{ c}$



с) $T_3 = 0,20$ с

Рис. 9. Зависимости эхо-сигнала от времени от перекрывающихся импульсов.

Видно, что при небольшом перекрытии исходных сигналов (рис. 9а) эхо-сигнал реализует достаточно точную автокорреляционную обработку. При увеличении перекрытия (рис. 9б) уменьшается величина эхо-сигнала и смещается максимум автокорреляционной функции. При сильном перекрытии (рис. 9с) происходит практически полный «развал» эхо-сигнала.

Этот анализ оказывается полезным при обработке сигналов большой длительности, когда может происходить их частичное наложение.

3.4 Особенности сигналов спинового эха в ферромагнитных поликристаллах

В [69,70] рассматривается возбуждение спинового эха случайными сигналами типа белого шума.

Мы рассмотрим импульсное возбуждение спинового эха в поликристаллическом образце, в каждом микрокристалле которого существует внутреннее постоянное магнитное поле, направленное случайным образом. Будем исследовать случай, когда ядра имеют спин $\frac{1}{2}$. При воздействии на образец двух радиочастотных импульсов наблюдается спиновое эхо (рис. 10). Известно, что в ферромагнетиках величина

радиочастотного поля, действующего на ядра, усилена за счет сверхтонкого взаимодействия ядер с электронами в η раз, где η – неоднородный коэффициент усиления [71]. η значительно больше для ядер, находящихся в стенках, разделяющих соседние домены, чем в центральных областях доменов. Поэтому основной вклад в эхо-сигнал дают ядра в стенках. Будем считать η константой, и под величиной радиочастотного поля подразумевать уже усиленную в η раз напряженность поля.

В качестве первого импульса используется произвольный радиочастотный импульс, а второго – очень короткий импульс типа дельта-функции.

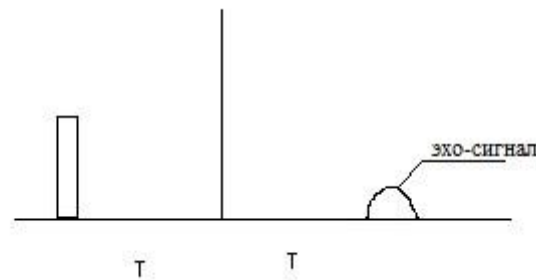


Рис. 10. Схема образования спинового эха при воздействии на образец двух радиочастотных импульсов.

Поведение спина ядра в магнитном поле описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \tilde{H}\Psi, \quad (3.37)$$

где Ψ – двумерный спинор,

$$\tilde{H} = -\gamma \vec{s} \cdot \vec{H} \quad (3.38)$$

– гамильтониан системы, $\hbar$ – постоянная Планка, γ – гиромагнитное отношение,

$$\vec{s} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (3.39)$$

– оператор спина, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – спиновые матрицы Паули, $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля.

Если совместить ось z с внешним радиочастотным полем, а направление внутреннего поля относительно оси z определить сферическими углами θ, φ , то составляющие $\vec{H}$ вдоль координатных осей будут

$$\begin{aligned} H_x &= H_0 \sin \theta \cos \varphi, \\ H_y &= H_0 \sin \theta \sin \varphi, \\ H_z &= H_0 \cos \theta + H_1(t), \end{aligned} \quad (3.40)$$

где H_0 и $H_1(t)$ – напряженность внутреннего постоянного и радиочастотного магнитных полей.

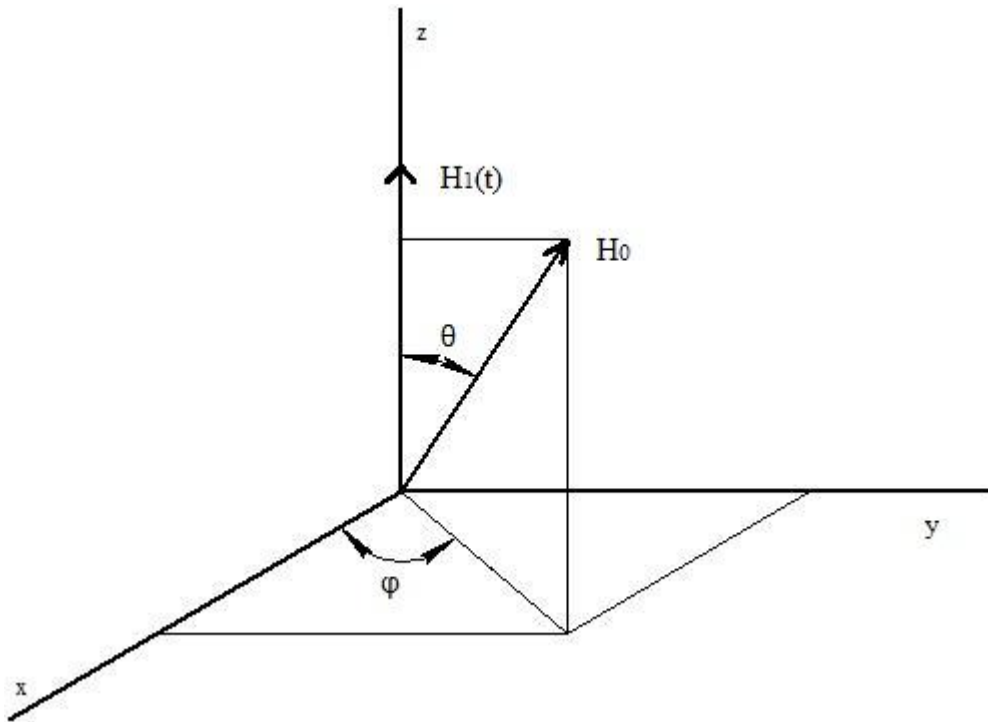


Рис. 11. Положение внешнего радиочастотного и внутреннего постоянного магнитных полей относительно декартовой системы координат.

В результате для эволюции спинора получается следующее уравнение

$$\frac{d\Psi}{dt} = A(t)\Psi, \quad (3.41)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}(R(t) + \omega_0 \cos \theta) & \frac{i}{2}\omega_0 \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \frac{i}{2}\omega_0 \sin \theta e^{i\varphi} & -\frac{i}{2}(R(t) + \omega_0 \cos \theta) \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

$$R(t) = \gamma H_1(t), \omega_0 = \gamma H_0.$$

Представим матрицу $A(t)$ в виде суммы постоянной матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\omega_0 \cos \theta & \frac{i}{2}\omega_0 \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \frac{i}{2}\omega_0 \sin \theta e^{i\varphi} & -\frac{i}{2}\omega_0 \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

и матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}R(t) & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2}R(t) \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Тогда фундаментальную матрицу уравнения (3.41) можно, как это сделано в [6], записать в виде

$$X = X_0 \cdot X_1, \quad (3.45)$$

где X_0 – решение уравнения

$$\frac{dX_0}{dt} = A_0 \cdot X_0, \quad (3.46)$$

а X_1 – решение уравнения

$$\frac{dX_1}{dt} = V \cdot X_1, \quad (3.47)$$

где матрица V определяется соотношением

$$V = X_0^{-1} \cdot A_1 \cdot X_0. \quad (3.48)$$

Поскольку матрица A_0 постоянная, следовательно, функционально-коммутативная, то решение (3.46) может быть представлено в форме

$$X_0 = \exp \left(\int_0^t A_0(\tau) d\tau \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) e^{\frac{1}{2}\omega_0 t} + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} & \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} e^{\frac{1}{2}\omega_0 t} - \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \\ \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} e^{\frac{1}{2}\omega_0 t} - \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} & \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) e^{\frac{1}{2}\omega_0 t} + \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Тогда элементы матрицы V имеют вид

$$V_{11} = \frac{1}{2} i R(t) \cos^2 \theta + \frac{1}{4} i \sin^2 \theta \left(R(t) e^{-i\omega_0 t} + R(t) e^{i\omega_0 t} \right),$$

$$V_{12} = \frac{1}{2} i R(t) \sin(\theta) \cos(\theta) e^{-i\varphi} - \frac{1}{4} i \sin(\theta) \cos(\theta) e^{-i\varphi} \left(R(t) e^{-i\omega_0 t} + R(t) e^{i\omega_0 t} \right) +$$

$$+ \frac{1}{4} i \sin(\theta) e^{-i\varphi} \left(R(t) e^{i\omega_0 t} - R(t) e^{-i\omega_0 t} \right), \quad (3.50)$$

$$V_{21} = \frac{1}{2} i R(t) \sin(\theta) \cos(\theta) e^{i\varphi} - \frac{1}{4} i \sin(\theta) \cos(\theta) e^{i\varphi} \left(R(t) e^{-i\omega_0 t} + R(t) e^{i\omega_0 t} \right) +$$

$$+ \frac{1}{4} i \sin(\theta) e^{i\varphi} \left(R(t) e^{-i\omega_0 t} - R(t) e^{i\omega_0 t} \right),$$

$$V_{22} = -\frac{1}{2} i R(t) \cos^2 \theta - \frac{1}{4} i \sin^2 \theta \left(R(t) e^{-i\omega_0 t} + R(t) e^{i\omega_0 t} \right).$$

Поскольку в общем случае $R(t)$ произвольная финитная функция, фундаментальная матрица решений уравнения (3.47) в общем виде может быть представлена с помощью мультипликативного интеграла

$$X_1 = \int_0^t V(\tau) d\tau. \quad (3.51)$$

Нахождение точного значения мультипликативного интеграла в данном случае сопряжено с большими математическими трудностями в связи с функциональной некоммутативностью матрицы $V: [V(t), V(t')] \neq 0$.

В нулевом приближении мультипликативный интеграл может быть заменен матричной экспонентой

$$X_1 = \exp \left(\int_0^t V(\tau) d\tau \right). \quad (3.52)$$

Получаем следующие выражения для элементов матрицы X_1

$$\begin{aligned}
 (X_1)_{11} &= \left[\frac{1}{2} iF \cos^2 \theta + \frac{1}{4} i \sin^2 \theta (S + S^*) \right] b + a, \\
 (X_1)_{12} &= \left[\frac{1}{2} iF \sin(\theta) \cos(\theta) e^{-i\varphi} - \frac{1}{4} i \sin(\theta) \cos(\theta) e^{-i\varphi} (S + S^*) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} i \sin(\theta) e^{-i\varphi} (S^* - S) \right] b, \\
 (X_1)_{21} &= \left[\frac{1}{2} iF \sin(\theta) \cos(\theta) e^{i\varphi} - \frac{1}{4} i \sin(\theta) \cos(\theta) e^{i\varphi} (S + S^*) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} i \sin(\theta) e^{i\varphi} (S - S^*) \right] b, \\
 (X_1)_{22} &= a - \left[\frac{1}{2} iF \cos^2 \theta + \frac{1}{4} i \sin^2 \theta (S + S^*) \right] b,
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

где

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^t R(\tau) d\tau, \quad S = \int_0^t R(\tau) e^{-i\omega_0 \tau} d\tau, \quad S^* = \int_0^t R(\tau) e^{i\omega_0 \tau} d\tau, \\
 a &= \cos \frac{Q}{2}, \quad b = \frac{2 \sin \frac{Q}{2}}{Q}, \quad Q = \sqrt{F^2 \cos^2 \theta + |S|^2 \sin^2 \theta}.
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

После действия обоих импульсов волновая функция системы будет

$$\Psi = D_2 K_2 D_1 K_1 \Psi_0, \tag{3.55}$$

где Ψ_0 – волновая функция системы в начальный момент времени, K_1 и K_2 – фундаментальная матрица X за время действия первого и второго импульса, D_1 и D_2 – фундаментальная матрица X за промежуток между первым и вторым импульсом и за время после окончания второго импульса.

