Федеральное агентство по образованию

Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого

Л.Е. Бритвина

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению типового расчетного задания по теме «Комплексные числа»

Учебно-методическое пособие

Великий Новгород
2008

УДК 517
ББК 22.16

Печатается по решению
РИС НовГУ

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор **Е.Ю. Панов**,
кандидат физико-математических наук, доцент **С.В. Рогозин**

Бритвина Л.Е.

Методические указания к выполнению типового расчетного задания по теме «Комплексные числа»: Учеб.-метод. пособие; НовГУ им. Ярослава Мудрого. — Великий Новгород, 2008. — 15 с.

Выполнение типовых расчетных заданий по некоторым разделам высшей математики является одним из видов самостоятельной работы студентов.

Данное пособие содержит варианты заданий по теме «Комплексные числа» и методические указания к их выполнению. Оно предназначено для студентов физико-математических специальностей, а также может быть использовано преподавателями вузов и учителями средних учебных заведений с углубленным изучением математики.

УДК 517
ББК 22.16

© Новгородский государственный университет, 2008
© Бритвина Л.Е., 2008

Цель работы – закрепление теоретических знаний по теме «Комплексные числа» и навыков решения задач, выбора наиболее рациональных способов их решения.

Введение

Самостоятельная работа студентов является одним из важных условий усвоения материала. В целях ее интенсификации рекомендуется выполнение студентами индивидуальных типовых расчетных заданий. Типовые расчетные задания по теме «Комплексные числа» состоят из трех частей:

– теоретические вопросы;

– теоретические упражнения;

– задачи и примеры.

Теоретические вопросы и теоретические упражнения являются общими для всех студентов, задачи для каждого студента группы – индивидуальные.

Типовое расчетное задание выдается на первом занятии по теме и выполняется студентами последовательно в качестве домашнего задания. Выполненное задание должно быть сдано накануне того практического занятия, на котором проводится контрольная работа. Таким образом, выполнение типового расчетного задания является одновременно и подготовкой к плановой контрольной работе.

Типовое расчетное задание выполняется в два этапа. На первом этапе каждый студент должен решить 20 различных задач из своего варианта. Правильность решения этих задач проверяется преподавателем. Предлагаются следующие правила оценивания задач: за правильное решение каждой из задач №№ 1-5, 13 начисляется 0,5 баллов, задач №№ 6-8, 10-12, 14, 20 - 1 балл, задач №№ 9, 15-19 – 1,5 балла. Максимальное число набранных баллов – 20. При выставлении оценки рекомендуется использовать следующую шкалу:

Число набранных баллов	Оценка
0 – 9,9	«неудовлетворительно»
10 – 14,9	«удовлетворительно»
15 – 17,9	«хорошо»
18 – 20	«отлично»

На втором этапе студенты защищают типовое расчетное задание. Защита проводится во внеаудиторное время в устной или письменной форме. Во время защиты студент должен уметь правильно отвечать на теоретические вопросы, объяснять решения теоретических упражнений и задач своего варианта, решать задачи из других вариантов.

Теоретические вопросы

1. Определения комплексного числа.
2. Алгебраическая форма комплексного числа. Действительная и мнимая части. Мнимая единица, чисто мнимые числа.
3. Действия над числами в алгебраической форме. Операция комплексного сопряжения, комплексно сопряженные числа.
4. Модуль и аргумент комплексного числа.
5. Геометрическое изображение комплексных чисел. Комплексная плоскость.
6. Тригонометрическая форма комплексного числа. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и наоборот.
7. Действия над числами в тригонометрической форме. Формула Муавра.
8. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа.

Теоретические упражнения

1. Что можно сказать о двух комплексных числах, если их сумма и разность одновременно представляют собой а) действительные числа; б) чисто мнимые числа?
2. Справедливо ли утверждение, если произведение равно нулю, то по крайней мере один из множителей равен нулю. Ответ обосновать.
3. Доказать, что квадрат комплексного числа $z = a+ib$ представляет собой действительное число тогда и только тогда, когда либо $a = 0$, либо $b = 0$.
4. Может ли сумма квадратов двух чисел быть отрицательной? Ответ обосновать.
5. При каком условии квадрат комплексного числа является чисто мнимым числом? В каком случае сумма и произведение двух комплексных чисел являются действительными числами?
6. Доказать свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности для операций сложения и умножения комплексных чисел.
7. Вывести формулу для извлечения квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме.

8. Доказать, что корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом являются взаимно сопряженными.

9. Доказать, что формулы Виета верны для любых квадратных уравнений, а не только для уравнений с неотрицательным дискриминантом.

10. Могут ли модулем комплексного числа одновременно быть числа r и $-r$? Могут ли аргументом одновременно быть углы α и $-\alpha$?

