МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени
государственный педагогический институт им. А.И.Герцена

А.И.Поволоцкий, Л.М.Лихтарников

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

Ленинград
1987

Печатается по решению кафедры математического анализа ЛГПИ, НГПИ и РИСа ЛГПИ имени А.И.Герцена

Учебное пособие составлено по программе курса "Математический анализ" для физико-математических факультетов педагогических институтов. Оно содержит раздел "Элементы теории функций действительной переменной" и предназначено для студентов III курса очного и заочного отделений

Ответственный редактор: К.В.Лащенов

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор Н.М.Матвеев (ЛГПИ им. А.И.Герцена),
кандидат физико-математических наук, доцент В.Ф.Витов (Новгородский государственный педагогический институт),
кандидат физико-математических наук, доцент О.И.Комарницкая (Ленинградский инженерно-экономический институт им. П.Тольятти)

Глава I. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

I. Понятие мощности множества. При изучении множеств естественно возникает желание сравнивать множества по запасу элементов. Для такого сравнения можно попытаться посчитать число элементов данных множеств. Процесс счета состоит в следующем. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел имеет естественный порядок. Если $n \in \mathbb{N}$, то все натуральные числа от 1 до n, взятые в естественном порядке, образуют начальный отрезок $\{1, 2, \dots, n\}$ множества $\mathbb{N}$. Если элементы множества A можно взаимно однозначно сопоставить с числами некоторого начального отрезка $\{1, 2, \dots, n\}$, то говорят, что множество A конечное, а n — число его элементов. В противном случае непустое множество A называется бесконечным и говорить о числе элементов этого множества не имеет смысла. Однако описанная процедура подсказывает идею сравнения любой пары множеств.

Определение. Если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что эти множества эквивалентны и записывают $A \sim B$.

Напомним, что взаимно однозначное соответствие каждому элементу $a \in A$ сопоставляет только один элемент $b \in B$, $a \mapsto b$, так, что каждый элемент $b \in B$ оказывается сопоставленным только одному элементу $a \in A$.

Видно, что выполняются обычные свойства эквивалентности: $A \sim A$ (рефлексивность); если $A \sim B$, то $B \sim A$ (симметрия); если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивность). Из этих свойств следует, что конечные множества эквивалентны в том и только в том случае, когда они имеют одинаковое число элементов. Поэтому для бесконечных множеств понятие эквивалентности обобщает понятие равночисленности элементов конечных множеств.

Приведем примеры эквивалентных множеств.

I) Пусть $A = \mathbb{N}$, а $B = \{\{1, 2, \dots, n\}\}$ – множество всех начальных отрезков N. Эквивалентность устанавливается взаимно однозначным соответствием $n \mapsto \{1, 2, \dots, n\}$.

2) Пусть $A = N$, а $B = N_- = \{-1, -2, \dots\}$ – множество отрицательных целых чисел. В этом случае взаимно однозначное соответствие $n \mapsto (-n)$.

3) Пусть $A = N$, а $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ – множество четных натуральных чисел. В этом случае взаимно однозначное соответствие $n \mapsto 2n$.

В последнем примере B собственное подмножество A, то есть $B \subset A$ и $B \neq A$, но при этом $A \sim B$. Очевидно, для конечных множеств такая ситуация невозможна. Ниже будет показано, что всякое бесконечное множество обладает эквивалентным собственным подмножеством.

Приведем еще одно очевидное утверждение. Если A_α попарно не пересекаются и B_α попарно не пересекаются для каждого индекса α, $A_\alpha \sim B_\alpha$ и $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$, $B = \bigcup_\alpha B_\alpha$, то $A \sim B$. Действительно, взаимно однозначное соответствие на A строится так, что его сужение на каждое A_α совпадает с данным по условию $A_\alpha \sim B_\alpha$.

Введенное выше отношение эквивалентности множеств позволяет все множества разбить на классы: эквивалентные множества объединяют в один класс, а неэквивалентные относят к разным классам. Каждому классу приписывают некоторый символ γ и называют его мощностью любого множества данного класса. Таким образом, мощность – это то общее, что есть у эквивалентных множеств. Для конечных множеств роль символа γ играет число n их элементов. Поэтому для бесконечных множеств мощность обобщает понятие числа элементов. Мощность множества A часто обозначают $\bar{\bar{A}}$. Естественно считать $\bar{\bar{\varnothing}} = 0$.

2. Счетные множества и их свойства. Мощность множества N натуральных чисел обозначим a, $\bar{\bar{N}} = a$.

Определение. Множество A называется счетным, если оно эквивалентно множеству N, $A \sim N$, то есть $\bar{\bar{A}} = a$.

Если множество A счетное, то каждому его элементу

взаимно однозначно сопоставлено натуральное n, которое можно считать номером элемента. Следовательно, счетными являются те множества, элементы которых можно занумеровать и записать в виде бесконечной последовательности

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}.$$

Взаимно однозначным является соответствие $a_n \mapsto n$.

Множества B в примерах предыдущего пункта счетные. Приведем другие примеры счетных множеств:

$$A = \{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}, \qquad A = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\},$$

$$A = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots, \tfrac{1}{n}, \dots\}, \qquad A = \{\tfrac{1}{10}, \tfrac{1}{100}, \dots, \tfrac{1}{10^n} \dots\}.$$

Рассмотрим простейшие свойства счетных множеств.

1) Из всякого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество.

Действительно, если A – бесконечное множество, то оно непусто и содержит элемент, обозначим его a_1. Множество $A \setminus \{a_1\}$ непусто, ибо в противном случае A состояло бы из одного элемента и было бы конечным. Поэтому $A \setminus \{a_1\}$ содержит элемент, обозначим его a_2. Аналогично, $A \setminus \{a_1, a_2\}$ содержит элемент, обозначим его a_3. Процесс можно бесконечно продолжить. В результате выделяется счетное подмножество $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ множества A.

2) Бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Действительно, пусть множество A счетно, а B его бесконечное подмножество. Занумеруем элементы A. При этом элементы B получают номера, которые, записанные в порядке возрастания, образуют бесконечную последовательность $\{n_1, n_2, \dots, n_m, \dots\}$. В результате элементы B можно записать в виде бесконечной последовательности $\{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_m} \dots\}$, а это означает, что B счетно.

Из указанного свойства следует, что при удалении из счетного множества конечного подмножества получаем снова счетное множество. Итак, всякое подмножество счетного множества либо пусто, либо конечно, либо счетно. Все такие множества называют не более чем счетными.

3) Объединение счетного множества счетных множеств

есть множество счетное.

Действительно, пусть $S = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где каждое A_k счетное. Занумеруем элементы каждого из множеств A_k:

$$A_k = \{ a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}, \dots \}.$$

Для доказательства следует указать способ нумерации всех элементов S. Если множества A_k попарно не пересекаются, то можно воспользоваться так называемым "диагональным" способом нумерации. Следует расположить элементы S в порядке роста суммы верхнего и нижнего индекса, а при равенстве этой суммы в порядке роста верхнего индекса:

$$S = \{ a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, \dots \} \qquad (I)$$

Если же множества A_k имеют общие элементы, то в последовательности (I) будут встречаться повторные элементы. Удалив их, получим часть (I) бесконечную из-за бесконечности A_1. Эта часть счетна по предыдущему свойству.

Рассматривая разные части (I), приходим к следующим следствиям: а) объединение конечного числа счетных множеств есть множество счетное; б) объединение счетного числа конечных множеств есть множество не более чем счетное (оно может быть конечным, если, например, слагаемые множества одинаковы).

4) Если элементы множества A определяются с помощью конечного числа индексов, каждый из которых независимо от других пробегает счетное множество значений:

$$A = \{ a_{x_1, x_2, \dots, x_n} \}, \qquad x_k \in \{ x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(p)}, \dots \},$$

то множество A счетное.

Действительно, случай одного индекса тривиален, а случай двух индексов по сути обсужден выше. Общее доказательство проводится методом математической индукции. Пусть утверждение справедливо для $n=m$. Рассмотрим случай $n=m+1$: $A = \{ a_{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}} \}$. Зафиксируем некоторое значение $x_{m+1}^{(p)}$ последнего индекса. Тогда по предположению множество $A_p = \{ a_{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}^{(p)}} \}$ счетное. Но $A = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} A_p$, поэтому A счетно по предыдущему свойству.

Последнее свойство можно сформулировать иначе: декартово произведение конечного числа счетных множеств есть множество счетное.

5) Если к бесконечному множеству присоединить не более чем счетное множество, то полученное множество будет эквивалентно данному.

Действительно, пусть M — бесконечное, а A не более чем счетное множество. Выделим из M счетную часть B, включив в нее общие для M и A элементы (если такие есть). Пусть $C = B \cup A$. Тогда $M = (M \setminus B) \cup B$ и $M \cup A = (M \setminus B) \cup C$, где слагаемые в правых частях равенств попарно не пересекаются. Так как $B \sim C$ как счетные и $M \setminus B \sim M \setminus B$, то $M \sim M \cup A$.

6) Если из бесконечного несчетного множества удалить не более чем счетную часть, то полученное множество будет эквивалентно данному.

Действительно, пусть M — бесконечное несчетное, а $A \subset M$ и не более чем счетно. Множество $M \setminus A$ не может быть пустым или конечным. Поэтому по предыдущему $M \setminus A \sim (M \setminus A) \cup A = M$.

Из свойств 2) и 6) следует, что всякое бесконечное множество имеет эквивалентную правильную часть.

3. <u>Счетность множеств рациональных и алгебраических чисел.</u> Укажем дополнительно важные примеры счетных множеств.

Множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел можно представить в виде объединения $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}_- \cup \{0\}$, поэтому оно счетно.

Рациональные числа представимы единственным образом в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Множество всевозможных пар (p,q) - это декартово произведение $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ и потому счетно. Рациональные числа соответствуют бесконечной части $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, поэтому множество всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.

Алгебраическими числами называют корни многочленов

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\ , \quad a_0 \neq 0\ , \qquad (2)$$

с целыми коэффициентами a_k. Каждое рациональное число $\frac{p}{q}$ алгебраическое, так как является корнем многочлена $qx-p$, поэтому множество алгебраических чисел бесконечно. Каждый многочлен (2) определяется набором $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ целых чисел (играющих роль "индексов"), поэтому многочленов степени n вида (2), а, значит, и всевозможных многочленов вида (2) счетное множество. Так как каждый многочлен имеет конечное число корней, то множество алгебраических чисел (учитывая его бесконечность) счетное.

Примерами алгебраических чисел являются $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $1+i$, $\cos\frac{\pi}{n}$.

4. Несчетность множества действительных чисел. Покажем, что множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел несчетно. Функция $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ взаимно однозначно отображает $\mathbb{R}$ на интервал $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ и устанавливает их эквивалентность. Так как добавление двух точек не меняет мощности, то $\mathbb{R} \sim [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Любой отрезок $[a, b]$, $a<b$, эквивалентен отрезку $[0,1]$, благодаря взаимно однозначному соответствию $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$. Итак, $\mathbb{R} \sim [0,1]$. Остается показать, что отрезок $[0,1]$ – несчетное множество.

Предположим противное. Это означает, что числа отрезка $[0,1]$ можно занумеровать: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Разобьем отрезок $[0,1]$ на три равные по длине части $[0,\frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$. Число a_1 не может принадлежать одновременно всем трем частям, поэтому одна из этих частей не содержит a_1, обозначим ее $[\alpha_1, \beta_1]$. Разобьем $[\alpha_1, \beta_1]$ на три равные по длине части и ту часть, которая не содержит a_2, обозначим $[\alpha_2, \beta_2]$. Этот процесс продолжается по индукции: $[\alpha_n, \beta_n]$ – это часть $[\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$, не содержащая a_n. Отрезки полученной последовательности вложенные и стягивающиеся. Поэтому существует общая для всех отрезков точка $a \in [0,1]$. Но при всех n $a_n \neq a$, то есть $a \notin [0,1]$. Полученное противоречие доказывает, что отрезок $[0,1]$, а потому и $\mathbb{R}$, несчетное множество.

Так как множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счетно, то множество всех иррациональных чисел $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ несчетно и эквивалентно $\mathbb{R}$. Вещественные неалгебраические числа называются трансцендентными. Так как множество всех вещественных алгебраических чисел счетно, то множество всех трансцендентных чисел несчетно и эквивалентно $\mathbb{R}$. Примерами трансцендентных чисел являются $\pi, e, 2^{\sqrt{2}}$ (доказательство этих фактов достаточно трудно).

Мощность множества $\mathbb{R}$ обозначается c.

Определение. Множества, имеющие мощность c, то есть эквивалентные $\mathbb{R}$, называются множествами мощности континуума.

Примерами таких множеств являются любые промежутки $\langle a, b \rangle$, $a<b$, множества всех иррациональных и всех трансцендентных чисел.

5. Сравнение мощностей. Теорема Кантора - Бернштейна[I]. Мощность множества обобщает понятие числа элементов. Натуральные числа упорядочены по величинам, поэтому естественно возникает вопрос о сравнении мощностей.

Пусть A и B – два любых множества, $\bar{\bar{A}}=\alpha$ и $\bar{\bar{B}}=\beta$. Если $A \sim B$, то по определению $\alpha=\beta$.

Определение. Если $A \sim B_1$, где $B_1 \subset B$, то полагают $\alpha \leqslant \beta$. Если $\alpha \leqslant \beta$ и $\alpha \neq \beta$, то полагают $\alpha < \beta$.

Например, $n < a < c$, где $n \in \mathbb{N}$. Данное определение нестрогих и строгих неравенств для мощностей вполне естественно и согласуется со свойствами натуральных чисел. Для мощностей, очевидно, имеет место свойство транзитивности неравенств.

При сравнении мощностей важна следующая теорема.

Теорема (Г.Кантор - Ф.Бернштейн). Если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$, то $\alpha=\beta$.

Доказательство. Известно, что $A \sim B_1$, где $B_1 \subset B$, и $B \sim A_1$, где $A_1 \subset A$. Требуется доказать, что $A \sim B$. Взаимно однозначное соответствие B и A_1 отображает B_1

I Георг Кантор (1845-1918) - немецкий математик, основоположник теории множеств, Феликс Бернштейн (1878-1956) - немецкий математик.

на некоторое множество $A_2 \subset A_1$. Итак, $A_2 \subset A_1 \subset A$ и $A \sim B_1 \sim A_2$. Теперь достаточно показать, что $A \sim A_1$.

Взаимно однозначное соответствие A и A_2 отображает A_1 на некоторое множество $A_3 \subset A_2$ и $A \setminus A_1$ на $A_2 \setminus A_3$. Это же отображение A_2 отображает на некоторое множество $A_4 \subset A_3$ и $A_1 \setminus A_2$ на $A_3 \setminus A_4$. Продолжая эти рассуждения, получим последовательность вложенных множеств $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ такую, что $(A_{n-1} \setminus A_n) \sim (A_{n+1} \setminus A_{n+2})$ для любого n (считая $A_0 = A$). Обозначим пересечение всех A_n через $\mathcal{D}$. Тогда

$$A = \mathcal{D} \cup (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots$$
$$A_1 = \mathcal{D} \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots$$

Слагаемые в этих равенствах попарно не пересекаются, причем слагаемые, стоящие на одинаковых местах, либо совпадают, либо эквивалентны. Это означает, что $A \sim A_1$. ▲

(В дальнейшем ▲ означает окончание доказательства теоремы).

Без доказательства отметим, что все мощности сравнимы, то есть для любых двух мощностей α и β либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta < \alpha$ (иначе, $\alpha > \beta$).

6. Мощность множества подмножеств. Возникает вопрос: существует ли наиболее мощное множество? Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный.

Если множество A конечное и $\bar{\bar{A}} = n$, то количество всех его подмножеств (пустого, одноэлементных, двухэлементных и т.д.) равно

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n .$$

Очевидно, $2^n > n$. Пусть A — любое множество и $\bar{\bar{A}} = \alpha$. Через $P(A)$ обозначается множество всех подмножеств A. Мощность $P(A)$ естественно обозначить 2^α.

Теорема (Г.Кантор). $2^\alpha > \alpha$ для любого α.

Доказательство. Так как совокупность одноэлементных подмножеств A эквивалентна A, то выполнено неравенство $2^\alpha \geqslant \alpha$. Для доказательства теоремы следует показать, что $2^\alpha \neq \alpha$. Предположим противное, то есть предположим,

что A и множество всех его подмножеств $P(A)$ эквивалентны. Пусть эквивалентность устанавливает взаимно однозначное соответствие $x \mapsto f(x)$. Так как $f(x)$ подмножество A, то для каждого $x \in A$ возможно одно из двух: либо $x \in f(x)$, либо $x \notin f(x)$. Рассмотрим множество $A_1 = \{x : x \notin f(x)\}$. Так как $A_1 \subset A$, то существует элемент $x_0 \in A$ такой, что $A_1 = f(x_0)$. Но существование x_0 приводит к противоречию. Действительно, если $x_0 \in f(x_0) = A_1$, то по определению A_1, $x_0 \notin f(x_0)$. Если же $x_0 \notin f(x_0)$, то по тому же определению $x_0 \in A_1 = f(x_0)$. Следовательно, предположение, что $A \sim P(A)$, неверно. ▲

Итак, для каждого множества существует более мощное множество, и наиболее мощного множества нет.

Покажем, что $c = 2^a$. Каждое число x из полуинтервала $[0,1[$ можно представить в двоичном разложении

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \ldots$$

(сокращенная запись $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$), где каждое a_n равно 0 или 1. Числа вида $\frac{m}{2^n}$ $(m = 1, 2, \ldots 2^n - 1)$ имеют два разложения: с 1 в периоде или с 0 в периоде, а остальные единственное. Поэтому множество всех последовательностей $\{(a_n)\}$, где каждое a_n равно 0 или 1 без 1 в периоде, эквивалентно $[0,1[$ и имеет мощность c. Числа вида $\frac{m}{2^n}$ рациональные, их множество счетное. Поэтому множество всех возможных последовательностей $A = \{(a_n)\}$, где a_n равно 0 или 1, также имеет мощность c. Между A и множеством $P(\mathbb{N})$ всех подмножеств множества натуральных чисел взаимно однозначное соответствие устанавливается по правилу $(a_n) \mapsto \{m : a_m = 0\}$. Это и означает, что $c = 2^a$. Приведенные рассуждения являются еще одним доказательством несчетности множеств мощности континуума.

В начале 20 века многие выдающиеся математики занимались решением задачи, названной проблемой континуума. Требовалось выяснить существует ли мощность промежуточная между a и c (в более общей постановке - между α и 2^α). Континуум-гипотеза предполагала отрицательный ответ. Оказалось, что в рамках принятой в то время аксиоматики теории множеств непротиворечивы и отрицательный ответ и положительный. Первое показал в 1936 году К.Гедель[2], а второе в 1963-64 годах П.Коэн[3]. Следовательно, континуум-гипотеза (или ее отрицание) может быть принята за аксиому, независимую от остальных.

7. Множества мощности континуума. Укажем свойства множеств мощности континуума.

1) Объединение не более чем счетного множества множеств мощности континуума есть множество мощности континуума.

Действительно, пусть $A = \bigcup_k A_k$, где k пробегает $\mathbb{N}$ или начальный отрезок $\mathbb{N}$, и $\bar{\bar{A}}_k = c$. Сопоставим взаимно однозначно A_1 с $[0,1[$; A_2 с $[1,2[$, причем образы элементов A_2, входящих в A_1, отбросим; A_3 с $[2,3[$ причем образы элементов A_3, входящих в $A_1 \cup A_2$, отбросим и т.д. В результате A взаимно однозначно отобразится на часть $[0,\infty[$ или $[0,n[$. Следовательно, $\bar{\bar{A}} \leqslant c$. Обратное неравенство $\bar{\bar{A}} \geqslant c$ очевидно, так как $A \supset A_1$.