В начальном состоянии спин ядра считаем направленным по внутреннему постоянному магнитному полю, поэтому

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi} \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{3.56}$$

Когда радиочастотное поле не действует на систему, ее уравнение эволюции совпадает с (3.46), поэтому элементы матрицы D_1

$$\begin{aligned}(D_1)_{11} &= \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) e^{\frac{1}{2}\omega_0(T-\tau_1)} + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) e^{-\frac{1}{2}\omega_0(T-\tau_1)}, \\(D_1)_{12} &= \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} e^{\frac{1}{2}\omega_0(T-\tau_1)} - \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} e^{-\frac{1}{2}\omega_0(T-\tau_1)}, \\(D_1)_{21} &= \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} e^{\frac{1}{2}\omega_0(T-\tau_1)} - \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} e^{-\frac{1}{2}\omega_0(T-\tau_1)}, \\(D_1)_{22} &= \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) e^{\frac{1}{2}\omega_0(T-\tau_1)} + \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) e^{-\frac{1}{2}\omega_0(T-\tau_1)}.\end{aligned}\tag{3.57}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}(D_2)_{11} &= \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) e^{\frac{1}{2}\omega_0(t-T)} + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) e^{-\frac{1}{2}\omega_0(t-T)}, \\(D_2)_{12} &= \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} e^{\frac{1}{2}\omega_0(t-T)} - \frac{1}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} e^{-\frac{1}{2}\omega_0(t-T)}, \\(D_2)_{21} &= \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} e^{\frac{1}{2}\omega_0(t-T)} - \frac{1}{2} \sin \theta e^{i\varphi} e^{-\frac{1}{2}\omega_0(t-T)}, \\(D_2)_{22} &= \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) e^{\frac{1}{2}\omega_0(t-T)} + \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) e^{-\frac{1}{2}\omega_0(t-T)}.\end{aligned}\tag{3.58}$$

В качестве второго импульса возьмем короткий сигнал площадью π

$$R_2(t) = \pi \delta(t),\tag{3.59}$$

тогда

$$F_2 = \pi, \quad S_2 = \pi, \quad S_2^* = \pi, \quad Q_2 = \pi, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = \frac{2}{\pi}\tag{3.60}$$

и

$$K_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.\tag{3.61}$$

Намагниченность вдоль оси z

$$M_z = \Psi^H (\gamma s_z) \Psi,\tag{3.62}$$

где Ψ^H – эрмитово сопряженный спинор.

Вычислив (3.62), получим выражение, не зависящее от φ . Выберем из него только слагаемые, относящиеся к двухимпульсному эху (содержащие $e^{i\omega_0(t-2T)}$).

Считая, что все направления внутреннего постоянного поля равновероятны, найдем намагниченность во всем поликристаллическом образце путем усреднения по сферическим углам θ, φ

$$\overline{M}_z = \int g(\omega_0) d\omega_0 \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{2} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\varphi \widetilde{M}_z, \quad (3.63)$$

где $g(\omega_0)$ – неоднородно уширенная линия.

Так как $\widetilde{M}_z$ не зависит от угла φ , то интегрирование по нему проводится элементарно. При интегрировании по углу θ сделаем замену переменной $p = \cos \theta$

$$\overline{M}_z = \int g(\omega_0) d\omega_0 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dp \widetilde{M}_z. \quad (3.64)$$

В $\widetilde{M}_z$ можно сразу опустить члены, содержащие множителем нечетную степень p , так как при интегрировании в симметричных пределах они дадут ноль. Тогда

$$\overline{M}_z = \int g(\omega_0) d\omega_0 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dp \frac{i\hbar\gamma}{4} \left(S^* e^{i\omega_0(t-2T)} - S e^{-i\omega_0(t-2T)} \right) \frac{\sin Q}{Q} (1-p^2)^2. \quad (3.65)$$

Вместо уравнения Шредингера для волновой функции системы можно использовать уравнения Блоха непосредственно для намагниченности. Был проведен расчет без учета релаксации и зависимость $\widetilde{M}_z$ от угла θ полностью аналогична (3.65). Влияние релаксационных процессов на величину и форму эхо-сигнала было изучено в параграфе 3.1.

Если частота заполнения радиоимпульса ω_1 близка к центральной частоте ω_0 , и выполняется условие $\tau_1 \gg \frac{1}{\omega_1}$, то

$$|S(\omega_0)| \gg F. \quad (3.66)$$

Тогда

$$Q = |S| \sin \theta, \quad (3.67)$$

и интеграл преобразуется к следующему виду

$$\overline{M}_z = \int \frac{i\hbar\gamma}{4} g(\omega_0) \left(S^* e^{i\omega_0(t-2T)} - S e^{-i\omega_0(t-2T)} \right) d\omega_0 \int_0^1 dp \frac{\sin(|S|\sqrt{1-p^2})}{|S|} (1-p^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.68)$$

Замена переменной

$$z = \sqrt{1-p^2} \quad (3.69)$$

сводит внутренний интеграл к виду

$$\int_0^1 dz \frac{\sin(|S|z)}{|S|\sqrt{1-z^2}} z^4. \quad (3.70)$$

Значение последнего интеграла выражается через функции Струве $(\tilde{H}_0, \tilde{H}_1)$

$$\frac{|S|^2 + (|S|^2 - 3) \left(\frac{1}{2} |S| \tilde{H}_0(|S|) - \tilde{H}_1(|S|) \right)}{|S|^4}. \quad (3.71)$$

Возьмем радиочастотный импульс с прямоугольной огибающей

$$R_1(t) = A \sin(\omega_1 t), \quad (3.72)$$

тогда

$$S = \int_0^{\tau_1} A \sin(\omega_1 \tau) e^{-i\omega_0 \tau} d\tau = \frac{A \left(i\omega_0 e^{-i\omega_0 \tau_1} \sin(\omega_1 \tau_1) + \omega_1 e^{-i\omega_0 \tau_1} \cos(\omega_1 \tau_1) - \omega_1 \right)}{\omega_0^2 - \omega_1^2}. \quad (3.73)$$

Будем считать, что в пределах ширины спектра S неоднородно уширенная линия остается постоянной, поэтому при интегрировании можно положить

$$g(\omega_0) = g_0 = \text{const}. \quad (3.74)$$

Если подставить (3.73) в (3.71) и проинтегрировать в (3.68) по ω_0 , то конечного аналитического результата ввиду сложности подынтегрального выражения получить не удастся. Поэтому было применено численное интегрирование в пределах ширины спектра сигнала S .

Так как величина эха максимальна в момент времени $t = 2T$, интересна зависимость $|\overline{M}_z(t = 2T)|$ от площади радиочастотного импульса $A\tau_1$. На рис. 12 показана эта зависимость, рассчитанная при $\omega_1 = 10^7 \text{ c}^{-1}$, $\tau_1 = 10^{-5} \text{ c}$. Величина модуля эхо-сигнала отложена в относительных единицах. По оси абсцисс отложено произведение $A\tau_1$.

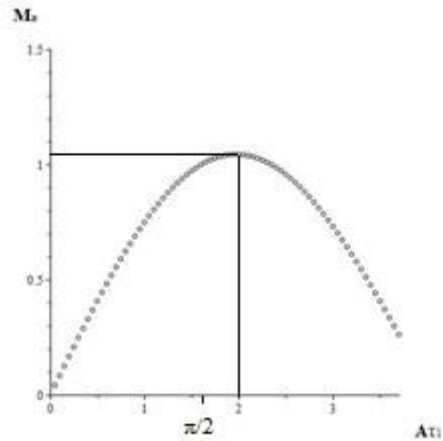


Рис. 12. Зависимость амплитуды эхо-сигнала от площади радиочастотного импульса.

Так как при вычислении мультипликативного интеграла было использовано нулевое приближение, то полученные результаты справедливы приблизительно до площади радиочастотного сигнала $A\tau_1 = \pi$. При более высоких уровнях радиочастотного сигнала для расчета величины эха необходимо использовать следующие приближения для мультипликативного интеграла. При этом появятся спектры сигнала на частоте, сдвинутой по

отношению к частоте ω_0 . Величина сдвига будет зависеть от величины радиочастотного сигнала [41].

3.5 Условия получения спектров сигналов в спиновых эхо-процессорах в реальном масштабе времени

Известны применения спинового эха для создания управляемых линий задержек и других устройств обработки сигналов [38, 39]. Спиновые эхо-процессоры (СЭП), принцип действия которых основан на явлениях спинового или светового эха, отличаются простотой изготовления и настройки, относительно малыми габаритами. В [72] показано, что в СЭП возможно осуществить получение спектров сигналов в реальном масштабе времени трехимпульсным методом, используя в качестве третьего управляющего импульса сигнал с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ), при выполнении условия

$$t_1 \leq \sqrt{\frac{\tau}{2\Delta f}}, \quad (3.75)$$

где t_1 – длительность анализируемого сигнала, τ – длительность ЛЧМ, $2\Delta f$ – величина девиации частоты ЛЧМ импульса. Также при этом необходимо использование фазового детектора. В [73, 74] удалось исключить неравенство (3.75) путем введения предварительной операции гетеродинирования анализируемого сигнала. Эта операция заключается в умножении анализируемого сигнала на гетеродинный импульс с ЛЧМ, коэффициент девиации которого равен коэффициенту девиации третьего управляющего импульса с ЛЧМ. Необходимо отметить, что условие (3.75) ограничивает возможность анализа спектров сложных фазоманипулированных сигналов, длительность которых сравнима или превышает $\sqrt{\frac{\tau}{2\Delta f}}$.

Целесообразно установить возможность получения в спиновых эхо-процессорах спектров сигналов в реальном масштабе времени по трехимпульсной методике без применения дополнительных устройств.

Известно [39, 75], что спектральная функция стимулированного трехимпульсного эха в малосигнальном приближении без учета релаксации может быть записана в виде

$$S(\omega) = Ag(\omega)S_1^*(\omega)S_2(\omega)S_3(\omega)\exp(-i\omega(T + \tau_2)), \quad (3.76)$$

где $S_1(\omega)$ – спектральная функция первого импульса; $S_2(\omega)$ – спектральная функция второго импульса; $S_3(\omega)$ – спектральная функция третьего импульса; $A = \text{const}$; $g(\omega)$ – форма неоднородноуширенной линии поглощения рабочего вещества, T и τ_2 – соответственно моменты времени, в которые начинают действовать третий и второй радиоимпульсы (малосигнальное приближение применимо, когда используются достаточно слабые радиоимпульсы, площадь которых мала по сравнению с единицей). Тогда, очевидно, сигнал на выходе СЭП запишется как

$$v(t) = B \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (3.77)$$

где $B = A / (2\pi)$.