11. Доказать равенства:
$\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i},$
$z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad \overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$
если $z_2 \neq 0$, то $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

12. Докажите, что:
$|\overline{z}| = |z|, \quad |z| \cdot \left|\dfrac{1}{\overline{z}}\right| = 1, \quad \mathrm{Arg}\overline{z} = -\mathrm{Arg}z, \quad \mathrm{Arg}z = \mathrm{Arg}\dfrac{1}{\overline{z}}.$

13. Может ли случиться, что:

    (a) модуль разности двух комплексных чисел окажется равным сумме модулей этих чисел?

    (b) модуль суммы двух комплексных чисел окажется равным разности модулей этих чисел?

    (c) модуль разности двух комплексных чисел окажется большим, чем сумма модулей этих чисел?

    Ответы обосновать. Дать геометрическую интерпретацию, представляя числа векторами на комплексной плоскости.

14. Исходя из геометрических рассуждений, доказать, что для любых двух комплексных чисел справедливы неравенства:
$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 \pm z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$
Доказать эти же неравенства алгебраическим путем. Выяснить в каждом случае, когда имеет место знак равенства.

15. Используя результат, полученный в предыдущем упражнении, доказать, что для любых вещественных чисел a, b, c справедливо неравенство $|\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{a^2+b^2}| \leq |c-b|$.

16. Пусть $z = a + bi$. Верно ли, что $\arg z = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$?

17. Доказать, что сумма всех корней уравнения $x^3 = -4$ равна нулю. Доказать, что сумма всех корней n-степени из любого комплексного числа равна нулю.

18. "Очевидно, что $i^{21} = (i^4)^{\frac{21}{4}} = 1^{\frac{21}{4}} = 1$; с другой стороны, $i^{21} = (i^4)^5 \cdot i = 1^5 i = i$. Следовательно, $i = 1$". В чем ошибка?

19. Пользуясь формулой Муавра выразить $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 3\alpha$ и $\sin 3\alpha$ через тригонометрические функции аргумента α.

20. Найти все значения корней 2-4 степени из единицы. Полученные значения корней изобразить в виде точек на комплексной плоскости. Записать формулу для корня n-ой степени из единицы.

21. Доказать, что все корни n-й степени из комплексного числа $r(cos\alpha + i\sin\alpha)$ геометрически изображаются как вершины правильного n-угольника. Найти сторону этого n-угольника.

22. Доказать, что все корни n-й степени из комплексного числа можно расположить так, что в результате получится геометрическая прогрессия. Найти знаменатель этой прогрессии.

23. Пользуясь формулами Эйлера доказать тригонометрические тождества:
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$,
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.

24. Точка плоскости A изображает комплексное число $z = a + ib$. Какое число изображает точка B, симметричная точке A относительно: а) действительной оси; б) мнимой оси; в) начала координат?

25. Как, пользуясь свойствами комплексных чисел, вычислить угол z_1Oz_2, где z_1 и z_2 – произвольные точки комплексной плоскости? Как вычислить угол $z_1\xi z_2$, где ξ – третья данная точка.

26. Пусть z – данная точка комплексной плоскости. Как меняется положение точки tz при изменении t (действительный параметр): а) от 1 до $+\infty$, б) от 1 до 0, в) от 0 до $-\infty$? Как меняется положение точки $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ при изменении α (тоже действительный параметр) от 0 до 2π? от 2π до 4π? и т.д.

27. Пусть z_1 и z_2 – две данные точки. Где находится точка $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$?

Варианты расчетных заданий

1. Найти сумму и разность чисел z_1 и z_2.

1.1 $z_1 = 2 + 7i$, $z_2 = -11 + 6i$;
1.2 $z_1 = -3 + 8i$, $z_2 = -10 - 5i$;
1.3 $z_1 = 4 - 9i$, $z_2 = -9 + 4i$;
1.4 $z_1 = -5 - 11i$, $z_2 = -8 - 3i$;
1.5 $z_1 = 6 + 7i$, $z_2 = -7 + 2i$;
1.6 $z_1 = -6 + 8i$, $z_2 = 7 - 2i$;
1.7 $z_1 = 5 - 9i$, $z_2 = 8 + 3i$;
1.8 $z_1 = -4 - 10i$, $z_2 = 9 - 4i$;
1.9 $z_1 = 3 + 11i$, $z_2 = 10 + 5i$;
1.10 $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = 11 - 6i$;
1.11 $z_1 = 11 - 2i$, $z_2 = 6 + i$;
1.12 $z_1 = -10 - 3i$, $z_2 = 5 - 3i$;
1.13 $z_1 = 9 + 4i$, $z_2 = 4 + 5i$;
1.14 $z_1 = -8 - 5i$, $z_2 = 3 - 7i$;
1.15 $z_1 = 7 - 6i$, $z_2 = 2 + 9i$;
1.16 $z_1 = -7 + 6i$, $z_2 = -2 - 11i$;
1.17 $z_1 = 8 + 5i$, $z_2 = -3 + 13i$;
1.18 $z_1 = -9 - 4i$, $z_2 = -4 - 15i$;
1.19 $z_1 = 10 - 3i$, $z_2 = -5 + 17i$;
1.20 $z_1 = -11 + 2i$, $z_2 = -6 - 19i$.