2) Декартово произведение конечного числа множеств мощности континуума есть множество мощности континуума.

Действительно, доказательство достаточно провести для двух множеств, а затем воспользоваться математической индукцией. Достаточно рассмотреть произведение $A = [0,1[\times [0,1[$. Так как $[0,1[\times \{0\}$ входит в A и эквивалентно $[0,1[$, то $\bar{\bar{A}} \geqslant c$. Каждый элемент A — это пара чисел (x,y), где $x, y \in [0,1[$. Представим эти числа в двоичном разложении $x = 0,a_1^{(1)}a_2^{(1)}\ldots$, $y = 0,a_1^{(2)}a_2^{(2)}\ldots$ без 1 в периоде и построим новое число $z = 0,a_1^{(1)}a_1^{(2)}a_2^{(1)}a_2^{(2)}\ldots$ (в двоичном разложении). Отображение $(x,y) \mapsto z$ взаимно однозначно переводит A в часть полуинтервала $[0,1[$. Это означает, что $\bar{\bar{A}} \leqslant c$. Итак, $\bar{\bar{A}} = c$.

---

[2] Курт Гедель (1906-1978) - австрийский математик.

[3] Пол Коэн (р.1934) - американский математик.

Использованный метод позволяет доказать и более общий факт: множество всех возможных последовательностей $\{(x_n)\}$, где каждое x_n независимо от остальных пробегает множество мощности континуума, есть множество мощности континуума. Иначе: декартово произведение счетного числа множеств мощности континуума есть множество мощности континуума. При построении числа z по соответствующей последовательности $x_1, x_2, \ldots$ нужно воспользоваться диагональным методом.

Из 2) следует усиление свойства 1): объединение множества мощности континуума множеств мощности континуума есть множество мощности континуума. Для доказательства достаточно рассмотреть множества $[0,1[\times \{x\}$, где $x \in [0,1[$, объединение которых дает $[0,1[\times [0,1[$.

Из рассмотренных свойств следует, что мощность c имеют множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, так как эквивалентно $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, и множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, так как является декартовым произведением n экземпляров $\mathbb{R}$.

В заключение приведем пример множества мощности 2^c и потому более мощного, чем $\mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{F}$ - множество всех функций $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Функция f_M называется характеристической для множества $M \subset \mathbb{R}$, если $f_M(x) = 1$ для $x \in M$ и $f_M(x) = 0$ для $x \in \mathbb{R} \setminus M$. Множество всех характеристических функций эквивалентно $P(\mathbb{R})$, поэтому $\bar{\bar{\mathcal{F}}} \geqslant 2^c$. Каждой функции из $\mathcal{F}$ взаимно однозначно сопоставляем ее график, являющийся подмножеством плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Поэтому $\bar{\bar{\mathcal{F}}} \leqslant 2^c$. В результате $\bar{\bar{\mathcal{F}}} = 2^c$.

Глава II. МНОЖЕСТВА НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

1. Замкнутые и открытые множества. Множество $\mathbb{R}$ (иначе, числовая прямая) является метрическим пространством. Поэтому определены понятия замкнутых и открытых множеств, входящих в $\mathbb{R}$. Напомним относящиеся к этим понятиям основные определения.

Для множества $M \subset \mathbb{R}$ точка x_0 называется предельной, если любой интервал $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, имеет общие точки с M, отличные от x_0. Совокупность всех предельных точек M обозначим M'. Множество $\overline{M} = M \cup M'$ называется замыканием M. Точка x_0 называется внутренней для M, если существует интервал $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset M$. Совокупность всех внутренних точек M обозначим $\mathring{M}$.

<u>Определение.</u> Множество M называется замкнутым, если $M = \overline{M}$, и открытым, если $M = \mathring{M}$.

Иначе говоря, множество замкнуто, если содержит все свои предельные точки ($M \supset M'$), и открыто, если все его точки внутренние. Отрезки $[a,b]$ замкнуты, а интервалы $]a,b[$ открыты. Пустое множество $\varnothing$ одновременно открыто и замкнуто.

Напомним известные для любых метрических пространств свойства замкнутых и открытых множеств.

1) Множество M замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $CM = \mathbb{R} \setminus M$ открыто.

2) Пересечение любого множества и объединение конечного множества замкнутых множеств есть множество замкнутое. Объединение любого множества и пересечение конечного множества открытых множеств есть множество открытое.

3) Замыкание любого множества замкнуто.

Множества, входящие в $\mathbb{R}$, обладают дополнительными свойствами.

Если непустое множество M ограничено снизу (сверху), то, как известно, для него существует точная нижняя (верхняя) граница $a = \inf M$ ($b = \sup M$). Отрезок $S = [a,b]$ называется наименьшим отрезком, содержащим непустое ограниченное M.

<u>Теорема I.</u> Если $\mathcal{F}$ — непустое замкнутое ограниченное снизу (сверху) множество, то $a = \inf \mathcal{F} \in \mathcal{F}$ ($b = \sup \mathcal{F} \in \mathcal{F}$). Если при этом $\mathcal{F}$ ограничено, то множество $C_S\mathcal{F} = [a,b] \setminus \mathcal{F}$ открыто.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathcal{F}$ — непустое замкнутое ограниченное снизу множество. Предположим, что $a \notin \mathcal{F}$. Тогда по определению точной нижней границы в любом интервале $]a, a+\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, есть точки из $\mathcal{F}$. Это означает, что a предельная точка $\mathcal{F}$ и, благодаря замкнутости $\mathcal{F}$, $a \in \mathcal{F}$. Противоречие означает, что предположение было неверным. Аналогично доказывается, что $b \in \mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}$ ограничено, то $a, b \in \mathcal{F}$ и при $a \neq b$ $C_S\mathcal{F} = [a,b] \setminus \mathcal{F} =]a,b[\setminus \mathcal{F} =]a,b[\cap C\mathcal{F}$. Но интервал $]a,b[$ и дополнение $C\mathcal{F}$ открыты, поэтому и их пересечение открыто. Если же $a = b$, то $C_S\mathcal{F} = \varnothing$, а пустое множество $\varnothing$ открыто. ▲

Для открытых множеств, входящих в $\mathbb{R}$, можно дать общее описание их структуры. Для любого множества M интервал $]\alpha,\beta[$ называется составляющим, если $]\alpha,\beta[\subset M$, $\alpha \notin M$, $\beta \notin M$ (возможны случаи $\alpha = -\infty$ или $\beta = +\infty$). Видно, что разные составляющие интервалы не имеют общих точек. Действительно, если составляющие интервалы $]\alpha_1,\beta_1[$ и $]\alpha_2,\beta_2[$ имеют общую точку, то невозможно неравенство $\alpha_1 < \alpha_2$, так как $\alpha_2 \notin M$, аналогично невозможно $\alpha_2 < \alpha_1$. Поэтому $\alpha_1 = \alpha_2$. Аналогично $\beta_1 = \beta_2$, то есть интервалы совпадают.

<u>Теорема 2.</u> Каждое непустое открытое множество $\mathcal{Y}$ состоит из не более чем счетного числа составляющих интервалов.

<u>Доказательство.</u> Покажем, что любая точка $x \in \mathcal{Y}$ принадлежит некоторому составляющему интервалу $\mathcal{Y}$. Рассмотрим множество $\mathcal{F}_1 =]-\infty, x] \cap C\mathcal{Y}$. Оно замкнуто как пересечение двух замкнутых множеств. Если оно пусто, то $\alpha = -\infty$. Если не пусто, то ограничено сверху числом x. Обозначим $\alpha = \sup \mathcal{F}_1$. Очевидно, $\alpha \in \mathcal{F}_1$ и $\alpha \neq x$ (так как $x \notin C\mathcal{Y}$), то есть $\alpha < x$. Аналогично, рассматривая замкнутое множество $\mathcal{F}_2 = [x, +\infty[\cap C\mathcal{Y}$, найдем $\beta = \inf \mathcal{F}_2$ (либо $\beta = +\infty$), $\beta > x$. По построению $]\alpha,\beta[=]\alpha, x] \cup [x, \beta[\subset \mathcal{Y}$, $\alpha \notin \mathcal{Y}$, $\beta \notin \mathcal{Y}$. Следовательно, $]\alpha,\beta[$ составляющий интервал $\mathcal{Y}$, содержащий x.

В каждом составляющем интервале можно взять рациональную точку. Эти точки образуют часть $\mathbb{Q}$, поэтому их не более чем счетное множество. Следовательно, и составляющих интервалов $\mathcal{Y}$ не более чем счетное множество. ▲

Как следствие получаем теорему о структуре замкнутых множеств, входящих в $\mathbb{R}$.

Теорема 3. Всякое замкнутое множество $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}$ либо совпадает с $\mathbb{R}$, либо получается из $\mathbb{R}$ удалением не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов. Всякое непустое ограниченное замкнутое множество $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}$ либо является отрезком, либо получается из отрезка удалением не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов.

Доказательство следует из равенства $\mathcal{F} = \mathbb{R} \setminus C\mathcal{F}$, где дополнение $C\mathcal{F}$ открыто, а в случае непустого ограниченного $\mathcal{F}$ из равенства $\mathcal{F} = [a,b] \setminus C_S\mathcal{F}$, где $S = [a,b]$ наименьший отрезок, содержащий $\mathcal{F}$, а $C_S\mathcal{F}$ открытое дополнение $\mathcal{F}$ в S.

2. Совершенные множества. Точка множества M, не являющаяся его предельной, то есть входящая в $M \setminus M'$, называется изолированной. Из определения предельных точек следует, что для изолированной точки x_0 существует интервал $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, в котором кроме x_0 нет других точек M.

Определение. Множество M называется совершенным, если оно совпадает с множеством всех своих предельных точек: $M = M'$.

Иначе говоря, множество совершенное, если оно замкнутое и не имеет изолированных точек. Рассмотрим структуру ограниченных совершенных множеств.

Пусть $\mathcal{F}$ — ограниченное замкнутое непустое и отличное от одной точки множество в $\mathbb{R}$, а $S = [a,b]$ — наименьший отрезок, содержащий $\mathcal{F}$. Пусть x_0 — изолированная точка $\mathcal{F}$. Если $x_0 = a$, то $]x_0, x_0+\varepsilon[\subset C_S\mathcal{F}$ при некотором $\varepsilon > 0$. Интервал $]x_0, x_0+\varepsilon[$ входит в некоторый составляющий интервал $]\alpha,\beta[$ множества $C_S\mathcal{F}$. Невозможно $\alpha < x_0$, так как $x_0 \notin C_S\mathcal{F}$, и невозможно $x_0 < \alpha$, так как $]x_0, x_0+\varepsilon[\subset]\alpha,\beta[$. Поэтому $x_0 = \alpha$, то есть x_0 левый конец составляющего интервала $C_S\mathcal{F}$. Аналогично доказывается, что при $x_0 = b$ точка x_0 является правым

концом составляющего интервала $C_S\mathcal{F}$, а если $a < x_0 < b$, то x_0 — общий конец двух составляющих интервалов $C_S\mathcal{F}$. Обратное утверждение о том, что точка $x_0 \in \mathcal{F}$ с указанными свойствами изолирована, очевидно. Поэтому справедлива теорема

Теорема. Для того чтобы ограниченное непустое множество $\mathcal{P}$ было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы оно являлось отрезком $[a,b]$, $a < b$, или получалось из такого отрезка удалением не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов, концы которых не совпадают с a и b и друг с другом.

Для доказательства следует воспользоваться теоремой о структуре ограниченного замкнутого множества. Кроме того, учесть, что одноточечное множество замкнуто, но не совершенно.

3. Канторово совершенное множество. Приведем важный пример совершенного множества, известного под названием канторова множества.

Пусть $\mathcal{F}_0 = [0,1]$. Удалим из этого отрезка интервал $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, а полученное замкнутое множество обозначим $\mathcal{F}_1$. Затем из $\mathcal{F}_1$ удалим два интервала $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ и $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$, а полученное замкнутое множество обозначим $\mathcal{F}_2$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим убывающую последовательность $(\mathcal{F}_n)$ замкнутых множеств. Их пересечение $\mathcal{P}_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ и называется канторовым множеством. Оно совершенно, так как получено удалением из отрезка $[0,1]$ счетного числа интервалов, концы которых не совпадают с 0 и 1 и друг с другом. Множество $\mathcal{P}_0$ содержит $0, 1$ и концы удаленных интервалов, а кроме того, и другие точки. Это следует из того, что $\mathcal{P}$ является множеством мощности континуума. Докажем это.

Каждое число отрезка $[0,1]$ можно представить в троичном разложении

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$$

(сокращенно: $x=0,a_1a_2\ldots$), где каждое a_n принимает одно из значений $0,1,2$. Числа вида $\frac{m}{3^n}$ ($m=1,2,\ldots,3^n-1$) имеют троичные разложения двух видов: с 0 в периоде или 2 в периоде, а остальные имеют единственное разложение. В интервале $]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$ находятся все числа, в разложении которых для a_1 единственное значение 1. Поэтому в $\mathcal{F}_1 = [0,1] \setminus]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$ содержатся числа, в разложении которых для a_1 можно использовать лишь значения 0 и 2. Аналогично, в $\mathcal{F}_2$ содержатся те из указанных чисел, в разложении которых для a_2 можно использовать лишь значение 0 и 2 и т.д. Если учесть, что чисел вида $\frac{m}{3^n}$ счетное множество, то будет понятна эквивалентность множества $\mathcal{P}_0$ множеству всех возможных последовательностей $\{(a_n)\}$, где каждое a_n равно либо 0, либо 2. Как было показано выше, мощность множества таких последовательностей равна $c=2^a$. Поэтому $\overline{\overline{\mathcal{P}}}_0=c$.

Приведем примеры троичных разложений чисел из $\mathcal{P}_0$,

$\frac{1}{3}=0,0222\ldots$, $\frac{1}{4}=0,02020\ldots$, $\frac{3}{4}=0,2020\ldots$.

Два последних числа не являются концами удаленных интервалов.

4. Мощность совершенных множеств. Канторово совершенное множество $\mathcal{P}_0$, как было показано, является множеством мощности континуума. Оказывается, этим свойством обладают все непустые совершенные множества.

Теорема. Всякое непустое совершенное множество $\mathcal{P}$ является множеством мощности континуума.

Доказательство. Пусть $x\in\mathcal{P}$ и Δ любой отрезок, для которого x внутренняя точка. Так как x — предельная точка $\mathcal{P}$, то в Δ содержится бесконечно много точек $\mathcal{P}$. Выберем в Δ две различные точки x_0 и x_1 из $\mathcal{P}$. Затем построим два отрезка Δ_0 и Δ_1, длины которых меньше 1 и такие, что $\Delta_0\subset\Delta$, $\Delta_1\subset\Delta$, $\Delta_0\cap\Delta_1=\varnothing$ и x_i является внутренней точкой Δ_i ($i=0,1$). Рассуждая аналогично, в Δ_i ($i=0,1$) выберем две различные точки x_{i0} и x_{i1} из $\mathcal{P}$ и построим два отрезка Δ_{i0} и Δ_{i1},

длины которых меньше $\frac{1}{2}$ и такие, что $\Delta_{i0}\subset\Delta_i$, $\Delta_{i1}\subset\Delta_i$, $\Delta_{i0}\cap\Delta_{i1}=\varnothing$ и x_{ij} является внутренней точкой Δ_{ij} ($i,j=0,1$). Продолжим этот процесс бесконечно. Тогда каждой бесконечной последовательности $i_1,i_2,i_3,\ldots$, где каждое i_n равно 0 или 1, можно поставить в соответствие единственную точку пересечения последовательности вложенных стягивающихся отрезков $\Delta_{i_1}\cap\Delta_{i_1i_2}\cap\Delta_{i_1i_2i_3}\cap\ldots$. Эта точка принадлежит $\mathcal{P}$, так как является пределом последовательности $x_{i_1}, x_{i_1i_2}, x_{i_1i_2i_3},\ldots$ точек из $\mathcal{P}$. Разным последовательностям (i_n) при этом соответствуют разные точки из $\mathcal{P}$, так как в соответствующих последовательностях $(\Delta_{i_1i_2\ldots i_n})$ отрезков встречаются непересекающиеся члены.

Мощность множества $\{(i_n)\}$ всех последовательностей из 0 и 1 равна c. Так как им взаимно однозначно соответствует часть $\mathcal{P}$, то $\overline{\overline{\mathcal{P}}}\geq c$. Но $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}$, поэтому $\overline{\overline{\mathcal{P}}}\leq c$. Итак, $\overline{\overline{\mathcal{P}}}=c$. ▲

Глава III. ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ

1. Полное изменение функции. Пусть функция f определена на отрезке $[a,b]$ и имеет вещественные значения. Через T обозначим разбиение отрезка $[a,b]$ на части точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Составим сумму

$$v_a^b(f,T)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|. \qquad (1)$$

Она называется изменением (или вариацией) функции f на $[a,b]$, соответствующим разбиению T. Видно, что $v_a^b(f,T)\geq 0$.

Различным разбиениям T соответствуют различные изменения f на $[a,b]$.

Определение. Если множество $\{v_a^b(f,T)\}$ сумм (1) при всевозможных T ограничено сверху, то величину

$$V_a^b(f)=\sup_T\{v_a^b(f,T)\}$$

называют полным изменением (или полной вариацией) f на $[a,b]$, а f при этом называют функцией с ограниченным изменением (или с ограниченной вариацией) на $[a,b]$. В противном случае полагают $V_a^b(f) = +\infty$. Полагают также $V_a^a(f) = 0$.

Если f — функция с ограниченным изменением на $[a,b]$, то, очевидно, такой же является и $(-f)$, причем
$\mathcal{V}_a^b(-f,T) = \mathcal{V}_a^b(f,T)$.

Приведем примеры функций с ограниченным изменением.

I) Если f на $[a,b]$ имеет непрерывную производную, то f функция с ограниченным изменением на $[a,b]$. Действительно, пусть $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Применяя к каждому слагаемому суммы (I) теорему Лагранжа[4], получим

$$\mathcal{V}_a^b(f,T)=\sum_{k=0}^{n-1}|f'(\xi_k)|(x_{k+1}-x_k) \le M\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=M(b-a),$$

где $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Откуда $V_a^b(f) \le M(b-a)$.

2) Если f на $[a,b]$ удовлетворяет условию Липшица[5] (существует такая постоянная K, что для любых двух точек $c_1, c_2 \in [a,b]$ выполнено неравенство $|f(c_1)-f(c_2)| \le K|c_1-c_2|$), то f функция с ограниченным изменением на $[a,b]$. Действительно,

$$\mathcal{V}_a^b(f,T)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)| \le K\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=K(b-a).$$

Откуда $V_a^b(f) \le K(b-a)$. Из ограниченности производной f на $[a,b]$, очевидно, следует выполнение условия Липшица.

3) Если f на $[a,b]$ монотонная, то f функция с ограниченным изменением на $[a,b]$. Действительно, пусть f на $[a,b]$ возрастает (не обязательно строго). Тогда
$f(x_{k+1})-f(x_k) \ge 0$ и $\mathcal{V}_a^b(f,T)=f(x_1)-f(a)+$
$+f(x_2)-f(x_1)+\ldots+f(b)-f(x_{n-1})=f(b)-f(a)$,

то есть все изменения одинаковы. Поэтому $V_a^b(f)=f(b)-f(a)$. Если же функция f – убывающая, то $(-f)$ – возрастающая и

---

[4] Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) – французский математик.
[5] Рудольф Липшиц (1832-1903) – немецкий математик.

$V_a^b(f)=f(a)-f(b)$.