Поскольку рабочее вещество обладает конечной шириной неоднородноуширенной линии поглощения, потребуем, чтобы спектральная функция первого поступающего на СЭП радиоимпульса была постоянна в пределах ширины линии, то есть

$$S_1 = A_0 \text{ при } \omega_1 < \omega \leq \omega_2, \quad (3.78)$$

также форму линии будем считать постоянной в этих пределах

$$g(\omega) = A_1 \text{ при } \omega_1 < \omega \leq \omega_2. \quad (3.79)$$

В качестве второго импульса будем использовать сигнал $f(\tau)$, спектр которого необходимо получить. Его спектральная плотность

$$S_2(\omega) = \int_0^{t_1} f(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (3.80)$$

Из (3.76) видно, что спектр эхо-сигнала зависит от спектров всех трех импульсов, так что представляется сомнительным, что для произвольного анализируемого сигнала в качестве управляющего импульса подойдет ЛЧМ-сигнал. Поэтому, будем искать такой управляющий сигнал, который на выходе СЭП позволил бы получить спектр исследуемого сигнала в реальном масштабе времени, и покажем, что каждому анализируемому сигналу должен соответствовать управляющий сигнал, спектр которого должен зависеть от свойств обрабатываемого сигнала. Очевидно, что в этом случае спектр третьего сигнала должен удовлетворять интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$B \int_{-\infty}^{+\infty} A_0 A_1 S_2(\omega) S_3(\omega) \exp(i\omega t) d\omega = \eta S_2(\alpha t) \quad (3.81)$$

с ядром

$$K(\omega, t) = B A_0 A_1 S_2(\omega) \exp(i\omega t), \quad (3.82)$$

где η и α – масштабные коэффициенты, α имеет размерность $[\text{с}^{-2}]$.

С помощью обратного преобразования Фурье получаем

$$S_2(\omega) S_3(\omega) = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\alpha t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (3.83)$$

где $\sigma = \eta / (2\pi B A_0 A_1)$ имеет размерность $[\text{с}^{-1}]$.

Подставляя (3.80) в правую часть (3.83) получаем после несложных преобразований, используя свойства интеграла Фурье,

$$S_3(\omega) = \frac{\sigma f\left(-\frac{\omega}{\alpha}\right)}{\alpha S_2(\omega)}. \quad (3.84)$$

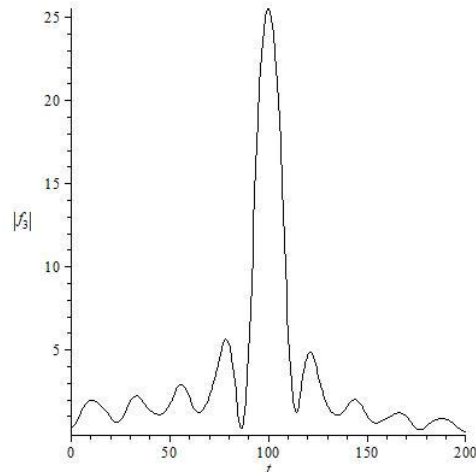
По спектру легко находится сам необходимый третий сигнал.

Для иллюстрации приведем результат, полученный численным моделированием. Пусть обрабатываемый сигнал есть простой радиоимпульс $f(t) = \sin(\omega_0 t)$, $0 < t < t_1$. На рис. 13 изображены модуль и фаза управляющего

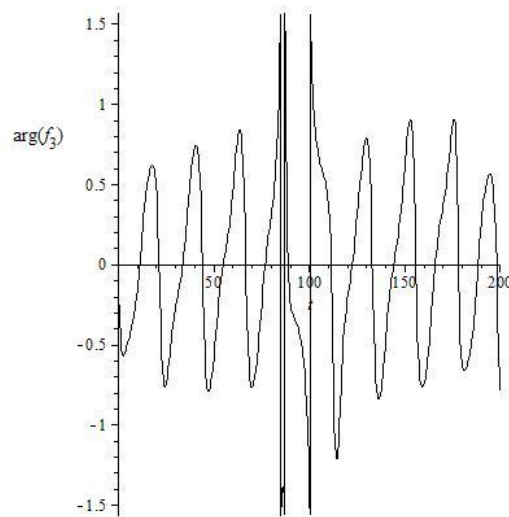
импульса, рассчитанные для параметров

$$\omega_0 = 1000 \text{ c}^{-1}, \quad t_1 = 5 \text{ c}, \quad \sigma = 1 \text{ c}^{-1}, \quad \alpha = 10 \text{ c}^{-2}.$$

Таким образом, для спектрального анализа сигнала в реальном времени, управляющий сигнал должен определенным образом зависеть от свойств исследуемого сигнала.



а



б

Рис. 13. Модуль (а) и фаза (б) управляющего импульса.

Интересен вопрос, каким должен быть спектр исследуемого сигнала, чтобы при использовании в качестве управляющего импульса сигнала ЛЧМ на выходе СЭП получался этот спектр в реальном масштабе времени.

Очевидно, в этом случае, спектр исследуемого сигнала $S_2(\omega)$ должен удовлетворять уравнению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\omega) S_3(\omega) \exp(i\omega t) d\omega = k S_2(\alpha t), \quad (3.85)$$

где $k = \eta / (BA_0)$.

При $\Delta f \tau \gg 1$ спектр ЛЧМ $S_3(\omega)$ с достаточной степенью точности описывается выражением [76]

$$S_3(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \exp \left\{ -i \left[\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\beta} - \frac{\pi}{4} \right] \right\} \quad (3.86)$$

при $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega$ и равен нулю в остальном частотном диапазоне, β – скорость изменения частоты в импульсе.

Тогда уравнение (3.85) преобразуется к виду

$$\int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \exp \left\{ i \left[\omega t - \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\beta} + \frac{\pi}{4} \right] \right\} S_2(\omega) d\omega = k S_2(\alpha t). \quad (3.87)$$

При замене переменной $y = \alpha t$ для $S_2(\omega)$ получаем

$$\int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega} \exp \left\{ i \left[\frac{\omega y}{\alpha} - \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\beta} + \frac{\pi}{4} \right] \right\} S_2(\omega) d\omega = \varepsilon S_2(y), \quad (3.88)$$

где $\varepsilon = k \sqrt{2\beta / \pi}$ имеет размерность $[c^{-1}]$.

Удобно еще сделать замену $\omega = \omega_0 + s$, $y = \omega_0 + x$, при этом (3.88) переходит в

$$\int_0^{\Delta\omega} \exp \left\{ i \left[-\frac{s^2}{2\beta} + \frac{\pi}{4} + \frac{\omega_0^2}{\alpha} + \frac{\omega_0 s}{\alpha} + \frac{\omega_0 x}{\alpha} + \frac{xs}{\alpha} \right] \right\} S_2(s) ds = \varepsilon S_2(x). \quad (3.89)$$

После введения новой искомой функции $z(x) = S_2(x) \exp(-i\omega_0 x / \alpha)$ получается однородное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\int_0^{\Delta\omega} K(x, s) z(s) ds = \lambda z(x) \quad (3.90)$$

с ядром

$$K(x, s) = \exp \left\{ i \left[-\frac{s^2}{2\beta} + \frac{2\omega_0 s}{\alpha} + \frac{xs}{\alpha} \right] \right\}, \quad (3.91)$$

$$\lambda = \varepsilon \exp \left\{ -i \left(\pi / 4 + \omega_0^2 / \alpha \right) \right\}.$$

Заменим ядро вырожденным [77], для этого разложим экспоненту $\exp(isx/\alpha)$ в ряд Тейлора $\sum_{m=0}^n (isx/\alpha)^m / m!$, ограничившись членами до n -го порядка

$$K(x, s) \simeq \tilde{K}(x, s),$$

$$\tilde{K}(x, s) = \exp \left\{ i \left[-\frac{s^2}{2\beta} + \frac{2\omega_0 s}{\alpha} \right] \right\} \sum_{m=0}^n \frac{\left(i \frac{s}{\alpha} \right)^m}{m!} x^m. \quad (3.92)$$

Таким образом, ядро примет вид:

$$\tilde{K}(x, s) = \sum_{m=0}^n A_m(x) B_m(s),$$

$$A_m(x) = x^m, \quad (3.93)$$

$$B_m(s) = \exp \left\{ i \left[-\frac{s^2}{2\beta} + \frac{2\omega_0 s}{\alpha} \right] \right\} \frac{\left(i \frac{s}{\alpha} \right)^m}{m!}.$$

Подставляя вырожденное ядро (3.93) в уравнение (3.90) получаем

$$z(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^n V_m A_m(x), \quad (3.94)$$

где

$$V_k = \int_0^{\Delta\omega} B_k(s) z(s) ds, \quad k = 1..n. \quad (3.95)$$

Подстановка (3.94) в (3.95) приводит к системе уравнений

$$\sum_{m=0}^n C_{km} V_m = \lambda V_k, \quad k = 1..n \quad (3.96)$$

для определения собственных чисел и собственных векторов квадратной матрицы C с элементами

$$C_{km} = \int_0^{\Delta\omega} B_k(s) A_m(s) ds, \quad k = 1..n, m = 1..n. \quad (3.97)$$

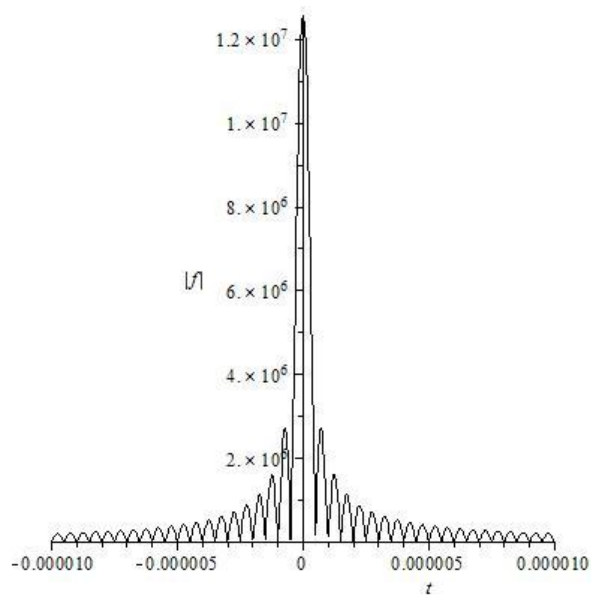
Задавая определенное число n , мы получим n собственных чисел λ_l и n соответствующих им собственных векторов V^l , $l = 1..n$.

Каждому λ_l и V^l будет соответствовать искомая функция

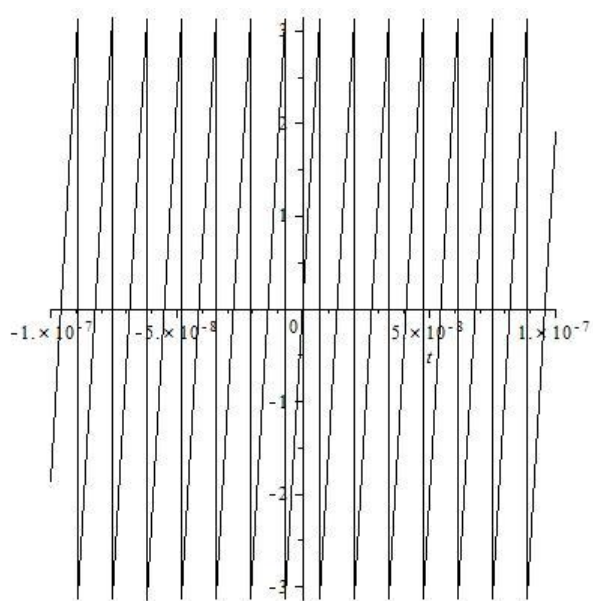
$$z(s) = \sum_{m=0}^n V_m^l s^m, \quad (3.98)$$

по которой легко найти спектр исследуемого сигнала, а по нему определить сам сигнал.