2. Найти комплексно сопряженные числа к числам z_1 и z_2 из примера 1.

3. Найти $z_1 + \bar{z}_1$, $z_2 - \bar{z}_2$, $z_1\bar{z}_1$ и $z_2\bar{z}_2$, где z_1 и z_2 – числа из примера 1.

4. Изобразить числа z_1, z_2, $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 + \bar{z}_1$ и $z_2 - \bar{z}_2$ на комплексной плоскости.

5. Найти $\mathrm{Re}\, z_1$, $\mathrm{Re}\, z_2$, $\mathrm{Im}\, z_1$, $\mathrm{Im}\, z_2$ и изобразить линии на плоскости:

$$
\begin{aligned}
&y = (\mathrm{Re}\, z_1)x + \mathrm{Im}\, z_1,\\
&y = (\mathrm{Re}\, z_2)x + \mathrm{Im}\, z_2,\\
&x^2 - 2(\mathrm{Im}\, z_1)x + y^2 - 2(\mathrm{Im}\, z_2)y = 0.
\end{aligned}
$$

6. Найти $z_1 z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$ в алгебраической форме, если

6.1 $z_1 = -2 - 3i$, $z_2 = 1 + 2i$;
6.2 $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 2 - i$;
6.3 $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = -2 - 3i$;
6.4 $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 1 + 3i$;
6.5 $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3 - 3i$;
6.6 $z_1 = -1 - 3i$, $z_2 = -3 + 2i$;
6.7 $z_1 = 4 + i$, $z_2 = 1 - 3i$;
6.8 $z_1 = -4 + i$, $z_2 = -1 - 3i$;
6.9 $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 4 + 2i$;
6.10 $z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = 2 - 3i$;
6.11 $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -4 - 2i$;
6.12 $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 - 4i$;
6.13 $z_1 = -1 - 3i$, $z_2 = 3 + i$;
6.14 $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 2 - 4i$;
6.15 $z_1 = -4 + 4i$, $z_2 = 1 - i$;
6.16 $z_1 = 4 + 4i$, $z_2 = -1 + i$;
6.17 $z_1 = -2 - i$, $z_2 = -4 + 3i$;
6.18 $z_1 = 3 - i$, $z_2 = -2 - 3i$;
6.19 $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 2i$;
6.20 $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$.

7. Извлечь квадратный корень из комплексного числа z_1 (пример 6) в алгебраической форме.

8. Возвести комплексное число z_2 (пример 6) во вторую и четвертую степень в алгебраической форме.

9. Найти мнимую часть z, если

$$z = z_1^3 - \frac{z_2}{z_1}.$$

Числа z_1 и z_2 взять из примера 6.

10. Найти

10.1 $i^{14} + i^{15} + i^{16}$;
10.2 $i^{15} + i^{16} - i^{17}$;
10.3 $i^{16} - i^{17} - i^{18}$;
10.4 $i^{17} + i^{18} - i^{19}$;
10.5 $i^{18} - i^{19} + i^{20}$;
10.6 $i^{14} - i^{15} + i^{16}$;
10.7 $i^{14} + i^{15} - i^{16}$;
10.8 $i^{15} - i^{16} - i^{17}$;
10.9 $i^{15} - i^{16} + i^{17}$;
10.10 $i^{16} + i^{17} + i^{18}$;
10.11 $i^{16} - i^{17} + i^{18}$;
10.12 $i^{16} + i^{17} - i^{18}$;
10.13 $i^{17} - i^{18} + i^{19}$;
10.14 $i^{17} - i^{18} - i^{19}$;
10.15 $i^{18} + i^{19} - i^{20}$;
10.16 $i^{18} - i^{19} - i^{20}$;
10.17 $i^{15} + i^{16} + i^{17}$;
10.18 $i^{14} - i^{15} - i^{16}$;
10.19 $i^{17} + i^{18} + i^{19}$;
10.20 $i^{18} + i^{19} + i^{20}$.

11. Выполнить действия

$$\frac{(a+ib)^3 + (a-ib)^3}{(a+ib)^2 + (a-ib)^2},$$

где в качестве числа a взять первую цифру дня своего рождения, b – первую цифру месяца своего рождения, $(a, b \neq 0)$.