2. <u>Основные теоремы о функциях с ограниченным изменением.</u> Если f функция с ограниченным изменением на $[a,b]$, а $c=\mathrm{const}$, то cf также с ограниченным изменением на $[a,b]$. Это следует из равенства $\mathcal{V}_a^b(cf,T)=|c|\,\mathcal{V}_a^b(f,T)$.

<u>Теорема I.</u> Сумма двух функций f и g с ограниченным изменением на $[a,b]$ есть функция с ограниченным изменением на этом отрезке.

<u>Доказательство.</u> Для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем

$$\mathcal{V}_a^b(f+g,T)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})+g(x_{k+1})-f(x_k)-g(x_k)| \le$$
$$\le\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|+\sum_{k=0}^{n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)|=\mathcal{V}_a^b(f,T)+\mathcal{V}_a^b(g,T)\le$$
$$\le V_a^b(f)+V_a^b(g),$$

откуда следует неравенство $V_a^b(f+g)\le V_a^b(f)+V_a^b(g)$. ▲

Из доказанного следует, что совокупность всех функций с ограниченным изменением на $[a,b]$ образует линейное пространство.

Разность двух возрастающих на $[a,b]$ функций, согласно предыдущему, есть функция с ограниченным изменением на $[a,b]$. Оказывается, справедливо и обратное утверждение.

<u>Теорема 2.</u> Всякую функцию f с ограниченным изменением на $[a,b]$ можно представить в виде разности двух возрастающих на $[a,b]$ функций.

<u>Доказательство.</u> Функция f имеет ограниченное изменение на любом отрезке $[a,x]\subset[a,b]$, так как для любого разбиения T отрезка $[a,x]$ и разбиения T_0 отрезка $[x,b]$

$$\mathcal{V}_a^x(f,T)\le\mathcal{V}_a^x(f,T)+\mathcal{V}_x^b(f,T_0)=\mathcal{V}_a^b(f,T\cup T_0)\le V_a^b(f)$$

и потому $V_a^x(f)\le V_a^b(f)$. Заменяя b на $x'>x$, получим $V_a^x(f)\le V_a^{x'}(f)$. Следовательно, функция $\varphi(x)=V_a^x(f)$ возрастающая.

Разбиения T отрезка $[a,x]$ и T_0 отрезка $[x,x']$ можно

брать любыми независимо друг от друга, поэтому в неравенстве $v_a^x(f,T)+v_x^{x'}(f,T_0)\le V_a^{x'}(f)$ слева вместо слагаемых можно поставить их точные верхние границы:
$V_a^x(f)+V_x^{x'}(f)\le V_a^{x'}(f)$.

Положим $\psi(x)=\varphi(x)-f(x)=V_a^x(f)-f(x)$. Разбиение T_0 отрезка $[x,x']$ можно составить только из двух точек x и x', поэтому

$$f(x')-f(x)\le|f(x')-f(x)|\le V_x^{x'}(f)\le V_a^{x'}(f)-V_a^x(f)=\varphi(x')-\varphi(x),$$

откуда

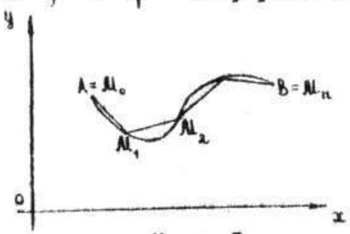
$$\psi(x')-\psi(x)=[\varphi(x')-\varphi(x)]-[f(x')-f(x)]\ge 0 .$$

Это означает возрастание $\psi(x)$. Остается заметить, что $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$. ▲

3. Необходимое и достаточное условие спрямляемости дуги кривой. Пусть дуга AB плоской кривой задана уравнениями в параметрической форме

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\qquad (t\in[a,b]),\qquad (2)$$

где φ и ψ непрерывны на $[a,b]$. Пусть разным значениям параметра t соответствуют разные точки кривой, значению $t=a$ соответствует точка A , а $t=b$ – точка B . Напомним определение спрямляемости дуги AB . Пусть T разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$.



Черт. I

Величина $\lambda(T)=\max\{t_{k+1}-t_k\}$ называется рангом разбиения. Если параметру t_k соответствует на кривой точка $M_k(x_k,y_k)$, то ломаную $M_0M_1M_2\ldots M_n$ называют вписанной в дугу AB . Звено M_kM_{k+1} ломаной имеет длину $c_k=\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2}$, а длина всей ломаной равна

$$p(T)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2}\ . \qquad (3)$$

Определение. Дуга AB называется спрямляемой, если

множество длин (3) всех вписанных в дугу ломаных ограничено сверху. Величина $\mathcal{L}=\sup\limits_T\{p(T)\}$ называется длиной дуги AB .

Изложенная выше теория позволяет указать критерий спрямляемости дуги кривой.

Теорема (К.Жордан[6]). Для того чтобы дуга AB кривой, заданная уравнениями (2), была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы функции φ и ψ имели ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Пусть дуга AB спрямляема. Тогда

$$v_a^b(\varphi,T)=\sum_{k=0}^{n-1}|x_{k+1}-x_k|\le\sum_{k=0}^{n-1}c_k=p(T)\le\mathcal{L} .$$

Это означает, что φ функция с ограниченным изменением на $[a,b]$. Аналогичен вывод для ψ . Этим доказана необходимость.

Докажем достаточность. Пусть φ и ψ – функции с ограниченным изменением на $[a,b]$. Тогда

$$p(T)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k\le\sum_{k=0}^{n-1}(|x_{k+1}-x_k|+|y_{k+1}-y_k|)\le V_a^b(\varphi)+V_a^b(\psi) .$$

Это означает ограниченность множества $\{p(T)\}$ сверху и потому спрямляемость дуги AB . ▲

Можно показать, что длина $\mathcal{L}$ спрямляемой дуги есть предел длин вписанных ломаных $p(T)$ при условии стремления к нулю ранга $\lambda(T)$ разбиения:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall T\ \ (\lambda(T)<\delta\Rightarrow|p(T)-\mathcal{L}|<\varepsilon) .$$

Действительно, по определению точной верхней границы для $\varepsilon>0$ существует разбиение T_0 отрезка $[a,b]$ такое, что

$$\mathcal{L}-\frac{\varepsilon}{2}<p(T_0)\le\mathcal{L} .$$

Пусть n_0 – число частей, на которые T_0 разбивает $[a,b]$.

---

[6] Камиль Жордан (1838–1922) – французский математик.

Благодаря равномерной непрерывности φ и ψ на $[a,b]$ существует $\delta>0$ такое, что при $|\Delta t|<\delta$ будет $|\Delta\varphi|<\frac{\varepsilon}{8n_0}$ и $|\Delta\psi|<\frac{\varepsilon}{8n_0}$.

Пусть теперь T – любое разбиение $[a,b]$, для которого $\lambda(T)<\delta$. Из точек разбиений T_0 и T составим новое разбиение T_1 – общее продолжение T_0 и T. При добавлении новых вершин длина вписанной ломаной не уменьшается. Поэтому

$$\mathcal{L}-\frac{\varepsilon}{2}<p(T_0)\le p(T_1)\le\mathcal{L}\quad\text{, то есть}\quad |p(T_1)-\mathcal{L}|<\frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4}$$

Если в разбиении добавляется одна точка $\tau_k\in\,]t_k,t_{k+1}[$, то одно звено ломаной длины c_k заменяется двумя длины c_k' и c_k''. Учитывая, что ранг нового разбиения меньше δ, получаем

$$\begin{aligned} c_k'+c_k''-c_k &\le |\varphi(\tau_k)-\varphi(t_k)|+|\psi(\tau_k)-\psi(t_k)|+\\ &+|\varphi(t_{k+1})-\varphi(\tau_k)|+|\psi(t_{k+1})-\psi(\tau_k)|<\\ &<4\cdot\frac{\varepsilon}{8n_0}=\frac{\varepsilon}{2n_0}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Так как разбиение T_1 получено из T добавлением не более n_0 точек, то из (5) получаем

$$|p(T_1)-p(T)|<\frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6}$$

Из (4) и (6) следует, что $|p(T)-\mathcal{L}|<\varepsilon$ при $\lambda(T)<\delta$.

Глава IУ. МЕРА ЛЕБЕГА[7]

I. Множества, измеримые по Лебегу. В теории функций действительного переменного важную роль играет понятие меры множества. Мера обобщает понятие длины (в случае $\mathbb{R}$), площади (в случае $\mathbb{R}^2$) и объема (в случае $\mathbb{R}^3$). Ограничимся

---

[7] Анри Лебег (1875–1941) – французский математик.

изложением теории меры множеств в $\mathbb{R}$.

Пусть E – любое ограниченное множество в $\mathbb{R}$. Множество интервалов $\mathfrak{I}=\{\alpha_p\}$ называют покрытием E, если $E\subset\bigcup\limits_p\alpha_p$. В дальнейшем будем рассматривать покрытия $\{\alpha_k\}$, содержащие не более чем счетное число интервалов, и суммы длин $\ell(\alpha_k)$ этих интервалов (конечные или равные $+\infty$).

Определение I. Внешней мерой ограниченного множества E называется точная нижняя граница сумм длин интервалов всевозможных покрытий этого множества и обозначается

$$m^*E=\inf_{\mathfrak{I}}\Big\{\sum_k\ell(\alpha_k):\ E\subset\bigcup_k\alpha_k\Big\}\,.$$

Видно, что внешняя мера неотрицательна и конечна, так как среди покрытий E есть покрытие одним интервалом. Нетрудно проверить, что внешняя мера любого промежутка $\langle a,b\rangle$ равна его длине $(b-a)$, а объединения конечного числа попарно непересекающихся промежутков равна сумме их длин.

Отметим два свойства внешней меры: $E_1\subset E_2\Rightarrow m^*E_1\le m^*E_2$ (монотонность) и $m^*(E_1\cup E_2)\le m^*E_1+m^*E_2$ (полуаддитивность). Первое следует из того, что всякое покрытие E_2 является и покрытием E_1. Докажем второе. Для $\varepsilon>0$ найдутся покрытия $\mathfrak{I}_i=\{\alpha_k^{(i)}\}$ множеств E_i $(i=1,2)$ такие, что $\sum\limits_k\ell(\alpha_k^{(i)})<m^*E_i+\varepsilon/2$. Так как $\mathfrak{I}_1\cup\mathfrak{I}_2$ покрывает $E_1\cup E_2$, то $m^*(E_1\cup E_2)\le\sum\limits_k\ell(\alpha_k^{(1)})+\sum\limits_k\ell(\alpha_k^{(2)})<$ $<m^*E_1+m^*E_2+\varepsilon$. Так как $\varepsilon>0$ любое, то свойство доказано.

Пусть $S=[a,b]$ – любой отрезок, содержащий E, а $C_SE=[a,b]\setminus E$ – дополнение E в этом отрезке.

Определение 2. Внутренней мерой множества E называется разность

$$m_*E=(b-a)-m^*C_SE \tag{I}$$

длины отрезка S и внешней меры дополнения C_SE.

Покажем, что разность (I) не зависит от выбора отрезка $[a,b]$ и определение внутренней меры корректно. Переход к новому отрезку производится заменой сначала одного, а затем другого его конца. Пусть $S_1=[a,b_1]$ – новый отрезок, содержащий E, и пусть для определенности $b_1>b$.

Тогда $C_{S_1}E = C_S E \cup]b, b_1]$, где слагаемые не пересекаются. Пусть $\varepsilon > 0$ — любое достаточно малое. Найдется покрытие $\mathcal{Y} = \{\alpha_k\}$ множества $C_S E$ такое, что $m^* C_S E > \sum_k \ell(\alpha_k) - \varepsilon$. Добавляя к $\mathcal{Y}$ интервал $]b, b_1+\varepsilon[$, получим покрытие $C_{S_1}E$. Поэтому

$$m^* C_{S_1} E \le \sum_k \ell(\alpha_k) + (b_1+\varepsilon-b) < m^* C_S E + (b_1-b) + 2\varepsilon . \qquad (2)$$

Кроме того, найдется покрытие $\tilde{\mathcal{Y}} = \{\tilde\alpha_k\}$ множества $C_{S_1}E$ такое, что $m^* C_{S_1}E > \sum_k \ell(\tilde\alpha_k) - \varepsilon$. Интервалы $\tilde\alpha_k \cap]-\infty, b+\varepsilon[$ покрывают $C_S E$, а интервалы $\tilde\alpha_k \cap]b+\varepsilon, +\infty[$ -отрезок $[b+2\varepsilon, b_1]$, поэтому $\sum_k \ell(\tilde\alpha_k) = \sum_k \ell(\tilde\alpha_k \cap]-\infty, b+\varepsilon[) + \sum_k \ell(\tilde\alpha_k \cap]b+\varepsilon, +\infty[) \ge m^* C_S E + (b_1 - b - 2\varepsilon)$.

Следовательно,

$$m^* C_{S_1}E > m^* C_S E + (b_1 - b) - 3\varepsilon . \qquad (3)$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то из (2) и (3) следует равенство $m^* C_{S_1}E = m^* C_S E + (b_1 - b)$ или, иначе, $(b_1 - a) - m^* C_{S_1} E = (b-a) - m^* C_S E$. Это и означает, что разность (I) от выбора $[a,b]$ не зависит.

Из $C_S E \subset [a,b]$ следует, что $m^* C_S E \le b-a$, поэтому $m_* E \ge 0$. Для любого промежутка $\langle a,b \rangle$, как нетрудно проверить, внутренняя мера равна его длине $(b-a)$ и совпадает с внешней мерой. Внутренняя мера (как и внешняя) обладает свойством монотонности: $E_1 \subset E_2 \Rightarrow m_* E_1 \le m_* E_2$. Это следует из (I) и того, что $C_S E_1 \supset C_S E_2$ для $S = [a,b] \supset E_2$.

Покажем, что внутренняя мера не превосходит внешнюю. Для $\varepsilon > 0$ найдем покрытие $\mathcal{Y}_1 = \{\alpha_k^{(1)}\}$ множества E и покрытие $\mathcal{Y}_2 = \{\alpha_k^{(2)}\}$ множества $C_S E$ такие, что $\sum_k \ell(\alpha_k^{(1)}) < m^* E + \varepsilon/2$ и $\sum_k \ell(\alpha_k^{(2)}) < m^* C_S E + \varepsilon/2$. Так как $\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$ покрывает $[a,b]$, то $b-a \le \sum_k \ell(\alpha_k^{(1)}) + \sum_k \ell(\alpha_k^{(2)}) < m^* E + m^* C_S E + \varepsilon$, откуда в силу произвольности ε и согласно (I)

$$m_* E \le m^* E . \qquad (4)$$

Определение 3. Ограниченное множество E называется измеримым по Лебегу, если его внешняя и внутренняя меры совпадают. Общее значение

$$\mu E = m_* E = m^* E$$

называется мерой Лебега (короче, мерой) множества E.

Видно, что промежутки и объединения конечного числа попарно непересекающихся промежутков измеримы, а мера равна сумме длин этих промежутков. Для пустого множества $\mu\varnothing = 0$. Если $m^* E = 0$, то по (4) и $m_* E = 0$, поэтому E измеримо и $\mu E = 0$ (говорят: " E множество меры нуль"). Из монотонности внешней меры следует, что всякое подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль. Из равенств $m_* E + m^* C_S E = b-a$, $m_* C_S E + m^* E = b-a$ следует, что E и $C_S E$ измеримы одновременно, причем в случае измеримости $\mu E + \mu C_S E = b-a$.

Укажем ряд примеров измеримых множеств.

I) Всякое ограниченное не более чем счетное множество есть множество меры нуль.

Действительно, пусть $E = \{x_1, x_2 \dots\}$ — счетное. Каждую точку x_k покроем интервалом $\alpha_k =]x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}[$, $\varepsilon > 0$. Тогда $0 \le m_* E \le m^* E \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $m_* E = m^* E = 0$. Конечное множество как часть счетного также меры нуль.

В частности множество рациональных точек любого отрезка $[a,b]$ меры нуль, а множество иррациональных точек измеримо и его мера равна длине отрезка $b-a$.

2) Всякое ограниченное открытое множество $\mathcal{Y}$ измеримо и его мера равна сумме длин его составляющих интервалов.

Утверждение очевидно, если составляющих интервалов конечное число. Пусть $\mathcal{Y} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \beta_k$, где β_k составляющие интервалы, а потому попарно не пересекаются. Пусть $\mathcal{Y} \subset [a,b]$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(\beta_k)$ сходится, так как его частичные суммы не превосходят $b-a$. Поэтому для $\varepsilon > 0$ найдется n_0 такое, что $\sum_{k=n+1}^{\infty} \ell(\beta_k) < \varepsilon$ при $n \ge n_0$. Учитывая, что $\bigcup_{k=1}^{n} \beta_k \subset \mathcal{Y}$, получим при $n \ge n_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(\beta_k) \le m_* \mathcal{Y} \le m^* \mathcal{Y} < \sum_{k=1}^{n} \ell(\beta_k) + \varepsilon , \qquad (5)$$

то есть $0 \leq m^*\mathcal{Y} - m_*\mathcal{Y} < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ любое, то $m^*\mathcal{Y} = m_*\mathcal{Y}$, что означает измеримость $\mathcal{Y}$. Если в (5) перейти к пределу при $n \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$, то получим
$\mu\mathcal{Y} = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(\beta_k)$.

3) Всякое ограниченное замкнутое множество $\mathcal{F}$ измеримо.

Действительно, если $S = [a, b]$ – наименьший отрезок, содержащий $\mathcal{F}$, то $C_S\mathcal{F}$ – открытое, а потому измеримо. Поэтому и $\mathcal{F}$ измеримо. При этом $\mu\mathcal{F} = (b-a) - \mu C_S \mathcal{F}$.

4) В качестве конкретного примера рассмотрим канторово совершенное множество $\mathcal{P}_0$. По определению $\mathcal{P}_0 = [0,1] \setminus \mathcal{Y}_0$, где $\mathcal{Y}_0$ объединение удаленных интервалов

$$]\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}[\,,\ ]\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}[\,,\ ]\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}[\,,\ ]\tfrac{1}{27}, \tfrac{2}{27}[\,,\ ]\tfrac{7}{27}, \tfrac{8}{27}[\,,\ ]\tfrac{19}{27}, \tfrac{20}{27}[\,, \ldots$$

Поэтому $\mu\mathcal{Y}_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{3^k} + \ldots = 1$. Следовательно, $\mu\mathcal{P}_0 = 0$. Обратим внимание на то, что $\mathcal{P}_0$ множество меры нуль, хотя является множеством мощности континуума.

2. Теорема об измеримых множествах. Укажем сначала критерий измеримости ограниченных множеств в $\mathbb{R}$. Предварительно заметим, что объединение конечного числа интервалов можно представить как объединение попарно непересекающихся интервалов. Действительно, если два интервала пересекаются, то их объединение – один интервал.

Теорема. Для измеримости ограниченного множества E необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось объединение $\mathcal{A}$ конечного числа попарно непересекающихся интервалов такое, что $m^*(E \setminus \mathcal{A}) < \varepsilon$ и $m^*(\mathcal{A} \setminus E) < \varepsilon$. При этом
$$|\mu E - \mu\mathcal{A}| < \varepsilon. \qquad (6)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть E измеримо. Для $\varepsilon > 0$ найдем покрытие $\mathcal{Y} = \{\alpha_k\}$ множества E такое, что $\sum_k \ell(\alpha_k) < \mu E + \varepsilon/2$. Можно считать, что все α_k лежат в отрезке $S = [a, b]$. Найдем покрытие $\widetilde{\mathcal{Y}} = \{\widetilde{\alpha}_j\}$ множества $C_S E$ такое, что $\sum_j \ell(\widetilde{\alpha}_j) < \mu C_S E + \varepsilon/2$. Ряд $\sum_k \ell(\alpha_k)$ сходится, поэтому найдется n_0 такое, что $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \ell(\alpha_k) < \varepsilon$.