Например, для ЛЧМ с параметрами $\omega_0 = 4,52 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$, $\tau = 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ с}$, $\Delta f = 10^6 \text{ Гц}$ при $n = 15$ получены решения, показанные на рис. 14 – 16. Масштаб по времени для графиков фаз решений выбран более крупным, чем для графиков модулей, иначе бы там все слилось в одно пятно.

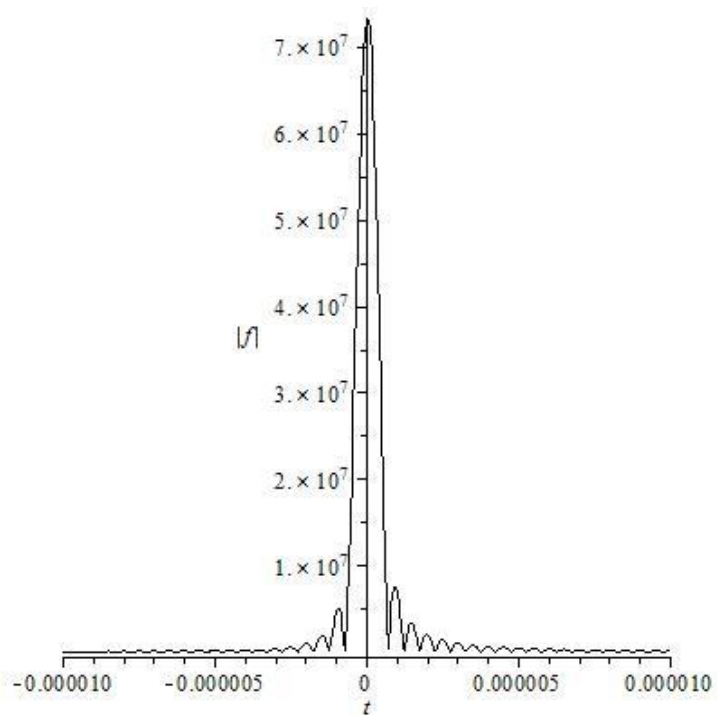


а

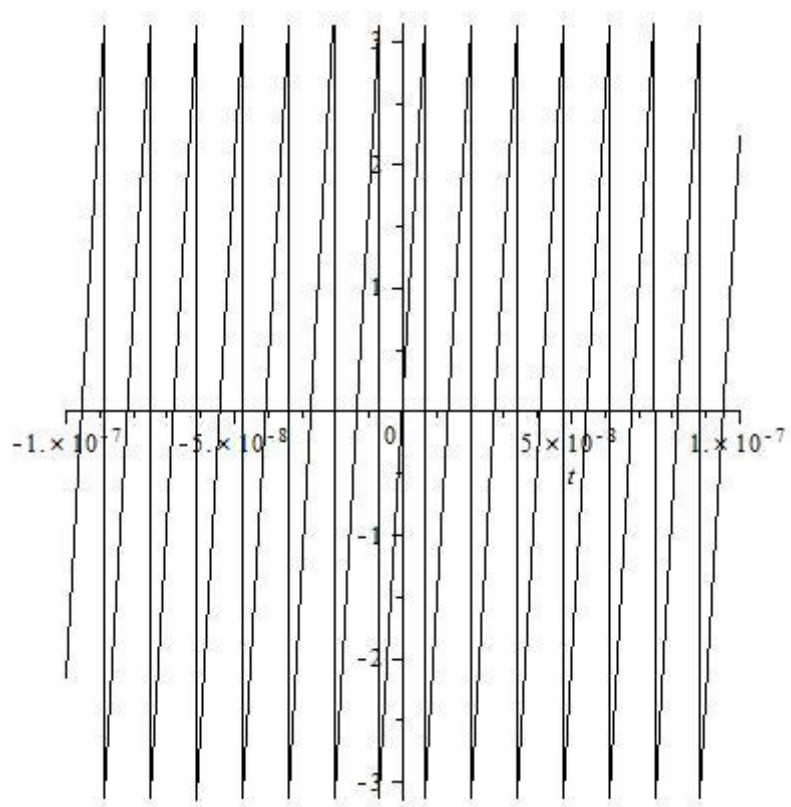


b

Рис. 14. Модуль (а) и фаза (b) исследуемого сигнала для $l = 1$.

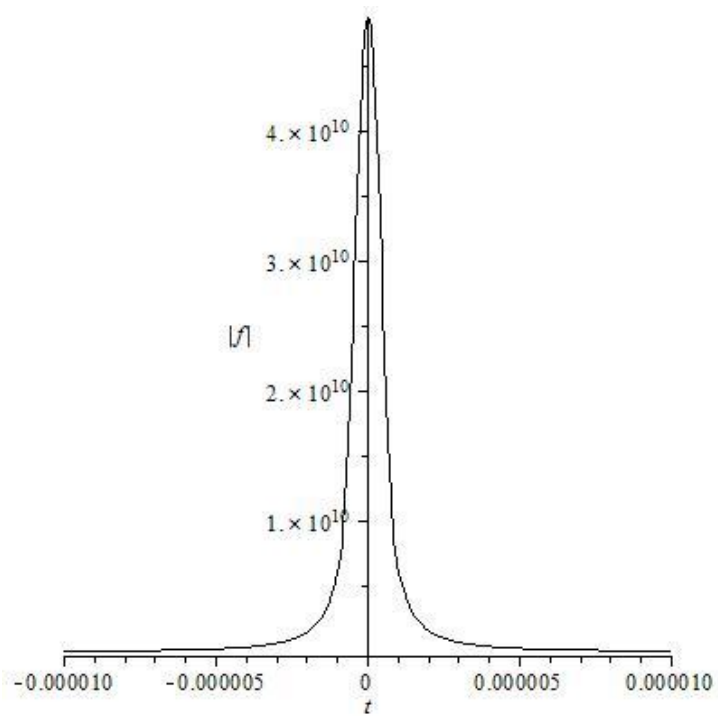


a



b

Рис. 15. Модуль (а) и фаза (b) исследуемого сигнала для $l = 3$.



a

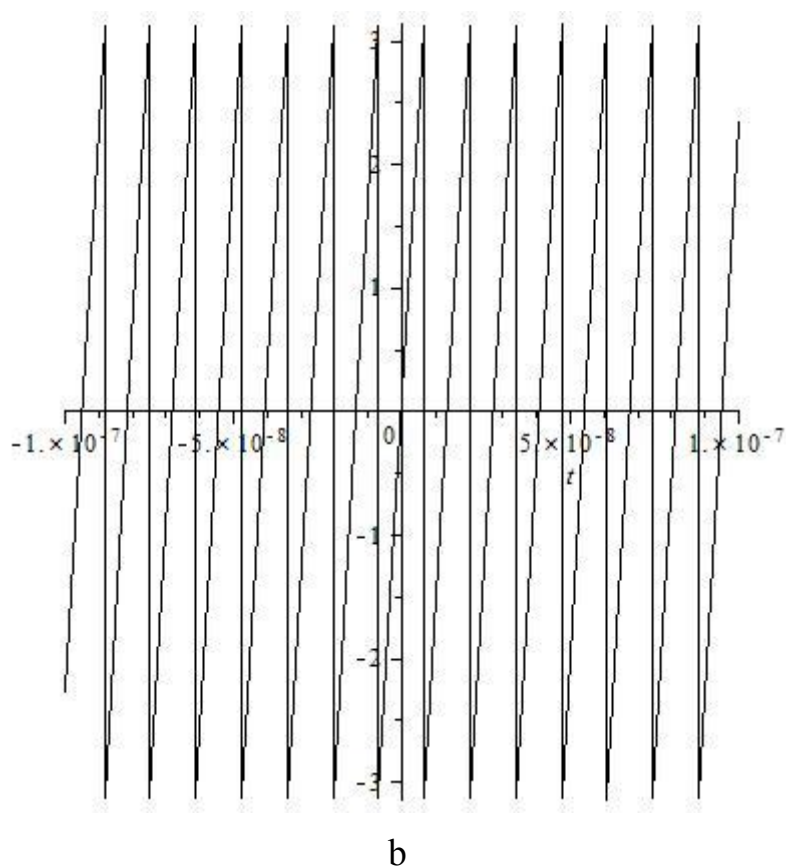


Рис. 16. Модуль (а) и фаза (б) исследуемого сигнала для $l = 5$.

Итак, можно сделать вывод, что при заданном ЛЧМ управляющем сигнале в СЭП можно получить спектр в реальном масштабе времени только для сигналов, принадлежащих некоторому дискретному набору.

Форма неоднородной линии уширения $g(\omega)$ и спектр исследуемого импульса $S_2(\omega)$ входят в формулу (3.76) одинаковым образом, поэтому по аналогии с методами, развитыми в [72-74], СЭП можно использовать для экспресс-анализа формы неоднородной линии уширения.

ГЛАВА 4. ДВУХЧАСТОТНОЕ ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭХО-СИГНАЛА В ЯДЕРНОМ КВАДРУПОЛЬНОМ РЕЗОНАНСЕ.

Ядерный квадрупольный резонанс (ЯКР) – область радиоспектроскопии, методы которой применяются для изучения внутренних движений в кристаллах, природы химической связи, комплексных соединений, дефектов в твердых телах. В экспериментах по ЯКР получают сведения о константах квадрупольного взаимодействия, параметрах асимметрии и величинах химического сдвига.

ЯКР обладает особыми возможностями для аналитического обнаружения химических веществ в твердой фазе: безвредность, неразрушающий количественный контроль, способность анализа неоднородных смесей в больших объемах, экспресс-анализ без предварительной подготовки образцов, без обязательного приложения внешнего магнитного поля. Серьезное ограничение широкого распространения ЯКР – необходимость иметь достаточное количество образца для детектирования (единицы и десятки грамм). Кроме того, часто непрактично использовать прямой метод детектирования для поиска неизвестных частот, так как это обычно отнимает много времени [78].

В настоящее время большое значение приобрело импульсное возбуждение ЯКР, что связано не только с возможностью исследования неравновесных состояний спин-системы (релаксационные процессы), но и главным образом с более широкими возможностями изучения внутренних электрических и магнитных локальных полей в кристаллах. Импульсные методы ЯКР позволяют наблюдать сигналы в неупорядоченных кристаллах, что существенно расширяет возможности метода.

При исследовании явлений ЯКР, также как в случае спиновых систем, были обнаружены явления эха.

При импульсном возбуждении образец подвергается воздействию радиочастотных импульсов (импульсы с высокочастотным заполнением). Сигналы ЯКР при этом наблюдаются после импульсов. В случае полужелтых спинов можно осуществить двухчастотное возбуждение квадрупольного спинного эха, когда радиочастотные импульсы одновременно возбуждают переходы $\pm 1/2 \rightarrow \pm 3/2$ и $\pm 3/2 \rightarrow \pm 5/2$ (для $J = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$). При этом возмущении возникает каскадная перекачка спинов с самого нижнего уровня на верхний через промежуточное состояние $|\pm 3/2\rangle$.

Рассмотрим явление квадрупольного спинного эха для случая спина ядер $J = \frac{5}{2}$ в аксиально-несимметричном градиенте электрического поля. Будем рассматривать такие возбуждающие сигналы, длительность которых много меньше времени релаксации, при этом влиянием релаксации можно пренебречь (см. параграф 3.1).

Так как в данном случае задействовано больше двух энергетических уровней системы, то модель Блоха здесь не применима. При импульсном возбуждении ЯКР удобно использовать метод матрицы плотности ρ , так как с ее помощью легко вычисляются математические ожидания наблюдаемых величин для данной системы, в частности, интересующие нас составляющие магнитного момента системы $\langle M_k \rangle$:

$$\langle M_k \rangle = \text{Sp} \{ \rho M_k \}. \quad (4.1)$$

До воздействия радиочастотных импульсов спиновая система находилась в равновесии, поэтому

$$\rho(0) = \frac{N}{2J+1} \exp\left(-\frac{H_0}{kT}\right), \quad (4.2)$$

где N – число частиц в системе, T – ее температура,

$$H_0 = \frac{a}{4J(2J-1)} \left[3I_z^2 - I^2 + \frac{\eta}{2}(I_+^2 + I_-^2) \right] \quad (4.3)$$

– невозмущенный гамильтониан системы [49], $a = eQq_{zz}$.

Изменение ρ во времени дается уравнением Лиувилля

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] = H\rho - \rho H, \quad (4.4)$$

где H – гамильтониан системы

$$H = H_0 + H_1, \quad (4.5)$$

H_1 – оператор возмущения, связанный с воздействием на ядра радиочастотного магнитного поля.

После перехода к представлению взаимодействия оператор возмущения принимает вид

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \text{Re}^{i\omega_{12}t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} \text{Re}^{-i\omega_{12}t} & 0 & \sqrt{2} \text{Re}^{-i\omega_{13}t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \text{Re}^{i\omega_{13}t} & 0 & \frac{3}{2} \text{Re}^{i\omega_{23}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \text{Re}^{-i\omega_{23}t} & 0 & \sqrt{2} \text{Re}^{i\omega_{12}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \text{Re}^{-i\omega_{12}t} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \text{Re}^{-i\omega_{13}t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \text{Re}^{i\omega_{13}t} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где $\omega_{12} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\hbar}$; $\omega_{23} = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\hbar}$; $\omega_{13} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\hbar}$ – собственные частоты переходов, λ_k – собственные значения невозмущенного гамильтониана системы (4.3). $R = \mu H$, μ – магнитный момент ядра, H – радиочастотное магнитное поле; R имеет физический смысл энергии магнитного диполя во внешнем магнитном поле.

Решение уравнения (4.4) для матрицы плотности представим в виде

$$\rho(t) = S\rho(0)S^{-1}, \quad (4.7)$$

где $S = D_n R_n \dots D_2 R_2 D_1 R_1$, R_n – решение уравнения Шредингера во время действия n -го импульса

$$i\hbar \frac{dR_n}{dt} = \tilde{H}_1 R_n, \quad (4.8)$$

D_n – решение уравнения Шредингера в промежутке между n и $n+1$ импульсами.

Решение уравнения (4.8) получается в виде мультипликативного интеграла [79]

$$R_n = \int \left(-\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_1(\tau) d\tau \right). \quad (4.9)$$

Вычисление мультипликативного интеграла от матриц достаточно произвольной структуры связано с большими трудностями. В теории дифференциальных уравнений доказано, что в случае функциональной коммутативности матриц мультипликативный интеграл сводится к вычислению матричной экспоненты. Используем матричную экспоненту в качестве нулевого приближения

$$R_n = \exp \left[\int_0^t \left(-\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_1(\tau) d\tau \right) \right]. \quad (4.10)$$

В простейшем эксперименте по наблюдению сигнала квадрупольного эха рассмотрим действие двух импульсов на частоте перехода ω_{12} , разделенных интервалом времени T . Спустя время $2T$ наблюдается сигнал двухимпульсного эха.

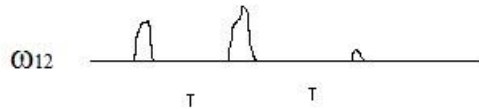


Рис. 17. Схема возникновения квадрупольного эха при одночастотном воздействии.

В результате простых, но довольно громоздких вычислений получается следующий результат

$$\begin{aligned} \langle I_x \rangle = \frac{N}{(2J+1)kT} \frac{i\hbar\omega_{12}}{2} S_1^*(\omega_{12}) S_2^2(\omega_{12}) & \left\{ \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{\sin(\sqrt{5}|S_1(\omega_{12})|)}{|S_1(\omega_{12})|} \frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}|S_2(\omega_{12})|\right)}{|S_2(\omega_{12})|^2} + \right. \\ & \left. + \sqrt{2} \frac{\sin(2\sqrt{2}|S_1(\omega_{12})|)}{|S_1(\omega_{12})|} \frac{\sin^2(\sqrt{2}|S_2(\omega_{12})|)}{|S_2(\omega_{12})|^2} \right\}, \quad (4.11) \end{aligned}$$

где S_1, S_2 — спектры первого и второго сигналов.

Для эхо-сигнала для другой последовательности импульсов (рис. 18), где импульсы действуют на частотах, соответствующих двум переходам, получается следующая формула

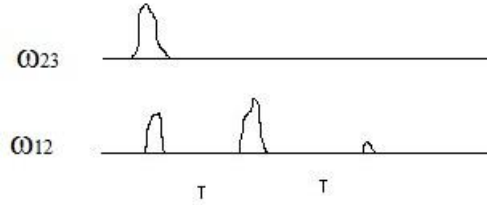


Рис. 18. Схема возникновения эха при двухчастотном импульсном возбуждении.

$$\begin{aligned} \langle I_x \rangle = & \frac{N}{(2J+1)kT} \frac{i}{2} S_1^*(\omega_{12}) S_2^2(\omega_{12}) \left[h\omega_{12} \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{\sin(\sqrt{5}|S_1(\omega_{12})|)}{|S_1(\omega_{12})|} \frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}|S_2(\omega_{12})|\right)}{|S_2(\omega_{12})|^2} + \left(8\lambda_2 \cos\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{8|S_1(\omega_{12})|^2 + 9|S_1(\omega_{23})|^2} \right\} - \right. \right. \\ & - 8\lambda_1 \frac{9|S_1(\omega_{23})|^2 + 8|S_1(\omega_{12})|^2 \cos\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{8|S_1(\omega_{12})|^2 + 9|S_1(\omega_{23})|^2} \right\}}{8|S_1(\omega_{12})|^2 + 9|S_1(\omega_{23})|^2} - 72\lambda_3 |S_1(\omega_{23})|^2 \frac{\cos\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{8|S_1(\omega_{12})|^2 + 9|S_1(\omega_{23})|^2} \right\} - 1}{8|S_1(\omega_{12})|^2 + 9|S_1(\omega_{23})|^2} \left. \right) \times \\ & \times \frac{\sin\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{8|S_1(\omega_{12})|^2 + 9|S_1(\omega_{23})|^2} \right\}}{\sqrt{8|S_1(\omega_{12})|^2 + 9|S_1(\omega_{23})|^2}} \frac{\sin^2(\sqrt{2}|S_2(\omega_{12})|)}{|S_2(\omega_{12})|^2} \left. \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Анализ выражения (4.11) при помощи математической оболочки Maple 9 показал, что эхо-сигнал достигает максимального значения

$$\langle I_x \rangle = 0,21 \frac{N}{(2J+1)kT} \hbar a \quad (4.13)$$

при абсолютных величинах спектров $|S_1(\omega_{12})| = 0,15\pi$, $|S_2(\omega_{12})| = 0,35\pi$. Значение параметра асимметрии было взято $\eta = 0,5$.

На программу, использовавшуюся при расчетах для этой главы диссертации, получено свидетельство [80].

При этих же абсолютных значениях спектров $|S_1(\omega_{12})|$, $|S_2(\omega_{12})|$ выражение (4.12) достигает максимума

$$\langle I_x \rangle = 0,32 \frac{N}{(2J+1)kT} \hbar a \quad (4.14)$$

при $|S_1(\omega_{23})| = 0,4\pi$.

Если воздействие на частоте ω_{23} происходит не одновременно с первым воздействием на частоте ω_{12} , а позже, то для эхо-сигнала получается следующее выражение

$$\begin{aligned} \langle I_x \rangle = & \frac{N}{(2J+1)kT} \frac{i\hbar\omega_{12}}{2} S_1^*(\omega_{12}) S_2^2(\omega_{12}) \left\{ \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{\sin(\sqrt{5}|S_1(\omega_{12})|)}{|S_1(\omega_{12})|} \frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}|S_2(\omega_{12})|\right)}{|S_2(\omega_{12})|^2} + \right. \\ & \left. + \cos\left(\frac{3}{2}|S_1(\omega_{23})|\right) \sqrt{2} \frac{\sin(2\sqrt{2}|S_1(\omega_{12})|)}{|S_1(\omega_{12})|} \frac{\sin^2(\sqrt{2}|S_2(\omega_{12})|)}{|S_2(\omega_{12})|^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

При абсолютных величинах спектров воздействий на частоте ω_{12} обеспечивающих максимум при одночастотном возбуждении оба выражения в фигурных скобках, и свободный член, и коэффициент при косинусе имеют положительные значения, поэтому возникающий от воздействия на частоте ω_{23} косинус может только ослабить эхо-сигнал.

Таким образом, при двухчастотном воздействии по сравнению с одночастотным возможно усиление эхо-сигнала

$$K = 20 \log \left(\frac{0,32}{0,21} \right) \approx 3,7 \text{ дБ} . \quad (4.16)$$

Это согласуется с коэффициентом усиления, полученным в [67, 81], который определяется через отношение частот переходов $\frac{\omega_{23}}{\omega_{12}}$

$$K = 20 \log \left(\frac{\omega_{23}}{\omega_{12}} \right) \approx 3,8 \text{ дБ} . \quad (4.17)$$

Описанный эффект усиления эхо-сигнала при двухчастотном воздействии дает возможность разработки более чувствительных эхо-спектрометров и усовершенствованных эхо-процессоров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Найден алгоритм нахождения всех структур функционально-нильпотентных матриц для третьего и четвертого порядков, определено полное количество структур матриц третьего порядка, доказано, что ранг функционально-нильпотентной матрицы n -го порядка не может превосходить целой части от $(n/2)$. Также разработан общий алгоритм нахождения некоторых структур функционально-нильпотентных матриц, порядок которых выше четырех.
2. Исследование явлений спинового и светового эха с помощью метода мультипликативного интегрирования показало, что учет релаксации в этих явлениях влияет как на величину, так и на форму эхо-сигнала. Также было изучено влияние наличия помехи при корреляционной обработке сигнала и наложения исходных сигналов.
3. Получена зависимость амплитуды эхо-сигнала от площади радиочастотного импульса при двухимпульсном возбуждении спинового эха в ферромагнитном поликристалле.
4. Показано, что для получения в спиновых эхо-процессорах спектров сигналов в реальном масштабе времени по трехимпульсной методике без применения дополнительных устройств, либо спектр управляющего импульса должен зависеть определенным образом от характеристик исследуемого, либо при определенном управляющем импульсе в виде ЛЧМ исследуемый импульс должен принадлежать соответствующему счетному набору сигналов.
5. Аналитически показана возможность усиления эхо-сигнала ядерного квадрупольного резонанса при использовании двухчастотного импульсного возбуждения вместо одночастотного.