За $\mathcal{A}$ примем объединение $\bigcup_{k=1}^{n_0} \alpha_k$ (если в $\mathcal{Y}$ конечное число интервалов, то за $\mathcal{A}$ берется их объединение). Как было замечено, можно считать интервалы, составляющие $\mathcal{A}$, непересекающимися. Так как $E \setminus \mathcal{A} \subset \bigcup_{k=n_0+1}^{\infty} \alpha_k$, то $m^*(E \setminus \mathcal{A}) < \varepsilon$.

Точки $\mathcal{A} \setminus E = \mathcal{A} \cap C_S E$ покрываются интервалами вида $\alpha_k \cap \widetilde{\alpha}_j$ $(k = 1, \ldots, n_0)$. Объединение $\mathcal{Y} \cup \widetilde{\mathcal{Y}}$ покрывает $[a, b]$, причем точки пересечений $\alpha_k \cap \widetilde{\alpha}_j$ участвуют по крайней мере дважды. Следовательно,

$$b - a \leq \sum_k \ell(\alpha_k) + \sum_j \ell(\widetilde{\alpha}_j) - \sum_{k,j} \ell(\alpha_k \cap \widetilde{\alpha}_j) < \mu E + \mu C_S E + \varepsilon -$$
$$- \sum_{k,j} \ell(\alpha_k \cap \widetilde{\alpha}_j) = b - a + \varepsilon - \sum_{k,j} \ell(\alpha_k \cap \widetilde{\alpha}_j).$$

Отсюда $\quad m^*(\mathcal{A} \setminus E) \leq \sum_{k,j} \ell(\alpha_k \cap \widetilde{\alpha}_j) < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы. Отрезок $S = [a, b]$ выберем так, чтобы он содержал E и $\mathcal{A}$. Из монотонности и полуаддитивности внешней меры и включения $E \subset \mathcal{A} \cup (E \setminus \mathcal{A})$ следует, что
$$m^* E < \mu\mathcal{A} + \varepsilon. \qquad (7)$$
Если точка $C_S E$ не принадлежит $C_S\mathcal{A}$, то она принадлежит $\mathcal{A} \setminus E$, поэтому $C_S E \subset C_S\mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \setminus E)$, откуда
$$m^* C_S E < (b-a) - \mu\mathcal{A} + \varepsilon. \qquad (8)$$
Из (7) и (8) следует
$$\mu\mathcal{A} - \varepsilon < m_* E \leq m^* E < \mu\mathcal{A} + \varepsilon, \qquad (9)$$
то есть $0 \leq m^* E - m_* E < 2\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ любое, то $m_* E = m^* E$ и E измеримо. Из неравенств (9) следует (6). ▲

Критерий измеримости позволяет установить ряд важных свойств измеримых множеств и меры.

1) Если E_1 и E_2 измеримы, то их объединение $E_1 \cup E_2$ измеримо. Если при этом E_1 и E_2 не пересекаются, то
$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu E_1 + \mu E_2. \qquad (10)$$

Действительно, для E_i по критерию измеримости найдем $\mathcal{A}_i$ такие, что $m^*(E_i \setminus \mathcal{A}_i) < \varepsilon/2$ и $m^*(\mathcal{A}_i \setminus E_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ $(i = 1, 2)$.

Объединение $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ представляет собой объединение конечного числа попарно непересекающихся интервалов. Из очевидных включений $(E_1 \cup E_2) \setminus (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \subset (E_1 \setminus \mathcal{A}_1) \cup (E_2 \setminus \mathcal{A}_2)$,
$$(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \setminus (E_1 \cup E_2) \subset (\mathcal{A}_1 \setminus E_1) \cup (\mathcal{A}_2 \setminus E_2)$$

следует, что $m^*[(E_1\cup E_2)\setminus(A_1\cup A_2)]<\varepsilon$ и $m^*[(A_1\cup A_2)\setminus(E_1\cup E_2)]<\varepsilon$. Это означает измеримость $E_1\cup E_2$.

Пусть $E_1\cap E_2=\varnothing$. Так как A_1 и A_2 состоят из непересекающихся интервалов, то $\mu(A_1\cup A_2)=\mu A_1+\mu A_2-\mu(A_1\cap A_2)$. Если точка $A_1\cap A_2$ входит в E_2, то она не входит в E_1, поэтому $A_1\cap A_2\subset(A_1\setminus E_1)\cup(A_2\setminus E_2)$, откуда $\mu(A_1\cap A_2)<\varepsilon$. Согласно (6) имеем

$$|\mu(E_1\cup E_2)-\mu E_1-\mu E_2|\leq|\mu(E_1\cup E_2)-\mu(A_1\cup A_2)|+$$
$$+|\mu(A_1\cup A_2)-\mu A_1-\mu A_2|+|\mu A_1-\mu E_1|+|\mu A_2-\mu E_2|<3\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon>0$ любое, то выполнено (10) – свойство аддитивности меры.

По индукции доказанное свойство распространяется на конечное число измеримых множеств.

2) Если E_1 и E_2 измеримы, то их разность $E_1\setminus E_2$ измерима. Если при этом $E_1\subset E_2$, то $\mu(E_2\setminus E_1)=\mu E_2-\mu E_1$.

Действительно, для любого отрезка $S=[a,b]\supset E_2\cup E_1$ имеем $C_S(E_2\setminus E_1)=C_S(E_2\cap C_S E_1)=C_S E_2\cup E_1$ (дополнение пересечения есть объединение дополнений). Отсюда по предыдущему видна измеримость $C_S(E_2\setminus E_1)$ и потому $E_2\setminus E_1$.

Если $E_1\subset E_2$, то $E_2=E_1\cup(E_2\setminus E_1)$, причем слагаемые не пересекаются. Отсюда $\mu E_2=\mu E_1+\mu(E_2\setminus E_1)$.

3) Ограниченное объединение $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ счетного числа измеримых множеств измеримо. Если же E_k попарно не пересекаются, то $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mu E_k$ (свойство счетной аддитивности меры).

Действительно, пусть сначала E_k попарно не пересекаются. Обозначим $Q_n=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$, $R_n=\bigcup_{k=n+1}^{\infty}E_k$, $E=Q_n\cup R_n$. Так как $m_*E\geqslant m_*Q_n=\mu Q_n=\sum_{k=1}^{n}\mu E_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\mu E_k$ сходится. Поэтому для $\varepsilon>0$ найдется n_0 такое, что $\sum_{k=n+1}^{\infty}\mu E_k<\varepsilon$ при $n\geqslant n_0$. Для каждого E_k $(k>n)$ есть покрытие $\mathcal{Y}_k$, сумма длин интервалов которого не превосходит $\mu E_k+\frac{\varepsilon}{2^{k-n}}$. Объединение $\bigcup_{k=n+1}^{\infty}\mathcal{Y}_k$ покрывает R_n, а сумма длин его интервалов не превосходит $\sum_{k=n+1}^{\infty}\mu E_k+\varepsilon$. Следовательно, для $n\geqslant n_0$ $m^*R_n<2\varepsilon$ и $m^*E<\mu Q_n+2\varepsilon$. В результате имеем

$$\mu Q_n\leq m_*E\leq m^*E<\mu Q_n+2\varepsilon, \qquad (11)$$

откуда $0\leq m^*E-m_*E<2\varepsilon$. Так как $\varepsilon>0$ любое, то $m_*E=m^*E$, что означает измеримость E. Устремляя в (11) $n\to\infty$ и $\varepsilon\to 0$, получим $\mu E=\lim\limits_{n\to\infty}\mu Q_n=\sum_{k=1}^{\infty}\mu E_k$.

Если E_k пересекаются, то нужно воспользоваться представлением $E=E_1\cup(E_2\setminus E_1)\cup[E_3\setminus(E_1\cup E_2)]\cup\ldots$, в котором слагаемые не пересекаются, и предыдущими свойствами.

4) Пересечение не более чем счетного числа измеримых множеств измеримо.

Действительно, можно считать все множества лежащими в одном отрезке, а затем рассмотреть их дополнения в этом отрезке. Случаи конечного и счетного числа рассмотреть отдельно.

5) Если возрастающая последовательность $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\ldots$ измеримых множеств ограничена, то (свойство непрерывности меры)

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\lim_{n\to\infty}\mu E_n. \qquad (12)$$

Действительно, $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=E_1\cup(E_2\setminus E_1)\cup(E_3\setminus E_2)\cup\ldots$, где слагаемые не пересекаются. Поэтому $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\mu E_1+(\mu E_2-\mu E_1)+(\mu E_3-\mu E_1)+\ldots$ Частичные суммы этого ряда равны μE_n, поэтому справедливо (12).

6) Для убывающей последовательности $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\ldots$ измеримых множеств справедливо $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu E_n$.

Для доказательства нужно перейти к дополнениям $C_S E_k$ в отрезке $S=[a,b]\supset E_1$ и воспользоваться предыдущим свойством.

7) Для измеримого множества E и $\varepsilon>0$ существуют замкнутое $\mathcal{F}$ и открытое $\mathcal{Y}$ множества такие, что $\mathcal{F}\subset E\subset\mathcal{Y}$ и $\mu\mathcal{Y}-\mu E<\varepsilon$ и $\mu E-\mu\mathcal{F}<\varepsilon$.

Действительно, утверждение о $\mathcal{Y}$ следует из определения внешней меры, так как объединение интервалов покрытия открыто. Докажем утверждение о $\mathcal{F}$. Пусть интервал $\Delta=]a-\frac{\varepsilon}{4},b+\frac{\varepsilon}{4}[$ содержит E. Множество $\Delta\setminus E$ измеримо, поэтому найдется открытое $\mathcal{Y}_0\supset(\Delta\setminus E)$ такое, что $\mu\mathcal{Y}_0<\mu(\Delta\setminus E)+\varepsilon/2$. Обозначим $\mathcal{Y}=(\mathcal{Y}_0\cap\Delta)\cup]a-\frac{\varepsilon}{4},a[\cup]b,b+\frac{\varepsilon}{4}[$. Это открытое множество, входящее в Δ и содержащее $\Delta\setminus E$, причем

$\mu \mathcal{Y} \le \mu \mathcal{Y}_0 + \varepsilon/2 < \mu(\Delta \setminus E) + \varepsilon$. Видно, что $\mathcal{F} = \Delta \setminus \mathcal{Y}$ совпадает с $[a,b] \setminus \mathcal{Y} = [a,b] \cap C\mathcal{Y}$, а потому является замкнутым, причем $\mathcal{F} \subset E$. Наконец, $\mu \mathcal{F} = \ell(\Delta) - \mu \mathcal{Y} > \ell(\Delta) - \mu(\Delta \setminus E) - \varepsilon = \mu E - \varepsilon$.

3. Пример неизмеримого множества. Покажем, что не все ограниченные множества в $\mathbb{R}$ измеримы по Лебегу. Предварительно отметим, что сдвиг измеримого множества сохраняет его измеримость и меру. Действительно, в определении измеримости и меры главную роль играли длины промежутков, а они при сдвиге сохраняются.

Разобьем все точки отрезка $[-1,1]$ на классы, относя в один класс точки с рациональной разностью. Из каждого класса выберем по одному представителю, множество представителей обозначим $\mathcal{M}$. Отметим, что в этой процедуре использована так называемая аксиома свободного выбора. Множество $\mathcal{M}$ оказывается неизмеримым.

Доказательство проведем, предположив противное. Все рациональные числа отрезка $[-2,2]$ занумеруем: $r_1, r_2, r_3, \ldots$ Сдвиг $\mathcal{M}$ на r_k обозначим $\mathcal{M}_k = \{x + r_k : x \in \mathcal{M}\}$. Если $\mathcal{M}$ измеримо, то измеримы и все $\mathcal{M}_k$ и имеют ту же меру $\mu \mathcal{M}_k = \mu \mathcal{M}$. Сдвиги $\mathcal{M}_k$ и $\mathcal{M}_j$ при $k \ne j$ общих точек не имеют, так как из равенства $x + r_k = x' + r_j$ следует $x - x' = r_j - r_k$, а это невозможно, так как x и x' – представители разных классов. Каждая точка $[-1,1]$ лежит в каком-нибудь классе, поэтому получается сдвигом представителя своего класса на некоторое r_k и лежит в $\mathcal{M}_k$. Следовательно, $[-1,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$. Отсюда $2 \le \mu\mathcal{M} + \mu\mathcal{M} + \ldots$. Поэтому $\mu \mathcal{M} \ne 0$. С другой стороны, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k \subset [-3,3]$, откуда $6 \ge \mu\mathcal{M} + \mu\mathcal{M} + \ldots$. Поэтому $\mu\mathcal{M} = 0$. Полученное противоречие означает, что множество $\mathcal{M}$ неизмеримое.

4. Функции, измеримые по Лебегу, и их свойства. Пусть f – функция, заданная на множестве $E \subset \mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$. Совокупность всех тех точек из E, в которых выполнено неравенство $f(x) > a$, обозначим $E(f > a)$. Аналогичный смысл имеют обозначения $E(f \ge a)$, $E(f < a)$, $E(f \le a)$, $E(f = a)$.

Определение I. Функция f называется измеримой (по Лебегу), если она задана на измеримом множестве E и при любом действительном a измеримы все множества $E(f > a)$, $E(f \ge a)$, $E(f < a)$, $E(f \le a)$.

Заметим, что определение измеримости функции содержит избыточную информацию. Достаточно было потребовать измеримости множеств одного вида. Покажем, например, что из измеримости множеств вида $E(f > a)$ при всех a следует измеримость множеств других видов. Действительно, это видно из равенств

$$E(f \ge a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{k}\right),$$

$$E(f < a) = E \setminus E(f \ge a), \qquad E(f \le a) = E \setminus E(f > a).$$

Первое равенство следует из того, что $f(x) \ge a$ тогда и только тогда, когда $f(x) > a - \frac{1}{k}$ для всех натуральных k. Остальные равенства очевидны.

Для измеримой функции f измеримы и множества $E(f = a)$, так как $E(f = a) = E(f \ge a) \cap E(f \le a)$.

Определение 2. Две функции f и g, заданные на E, называются равными почти всюду на E или эквивалентными на E (обозначение $f \sim g$), если множество точек $E(f \ne g)$, в которых они не совпадают, является множеством меры нуль: $\mu E(f \ne g) = 0$.

Отношение эквивалентности функций обладает, очевидно, свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Укажем простейшие свойства измеримых функций.

1) Если E меры нуль, то любая функция f на E измерима.

Действительно, все подмножества E измеримы (меры нуль).

2) Если f измерима на E и E_1 измеримое подмножество E, то сужение f на E_1 измеримо.

Это следует из равенства $E_1(f > a) = E(f > a) \cap E_1$.

3) Если $\{E_k\}$ не более чем счетное семейство с ограниченным объединением $E = \bigcup_k E_k$ и f измерима на каждом E_k, то f измерима на E.

Это следует из равенства $E(f > a) = \bigcup_k E_k(f > a)$.

4) Если $f \sim g$ на E и f измерима на E, то

и g измерима на E .

Действительно, g измерима на $E(f=g)$, так как совпадает с f , и измерима на $E(f\neq g)$ как на множестве меры нуль, поэтому g измерима на объединении $E=E(f=g)\cup\cup E(f\neq g)$.

5) Если $f\sim c$ на измеримом E , где $c=const$, то f измерима на E .

Действительно, если $f=c$ на измеримом E , то измеримость f следует из того, что $E(f>a)=E$ при $a<c$ и $E(f>a)=\emptyset$ при $a\geq c$. По предыдущему и при $f\sim c$ есть измеримость.

Например, функция Дирихле[8] на любом отрезке $[a,b]$

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}\end{cases}$$

измерима, так как почти всюду на $[a,b]$ равна нулю. Если измеримое множество E есть объединение не более чем счетного числа попарно непересекающихся измеримых множеств E_k и функция f на каждом E_k принимает постоянное значение c_k , то такая "ступенчатая" функция измерима. Это следует из свойств 3) и 5).

Важную роль играют следующие теоремы.

Теорема I. Если f измерима на E , то на E измеримы функции cf, $f+c\,(c=const)$, $|f|$, f^2 и $\frac{1}{f}$ (при $f(x)\neq 0$ на E).

Доказательство. Если $c=0$, то $cf\equiv 0$ и cf измерима как постоянная. При $c\neq 0$ измеримость cf следует из того, что

$$E(cf>a)=\begin{cases}E(f>\frac{a}{c}) & \text{при } c>0,\\ E(f<\frac{a}{c}) & \text{при } c<0.\end{cases}$$

Измеримость $f+c$ следует из равенства $E(f+c>a)=E(f>a-c)$.

Измеримость $|f|$ следует из того, что

---

[8] Петер Лежен Дирихле (1805-1859) - немецкий математик.

$$E(|f|>a)=\begin{cases}E & \text{при } a<0,\\ E(f>a)\cup E(f<-a) & \text{при } a\geq 0.\end{cases}$$

Измеримость f^2 следует из того, что

$$E(f^2>a)=\begin{cases}E & \text{при } a<0,\\ E(|f|>\sqrt{a}) & \text{при } a\geq 0.\end{cases}$$

Измеримость $\frac{1}{f}$ следует из того, что

$$E(\tfrac{1}{f}>a)=\begin{cases}E(f>0) & \text{при } a=0,\\ E(f>0)\cap E(f<\frac{1}{a}) & \text{при } a>0,\\ E(f>0)\cup E(f<\frac{1}{a}) & \text{при } a<0. \blacktriangle\end{cases}$$

В следующей теореме идет речь об арифметических свойствах измеримых функций.

Теорема 2. Если две функции на E измеримы, то на E измеримы их разность, сумма, произведение и частное (если знаменатель на E отличен от нуля).

Доказательство. Пусть f и g измеримы на E . Занумеруем все рациональные числа $\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,\dots\}$. Если $f(x)>g(x)$ в некоторой точке $x\in E$, то найдется r_k такое, что $f(x)>r_k>g(x)$. Очевидно обратное, если для некоторого r_k верно $f(x)>r_k$ и $g(x)<r_k$, то $f(x)>g(x)$. Это означает, что

$$E(f>g)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[E(f>r_k)\cap E(g<r_k)\right],$$

поэтому множество $E(f>g)$ измеримо.

Утверждения теоремы следуют теперь из теоремы I и равенств $E(f-g>a)=E(f>g+a)$, $f+g=f-(-1)g$,

$$f\cdot g=\frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right],\quad \frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}. \blacktriangle$$

Связь непрерывности и измеримости устанавливает следующая теорема.

Теорема 3. Если функция f непрерывна на измеримом множестве E , то она измерима на E .

Доказательство. Рассмотрим множество $E(f\geq a)$ и его замыкание $\overline{E(f\geq a)}$. Последнее измеримо как замкнутое множество. Очевидно включение $E(f\geq a)\subset E\cap\overline{E(f\geq a)}$.

Проверим обратное включение. Если $x\in E$ и $x\in\overline{E(f\geq a)}$, то x есть предел последовательности точек x_n из $E(f\geq a)$, $f(x_n)\geq a$. Согласно непрерывности $f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)\geq a$, то есть $x\in E(f\geq a)$. Итак, $E(f\geq a)=E\cap\overline{E(f\geq a)}$.

поэтому $E(f \geq a)$ измеримо при любом a, а функция f измерима на E. ▲

В заключение заметим, что существуют неизмеримые функции, даже заданные на измеримом множестве. Примером такой функции является

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \mathcal{M}, \\ 0 & \text{при} \quad x \in [-1,1] \setminus \mathcal{M}, \end{cases}$$

где $\mathcal{M}$ неизмеримое подмножество отрезка $[-1,1]$.