В заключении мне хочется от всей души поблагодарить своего научного руководителя к.ф.-м.н., доцента Михаила Михайловича Ковалевского за доброту, сердечность, за советы, всегда ценные, и за те знания и умения, которые я приобрел при подготовке диссертационной работы. Хочу поблагодарить д.ф.-м.н., профессора Анатолия Юльевича Захарова за продолжительные консультации по диссертационной работе, которые принесли мне очень много пользы. Хочу также поблагодарить д.т.н., профессора Леонида Александровича Рассветалова за ценные замечания, сделанные им при написании рецензии на мою статью по теме диссертационной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ПРОГРАММА РАСЧЕТА ЗАВИСИМОСТИ ОТНОШЕНИЯ СИГНАЛ-ШУМ НА ВЫХОДЕ ЭХО-ПРОЦЕССОРА ОТ ОТНОШЕНИЯ ШУМ-СИГНАЛ НА ВХОДЕ (к п. 3.2)

Расчет проводился с помощью математической системы компьютерной алгебры Maple 11 с использованием пакетов “student”, “inttrans” и “CurveFitting”

```
> with(student):
> with(inttrans):
> with(CurveFitting):
> t3:=1:
> w0:=750:
> b:=800:
> T1:=50:
> beta:=evalf(1/T1):
> T2:=20:
> delta:=evalf(1/T2):
> alpha:=delta-beta:
> A1:=evalf(Pi/2): A2:=evalf(Pi/6):
> R1:=sin(w0*tss+b*tss^2)*(Heaviside(t3-tss)-Heaviside(-tss)):
> S1t:=simplify(int(A1*R1*exp((alpha+I*k)*tss),tss=0..ts)):
> S1tc:=simplify(int(A1*R1*exp((alpha-I*k)*tss),tss=0..ts)):
> S1:=simplify(int(R1*exp((alpha+I*k)*tss),tss=0..infinity)):
> S2:=int(R1*exp((-alpha+I*k)*tss),tss=0..infinity):
> S2t:=int(A1*R1*exp((-alpha+I*k)*tss),tss=0..ts):
> S2tc:=int(A1*R1*exp((-alpha-I*k)*tss),tss=0..ts):
> w1:=250*Pi: n265:=50: m265:=100000000: tau:=5:
> for u from 0 by 1 to n265 do
am265[u]:=evalf(RandomTools[Generate](integer(range=0..m265))/m2
65); c[u]:=evalf(tau*(u-20)/n265) end do:
> RWum_singl:=sin(w1*t)*(Heaviside(t2-t)-Heaviside(t1-t)):
> S1_singl:=simplify(fourier(RWum_singl*exp(alpha*t),t,k)):
```

```

> S2_singl:=simplify(fourier(RWum_singl*exp(-alpha*t),t,k)):
> S1_Wum:=Q*Sum(am265[l]*subs(t2=c[l+1],subs(t1=c[l],S1_singl)),
l=0..n265-1):
> S2_Wum:=Q*Sum(am265[l]*subs(t2=c[l+1],subs(t1=c[l],S2_singl)),
l=0..n265-1):
> d1:=-3500: d2:=3500:
> Q:=evalf(527*Pi):
> j:=400:
> m:=S1t*S2tc+S1tc*S2t:
> b:=sin((m/2)^(1/2))/(m*2)^(1/2):
> a:=cos((m/2)^(1/2)):
> n3:=50:
> for z from 0 by 1 to j do kmas[z]:=evalf((z*d2+(j-z)*d1)/j);
S1mas[z]:=evalf(subs(k=kmas[z], S1));
S2mas[z]:=evalf(subs(k=kmas[z], S2)); S1_1mas[z]:=A1*S1mas[z];
S2_1mas[z]:=A1*S2mas[z]; S1cmas[z]:= evalf(conjugate(S1mas[z]));
S2cmas[z]:= evalf(conjugate(S2mas[z]));
S1_1cmas[z]:=A1*S1cmas[z]; S2_1cmas[z]:=A1*S2cmas[z];
m1mas[z]:=evalf(Re(S1_1mas[z]*S2_1cmas[z]+S1_1cmas[z]*S2_1mas[z]
)); almas[z]:=evalf(cos((m1mas[z]/2)^(1/2)));
b1mas[z]:=evalf(sin((m1mas[z]/2)^(1/2))/(m1mas[z]*2)^(1/2));
S1_2mas[z]:=evalf(A2*S1mas[z]+subs(k=kmas[z],S1_Wum));
S2_2mas[z]:=evalf(A2*S2mas[z]+subs(k=kmas[z],S2_Wum));
S1_2cmas[z]:=evalf(conjugate(S1_2mas[z]));
S2_2cmas[z]:=evalf(conjugate(S2_2mas[z]));
m2mas[z]:=evalf(Re(S1_2mas[z]*S2_2cmas[z]+S1_2cmas[z]*S2_2mas[z]
)); b2mas[z]:=evalf(sin((m2mas[z]/2)^(1/2))/(m2mas[z]*2)^(1/2));
ESmas[z]:=4*S1_1cmas[z]*S2_2mas[z]*b2mas[z]*(b1mas[z]*(1+beta*ev
alf(simpson(subs(k=kmas[z],a)*exp(beta*ts), ts=0.0001..0.9999,
n3)))+beta*(1-
almas[z])/m1mas[z]*S2_1cmas[z]*evalf(simpson(subs(k=kmas[z],b*S1
t)*exp(beta*ts),ts=0.0001..0.9999, n3))+beta*(-
almas[z])/m1mas[z]*S2_1mas[z]*evalf(simpson(subs(k=kmas[z],b*S1t
c)*exp(beta*ts), ts=0.0001..0.9999, n3))) end do:
> T3:=4: T4:=6:

```

```

> m:=50: t4:=0.5:
> for z from 1 by 1 to m do E[z,1]:=evalf(t4*(z-0.5-m/2)*2/m);
E[z,2]:=evalf(Re((d2-
d1)/j*sum(ESmas[l]*exp(I*kmas[l]*E[z,1])*exp(-
delta*(E[z,1]+2*T3+T4)+(delta-beta)*T4), l=1..j-1))) end do:
> for z from 1 by 1 to m do E[z,1]:=evalf(t4*(z-m/2)*2/m);
E[z,2]:=evalf(Re((d2-
d1)/j*sum(ESmas[l]*exp(I*kmas[l]*E[z,1])*exp(-
delta*(E[z,1]+2*T3+T4)+(delta-beta)*T4), l=1..j-1))) end do:
> Summa:=0:
> for z from 1 by 1 to m do Summa:=Summa+(E0sm[z,2])^2 end do:
> for z from 1 by 1 to m do Summa:=Summa+(E527[z,2]-E0[z,2])^2
end do:
> Shum527:=sqrt(Summa/m):
> Lp:=Spline(Signal_shum, ss, degree=1, endpoints='natural'):
> L1:=LeastSquares(Signal_shum, ss, curve=a*ss^2+b*ss+c):
> Lls:=piecewise(ss< 45.66668854,Lp,ss>45.66668854,L1):
> plot(Lls,ss=-13..60,color=black):

```

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА 2-ГО РОДА (к п. 3.5)

Расчет проводился с помощью математической системы компьютерной алгебры Maple 12 с использованием пакетов ‘LinearAlgebra’, ‘inttrans’ и ‘CurveFitting’

```
> w0:=evalf(2*Pi*72*10^6):dw:=evalf(2*Pi*10^6):T:=evalf(64*10^(-
6)):a:=dw*T:b:=evalf(2*dw/T):g:=10^17:w01:=5*10^6:T1:=6.4*10^(-
6):dw1:=5*10^6:b1:=2*dw1/T1:
> with(inttrans):
> L4M:=.5*exp(I*(w0*t+b*t^2/2))*(Heaviside(T-t)-Heaviside(-t)):
SL4M:=fourier(L4M,t,w):
with(CurveFitting):
> n:=15:
> n2:=25:
> p:=i->subs(x=x-w0,exp(I*w0*x/g)*x^(i-1)):
> pt:=i->piecewise(t=-w0/g, int(exp(I*w0*(-w0)/g)*(x-w0)^(i-
1),x=w0..w0+2*dw), int(exp(I*w0*(x-w0)/g)*(x-w0)^(i-
1)*exp(I*x*t),x=w0..w0+2*dw)):
> pt:=i->0:
> ut:=convert(Vector(n,pt), Vector[row]):
q[1]:=int(exp(z*x),x=0..2*dw):
> ut[1]:=piecewise(abs(t+w0/g)>10^(-
7),subs(z=I*(w0/g+t),q[1])*exp(I*w0*t),subs(z=I*(w0/g+t),j[1])*e
xp(I*w0*t)):
> for m from 2 by 1 to n do q[m]:=diff(q[m-1],z):
j[m]:=diff(j[m-1],z): ut[m]:=piecewise(abs(t+w0/g)>10^(-
7),subs(z=I*(w0/g+t),q[m])*exp(I*w0*t),subs(z=I*(w0/g+t),j[m])*e
xp(I*w0*t)): end do:
> u:=convert(Vector(n,p), Vector[row]):
> f:=(i,j)->int(exp(-I*(x-w0)^2/(2*b)+I*Pi/4)*(I/g)^(i-1)/(i-
1)!*x^(i+j-2),x=w0..w0+2*dw):
```

```

> l[0]:=int(exp(-I*(x)^2/(2*b)+I*z*x/g),x=0..2*dw);
> f:=(i,j)->0:
> R:=Matrix(n,f):
> R[1,1]:=evalf(subs(z=2*w0,l[0])):
> R2[1,1]:=evalf(subs(z=2*w0,l[0])):
> for m from 3 by 1 to 2*n2 do l[m-2]:= g/I*diff(l[m-3],z): for
i from max(1,m-n2) by 1 to min(m-1,n2) do j:=m-i ;
R2[i,j]:=evalf(subs(z=2*w0,l[m-2])*(I/g)^(i-1)/(i-1!)); end do:
end do:
> u2:=convert(Vector(n2,p), Vector[row]):
> R2:=Matrix(n2,f):
> for m from 3 by 1 to 2*n do l[m-2]:= g/I*diff(l[m-3],z): for i
from max(1,m-n) by 1 to min(m-1,n) do j:=m-i ;
R[i,j]:=evalf(subs(z=2*w0,l[m-2])*(I/g)^(i-1)/(i-1!)); end do:
end do:
> with(LinearAlgebra):
e, v:= Eigenvectors(R):
h:=u.v:
ht:=ut.v:
> ul:=u:
> ul[1]:=evalf[20](int(exp(I*(-(s-
w0)^2/(2*b)+Pi/4+x*s/g)),s=w0..w0+2*dw)):
> for i from 1 by 1 to n-1 do
ul[i+1]:=evalf[20](g/I*diff(ul[i],x)) end do:
> hl:=ul.v:

```

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ПРОГРАММА РАСЧЕТА ЭХО-СИГНАЛОВ ПРИ ЯДЕРНОМ КВАДРУПОЛЬНОМ РЕЗОНАНСЕ (к главе 4)

Расчет проводился с помощью математической системы компьютерной алгебры Maple 12 с использованием пакетов “linalg”

```
> with(linalg):
>
L1:=matrix(6,6,[0,sqrt(5),0,0,0,0,0,sqrt(8),0,0,0,0,0,3,0,0,
0,0,0,0,sqrt(8),0,0,0,0,0,0,sqrt(5),0,0,0,0,0,0]):
>
L2:=matrix(6,6,[0,0,0,0,0,0,sqrt(5),0,0,0,0,0,sqrt(8),0,0,0,0,
0,0,3,0,0,0,0,0,sqrt(8),0,0,0,0,0,0,sqrt(5),0]):
> Lx:=evalm((L1+L2)/2):
> Ly:=evalm(-I*(L1-L2)/2):
>
Lz:=matrix(6,6,[5/2,0,0,0,0,0,3/2,0,0,0,0,0,1/2,0,0,0,0,0,
-1/2,0,0,0,0,0,0,-3/2,0,0,0,0,0,0,-5/2]):
> Hq:=simplify(evalm(a*(3*Lz^2-Lx^2-Ly^2-Lz^2+eta*(L1^2+L2^2)/2)/(4*(5/2)*(5-1)))):
>
H0:=scalarmul(matrix(6,6,[lambda1,0,0,0,0,0,lambda2,0,0,0,0,0,
0,lambda3,0,0,0,0,0,lambda1,0,0,0,0,0,0,lambda2,0,0,0,0,0,la
mbda3]),-I*t):
> R0:=matrix(6,6,[exp(-I*t*lambda2),0,0,0,0,0,exp(-
I*t*lambda1),0,0,0,0,0,exp(-I*t*lambda3),0,0,0,0,0,exp(-
I*t*lambda2),0,0,0,0,0,exp(-I*t*lambda1),0,0,0,0,0,exp(-
I*t*lambda3)]):
> V1:=scalarmul(Lx,Rx):
> V2:=simplify(evalm(inverse(R0)&*V1&*R0),symbolic):
>
W1:=matrix(6,6,[0,sqrt(5)*(S(omega12))/2,0,0,0,0,sqrt(5)*conjugate(S(omega12))/2,0,sqrt(2)*(conjugate(S(omega13))),0,0,0,0,sqrt(2)*S(omega13),0,3/2*S(omega23),0,0,0,0,3/2*conjugate(S(omega23)),0,sqrt(2)*(S(omega12)),0,0,0,0,sqrt(2)*conjugate(S(omega12)),0,sqrt(5)*(conjugate(S(omega13)))/2,0,0,0,0,sqrt(5)*S(omega13)/2,0]):
> W11:=scalarmul(W1,-I):
>
>
s:={SC(omega23)*S(omega23)=abs(S(omega23))^2,SC(omega13)*S(omega13)=abs(S(omega13))^2,S(omega12)*SC(omega12)=abs(S(omega12))^2}:
>
```

```

>
T1:=matrix(6,6,[0,0,0,0,0,0,0,0,0,sqrt(2)*SC(omega13),0,0,0,0,sqrt
(2)*S(omega13),0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,sqrt(5)*SC(omega13)
/2,0,0,0,0,sqrt(5)*S(omega13)/2,0]):
> T11:=scalarmul(T1,-I):

> W2:=simplify(simplify(exponential(T11),s)):
>
T1:=matrix(6,6,[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,3/2*S(omega23),0,0
,0,0,3/2*SC(omega23),0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]):
> T11:=scalarmul(T1,-I):

> W2:=simplify(simplify(exponential(T11),s),symbolic):
>
T1:=matrix(6,6,[0,sqrt(5)*(S(omega12))/2,0,0,0,0,sqrt(5)*(SC(ome
ga12))/2,0,0,0,0,0,0,0,0,3/2*S(omega23),0,0,0,0,3/2*(SC(omega23)
),0,sqrt(2)*(S(omega12)),0,0,0,0,sqrt(2)*(SC(omega12)),0,0,0,0,0
,0,0,0]):
> T11:=scalarmul(T1,-I):

> W2:=simplify(simplify(exponential(T11),s)):
>
> T1:=matrix(6,6,[1,0,0,0,0,0,0,a1,-I*SC1*b1,0,0,0,0,-
I*S1*b1,a1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,d1,-I*SC1*f1,0,0,0,0,-
I*S1*f1,d1]):
> R1:=matrix(6,6,[exp(-I*T*lambda2),0,0,0,0,0,0,exp(-
I*T*lambda1),0,0,0,0,0,0,exp(-I*T*lambda3),0,0,0,0,0,0,exp(-
I*T*lambda2),0,0,0,0,0,0,exp(-I*T*lambda1),0,0,0,0,0,0,exp(-
I*T*lambda3)]):
> T2:=matrix(6,6,[1,0,0,0,0,0,0,a2,-I*SC2*b2,0,0,0,0,-
I*S2*b2,a2,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,d1,-I*SC2*f2,0,0,0,0,-
I*S2*f2,d2]):
> R2:=matrix(6,6,[exp(-I*(t-T)*lambda2),0,0,0,0,0,0,exp(-I*(t-
T)*lambda1),0,0,0,0,0,0,exp(-I*(t-T)*lambda3),0,0,0,0,0,0,exp(-
I*(t-T)*lambda2),0,0,0,0,0,0,exp(-I*(t-
T)*lambda1),0,0,0,0,0,0,exp(-I*(t-T)*lambda3)]):
> P:=map(simplify,evalm(R2&*T2&*R1&*T1)):
>
>
T1H:=matrix(6,6,[1,0,0,0,0,0,0,a1,I*SC1*b1,0,0,0,0,I*S1*b1,a1,0,
0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,d1,I*SC1*f1,0,0,0,0,I*S1*f1,d1]):
>
R1H:=matrix(6,6,[exp(I*T*lambda2),0,0,0,0,0,0,exp(I*T*lambda1),0
,0,0,0,0,0,exp(I*T*lambda3),0,0,0,0,0,0,exp(I*T*lambda2),0,0,0,0
,0,0,exp(I*T*lambda1),0,0,0,0,0,0,exp(I*T*lambda3)]):
>
T2H:=matrix(6,6,[1,0,0,0,0,0,0,a2,I*SC2*b2,0,0,0,0,I*S2*b2,a2,0,
0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,d1,I*SC2*f2,0,0,0,0,I*S2*f2,d2]):
> R2H:=matrix(6,6,[exp(I*(t-T)*lambda2),0,0,0,0,0,0,exp(I*(t-
T)*lambda1),0,0,0,0,0,0,exp(I*(t-
T)*lambda3),0,0,0,0,0,0,exp(I*(t-

```

```

T)*lambda2),0,0,0,0,0,0,exp(I*(t-
T)*lambda1),0,0,0,0,0,0,exp(I*(t-T)*lambda3))]:
> PH:=map(simplify,evalm(T1H&*R1H&*T2H&*R2H)):
> L:=map(simplify,evalm(PH&*Lx&*P)):
> C:=matrix(1,6,[c2,c1,c3,c2,c1,c3]):
>
CH:=matrix(6,1,[conjugate(c2),conjugate(c1),conjugate(c3),conjugate(c2),conjugate(c1),conjugate(c3)]):
> M:=matrix(6,6,[0,0,0,0,0,0,0,I*sqrt(2)*A,0,0,0,0,0,-
I*sqrt(2)*A,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/2*I*sqrt(5)*B,0,0,0,0,0,
0,-1/2*I*sqrt(5)*B]):
> SR:=map(simplify,evalm(C&*M&*CH)):
>
f1:=8*sin(sqrt(8*x^2+9*y^2)/2)/sqrt(8*x^2+9*y^2)*(8*cos(sqrt(8*x^2+9*y^2)/2)*x^2+9*y^2)/(8*x^2+9*y^2)+sqrt(5)*5*sin(sqrt(5)*x)/(16*x):
> plot3d(f1,x=0..5,y=0..5,axes=NORMAL):
>
f2:=8*cos(sqrt(8*x^2+9*y^2)/2)*sin(sqrt(8*x^2+9*y^2)/2)/sqrt(8*x^2+9*y^2)+sqrt(5)*5*sin(sqrt(5)*x)/(16*x):
> plot3d(f2,x=0..5,y=0..5,axes=NORMAL):
> f3:=24*y*(sin(sqrt(8*x^2+9*y^2)/2))^2/(8*x^2+9*y^2):
> plot3d(f3,x=0..10,y=0..10,axes=NORMAL):
> f4:=24*y*cos(sqrt(8*x^2+9*y^2)/2)*(cos(sqrt(8*x^2+9*y^2)/2)-1)/(8*x^2+9*y^2):
> plot3d(f4,x=0..5,y=0..5,axes=NORMAL):
>
f5:=72*y^2*sin(sqrt(8*x^2+9*y^2)/2)/sqrt(8*x^2+9*y^2)*(cos(sqrt(8*x^2+9*y^2)/2)-1)/(8*x^2+9*y^2):
> plot3d(f5,x=0..5,y=0..5,axes=NORMAL):

```

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалевская Н.М. Мультипликативное интегрирование в математическом моделировании, диссерт. на соискание ученой степени к. ф.-м. н. – Великий Новгород. – 2004. – 88 С.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука. – 1987. – 600 С.
3. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука. – 1967. – 368 С.
4. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. – М.: Мир. – 1979. – 312 С.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука. – 1989.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука. 1967. – 576 С.
7. Volterra V. Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari // Mem. Soc. Ital. Sci. – (3) 6. – 1887. – S. 1-104.
8. Schlesinger L. Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. – Berlin. – 1922.
9. Schlesinger L. Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. – Berlin. – 1908.
10. Rasch G. Zur Theorie und Anwendung des Produktintegrals // J. für die reine und angew. Math. – 1934. – 171 – S. 65-119.
11. Birkhoff G. On Product Integration // Journ. of Math and Phys. – 1937. – V. 16. – P. 104-132.
12. Крейн С.Г., Яцкин Н.И. Линейные дифференциальные уравнения на многообразиях. – Воронеж: Изд-во ВГУ. 1980. – 132 с.
13. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл // Итоги науки и техники. Сер. проблемы геометрии. – т.22 – М., 1990 – С. 167-215.
14. Мантуров О.В. Некоторые факты теории мультипликативного интеграла // Приложения дифференц. геометрии – Воронеж – 1989.