5. <u>Последовательности измеримых функций.</u> В курсе математического анализа часто рассматривались последовательности функций (f_n), заданные на одном и том же множестве E. Известны понятия сходимости последовательности (f_n) к функции f всюду на E и равномерной сходимости на E. Равномерно сходящаяся последовательность является сходящейся всюду на E, но не наоборот. Рассмотрим новые виды сходимости функциональных последовательностей. Пусть f задана на E.

<u>Определение I.</u> Последовательность функций (f_n) называется сходящейся к f почти всюду на E, если она сходится к f на множестве $E \setminus \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ подмножество меры нуль.

Например, на отрезке $[0,1]$ последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{при} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ \frac{1}{n} & \text{при} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

сходится почти всюду к нулю.

<u>Теорема I.</u> Если функции f_n измеримы на E и последовательность (f_n) сходится к f почти всюду на E, то функция f также измерима на E.

<u>Доказательство.</u> Пусть $E = A \cup B$, где A – подмножество E, на котором (f_n) сходится к f, а B – на котором не сходится. Тогда $\mu B = 0$. Поэтому f измерима на B. Остается доказать измеримость f на A. Это следует из равенства

$$A(f > a) = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A\left(f_k > a + \frac{1}{m}\right), \qquad (I3)$$

в котором все множества $A\left(f_k > a + \frac{1}{m}\right)$ измеримы из-за измеримости f_k на E, а потому и на A. Равенство

(I3) проверяется так. Если $f(x) > a$ для $x \in A$, то для некоторого m имеем $f(x) > a + \frac{1}{m}$, а, благодаря сходимости последовательности, для всех k, начиная с некоторого n, $f_k(x) > a + \frac{1}{m}$. Это доказывает включение левой стороны (I3) в правую. Обратное включение следует из того, что если для некоторых n и m и всех $k \geq n$ имеется неравенство $f_k(x) > a + \frac{1}{m}$, где $x \in A$, то в пределе $f(x) \geq a + \frac{1}{m} > a$. ▲

Укажем еще один вид сходимости функциональной последовательности.

<u>Определение 2.</u> Пусть функции f_n и f измеримы на E. Последовательность (f_n) называется сходящейся по мере к f на E, если для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mu E(|f_n - f| \geq \sigma) = 0. \qquad (I4)$$

Приведем пример сходящейся по мере последовательности на отрезке $[0,1]$. Пусть каждая из следующих функций равна 1 на указанном для нее отрезке, а вне его равна 0:

f_1 на $[0,\frac{1}{2}]$, f_2 на $[\frac{1}{2},1]$, f_3 на $[0,\frac{1}{4}]$, f_4 на $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, f_5 на $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$, f_6 на $[\frac{3}{4},1]$ и т.д. Эта последовательность сходится по мере к $f \equiv 0$, но ни в одной точке отрезка $[0,1]$ не сходится в обычном смысле.

Следует заметить, что предел последовательности по мере не единственный. Если (f_n) сходится по мере к f на E и $f \sim g$, то (f_n) сходится по мере и к g на E. Верно и обратное: если (f_n) сходится по мере к f и g на E, то $f \sim g$ на E.

<u>Теорема 2. (А.Лебег).</u> Если функции f_n измеримы на E и последовательность (f_n) почти всюду на E сходится к f, то эта последовательность сходится к f и по мере на E.

<u>Доказательство.</u> Пусть $E = A \cup B$, где A – подмножество E, на котором (f_n) сходится к f, а B – на котором не сходится. Тогда $\mu B = 0$. Для $\sigma > 0$ обозначим $R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k - f| \geq \sigma)$ и $\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma)$. Видно, что $R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \ldots$, то есть эта последователь-

ность множеств убывающая. Поэтому $\mu \mathcal{M} = \lim\limits_{n\to\infty} \mu R_n(\sigma)$. Покажем, что $\mathcal{M}\subset B$. Тогда $\mu\mathcal{M}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu R_n(\sigma)=0$ и тем более верно (14).

Пусть $x\notin B$, но $x\in E$, тогда $x\in A$. В точке x имеет место сходимость последовательности $f_n(x)$ к $f(x)$. Поэтому для всех k, начиная с некоторого n $|f_k(x)-f(x)|<\sigma$, то есть $x\notin R_n(\sigma)$, и тем более $x\notin\mathcal{M}$. ▲

Утверждение, обратное теореме 2, неверно, как видно из приведенного выше примера. Однако имеет место следующая теорема.

<u>Теорема 3. (Ф.Рисс)</u>[9]. Если последовательность (f_n) сходится к f по мере на E, то существует подпоследовательность (f_{n_k}), сходящаяся к f почти всюду на E.

<u>Доказательство.</u> Зададим две последовательности положительных чисел (σ_n) и (η_n) такие, что (σ_n), строго убывая, стремится к нулю и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta_n$ сходится. По определению сходимости по мере для каждого натурального k найдется номер n_k такой, что $\mu E(|f_{n_k}-f|\geq\sigma_k)<\eta_k$, причем n_k строго возрастают. Остается показать, что подпоследовательность (f_{n_k}) сходится к f почти всюду на E.

Обозначим $R_m=\bigcup\limits_{k=m}^{\infty}E(|f_{n_k}-f|\geq\sigma_k)$ и $\mathcal{M}=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}R_m$. Видно, что $R_1\supset R_2\supset\ldots$, то есть это последовательность множеств убывающая. Поэтому $\mu\mathcal{M}=\lim\limits_{m\to\infty}\mu R_m$, а так как $\mu R_m<\sum\limits_{k=m}^{\infty}\eta_k\to 0$ при $m\to\infty$, то $\mu\mathcal{M}=0$.

Пусть $x\in E\setminus\mathcal{M}$, тогда $x\notin R_m$ для некоторого m, а потому $x\notin E(|f_{n_k}-f|\geq\sigma_k)$ для всех $k\geq m$. Это означает, что $|f_{n_k}(x)-f(x)|<\sigma_k$ для всех $k\geq m$. Но $\sigma_k\to 0$ при $k\to\infty$, поэтому $f_{n_k}(x)\to f(x)$. ▲

6. <u>Теоремы Егорова и Лузина.</u> Из равномерной сходимости функциональной последовательности следует сходимость всюду

---

[9] Фридьеш Рисс (1880-1956) - венгерский математик.

и, тем более, почти всюду. Обратное неверно, однако имеется тесная связь этих видов сходимости. Это видно из следующей теоремы.

<u>Теорема 1 (Д.Ф.Егорова</u>[10]<u>).</u> Если последовательность (f_n) сходится на E почти всюду к f, то для любого $\delta>0$ существует множество $\tilde{E}\subset E$ такое, что $\mu(E\setminus\tilde{E})<\delta$, и на $\tilde{E}$ последовательность (f_n) сходится к f равномерно.

<u>Доказательство.</u> В доказательстве теоремы Лебега из предыдущего пункта были введены множества $R_n(\sigma)=\bigcup\limits_{p=n}^{\infty}E(|f_p-f|\geq\sigma)$ и доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\mu R_n(\sigma)=0$. Зададим две последовательности положительных чисел (σ_n) и (η_n) такие, что (σ_n), строго убывая, стремится к нулю и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta_n$ сходится. Для каждого натурального k найдется номер n_k такой, что $\mu R_{n_k}(\sigma_k)<\eta_k$, причем n_k строго возрастают. Для $\delta>0$ подберем m так, чтобы $\sum\limits_{k=m}^{\infty}\eta_k<\delta$ и положим $\mathcal{M}=\bigcup\limits_{k=m}^{\infty}R_{n_k}(\sigma_k)$. Тогда $\mu\mathcal{M}\leq\sum\limits_{k=m}^{\infty}\mu R_{n_k}(\sigma_k)<\sum\limits_{k=m}^{\infty}\eta_k<\delta$.

Пусть $\tilde{E}=E\setminus\mathcal{M}$, откуда $\mu(E\setminus\tilde{E})=\mu\mathcal{M}<\delta$. Остается показать, что на $\tilde{E}$ сходимость (f_n) к f равномерная. Зададим $\varepsilon>0$, подберем $m_0\geq m$ так, чтобы $\sigma_k<\varepsilon$ при всех $k\geq m_0$. Если $x\in\tilde{E}$, то $x\notin\mathcal{M}$, то есть $x\notin R_{n_k}(\sigma_k)$ для всех $k\geq m_0$. Следовательно, $x\notin E(|f_p-f|\geq\sigma_k)$ для $p\geq n_k$ и $k\geq m_0$. Иначе говоря, $|f_p(x)-f(x)|<\sigma_k$ для тех же индексов, а тем более $|f_p(x)-f(x)|<\varepsilon$ для всех $p\geq n_{m_0}$. Это и означает равномерную сходимость (f_n) к f на $\tilde{E}$. ▲

Понятие измеримости функции кажется весьма далеким от понятия непрерывности. Однако, как будет показано, между этими понятиями имеется тесная связь. Предварительно заметим следующее. Пусть $\mathcal{F}$ — замкнутое подмножество отрезка $[a,b]$, и на $\mathcal{F}$ задана непрерывная функция φ, тогда φ можно

---

[10] Дмитрий Федорович Егоров (1868-1931) - советский математик.

продолжить на весь отрезок $[a,b]$ с сохранением непрерывности. Действительно, φ можно продолжить на каждый составляющий интервал $]\alpha,\beta[$ открытого множества $]a,b[\setminus\mathcal{F}$ при $\alpha\neq a$, $\beta\neq b$ как линейную функцию с графиком, проходящим через точки $(\alpha,\varphi(\alpha))$ и $(\beta,\varphi(\beta))$. Так же можно поступить, если $\alpha=a\in\mathcal{F}$ или $\beta=b\in\mathcal{F}$. Если же $\alpha=a\notin\mathcal{F}$ или $\beta=b\notin\mathcal{F}$, то продолжение на $[a,b[$ или $]a,b]$ строится как постоянная $\varphi(\beta)$ или $\varphi(\alpha)$.

Лемма. Если функция f измерима и ограничена на отрезке $S=[a,b]$, то для любых $\varepsilon>0$ и $\sigma>0$ существует непрерывная на S функция φ такая, что $\mu S(|f-\varphi|\geqslant\sigma)<\varepsilon$.

Доказательство. Зададим $\varepsilon>0$ и $\sigma>0$. Пусть все значения f на S лежат в интервале $]A,B[$. Разобьем этот интервал на m равных частей точками $y_0=A<y_1<\ldots<y_m=B$ так, что длина каждой части $y_{k+1}-y_k<\sigma$. Множества $S_k=S(y_k\leqslant f<y_{k+1})$ $(k=0,1,\ldots,m-1)$ измеримы, попарно не пересекаются и $S=\bigcup\limits_{k=0}^{m-1}S_k$. Для каждого k найдем замкнутое множество $\mathcal{F}_k\subset S_k$ такое, что $\mu\mathcal{F}_k>\mu S_k-\frac{\varepsilon}{m}$. Пусть $\mathcal{F}=\bigcup\limits_{k=0}^{m-1}\mathcal{F}_k$, тогда $\mu\mathcal{F}>\mu S-\varepsilon$, иначе $\mu(S\setminus\mathcal{F})<\varepsilon$.

На $\mathcal{F}$ зададим функцию φ, положив ее на $\mathcal{F}_k$ равной y_k. Эта "ступенчатая" функция на $\mathcal{F}$ непрерывна, так как каждая точка $x\in\mathcal{F}$ является пределом лишь последовательности точек, принадлежащих одному $\mathcal{F}_k$, начиная с некоторого номера. Продолжим φ на все S так, как было указано перед леммой, с сохранением непрерывности. Так как $S(|f-\varphi|\geqslant\sigma)\subset S\setminus\mathcal{F}$, то $\mu S(|f-\varphi|\geqslant\sigma)<\varepsilon$. ▲
Из построения видно, что при $|f|\leqslant K$ и $|\varphi|\leqslant K$.

Теорема 2 (Н.Н.Лузин)[11] Если функция f измерима и ограничена на отрезке $S=[a,b]$, то для любого $\varepsilon>0$ существует замкнутое множество $\mathcal{F}\subset S$ и непрерывная на S функция φ такие, что $\mu(S\setminus\mathcal{F})<\varepsilon$ и $f=\varphi$ на $\mathcal{F}$.

Доказательство. Зададим две последовательности положительных чисел (σ_n) и (ε_n) строго убывающие и стремящиеся к

---

[11] Николай Николаевич Лузин (1883-1950) - советский математик.

нулю. Для каждого n по лемме найдем непрерывную на S функцию φ_n такую, что $\mu S(|f-\varphi_n|\geqslant\sigma_n)<\varepsilon_n$. Видно, что последовательность (φ_n) сходится к f по мере на S. По теореме Рисса найдется подпоследовательность (φ_{n_k}), сходящаяся к f почти всюду на S, а по теореме Егорова для $\varepsilon>0$ найдется измеримое множество $E\subset S$ такое, что $\mu(S\setminus E)<\frac{\varepsilon}{2}$, и на E сходимость (φ_{n_k}) к f равномерная. Найдем замкнутое множество $\mathcal{F}\subset E$ такое, что $\mu(E\setminus\mathcal{F})<\frac{\varepsilon}{2}$, откуда $\mu(S\setminus\mathcal{F})<\varepsilon$. На $\mathcal{F}$ равномерный предел непрерывных функций φ_{n_k} непрерывен. Через φ обозначим непрерывное продолжение этого предела на весь отрезок $S=[a,b]$. Очевидно, $\varphi=f$ на $\mathcal{F}$. ▲

Глава V. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

I. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Из курса математического анализа известна конструкция интеграла Римана для функций, заданных на отрезке $[a,b]$. Необходимым признаком интегрируемости функции по Риману[12] является ее ограниченность. Однако не всякая ограниченная функция интегрируема по Риману, примером является функция Дирихле. Непрерывность функции является достаточным, но не необходимым, признаком интегрируемости по Риману. Лебег предложил другую конструкцию интеграла, обобщающую конструкцию Римана и связанную с ограниченными измеримыми функциями.

Пусть функция f измерима и ограничена на множестве $E\subset\mathbb{R}$, а значения ее лежат в интервале $]A,B[$. Через T обозначим разбиение этого интервала на части точками
$A=y_0<y_1<\ldots<y_n=B$ и величину
$\lambda(T)=\max\{y_{k+1}-y_k\}$ назовем рангом разбиения.
Множества $e_k=E(y_k\leqslant f<y_{k+1})$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$, очевидно, измеримы, попарно не пересекаются, в объединении дают E,

---

[12] Георг Бернхард Риман (1826-1866) - немецкий математик.

а потому $\mu E = \sum_{k=0}^{n-1} \mu e_k$. Суммы $s(T) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \mu e_k$ и $S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \mu e_k$ назовем соответственно нижней и верхней суммами Лебега. Видно, что $s(T) \le S(T)$. Свойства этих сумм напоминают свойства сумм Дарбу[13], фигурировавших в конструкции интеграла Римана.

1) При добавлении новых точек разбиения нижняя сумма Лебега не уменьшается, а верхняя не увеличивается.

Действительно, пусть $\bar{y}$ – новая точка разбиения и $y_k < \bar{y} < y_{k+1}$. Тогда в нижней сумме Лебега одно слагаемое $y_k \mu e_k$ заменяется двумя новыми $y_k \mu e_k'$ и $\bar{y} \mu e_k''$, где $e_k' = E(y_k \le f < \bar{y})$ и $e_k'' = E(\bar{y} \le f < y_{k+1})$. Остальные слагаемые сохраняются. Так как $y_k \mu e_k' + \bar{y} \mu e_k'' \ge$ $\ge y_k \mu e_k' + y_k \mu e_k'' = y_k(\mu e_k' + \mu e_k'') = y_k \mu e_k$, то утверждение о нижней сумме Лебега справедливо. Для верхней суммы доказательство аналогично.

2) Всякая нижняя сумма $s(T_1)$ не превосходит всякую верхнюю сумму $S(T_2)$ Лебега.

Действительно, рассмотрим разбиение T_3, точки которого являются объединением точек разбиений T_1 и T_2 (общее продолжение T_1 и T_2). По предыдущему $s(T_1) \le s(T_3) \le$ $\le S(T_3) \le S(T_2)$.

Из доказанных свойств следует, что множество всех нижних сумм Лебега $\{s(T)\}$ ограничено сверху (любой верхней суммой), а множество всех верхних сумм $\{S(T)\}$ ограничено снизу (любой нижней суммой). Поэтому существуют их точные границы $J_* = \sup\{s(T)\}$ и $J^* = \inf\{S(T)\}$. При этом $s(T) \le J_* \le J^* \le S(T)$ для любого T. Так как $0 \le J^* - J_* \le S(T) - s(T) \le \lambda(T)\mu E$, а ранг разбиения $\lambda(T)$ можно выбирать сколь угодно близким к нулю, то заключаем, что $J_* = J^* = J$.

<u>Определение.</u> Интегралом Лебега от ограниченной измеримой функции f на множестве E называется общее значение

---

[13] Жан Гастон Дарбу (1842-1917) - французский математик.

J точных границ J_* и J^* нижних и верхних сумм Лебега.

Обозначим интеграл Лебега $\int_E f\,d\mu$.

Обратим внимание на то, что нет необходимости в специальных теоремах существования интеграла Лебега. Для рассматриваемых функций он всегда существует.

Так как $0 \le S(T) - J \le S(T) - s(T) \le \lambda(T)\mu E$ и $0 \le J - s(T) \le S(T) - s(T) \le \lambda(T)\mu E$, то интеграл Лебега J можно было определить как общий предел нижних и верхних сумм Лебега при стремлении ранга разбиения $\lambda(T)$ к нулю.

В заключение покажем, что интеграл Лебега не зависит от выбора интервала $]A,B[$. Это обоснует корректность определения. К новому интервалу можно перейти, заменяя поочередно один из концов интервала. Пусть $]A,B_1[$ другой интервал, содержащий все значения f. Для определенности пусть $B < B_1$. Пусть разбиение T_1 нового интервала $A = y_0 < y_1 < \ldots < y_m =$ $= B < y_{m+1} < \ldots < y_n = B_1$. Тогда множества $e_m, \ldots, e_{n-1}$ пустые и имеют нулевую меру. Поэтому $s(T_1) = s(T)$ и $S(T_1) = S(T)$, где T – разбиение $]A,B[$. Следовательно, пределы сумм Лебега при $\lambda(T_1) \to 0$ совпадают и интегралы одинаковы.

2. <u>Свойства интеграла Лебега.</u> Укажем основные свойства интеграла Лебега от ограниченных измеримых функций.

1) <u>Оценка интеграла.</u> Если $a \le f(x) \le b$ для $x \in E$, то

$$a\mu E \le \int_E f\,d\mu \le b\mu E. \tag{1}$$

Действительно, интервал $]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, содержит все значения f. Поэтому при любом разбиении этого интервала $(a-\varepsilon)\mu E \le s(T) \le (b+\varepsilon)\mu E$. Если перейти к пределу сначала при $\lambda(T) \to 0$, а затем $\varepsilon \to 0$, то получим (1).

Отметим три важных следствия (1):

а) если $f = c = \mathrm{const}$, то $\int_E c\,d\mu = c\mu E$;

б) если $\mu E = 0$, то $\int_E f\,d\mu = 0$;

в) если $f(x) \ge 0\ (\le 0)$ на E, то $\int_E f\,d\mu \ge 0\ (\le 0)$.

2) <u>Счетная аддитивность по множеству.</u> Если $E = \bigcup_k E_k$, где $\{E_k\}$ не более чем счетное семейство попарно непересе-

кающихся измеримых множеств, то

$$\int\limits_E f\,d\mu = \sum_k \int\limits_{E_k} f\,d\mu . \qquad (2)$$

Рассмотрим сначала случай конечного числа множеств, причем достаточно рассмотреть два множества, а затем воспользоваться математической индукцией. Итак, пусть $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, и T разбиение интервала $]A, B[$, содержащего все значения f на E, точками y_k. Обозначим $e_k = E(y_k \le f < y_{k+1})$, $e_k' = E_1(y_k \le f < y_{k+1})$, $e_k'' = E_2(y_k \le f < y_{k+1})$. Тогда $e_k = e_k' \cup e_k''$, $e_k' \cap e_k'' = \emptyset$, а потому $\mu e_k = \mu e_k' + \mu e_k''$. Отсюда для нижних сумм Лебега $s(T)$, $s'(T)$, $s''(T)$ соответственно на E, E_1 и E_2 получим равенство $s(T) = s'(T) + s''(T)$. В пределе при $\lambda(T) \to 0$ получим

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_{E_1} f\,d\mu + \int\limits_{E_2} f\,d\mu .$$

Перейдем к случаю счетного числа множеств, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Так как $\mu E = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu E_k$ и ряд сходящийся, то $\mu R_n \to 0$ при $n \to \infty$, где $R_n = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} E_k$. По предыдущему

$$\int\limits_E f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f\,d\mu + \int\limits_{R_n} f\,d\mu . \qquad (3)$$

Но $A\mu R_n \le \int_{R_n} f\,d\mu \le B\mu R_n$, поэтому $\int_{R_n} f\,d\mu \to 0$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу в (3) при $n \to \infty$, получим (2).

3) Интегралы от эквивалентных функций. Если $f \sim g$ на E, то

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_E g\,d\mu .$$

Действительно, если $E_1 = E(f = g)$, $E_2 = E(f \ne g)$, то $\mu E_2 = 0$, поэтому интегралы на E_2 равны нулю, а на E_1 f и g совпадают:

$$\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_{E_1} f\,d\mu + \int\limits_{E_2} f\,d\mu = \int\limits_{E_1} f\,d\mu = \int\limits_{E_1} g\,d\mu = \int\limits_{E_1} g\,d\mu + \int\limits_{E_2} g\,d\mu = \int\limits_E g\,d\mu .$$

Например, интеграл от функции Дирихле на любом отрезке равен нулю, так как функция Дирихле эквивалентна тождественному нулю, интеграл от которого равен нулю.

4) Конечная аддитивность по функции. Для f и g на E

$$\int\limits_E (f+g)\,d\mu = \int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu . \qquad (4)$$

Переход к конечному числу функций производится по математической индукции. Докажем (4). Пусть T – разбиение интервала, содержащего значения f и g на E, точками y_k. Обозначим $e_k' = E(y_k \le f < y_{k+1})$, $e_j'' = E(y_j \le g < y_{j+1})$ и $e_{kj} = e_k' \cap e_j''$. Множества e_{kj} попарно не пересекаются, $\bigcup\limits_{j=0}^{n-1} e_{kj} = e_k'$, $\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} e_{kj} = e_j''$, $\bigcup\limits_{k,j=0}^{n-1} e_{kj} = E$. Для $x \in e_{kj}$ имеем $y_k + y_j \le f + g < y_{k+1} + y_{j+1}$, поэтому

$$(y_k + y_j)\mu e_{kj} \le \int\limits_{e_{kj}} (f+g)\,d\mu \le (y_{k+1} + y_{j+1})\mu e_{kj} .$$

Просуммируем все эти неравенства по $k, j = 0, 1, \dots, n-1$. Сумма интегралов по доказанному выше равна $\int\limits_E (f+g)\,d\mu$. Рассмотрим сумму первых слагаемых $\sum\limits_{k,j=0}^{n-1} y_k \mu e_{kj} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k \sum\limits_{j=0}^{n-1} \mu e_{kj} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k \mu e_k' = s_f(T)$ – это нижняя сумма Лебега для функции f. Аналогично получаем $s_g(T)$, $S_f(T)$, $S_g(T)$. В результате получим неравенства

$$s_f(T) + s_g(T) \le \int\limits_E (f+g)\,d\mu \le S_f(T) + S_g(T) .$$

Переходя к пределу при $\lambda(T) \to 0$, получим (4).

В качестве следствия доказанного отметим свойство монотонности интеграла: если $f(x) \le g(x)$ на E, то $\int\limits_E f\,d\mu \le \int\limits_E g\,d\mu$.

5) Однородность интеграла. Для постоянной c

$$\int\limits_E cf\,d\mu = c\int\limits_E f\,d\mu . \qquad (5)$$

При $c = 0$ равенство очевидно. Пусть $c > 0$, T – разбиение интервала, содержащего значения f, точками y_k и $e_k = E(y_k \le f < y_{k+1})$. Для $x \in e_k$ имеем $cy_k \le cf(x) < cy_{k+1}$, поэтому

$$cy_k \mu e_k \le \int\limits_{e_k} cf\,d\mu \le cy_{k+1} \mu e_k .$$

Суммируя эти неравенства, получим $cs(T) \le \int\limits_E cf\,d\mu \le cS(T)$, где $s(T)$ и $S(T)$ — нижняя и верхняя суммы Лебега для функции f. В пределе при $\lambda(T)\to 0$ получаем (5). Пусть, наконец, $c<0$. Тогда $0=\int\limits_E[cf+(-c)f]\,d\mu=\int\limits_E cf\,d\mu+(-c)\int\limits_E f\,d\mu$, откуда следует (5).

Последние два свойства означают, что интеграл Лебега является линейным функционалом (относительно f).

6) <u>Оценка модуля интеграла.</u> Справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_E f\,d\mu\right|\le\int\limits_E|f|\,d\mu. \qquad (6)$$

Для измеримой ограниченной функции f на E, очевидно, оба интеграла существуют. Пусть $E_1=E(f\geqslant 0)$ и $E_2=E(f<0)$. Эти множества не пересекаются и в объединении дают E. Поэтому $\left|\int\limits_E f\,d\mu\right|=\left|\int\limits_{E_1} f\,d\mu+\int\limits_{E_2} f\,d\mu\right|=\left|\int\limits_{E_1}|f|\,d\mu-\int\limits_{E_2}|f|\,d\mu\right|\le$
$\le\left|\int\limits_{E_1}|f|\,d\mu\right|+\left|\int\limits_{E_2}|f|\,d\mu\right|=\int\limits_{E_1}|f|\,d\mu+\int\limits_{E_2}|f|\,d\mu=\int\limits_E|f|\,d\mu$,
откуда и следует (6).

7) <u>Нулевой интеграл от неотрицательной функции.</u> Если $\int\limits_E f\,d\mu=0$ и $f(x)\geqslant 0$ на E, то $f\sim 0$ на E.

Заметим, что без требования $f(x)\geqslant 0$ это утверждение неверно. Например, если $f(x)=1$ для $x\in[0,1]$ и $f(x)=-1$ для $x\in[-1,0[$, то интеграл от f на $[-1,1]$ равен нулю, хотя функция не эквивалентна нулю.

Для доказательства заметим, что $E(f\neq 0)=E(f>0)=$ $=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E(f\geqslant\frac{1}{k})$. Так как множества $E(f\geqslant\frac{1}{k})$ образуют возрастающую последовательность, то $\mu E(f\neq 0)=\lim\limits_{n\to\infty}E(f\geqslant\frac{1}{n})$. Но для любого натурального n $\mu E(f\geqslant\frac{1}{n})\leqslant n\int\limits_{E(f\geqslant\frac{1}{n})}f\,d\mu\leqslant n\int\limits_E f\,d\mu=0$, то есть $\mu E(f\geqslant\frac{1}{n})=0$. Поэтому $\mu E(f\neq 0)=0$ и $f\sim 0$ на E.

В заключение приведем теорему Лебега о возможности предельного перехода под знаком интеграла Лебега.

<u>Теорема. (А.Лебег).</u> Если последовательность измеримых функций (f_n) почти всюду на E сходится к f и f_n ог-

раничены по модулю одной постоянной, то

$$\int\limits_E f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n\,d\mu. \qquad (7)$$

<u>Доказательство.</u> Если для всех $n\in\mathbb{N}$ и $x\in E$ выполнено неравенство $|f_n(x)|\leqslant K$, то и $|f(x)|\leqslant K$ всюду кроме множества меры нуль. Из условия теоремы следует, что (f_n) сходится к f по мере на E. Для $\sigma>0$ обозначим $E_1^{(n)}=E(|f_n-f|<\sigma)$ и $E_2^{(n)}=E(|f_n-f|\geqslant\sigma)$.
Тогда
$$\left|\int\limits_E f_n\,d\mu-\int\limits_E f\,d\mu\right|\leqslant\int\limits_{E_1^{(n)}}|f_n-f|\,d\mu+\int\limits_{E_2^{(n)}}|f_n-f|\,d\mu\leqslant\sigma\mu E+2K\mu E_2^{(n)}.$$
Для любого $\varepsilon>0$ сначала выберем $\sigma>0$ так, чтобы $\sigma\mu E<\frac{\varepsilon}{2}$, а затем, используя сходимость по мере, подберем n_0 так, чтобы при $n\geqslant n_0$ было $2K\mu E_2^{(n)}<\frac{\varepsilon}{2}$. В результате $\left|\int\limits_E f_n\,d\mu-\int\limits_E f\,d\mu\right|<\varepsilon$ при $n\geqslant n_0$. Это означает справедливость (7). ▲

3. <u>Сравнение интегралов Римана и Лебега.</u> Рассмотрим функцию f, заданную на отрезке $[a,b]$ с ограниченными значениями в $\mathbb{R}$. Если α промежуток, входящий в $[a,b]$, и точные границы значений f на α равны m и M, то величина $\omega(\alpha)=M-m\geqslant 0$ называется колебанием f на α. Пусть $x\in[a,b]$ и $\mathfrak{J}=\{\alpha\}$ совокупность всевозможных промежутков $\alpha=]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\cap[a,b]$, $\varepsilon>0$. Тогда величина $\omega(x)=\inf\limits_{\alpha\in\mathfrak{J}}\omega(\alpha)$ называется колебанием функции f в точке x. Видно, что $\omega(x)=0$ тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке x.

Совокупность всех точек, в которых $\omega(x)\geqslant\frac{1}{n}$, обозначим $\mathcal{D}(\frac{1}{n})$. Это множество замкнутое, так как для любой его предельной точки x в любом промежутке $\alpha\in\mathfrak{J}$ найдется точка из $\mathcal{D}(\frac{1}{n})$, откуда $\omega(\alpha)\geqslant\frac{1}{n}$, а потому $\omega(x)\geqslant\frac{1}{n}$ и $x\in\mathcal{D}(\frac{1}{n})$. Из замкнутости следует измеримость $\mathcal{D}(\frac{1}{n})$. Объединение $\mathcal{D}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}(\frac{1}{n})$ — это совокупность всех точек разрыва функции f.

Лемма. Если функция f на отрезке $[a,b]$ интегрируема по Риману, то множество $\mathcal{D}$ точек ее разрыва есть множество меры нуль: $\mu\mathcal{D}=0$.

Доказательство. Из интегрируемости по Риману следует ограниченность f на $[a,b]$. Множества $\mathcal{D}(\frac{1}{n})$ образуют возрастающую последовательность, поэтому $\mu\mathcal{D}=\lim_{n\to\infty}\mu\mathcal{D}(\frac{1}{n})$. Предположим, что $\mu\mathcal{D}\neq 0$. Тогда $\mu\mathcal{D}(\frac{1}{n_0})\neq 0$ для некоторого n_0. Разобьем отрезок $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,\dots,n-1)$, составим суммы Дарбу s и S и рассмотрим их разность $S-s=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k$, где $\omega_k=M_k-m_k$ – колебание f на отрезке $[x_k,x_{k+1}]$, а $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$. Оставим только слагаемые, соответствующие отрезкам, в которых есть внутри точки из $\mathcal{D}(\frac{1}{n_0})$. Так как остальные слагаемые неотрицательные, то $S-s\geqslant\frac{1}{n_0}\mu\mathcal{D}(\frac{1}{n_0})>0$. Это означает, что $\inf\{S\}\neq\sup\{s\}$, а это противоречит интегрируемости f по Риману. ▲

Как показал Лебег, имеет место и обратное утверждение: если $\mu\mathcal{D}=0$, то f на $[a,b]$ интегрируема по Риману.

Покажем теперь, что интеграл Лебега действительно является обобщением интеграла Римана.

Теорема. Если функция f на $[a,b]$ интегрируема по Риману, то эта функция интегрируема и по Лебегу на $[a,b]$, причем интегралы совпадают

$$\int_{[a,b]} f\,d\mu=\int_a^b f\,dx. \tag{8}$$

Доказательство. Из интегрируемости по Риману следует ограниченность f на $[a,b]$. Покажем, что следует и измеримость f на $E=[a,b]$. Для любого c рассмотрим множество $E(f\geqslant c)$, его замыкание $\overline{E(f\geqslant c)}$ и разность $\mathcal{D}_1=\overline{E(f\geqslant c)}\setminus E(f\geqslant c)$. Точки $x\in\mathcal{D}_1$ являются пределами точек x_n, в которых $f(x_n)\geqslant c$, но при этом $x\notin E(f\geqslant c)$, то есть $f(x)<c$. Следовательно, это точки разрыва функции f и $\mathcal{D}_1\subset\mathcal{D}$. По лемме $\mu\mathcal{D}=0$, поэтому $\mathcal{D}_1$ измеримо. Замыкание $\overline{E(f\geqslant c)}$ измеримо как замкнутое множество. Поэтому $E(f\geqslant c)=\overline{E(f\geqslant c)}\setminus\mathcal{D}_1$ измеримо как разность измеримых множеств. Это означает измеримость f, а потому интегрируемость по Лебегу.

Остается доказать совпадение интегралов. Разобьем $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_k,x_{k+1}]$ и оценим интеграл Лебега от f на каждом из них

$$m_k\Delta x_k\leqslant\int_{[x_k,x_{k+1}]} f\,d\mu\leqslant M_k\Delta x_k$$

(m_k и M_k – точные границы значений f на $[x_k,x_{k+1}]$, а $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$). Суммируя по всем отрезкам, получим

$$s\leqslant\int_{[a,b]} f\,d\mu\leqslant S.$$

Если ранг разбиения $[a,b]$ устремить к нулю, то суммы Дарбу s и S в пределе дают интеграл Римана $\int_a^b f\,dx$ и равенство (8) доказано. ▲

Утверждение обратное теореме неверно (достаточно вспомнить функцию Дирихле).

4. Восстановление первообразной для ограниченной функции. Если функция f в каждой точке x отрезка $[a,b]$ имеет производную $f'(x)$, то нет гарантии, что f' интегрируема по Риману на этом отрезке. Поэтому интеграл Римана не позволяет в общем случае восстановить f по f'. Интеграл Лебега оказывается более удобным в этой задаче.

Теорема. Если функция f в каждой точке x отрезка $[a,b]$ имеет производную $f'(x)$ и f' ограничена на $[a,b]$, то функция f' измерима на $[a,b]$ и справедливо равенство

$$f(x)=f(a)+\int_{[a,x]} f'\,d\mu. \tag{9}$$

Доказательство. Из дифференцируемости f следует ее непрерывность на $[a,b]$. Доопределим f на $]b,b+1]$, положив $f(x)=f(b)+(x-b)f'(b)$ для точек этого промежутка. При этом сохраняется дифференцируемость f, а потому и непрерывность.

Рассмотрим последовательность функций (φ_n), определенных на $[a,b]$ равенством $\varphi_n(x)=n\left[f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right]$. Видно, что в каждой точке $x\in[a,b]$ $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f'(x)$. Функции

φ_n непрерывны, а потому и измеримы на $[a,b]$. Следовательно, и предельная функция f' измерима.

Остается доказать (9). По теореме Лагранжа

$$\varphi_n(x) = n \cdot f'(x+\frac{\theta}{n}) \cdot \frac{1}{n} = f'(x+\frac{\theta}{n}), \quad \text{где} \quad 0<\theta<1 .$$

Поэтому все функции φ_n ограничены по модулю одной постоянной. Это позволяет воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега:

$$\int_{[a,b]} f' d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n dx = \lim_{n\to\infty} n \int_a^b [f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)] dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f dx - \int_a^b f dx \right] = \lim_{n\to\infty} n \left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f dx \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [f(b+\tfrac{\theta_1}{n}) - f(a+\tfrac{\theta_2}{n})] = f(b) - f(a),$$

где $0<\theta_1, \theta_2<1$. В преобразованиях были использованы замена переменных и теорема о среднем для интеграла Римана. В окончательном равенстве можно вместо b поставить $x\in[a,b]$, получим (9). ▲

5. Интеграл от произвольной неотрицательной измеримой функции. Интеграл Лебега был определен выше для ограниченных измеримых функций. Обобщим интеграл на случай неограниченных функций. Начнем со случая неотрицательной измеримой на E функции f.

Для каждого вещественного N определим функцию f_N:

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \le N, \\ N, & \text{если } f(x) > N, \end{cases}$$

которую назовем срезкой функции f. Срезка ограничена и измерима, так как $E(f_N > a) = E(f>a)$ при $a<N$ и $E(f_N > a) = \varnothing$ при $a \geq N$. Поэтому для каждой срезки существует интеграл Лебега. С ростом N растет срезка, а потому и интеграл $\int_E f_N d\mu$. Следовательно, этот интеграл при $N\to\infty$ имеет конечный или бесконечный предел.

Определение. Интегралом Лебега от произвольной неотрицательной измеримой на E функции f называется конечный или бесконечный предел

$$\int_E f d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_E f_N d\mu .$$

Если предел конечный, то f называется суммируемой на E.

Для ограниченной функции срезки при больших N совпадают с самой функцией, поэтому ограниченные неотрицательные измеримые функции суммируемы.

Укажем простейшие свойства интеграла от произвольной неотрицательной измеримой функции. Для доказательства этих свойств достаточно воспользоваться срезками и известными свойствами интеграла Лебега от ограниченных измеримых функций.

1) На множестве меры нуль все функции суммируемы и интегралы от них равны нулю.

2) Если на E $0 \le f(x) \le \tilde{f}(x)$ и функция $\tilde{f}$ суммируема, то и f суммируема, причем $\int_E f d\mu \le \int_E \tilde{f} d\mu$.

3) Из $f\sim 0$ на E следует, что $\int_E f d\mu = 0$, и наоборот. Следует учесть, что $f\sim 0$ равносильно $f_N \sim 0$ для всех срезок.

4) Если f суммируема на E и постоянная $c \geq 0$, то и cf суммируема на E, причем $\int_E cf d\mu = c\int_E f d\mu$ (однородность). Случай $c=0$ очевиден, а при $c>0$ нужно учесть, что $c(f_N) = (cf)_{cN}$.

5) Если $f = g+h$ на E, где g и h — неотрицательные измеримые на E функции, то f суммируема тогда и только тогда, когда суммируемы g и h, причем

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu + \int_E h d\mu \qquad \text{(аддитивность).}$$

Действительно, из суммируемости f по свойству 2) следует суммируемость g и h, а так как $g_N + h_N \le g+h = f$, то $\int_E g d\mu + \int_E h d\mu \le \int_E f d\mu$. С другой стороны, при суммируемости g и h, благодаря неравенству $f_N \le g_N + h_N$, имеем $\int_E f d\mu \le \int_E g d\mu + \int_E h d\mu$. Это завершает доказательство.

В заключение приведем две важные теоремы.

Теорема 1. (П.Фату)[14]. Если последовательность (f_n) неотри-

---

[14] Пьер Фату (1878-1929) - французский математик.

цательных измеримых на E функций почти всюду сходится к f на E, то

$$\int_E f\,d\mu \le \sup\left\{ \int_E f_n\,d\mu \right\} \qquad (10)$$

и

$$\int_E f\,d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu ,$$

если последний предел существует.