- 15.Мантуров О.В., Мартынюк А.Н. Об одном алгоритме в теории мультипликативного интеграла // Изв. вузов. Мат. – 1989. – № 5. – С. 26-31.
- 16.Паланджянц Л.Ж. Об одном приеме вычисления мультипликативного интеграла // Дифференц. уравнения – 1983. – 19, № 9. – С. 1630-1632.
- 17.Мартынюк А.Н. Об одной задаче теории криволинейного мультипликативного интеграла // Приложения дифференц. геометрии. – Воронеж. – 1989. – С. 45-50.
- 18.Кумпяк Д.Е. О приближенном вычислении мультипликативного интеграла. Оценка глобальной погрешности разностных схем // сб. тр. Тверского гос. ун-та. – С. 67-74.
- 19.Кумпяк Д.Е. О приближенном вычислении мультипликативного интеграла. Построение разностных схем на основе разложения Пеано // сб. тр. Тверского гос. ун-та. – С. 75-81.
- 20.Dollard J.D., Friedman Ch.N. Product Integration with Applications to Differential Equations – London, Addison. – Wesley Publ. Co., 1979. – 254 p.
- 21.Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений, СПб (изд. СПбГУ) – 1992. – 240 с.
- 22.Морозов В.В. О коммутативных матрицах // Уч. зап. Казанского гос. университета. – 1952. – 112, кн. 9. – С. 17-20.
- 23.Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве. – М.: Наука. – 1970. – 536 с.
- 24.Лозинский С.М. Оценка разности двух матрицантов // Доклады АН СССР, Сер. Математика. – 1967. – т. 172, № 6. – С. 1266-1269.
- 25.Копвиллем У.Х., Пранц С.В. Поляризационное эхо. – М.: Наука. – 1985. – 192 с.
- 26.Феррар Т., Беккер Э. Импульсная и фурье-спектроскопия ЯМР. – М.: Мир. – 1973. – 215 с.

27. Попл Дж., Шнейдер В., Бернштейн Г. Спектры ЯМР высокого разрешения. – М.: ИЛ. – 1962. – 323 с.
28. Эмели Дж., Финей Дж., Сатклифф В. Спектроскопия ЯМР высокого разрешения. – М.: Мир. – 1968. – 452 с.
29. Bendall R. et al. High resolution multiple pulse NMR / Edit. and DEPT. – Bruker – 1982. – 370 p.
30. Реутов О.А., Белецкая И.П., Соколов В.И. Механизмы реакций химических соединений. – М.: Химия. – 1972. – 392 с.
31. Слоним И.Я., Любимов А.Н. ЯМР в полимерах. – М.: Химия. – 1966. – 207 с.
32. Лундин А.Г. и др. Новые методы радиоспектроскопии. – Львов. – 1983. – 167 с.
33. Слоним И.Я., Урман Я.Г. Ядерный магнитный резонанс в ориентированных полимерах // ЖСХ. – 1963. – т. 4, № 2. – С. 216-223.
34. Spiess H.W. Berichte Bunsen. Ges. Phys. Chem. – 1975. – Bd 76. – S. 1009-1112.
35. Eschenfelder A.H., Weidner R.T. Saturation Effects in Paramagnetic Resonance Absorption and the Spin-Lattice Relaxation Time // Phys. Rev. – 1953. – vol. 90, № 2. – P. 358–370.
36. Устинов В.Б. и др. Применение эффекта спинового эха для создания систем обработки информации // Пространственная фильтрация высокочастотных радиосигналов. – Л., 1974. – С. 10 – 13. – (Изв. Ленингр. электротехн. ин-та; Вып. 135).
37. А.с. 177459, МКИ НОЗК. Управляемая линия задержки / Устинов В.Б. и др. – № 3814555/24-24; Заявл. 26.03.65; Опубл. 04.02.66. Бюл. № 11. – 2 с.
38. Баруздин С.А., Устинов В.Б. Эхо-процессор – многофункциональное устройство обработки сигналов. – В кн.: Методы функциональной электроники в реализации радиотехнических устройств: Сб. тр. – Киев. – 1982. – С. 88 – 92.

39. Устинов В.Б., Ковалевский М.М., Баруздин С.А. Световое эхо и обработка информации // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1986. – Т.50. – С.1495 – 1499.
40. Устинов В.Б. Квантовые устройства обработки сигналов: Учеб. пособие. – Л.: ЛЭТИ. – 1984. – 59 с.
41. Ильин Э.В., Ковалевский М.М. К теории явлений светового и спинового эха // Известия РАН. Сер. физическая. – 2002. – Т. 66, № 3. – С. 361-364.
42. Hahn E.L. Spin echoes // Phys. Rev. – 1950. – vol. 80., № 4. – P. 580-594.
43. Bloch F. Nuclear induction // Phys. Rev. – 1946. – vol. 70, № 7,8. – P. 460-474.
44. Корпел А., Чаттерджи М. Нелинейное эхо, фазовое сопряжение, обращение времени и электронная голография // ТИИЭР. – 1981. – т. 69, № 12. – С. 22 – 43.
45. Абрагам А. Ядерный магнетизм. – М.: ИЛ. – 1963. – 551 с.
46. Сликтер Ч. Основы теории магнитного резонанса. – М.: Мир. – 1981. – 448 с.
47. Леше А. Ядерная индукция. – М.: ИЛ. – 1963. – 680 с.
48. Манькин Э.А., Самарцев В.В. Оптическая эхо-спектроскопия. – М.: Наука. – 1984. – 272 с.
49. Салихов К.М., Семенов А.Г., Цветков Ю.Д. Электронное спиновое эхо и его применение. – Новосибирск: Наука. – 1976. – 212 с.
50. Гречишкин В.С. Ядерные квадрупольные взаимодействия в твердых телах. – М.: Наука. – 1973. – 256 с.
51. Копвиллем У.Х. Световое эхо и перспективы его применения в науке и технике // Изв. АН СССР, Сер. Физ. – 1973. – 37, № 10. – С. 2010-2021.
52. Голенищев-Кутузов В.А. Акустические импульсные методы исследования спиновых систем. В кн.: Проблемы магнитного резонанса. – М.: Наука. – 1978. – С. 98 – 110.

53. Quinn J.J. Direct generation of sound in metals and acoustic nuclear spin resonance // J. Phys. and Chem. Solids. – 1970. – vol. 31, № 8. – P. 1701-1707.
54. Herrmann G.F., Kaplan D.E. Cyclotron echoes in Plasmas // Phys. Rev. – 1967. – vol. 156, № 1. – P. 118-133.
55. Harp R.S., Smith R.R. Microwave Pulse amplification by Plasmas // Phys. Lett. – 1969. – vol. 29A, № 6. – P. 317-318.
56. Дерюгин И.А., Нечипорук Ю.А., Тычинский А.В. Природа явления спинового эха в ферритах // ФТТ. – 1972. – 14, в. 1. – С. 312-314.
57. Rubinstein M., Stauss G.H. Magnetoacoustic Excitation of Radio-Frequency Resonances and Echoes // J. appl. Phys. – 1968. – vol. 39, № 1. – P. 81-88.
58. Snodgrass Rex.J. Giant echoes in solids // Phys. Rev. Lett. – 1970. – vol. 24, № 16. – P. 864-866.
59. Kupca S., Searle C.W. Magnetomechanically excited echoes in ferrites // J. appl. Phys. – 1975. – vol. 46, № 10. – P. 4612-4613.
60. Смоленский Г.А. Электроакустическое фононное эхо // Вест. АН СССР. – 1979. – № 2. – С. 59-68.
61. Hill R.M., Kaplan D.E. Cyclotron resonance echo // Phys. Rev. Lett. – 1965. – vol. 14, № 26. – P. 1062-1063.
62. Deininger D., Pfeifer H. et al. Tagung Hochfrequenz Spectrascopie. – Leipzig. – 1969. – P. 171.
63. Hill R.M. et al. Emission microwave spectroscopy: ocs. // Phys. Rev. Lett. – 1967. – vol. 18, № 4. – P. 105 – 107.
64. Горячих С.И., Хабибуллин Б.М. К теории спиновой индукции и эха на электронах проводимости в металлах // ФТТ. – 1970. – 12, № 10. – С. 2951-2953.
65. Харахатьян Э.Г., Черкасов Ф.Г., Витол Я.А. и др. Наблюдение спинового эха на электронах проводимости в металлическом литии // Письма в ЖЭТФ. – 1972. – 15, в. 3. – С. 156-159.

66. Смоляков Б.П., Хаймович Е.П., Микроволновое туннельное эхо в стеклах // Письма в ЖЭТФ. – 1979. – 29, в. 8. – С. 464-467.
67. Баукин В.Е. Обработка сложных сигналов в системах с неэквидистантным спектром / Ленингр. электротехн. ин-т. – Л. – 1989. – 6 с. – Деп. в ВИНТИ 03.04.89, № 2106 – В89.
68. Васильев А.А., Евстигнеев Ю.Ф., Ковалевский М.М. – Влияние релаксационных процессов на работу спиновых эхо-процессоров – Техника средств связи, серия Техника радиосвязи – 1982. – вып. 2. – С. 103-107.
69. Баруздин С.А. Амплитудные характеристики возбуждения стимулированного фотонного эха шумовыми и когерентными импульсами // Квантовая электроника. – 2001. – Т. 31. № 8. – С. 719-722.
70. Рассветалов Л.А. Амплитудные характеристики эхо-процессора при стохастическом возбуждении // Вестник Новгородского Государственного Университета. – 2004. – № 26. – С. 81-84.
71. Петров М.П., Туров Е.А. Ядерный магнитный резонанс в ферро- и антиферромагнетиках. – М.: Наука. – 1969. – 260 с.
72. Иванов Ю.В., О возможности анализа спектров сигналов в спиновых устройствах в реальном масштабе времени // Радиотехника и электроника. – 1977. – Т. 22, № 5. – С. 1008-1013.
73. Соколов С.Л., Иванов Ю.В., Гетеродинный способ анализа спектров при помощи эффекта спинового эхо // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т. 24, № 1. – С. 99-104.
74. Петров Николай Иванов, Метод за анализ на спектр на сигнали [Электронный ресурс], URL: <http://ecad.tu-sofia.bg/et/2000/Statii%20ET2000-III/Method%20for%20Analysis%20on%20the%20Spectrum%20of%20Signals.pdf> (дата обращения 16.04.2014).

75. Устинов В.Б., Рассветалов Л.А., Ковалевский М.М. Применение эффекта спинового эха для создания систем обработки информации // Изв. ЛЭТИ. – 1974. – Вып. 135. – С. 10-18.
76. Кук Ч., Бернфельд М., Радиолокационные сигналы. – «Советское радио». – М.: 1971. – 568 с.
77. Калиткин Н.Н., Численные методы. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». – М.: 1978. – 512 с.
78. Гречишкин В.С., Синявский Н.Я., Новые физические технологии: обнаружение взрывчатых и наркотических веществ методом ядерного квадрупольного резонанса // УФН. – 1997. – т. 167, № 4. – С. 413-427.
79. Ковалевская Н.М., Интегрирование в квадратурах систем линейных дифференциальных уравнений n-го порядка // Тр. 23-й конф. молодых ученых мех. – мат. факультета МГУ. – т. 2. – М.: МГУ. – 2001. – С. 164-166.
80. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012611118 Расчет эхо-сигналов при ядерном квадрупольном резонансе от 26 января 2012 г.
81. Баукин В.Е. Экспериментальное исследование спектров ядерного квадрупольного резонанса в трехуровневых системах с неэквидистантным энергетическим спектром / Ленингр. электротехн. ин-т. – Л., 1989. – 18 с. – Деп. в ВИНТИ 03.04.89, № 2105 – В89.