Доказательство. При любом $N \geqslant 0$ последовательность срезок $((f_n)_N)$ почти всюду на E сходится к f_N. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E (f_n)_N\,d\mu = \int_E f_N\,d\mu$. В очевидном неравенстве $\int_E (f_n)_N\,d\mu \le \sup\left\{\int_E f_n\,d\mu\right\}$, перейдем к пределу сначала при $n\to\infty$, а затем $N\to\infty$, получим (10).

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется номер n_0 такой, что

$$\sup_{n\geqslant n_0}\left\{\int_E f_n\,d\mu\right\} \le \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu + \varepsilon .$$

Остается воспользоваться неравенством (10), а затем ε устремить к нулю. ▲

Теорема 2.(Б.Леви[15]). Если последовательность (f_n) неотрицательных измеримых на E функций не убывает $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ и их интегралы ограничены $\int_E f_n\,d\mu \le K$, то эта последовательность почти всюду на E сходится к некоторой функции f и

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu .$$

Доказательство. Пусть E_1 – множество точек E, в которых последовательность (f_n) не сходится, то есть по условию теоремы $f_n(x)\to\infty$. Это означает, что для любого $m\in\mathbb{N}$ найдется $n\in\mathbb{N}$, для которых $f_n(x)>m$. Следовательно, $E_1=\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E(f_n>m)$. Далее

[15] Беппо Леви (1875-1961) – итальянский математик.

$$\mu E(f_n>m) \le \frac{1}{m}\int_{E(f_n>m)} f_n\,d\mu \le \frac{1}{m}\int_E f_n\,d\mu \le \frac{K}{m} .$$

Так как при фиксированном m множества $E(f_n>m)$ образуют возрастающую последовательность и $E_1\subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E(f_n>m)$, то $\mu E_1 \le \frac{K}{m}$. Но m произвольно, поэтому в пределе при $m\to\infty$ получаем $\mu E_1 = 0$. Это означает, что последовательность (f_n) почти всюду на E сходится к некоторой функции f. По теореме Фату $\int_E f\,d\mu \le \lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu$. С другой стороны, благодаря неубыванию последовательности (f_n), $f_n(x)\le f(x)$ на E. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu \le \int_E f\,d\mu$. ▲

6. Суммируемые функции. Перейдем к случаю измеримой на E функции f, принимающей значения разных знаков. Положим

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } f(x)<0,\end{cases} \qquad f_-(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } f(x)\geqslant 0,\\ -f(x), & \text{если } f(x)<0.\end{cases}$$

Функции f_+ и f_- измеримы и неотрицательны на E, поэтому интеграл Лебега от них уже определен. Видно, что $f=f_+-f_-$.

Определение. Если хоть одна из функций f_+ и f_- суммируема на E, то интегралом Лебега от f на E называется разность

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu .$$

Если обе функции f_+ и f_- суммируемы на E, то этот интеграл конечен, а функция f называется суммируемой на E.

Укажем простейшие свойства определенных суммируемых функций и интегралов от них.

1) Функция f суммируема на E тогда и только тогда, когда суммируема на E функция $|f|$.

Это следует из равенства $|f|=f_++f_-$ и свойства 5) предыдущего пункта. Интересно сравнить это свойство со свойствами несобственного интеграла Римана (абсолютная и неабсолютная сходимости).

2) Если E_1 и E_2 не пересекаются и f суммируема на

E_1 и E_2, то f суммируема на $E=E_1\cup E_2$, причем

$$\int_E f\,d\mu=\int_{E_1} f\,d\mu+\int_{E_2} f\,d\mu .$$

Для доказательства нужно воспользоваться функциями f_+ и f_-, их срезками и свойством аддитивности по множеству интеграла Лебега от ограниченных функций.

3) Если f суммируема на E и $c=\mathrm{const}$, то cf суммируема на E и

$$\int_E cf\,d\mu=c\int_E f\,d\mu \qquad \text{(однородность).}$$

Действительно, случай $c=0$ очевиден. При $c>0$ имеем $(cf)_+=cf_+$, $(cf)_-=cf_-$, $cf=(cf)_+-(cf)_-$, откуда и следует утверждение. Если $c<0$, то $c=(-1)|c|$, поэтому достаточно рассмотреть случай $c=-1$. Но $(-f)_+=f_-$, $(-f)_-=f_+$ и $\int_E(-f)\,d\mu=\int_E f_-\,d\mu-\int_E f_+\,d\mu=-\int_E f\,d\mu$.

4) Если $f=g+h$, где g и h суммируемы на E, то f суммируема на E и

$$\int_E f\,d\mu=\int_E g\,d\mu+\int_E h\,d\mu \qquad \text{(аддитивность)}$$

Действительно, разобьем E на шесть попарно непересекающихся слагаемых $E_1=E(g\geq 0,h\geq 0)$, $E_2=E(g<0,h\geq 0,f\geq 0)$, $E_3=E(g<0,h\geq 0,f<0)$, $E_4=E(g\geq 0,h<0,f\geq 0)$, $E_5=E(g\geq 0,h<0,f<0)$, $E_6=E(g<0,h<0)$. Аддитивность нужно проверить на каждом слагаемом множестве и равенства сложить. Проверим, например, на E_3. На этом множестве $(-g)=(-f)+h$, где все указанные функции неотрицательны. Из суммируемости $(-g)$ согласно свойству 5) предыдущего пункта следует суммируемость $(-f)$, а потому и f. При этом $\int_{E_3}(-g)\,d\mu=\int_{E_3}(-f)\,d\mu+\int_{E_3}h\,d\mu$. Остается воспользоваться свойством однородности и перенести интегралы в другие стороны равенства.

7. Пространство L_1. Совокупность всех функций, суммируемых на множестве E, обозначим $L_1(E)$, или короче L_1. Из свойств суммируемых функций следует, что L_1 линейное пространство: вместе с функциями f_1 и f_2 в L_1 входит их любая линейная комбинация $c_1f_1+c_2f_2$. Роль нуля θ в этом пространстве играет функция $f\equiv 0$.

Для каждой функции f из L_1 определена величина

$$\|f\|_1=\int_E |f|\,d\mu . \tag{II}$$

Она обладает свойствами: а) $\|f\|_1\geq 0$, б) $\|cf\|_1=|c|\,\|f\|_1$, в) $\|f+g\|_1\leq\|f\|_1+\|g\|_1$, характерными для нормы линейного пространства. Однако не выполнено важное свойство нормы: из $\|f\|_1=0$ не следует $f=\theta$, а только $f\sim\theta$. Поэтому элементами L_1 считают не отдельные функции, а классы эквивалентных между собой функций (эквивалентные функции не различают). При этом условии L_1 становится нормированным линейным пространством с нормой, определенной равенством (II). По норме в L_1 определяется и метрика

$$\rho_1(f,g)=\|f-g\|_1 .$$

Определение. Сходимость последовательности функций по метрике ρ_1 называется сходимостью в среднем.

Теорема I. Если последовательность функций (f_n) из L_1 равномерно сходится к функции f из L_1, то эта последовательность сходится к f в среднем. Если последовательность (f_n) сходится к f в среднем, то она сходится к f по мере на E.

Доказательство. Пусть последовательность (f_n) сходится к f равномерно на E. Тогда для $\varepsilon>0$ найдется номер n_0 такой, что $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ для всех $x\in E$ и всех $n\geq n_0$. Поэтому для $n\geq n_0$ $\|f_n-f\|_1=\int_E|f_n-f|\,d\mu\leq\varepsilon\mu E$, а это означает сходимость (f_n) к f в среднем на E.

Пусть последовательность (f_n) сходится к f в среднем на E, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_1=0$. Для любого $\sigma>0$ имеем

$$\|f_n-f\|_1\geq\int_{E(|f_n-f|\geq\sigma)}|f_n-f|\,d\mu\geq\sigma\,\mu E(|f_n-f|\geq\sigma),$$

откуда следует, что $\mu E(|f_n-f|\geq\sigma)\to 0$ при $n\to\infty$, а это означает сходимость (f_n) к f по мере на E. ▲

Заметим, что из сходимости всюду или почти всюду (f_n) к f не следует сходимости (f_n) к f в среднем и наоборот. Так на отрезке $[0,1]$ последовательность (f_n), где $f_n(x)=n$ на $]0,\frac{1}{n}]$ и нулю в остальных точках, сходится всюду к 0, но не сходится к 0 в среднем. Последовательность, приведенная в виде примера на стр.37, сходится к 0 в среднем, но ни в одной точке не сходится к 0 на $[0,1]$.

Теорема 2. Пространство L_1 полное в метрике ρ_1.

Доказательство. Полнота означает, что всякая фундаментальная последовательность (f_n) в L_1 сходится в среднем к некоторой функции из L_1. Благодаря фундаментальности для $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ найдется номер n_k такой, что при $n, m \geq n_k$ имеем $\| f_n - f_m \|_1 < \frac{1}{2^k}$, причем номера n_k можно выбирать возрастающими.

Рассмотрим ряд $|f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \ldots$. Его частичные суммы образуют неубывающую последовательность, а интегралы от них ограничены одной постоянной $K = \int_E |f_{n_1}| d\mu + 1$. Поэтому по теореме Леви этот ряд почти всюду на E сходится. Если сходится ряд из модулей, то сходится и ряд $f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \ldots$, частичные суммы которого равны f_{n_k}. Итак, подпоследовательность (f_{n_k}) почти всюду на E сходится к некоторой функции f. Используя фундаментальность исходной последовательности, по $\varepsilon > 0$ найдем n_0 такое, что $\int_E |f_{n_k} - f_{n_\ell}| d\mu < \varepsilon$ при $n_k, n_\ell \geq n_0$. Так как при $\ell \to \infty$ почти всюду на E $f_{n_k} - f_{n_\ell}$ стремится к $f_{n_k} - f$, то по теореме Фату $\| f_{n_k} - f \|_1 = \int_E |f_{n_k} - f| d\mu \leq \varepsilon$. Отсюда $f_{n_k} - f \in L_1$, а потому и $f = f_{n_k} - (f_{n_k} - f) \in L_1$. Кроме того, последнее неравенство означает, что подпоследовательность (f_{n_k}) сходится к f в среднем. Из неравенства

$$\| f_n - f \|_1 \leq \| f_n - f_{n_k} \|_1 + \| f_{n_k} - f \|_1$$

и фундаментальности всей последовательности (f_n) следует, что она вся также сходится к f в среднем. ▲

Полные нормированные пространства в честь С.Банаха[16] называются банаховыми. Итак, L_1 банахово пространство.

[16] Стефан Банах (1892-1945) - польский математик.

8. Пространство L_2. Совокупность всех функций f, для которых квадрат f^2 суммируем на E, обозначим $L_2(E)$, или короче L_2. Это линейное пространство, так как $[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]^2 \leq 2[c_1^2 f_1^2(x) + c_2^2 f_2^2(x)]$. Роль нуля θ в L_2 исполняет функция $f \equiv 0$.

Если f и g функции из L_2, то согласно неравенству $|f(x) g(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$ определена величина

$$(f, g) = \int_E f g \, d\mu . \tag{12}$$

Эта величина обладает свойствами: а) $(f, f) \geq 0$, б) $(f,g) = (g,f)$, в) $(c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)$, характерными для скалярного произведения. Однако не выполнено важное свойство скалярного произведения: из $(f,f) = 0$ не следует $f = \theta$ (а только $f \sim \theta$). Поэтому элементами L_2 считают не отдельные функции, а классы эквивалентных между собой функций (эквивалентные функции не различают). При этом условии L_2 становится эвклидовым пространством со скалярным произведением, определенным равенством (12). Скалярное произведение в L_2 порождает норму и метрику:

$$\| f \|_2 = (f, f)^{1/2} = \left(\int_E f^2 d\mu \right)^{1/2}, \quad \rho_2(f, g) = \| f - g \|_2 .$$

При изучении L_2 важную роль играет следующее неравенство Коши - Буняковского[17]

$$(f, g) \leq \| f \|_2 \, \| g \|_2 . \tag{13}$$

Докажем его. При любом λ справедливо неравенство

$$\| f + \lambda g \|_2^2 = (f + \lambda g, f + \lambda g) = (f, f) + 2\lambda (f, g) + \lambda^2 (g, g) \geq 0 .$$

Так как квадратный трехчлен относительно λ неотрицателен, то его дискриминант $(f, g)^2 - (f, f)(g, g) \leq 0$, откуда и

[17] Огюстен Луи Коши (1789-1857) - французский математик. Виктор Яковлевич Буняковский (1804-1889) - русский математик.

следует (I3).

Из неравенства $|f(x)|=|f(x)|\cdot 1 \leq \frac{1}{2}[f^2(x)+1]$ следует, что каждая функция из L_2 принадлежит L_1, то есть имеет место включение $L_2 \subset L_1$. При этом для норм, согласно (I3), справедливо неравенство

$$\|f\|_1 = (|f|, 1) \leq \|f\|_2 \sqrt{\mu E}.$$

Определение. Сходимость последовательности функций по метрике ρ_2 называется сходимостью в среднем квадратичном.

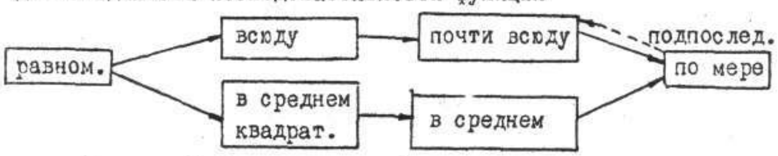
Теорема I. Если последовательность функций (f_n) из L_2 равномерно сходится к функции f из L_2, то эта последовательность сходится к f в среднем квадратичном. Если последовательность (f_n) сходится к f в среднем квадратичном, то она сходится к f и в среднем на E.

Доказательство. Первое утверждение следует из неравенства

$$\|f_n - f\|_2 \leq \sup_x \{|f_n(x) - f(x)|\} \mu E,$$

а второе из $\|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - f\|_2 \sqrt{\mu E}$. ▲

Приведем схему, на которой указана связь различных видов сходимости последовательности функций



Теорема 2. Пространство L_2 полное в метрике ρ_2.

Доказательство. Требуется доказать, что любая последовательность (f_n), фундаментальная в метрике ρ_2, сходится к некоторой функции из L_2 в среднем квадратичном. Так как $\|f_n - f_m\|_1 \leq \|f_n - f_m\|_2 \sqrt{\mu E}$, то последовательность (f_n) будет фундаментальной и в метрике ρ_1, причем входит в L_1. Отсюда, как было показано в теореме 2 предыдущего пункта, следует сходимость почти всюду некоторой подпоследовательности (f_{n_k}) к функции f. Из неравенств

$\int_E |f_{n_k} - f_{n_l}|^2 d\mu < \varepsilon^2$ для всех достаточно больших n_k и n_l по теореме Фату следует при $l \to \infty$, что $\|f_{n_k} - f\|_2 \leq \varepsilon$ для всех n_k, начиная с некоторого номера. Поэтому $f_{n_k} - f \in L_2$ и $f = f_{n_k} - (f_{n_k} - f) \in L_2$; кроме того, видна сходимость (f_{n_k}) к f в среднем квадратичном. Из неравенств

$$\|f_n - f\|_2 \leq \|f_n - f_{n_k}\|_2 + \|f_{n_k} - f\|_2$$

и фундаментальности всей последовательности (f_n) следует, что она вся также сходится к f в среднем квадратичном.

Полные эвклидовы пространства в честь Д.Гильберта[18] называются гильбертовыми. Итак, L_2 гильбертово пространство.

Глава УI. РЯДЫ ФУРЬЕ[19]

I. Ортогональные системы функций. Тригонометрическая система. Рассмотрим более подробно свойства пространства $L_2(E)$.

Определение. Функции f и g из $L_2(E)$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю

$$(f, g) = \int_E f g \, d\mu = 0.$$

Функция f из $L_2(E)$ называется нормированной, если

$$\|f\|_2 = \left(\int_E f^2 d\mu \right)^{1/2} = 1.$$

Система функций $\{e_k\}$ из $L_2(E)$ называется ортонормированной, если эти функции нормированы и попарно ортогональны.

$$(e_k, e_m) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \neq m, \\ 1, & \text{если} \quad k = m. \end{cases}$$

Заметим, что любую функцию f из $L_2(E)$ можно нормировать, разделив ее на ее норму: $e = \frac{f}{\|f\|_2}$ $(\|f\|_2 \neq 0)$.

---

[18] Давид Гильберт (1862-1943) - немецкий математик.

[19] Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830) - французский математик.

Классическим примером попарно ортогональных функций является счетная тригонометрическая система

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots\}$$

на отрезке $E=[-\pi,\pi]$. Действительно, при $k\neq m$ (включая случай $k=0$)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k-m)x+\cos(k+m)x]\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k-m)x-\cos(k+m)x]\, dx = 0,$$

а так как $\sin mx$ нечетен, то при любых k и m

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \sin mx\, dx = 0.$$

Здесь вместо интегралов Лебега фигурируют равные им интегралы Римана. Нетрудно вычислить нормы $\|1\|_2=\sqrt{2\pi}$, $\|\cos kx\|_2=\sqrt{\pi}$, $\|\sin kx\|_2=\sqrt{\pi}$. Поэтому после нормировки получаем ортонормированную систему тригонометрических функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ на $[-\pi;\pi]$.

Аналогично проверяется, что на отрезке $[-l,l]$ ортонормированной системой будет $\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}$.

2. Ряд Фурье. Если функция f из $L_2(E)$ является линейной комбинацией функций из ортонормированной системы $\{e_k\}$: $f=\sum_{k=1}^{n} c_k e_k$, то при помощи скалярного произведения легко найти все коэффициенты этой комбинации. Действительно,

$$(f,e_m)=\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_m\right)=\sum_{k=1}^{n} c_k (e_k,e_m) = c_m.$$

Пусть система $\{e_k\}$-счетная и ортонормированная.

Определение. Для каждой функции f из $L_2(E)$ числа $c_k=(f,e_k)$ называются коэффициентами Фурье, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ рядом Фурье по ортонормированной системе $\{e_k\}$.

В случае тригонометрической системы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right\}$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ ряд Фурье имеет вид

$$c_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k'\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx + c_k''\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right),$$

где $c_0=\left(f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$, $c_k'=\left(f,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx\right)$, $c_k''=\left(f,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx\right)$.

Введем новые обозначения $a_0=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}c_0$, $a_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}c_k'$, $b_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}c_k''$.

Тогда ряд Фурье примет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k \sin kx), \qquad (I)$$

а для коэффициентов будут формулы

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f\, d\mu, \quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f\cdot\cos kx\, d\mu, \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi;\pi]} f\cdot \sin kx\, d\mu. \qquad (2)$$

За ними сохраняется название коэффициентов Фурье.

Аналогично в случае тригонометрической системы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}$ на отрезке $[-l,l]$ ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right), \qquad (3)$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{[-l,l]} f\, d\mu, \quad a_k=\frac{1}{l}\int_{[-l,l]} f\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\, d\mu, \quad b_k=\frac{1}{l}\int_{[-l,l]} f\cdot \sin\frac{k\pi x}{l}\, d\mu \qquad (4)$$

Из формул (2) для коэффициентов Фурье по тригонометрической системе (I) видно, что если функция f на отрезке $[-\pi,\pi]$ нечетная, то все $a_k=0$ и ряд Фурье содержит только синусы. Если же функция f на $[-\pi,\pi]$ четная, то все $b_k=0$ и ряд Фурье содержит только косинусы. Например, для функции $y=x$ на $[-\pi,\pi]$ ряд Фурье имеет вид

$$2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right),$$

а для функции $y=|x|$ на $[-\pi,\pi]$ – вид

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5}+\dots\right).$$

Если функция f на отрезке $[-\pi,\pi]$ является суммой равномерно сходящегося ряда вида

$$f(x)=\frac{a_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^*\cos kx+b_k^*\sin kx),$$

то этот ряд является рядом Фурье для f. Действительно, умножая это равенство на $\cos kx$ или $\sin kx$ и почленно интегрируя (что при равномерной сходимости возможно), получим $a_k^*=a_k$ и $b_k^*=b_k$.

Возникают важные вопросы: сходится ли ряд Фурье в том или ином смысле, а, если сходится, будет ли функция f его суммой. В последнем случае говорят, что функция f разлагается в ряд Фурье.

3. Равенство Парсеваля[20]. В пространстве $L_2(E)$ рассмотрим счетную ортонормированную систему $\{e_k\}$ и любую линейную комбинацию $\sum_{k=1}^{n} d_k e_k$ первых n функций этой системы. Для расстояния (в метрике ρ_2) от функции f из $L_2(E)$ до этой комбинации имеем равенство

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}d_ke_k\|_2^2=(f-\sum_{k=1}^{n}d_ke_k,f-\sum_{k=1}^{n}d_ke_k)=\|f\|_2^2-2\sum_{k=1}^{n}d_kc_k+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}d_k^2=\|f\|_2^2-\sum_{k=1}^{n}c_k^2+\sum_{k=1}^{n}(c_k-d_k)^2,$$

где c_k коэффициенты Фурье функции f по данной системе. Видно, что расстояние наименьшее, если $d_k=c_k$, причем

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{k=1}^{n}c_k^2. \tag{5}$$

Итак, среди всех линейных комбинаций $\sum_{k=1}^{n}d_ke_k$ ближе всех к f находится частичная сумма ряда Фурье $S_n=\sum_{k=1}^{n}c_ke_k$.

Так как $\|f-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|_2^2\geqslant 0$, то из (5) следует неравенство $\sum_{k=1}^{n}c_k^2\leqslant\|f\|_2^2$, верное для любого n.

[20] М.Парсеваль (1755-1836) – французский математик.

Это означает, что ряд квадратов коэффициентов Фурье всегда сходится и справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\leqslant\|f\|_2^2,$$

называемое неравенством Бесселя[21]. В частности, для функции f может быть выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|_2^2, \tag{6}$$

которое называется равенством Парсеваля. Наличие равенства Парсеваля, согласно (5), равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-S_n\|_2=0$. Последнее означает, что ряд Фурье для f сходится к функции f по метрике ρ_2, то есть в среднем квадратичном на E.

Определение. Система функций $\{e_k\}$ называется полной в $L_2(E)$, если множество линейных комбинаций функций этой системы плотно в $L_2(E)$, то есть замыкание множества линейных комбинаций совпадает с $L_2(E)$.

Полнота ортонормированной системы $\{e_k\}$, согласно минимизирующему свойству частичных сумм S_n рядов Фурье, приводит к тому, что $\|f-S_n\|_2$ для любой функции f может быть сделана сколь угодно малой, а потому для любой функции f из $L_2(E)$ выполнено равенство Парсеваля (6). Верно и обратное: если для любой функции f из $L_2(E)$ выполнено равенство Парсеваля (6), то система $\{e_k\}$ полная в $L_2(E)$. Это следует из (5).

Теорема. Для любой функции f из $L_2(E)$ ряд Фурье по любой счетной ортонормированной системе $\{e_k\}$ сходится в метрике ρ_2. Если для f выполнено равенство Парсеваля (6), то ряд Фурье сходится к f в метрике ρ_2.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2$ сходится, то его частичные суммы образуют фундаментальную последовательность. Для любой функции f рассмотрим последовательность (S_n) час-

[21] Фридрих Вильгельм Бессель (1784-1846) – немецкий астроном.

тичных сумм ряда Фурье по системе $\{e_k\}$. Имеем (для $m < n$)

$$\|S_n - S_m\|_2^2 = \left(\sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k, \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k\right) = \sum_{k=m+1}^{n} c_k^2.$$

Последняя величина может быть сделана меньше любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших m. Это означает, что последовательность (S_n) фундаментальна в метрике ρ_2. А так как пространство $L_2(E)$ полное, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Если для f выполнено равенство Парсеваля, то, как уже отмечалось, $S = f$. ▲

4. Разложение гладкой и кусочно гладкой функции в тригонометрический ряд Фурье. Отметим (без доказательства) важный факт: в пространстве $L_2([-\pi, \pi])$ тригонометрическая система $\{1, \cos kx, \sin kx\}$ является полной. Это означает, что для любой функции f из $L_2([-\pi, \pi])$ ее тригонометрический ряд Фурье сходится к ней в среднем квадратичном. Однако для приложений более важную роль играют равномерная сходимость или сходимость всюду ряда Фурье к функции f.

Напомним, что функция, заданная на отрезке, называется гладкой, если она на этом отрезке имеет непрерывную производную.

Теорема I. Если функция f на отрезке $[-\pi, \pi]$ гладкая и $f(-\pi) = f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье (I) этой функции сходится к ней равномерно.

Доказательство. Непрерывные на $[-\pi, \pi]$ функции, очевидно, входят в $L_2([-\pi, \pi])$. Пусть a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции f, а a_k', b_k' – функции f'. Для $k > 0$ интегрирование по частям (в интегралах Римана) дает

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\sin kx}{k}\,dx = -\frac{1}{k}b_k',$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = -\frac{1}{\pi}\left[f(x)\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\cos kx}{k}\,dx = \frac{1}{k}a_k.$$

По неравенству Коши для любого n имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}|b_k'| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k'|^2\right)^{1/2}.$$

Это означает, что сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Аналогичный вывод для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|$. А так как $|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k|$, то для ряда Фурье (I) имеет место признак равномерной сходимости Вейерштрасса[22]. Итак, ряд Фурье (I) равномерно сходится к сумме $S(x)$, а потому сходится к $S(x)$ и в среднем квадратичном, то есть по метрике ρ_2. Но этот ряд сходится по метрике ρ_2 также и к функции f. Поэтому $\rho_2(f, S) = 0$, а это означает эквивалентность $S \sim f$. Остается заметить, что S и f непрерывны на $[-\pi, \pi]$, а в этом случае эквивалентность означает равенство $S = f$. Действительно, если бы в некоторой точке x_0 было $S(x_0) - f(x_0) \neq 0$, то, благодаря непрерывности, в некоторой окрестности $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [-\pi, \pi]$ было бы $S(x) - f(x) \neq 0$, а это противоречит эквивалентности $S \sim f$. ▲

Определение. Функция f, заданная на отрезке, называется кусочно гладкой, если в каждой точке x отрезка она имеет конечные правый и левый пределы, совпадающие с $f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек, и конечные правую и левую производные, совпадающие всюду кроме конечного числа точек. При этом на концах отрезка рассматриваются пределы и производные односторонние.

Теорема 2. Если функция f на отрезке $[-\pi, \pi]$ кусочно гладкая, то тригонометрический ряд Фурье (I) этой функции сходится всюду. Сумма ряда Фурье равна $f(x)$ в точках непрерывности этой функции, равна $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$

---

[22] Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815-1897) – немецкий математик.

в точках ее разрыва внутри отрезка и равна

$\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$ на концах отрезка.

Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных выкладок.

Так как $\cos kv \sin\frac{v}{2}=\frac{1}{2}[\sin(k+\frac{1}{2})v-\sin(k-\frac{1}{2})v]$, то после сложения этих равенств для $k=0,1,\ldots,n$ получим

$$\frac{1}{2}+\cos v+\cos 2v+\ldots+\cos nv=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{2\sin\frac{v}{2}}. \tag{7}$$

Проинтегрируем это равенство в пределах от 0 до π:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{\sin\frac{v}{2}}\,dv=1. \tag{8}$$

Данную функцию f рассмотрим на $]-\pi,\pi]$ и продолжим на всю числовую ось как периодическую с периодом 2π. После этого частичная сумма $S_n(x)$ ряда Фурье функции f допускает удобное представление

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\Big[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cos ku+$$
$$+\sin kx\sin ku)\Big]du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\Big[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-u)\Big]du=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-u)}{2\sin\frac{x-u}{2}}\,du=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(x-v)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{2\sin\frac{v}{2}}\,dv.$$

Здесь были использованы формулы для коэффициентов Фурье (2) в предположении, что фигурирующие в них интегралы - это интегралы Римана, равенство (7), а также замена переменной $u=x-v$. Так как подинтегральная функция в последнем интеграле имеет период 2π, то пределы интегрирования можно заменить на $-\pi$ и π. Итак,

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-v)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{2\sin\frac{v}{2}}\,dv=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x-v)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{2\sin\frac{v}{2}}\,dv+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x-v)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{2\sin\frac{v}{2}}\,dv.$$

Заменяя в последнем интеграле v на $-v$, окончательно получим

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+v)+f(x-v)}{2}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{\sin\frac{v}{2}}\,dv. \tag{9}$$

Лемма. Если функция φ на отрезке $[a,b]$ интегрируема по Риману, то

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b\varphi(v)\sin pv\,dv=0.$$

Доказательство. Разобьем $[a,b]$ на частичные отрезки точками v_k $(k=0,1,\ldots,n)$. Обозначим через m_k и M_k точные границы значений φ на частичных отрезках $[v_k,v_{k+1}]$, а через $\omega_k=M_k-m_k$ — соответствующие колебания φ. Тогда

$$\Big|\int_a^b\varphi(v)\sin pv\,dv\Big|=\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{v_k}^{v_{k+1}}[\varphi(v)-m_k]\sin pv\,dv+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}m_k\int_{v_k}^{v_{k+1}}\sin pv\,dv\Big|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta v_k+\sum_{k=0}^{n-1}|m_k|\cdot\frac{2}{p}.$$

Для любого $\varepsilon>0$ сначала выберем разбиение $[a,b]$ такое, чтобы было $\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta v_k<\frac{\varepsilon}{2}$. Это возможно благодаря интегрируемости φ по Риману. Затем найдем такое p_0, что $\frac{2}{p}\sum_{k=0}^{n-1}|m_k|<\frac{\varepsilon}{2}$ для всех $p\geqslant p_0$. В результате при $p\geq p_0$ имеем $\left|\int_a^b \varphi(v)\sin pv\,dv\right|<\varepsilon$. ▲

Доказательство теоремы 2. Кусочная непрерывность функции f позволяет в формулах коэффициентов Фурье пользоваться интегралами Римана. Для любой точки x отрезка $[-\pi,\pi]$ согласно (8) и (9) имеем

$$S_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\varphi_1(v)+\varphi_2(v)]\sin(n+\tfrac{1}{2})v\,dv,$$

где

$$\varphi_1(v)=\frac{f(x+v)-f(x+0)}{2}\,\frac{1}{\sin\frac{v}{2}},\quad \varphi_2(v)=\frac{f(x-v)-f(x-0)}{2}\,\frac{1}{\sin\frac{v}{2}}.$$

Согласно лемме теорема будет доказана, если показать, что функции φ_1 и φ_2 интегрируемы по Риману на отрезке $[0,\pi]$. Запишем $\varphi_1(v)$ в следующем виде:

$$\varphi_1(v)=\frac{f(x+v)-f(x+0)}{v}\,\frac{\frac{v}{2}}{\sin\frac{v}{2}}.$$

В любой точке $v\neq 0$ эта функция имеет конечные правый и левый пределы, совпадающие всюду с $\varphi_1(v)$ кроме конечного числа точек. При $v\to+0$ второй множитель стремится к 1, а первый множитель имеет конечный предел $f'(x+0)$. Следовательно, $\varphi_1(v)$ кусочно непрерывна и потому интегрируема по Риману. Для $\varphi_2(v)$ рассуждения аналогичны. Остается заметить, что в точках непрерывности f выполнено равенство

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] \quad . ▲$$

В заключение приведем несколько замечаний. Члены ряда Фурье (I) и его сумма $S(x)$ (в случае сходимости в точке x) заданы на всей оси и имеют период 2π. Функция же f может быть задана только на $[-\pi,\pi]$. Поэтому следует помнить, что вне $[-\pi,\pi]$ S следует сравнивать с 2π-периодическим продолжением f на всю ось.

Если функция f задана на $[-\pi,\pi]$, то ряд Фурье определяется однозначно. Если f задана на $[0,\pi]$ и разными способами продолжена на $[-\pi,0[$, то получаем разные ряды Фурье (с одинаковым поведением на $[0,\pi]$). Среди таких продолжений выделяются продолжения по правилу четности или нечетности. Ряды при этом содержат или только косинусы, или только синусы.

Все изложенное легко переносится на случай отрезка $[-\ell,\ell]$ и рядов Фурье вида (3).

5. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье. Ряд Фурье (I) можно записать в другом виде, если воспользоваться формулами Эйлера[23]

$$\cos kx=\frac{1}{2}(e^{ikx}+e^{-ikx}),\qquad \sin kx=\frac{1}{2i}(e^{ikx}-e^{-ikx}).$$

При подстановке получаем

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-ib_k}{2}e^{ikx}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ikx}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}, \tag{10}$$

где $c_0=\frac{a_0}{2}$, $c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$, $c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$,

откуда общая формула для коэффициентов (k – целое):

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f\cdot e^{ikx}\,d\mu .$$

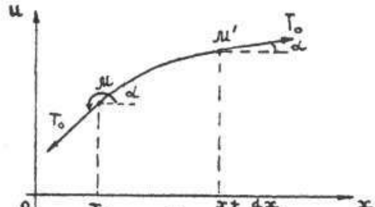
---

[23] Леонард Эйлер (I707-I783) – род. в Швейцарии; академик Петербургской АН.

Ряд (I0) называется комплексной формой тригонометрического ряда Фурье.

6. Решение уравнения колебания струны методс Фурье. В качестве приложения рядов Фурье рассмотрим задачу о свободных колебаниях струны конечной длины, закрепленной на концах.

Струна - это гибкая тонкая нить длины ℓ, совпадающая с отрезком $[0,\ell]$ в состоянии равновесия. На струну действуют силы натяжения постоянной величины T_0. Пусть линейная плотность струны ρ постоянна. Если струну вывести из состояния равновесия, то под действием только сил натяжения возникают свободные колебания. Ограничимся изучением только поперечных малых колебаний. Величина u поперечного смещения каждой точки струны есть функция координаты x этой точки и времени t. Малость колебаний означает малость углов α наклона касательной к струне в процессе колебаний, при которой можно пренебрегать степенями α выше первой. Тогда $\sin\alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$.



Черт.2

Участок $[x, x+dx]$ струны в процессе колебания имеет вид дуги $\mathcal{M}\mathcal{M}'$ (см.черт.2). В точках $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ приложены силы натяжения величины T_0, направленные по касательным к струне в разные стороны от дуги. Их вертикальные составляющие в сумме дают

$$T_0 \sin\alpha\Big|_{x+dx} - T_0\sin\alpha\Big|_{x} \approx T_0\left[\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}\right] \approx$$

$$\approx T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx .$$

По второму закону динамики эта сила равна произведению массы дуги $\rho\,dx$ на ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{II}$$

где $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$. Это уравнение свободных колебаний струны. Оно является дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Для конкретного решения задачи требуется кроме уравнения (II) задать дополнительные условия. Такими условиями являются:

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \tag{I2}$$

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad u\Big|_{x=\ell} = 0. \tag{I3}$$

Условия (I2) называются начальными, они для каждой точки x задают положение и скорость в начальный момент $t=0$. Условия (I3) называются краевыми, они означают закрепление концов струны.

Сначала попытаемся найти решения уравнения (II), удовлетворяющие краевым условиям (I3). Видно, что любая линейная комбинация таких решений удовлетворяет уравнению (II) и условиям (I3). Решения будем искать в виде произведения $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ двух функций (одна зависит от x, другая от t), где $X(0) = X(\ell) = 0$. Подстановка в уравнение (II) дает $T''(t)\,X(x) = a^2\,T(t)\,X''(x)$ или

$$\frac{T''(t)}{a^2\,T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} .$$

Так как переменные x и t независимы, то последнее равенство возможно лишь при постоянстве обеих его частей. Обозначая эту постоянную через c, получим два уравнения

$$T''(t) - ca^2 T(t) = 0\ , \tag{I4}$$

$$X''(x) - cX(x) = 0\ . \tag{I5}$$

Это обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Для (I5) характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - c = 0$, а его корни $\lambda = \pm\sqrt{c}$. Рассмотрим три возможных случая и выясним, когда для $X(x)$ получается нетривиальное (отличное от тождественного нуля) решение.

а) Пусть $c>0$. Тогда корни характеристического уравнения действительные и различные, а $X(x) = C_1 e^{\sqrt{c}x} + C_2 e^{-\sqrt{c}x}$. Краевые условия $X(0)=X(\ell)=0$ дают систему для определения постоянных C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{c}\ell} + C_2 e^{-\sqrt{c}\ell} = 0, \end{cases}$$

которая имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$.

б) Пусть $c=0$. Корни характеристического уравнения оба равны нулю, а $X(x) = C_1 + C_2 x$. Краевые условия снова приводят к тривиальному решению $C_1 = C_2 = 0$.

в) Пусть $c<0$. Корни характеристического уравнения комплексные $\lambda = \pm i\sqrt{|c|}$, а $X = C_1 \cos\sqrt{|c|}\,x + C_2 \sin\sqrt{|c|}\,x$. Краевые условия дают систему

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos\sqrt{|c|}\,\ell + C_2 \sin\sqrt{|c|}\,\ell = 0. \end{cases}$$

Нетривиальное решение $C_2 \neq 0$ возможно лишь при $\sin\sqrt{|c|}\,\ell = 0$, то есть при $c = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$, где k любое натуральное. В этом случае $X(x) = C_2 \sin\frac{k\pi x}{\ell}$, где $C_2 = \text{const}$. Из уравнения (I4) при тех же значениях $c = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2$ получаем $T(t) = \tilde{C}_1 \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + \tilde{C}_2 \sin\frac{k\pi a t}{\ell}$, где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ постоянные. Перемножим $X(x)$ и $T(t)$, а затем рассмотрим линейную комбинацию всех полученных произведений. В результате получим ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell}, \tag{I6}$$

удовлетворяющий уравнению (II) и краевым условиям (I3). При этом предполагается, что ряд (I6) можно дважды дифференцировать (по t и по x) и полученные таким образом ряды равномерно сходятся.

Остается подобрать коэффициенты A_k и B_k так, чтобы удовлетворялись также и начальные условия (I2). Эти условия приводят к равенствам

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}\ , \qquad \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi a}{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}.$$

Это разложения $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ на отрезке $[0,\ell]$ в ряды по синусам. Они являются рядами Фурье продолжения функций φ_0 и φ_1 на отрезок $[-\ell,\ell]$ по правилу нечетности. Поэтому для A_k и B_k получаем формулы

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi_0(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx\ ,$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx .$$

Они завершают решение задачи.

Условия дифференцируемости и сходимости рядов заведомо выполнены, если φ_0 трижды, а φ_1 дважды непрерывно дифференцируемы.

Видно, что для каждой точки $x \in [0, l]$ решение (I6)-это сумма гармонических колебаний с частотами, кратными $\frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. Это частота основного тона струны. Видна ее зависимость от длины l, натяжения T_0 и плотности ρ.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Мощность множества

Глава II. Множества на числовой прямой

Глава III. Функции с ограниченным изменением

Глава IУ. Мера Лебега

Глава У. Интеграл Лебега

Глава УI. Ряды Фурье

Абрам Исаакович Поволоцкий
Леонид Моисеевич Лихтарников

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

Тематический план 1987 года, позиция 268
Редактор И.Л.Климович
Технический редактор К.П.Орлова

Подписано к печати 19.01.87.
Формат бумаги 60x84 1/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл.печ.л. 5,0. Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 1000 экз. Цена 75 коп.
Заказ 67.
Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени
государственный педагогический институт имени А.И.Герцена.
191186, Ленинград, наб.р.Мойки, д.48.

РТП ЛГПИ им. А.И.Герцена, 191186, Ленинград, наб.р.Мойки, д.48.