12. Определить, при каких действительных значениях x и y комплексные числа z_1 и z_2 а) равны; б) являются сопряженными.
12.1 $z_1 = y^2 + 10y + xi$, $z_2 = 1 - i + x^2 i$;
12.2 $z_1 = y^2 - 10y + 2xi$, $z_2 = 1 - 2i + x^2 i$;
12.3 $z_1 = y^2 + 9y - 2xi$, $z_2 = 2 - 3i + x^2 i$;
12.4 $z_1 = y^2 - 9y - xi$, $z_2 = 2 - 4i + x^2 i$;
12.5 $z_1 = y^2 + 8y + 3xi$, $z_2 = 3 - 5i + x^2 i$;
12.6 $z_1 = y^2 - 8y + 4xi$, $z_2 = 3 - 6i + x^2 i$;
12.7 $z_1 = y^2 + 7y - 4xi$, $z_2 = 4 - 7i + x^2 i$;
12.8 $z_1 = y^2 - 7y - 3xi$, $z_2 = 4 - 8i + x^2 i$;
12.9 $z_1 = y^2 + 6y + 5xi$, $z_2 = 5 - 9i + x^2 i$;
12.10 $z_1 = y^2 - 6y + 6xi$, $z_2 = 5 - 10i + x^2 i$;

12.11 $z_1 = y^2 + 5y - 6xi$, $z_2 = 6 - 10i + x^2 i$;
12.12 $z_1 = y^2 - 5y - 5xi$, $z_2 = 6 - 9i + x^2 i$;
12.13 $z_1 = y^2 + 4y + 7xi$, $z_2 = 7 - 8i + x^2 i$;
12.14 $z_1 = y^2 - 4y + 8xi$, $z_2 = 7 - 7i + x^2 i$;
12.15 $z_1 = y^2 + 3y - 8xi$, $z_2 = 8 - 6i + x^2 i$;
12.16 $z_1 = y^2 - 3y - 7xi$, $z_2 = 8 - 5i + x^2 i$;
12.17 $z_1 = y^2 + 2y + 9xi$, $z_2 = 9 - 4i + x^2 i$;
12.18 $z_1 = y^2 - 2y + 10xi$, $z_2 = 9 - 3i + x^2 i$;
12.19 $z_1 = y^2 + y - 10xi$, $z_2 = 10 - 2i + x^2 i$;
12.20 $z_1 = y^2 - y - 9xi$, $z_2 = 10 - i + x^2 i$.

13. Найти модуль и аргумент числа z и представить z в тригонометрической и показательной форме.

13.1 $z = \sqrt{3} + i$;
13.2 $z = 1 + \sqrt{3}i$;
13.3 $z = 2 + 2i$;
13.4 $z = -2\sqrt{3} + 2i$;
13.5 $z = -2 + 2\sqrt{3}i$;
13.6 $z = 3 - 3i$;
13.7 $z = 3\sqrt{3} - 3i$;
13.8 $z = 3 - 3\sqrt{3}i$;
13.9 $z = -4 - 4i$;
13.10 $z = -4\sqrt{3} - 4i$;
13.11 $z = -4 - 4\sqrt{3}i$;
13.12 $z = -5 + 5i$;
13.13 $z = 5\sqrt{3} + 5i$;
13.14 $z = 5 + 5\sqrt{3}i$;
13.15 $z = 6 + 6i$;
13.16 $z = -6\sqrt{3} + 6i$;
13.17 $z = -6 + 6\sqrt{3}i$;
13.18 $z = -6 + 6i$;
13.19 $z = 7\sqrt{3} + 7i$;
13.20 $z = 7 - 7\sqrt{3}i$.

14. Вычислить z^6 в тригонометрической и показательной форме. Число z взять из примера 13. Результат записать в алгебраической форме.

15. Вычислить $\sqrt{z}$, $\sqrt[3]{z}$, $\sqrt[4]{z}$ и $\sqrt[6]{z}$ в тригонометрической и показательной форме. Число z взять из примера 13. Решение изобразить на комплексной плоскости и по возможности записать в алгебраической форме.

16. Представить в тригонометрической форме комплексное число z.

16.1 $z = \dfrac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}}$;

16.2 $z = \dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}}$;

16.3 $z = \dfrac{i}{(1+i)^2}$;

16.4 $z = \dfrac{-\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12} - i\sin\frac{13\pi}{12}}$;

16.5 $z = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$;

16.6 $z = \dfrac{5i\left(\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ\right)}{3\left(\cos 40^\circ - i\sin 40^\circ\right)}$;

16.7 $z = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{5} + i\left(1 - \cos\frac{2\pi}{5}\right)}{i - 1}$;

16.8 $z = \dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right)}{\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)}$;

16.9 $z = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}{i-1}$; **16.10** $z = \dfrac{2\left(\cos\frac{7\pi}{3} - i\sin\frac{7\pi}{3}\right)}{\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}}$;

16.11 $z = \dfrac{3i}{\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}}$; **16.12** $z = \dfrac{-\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{7\pi}{6} - i\sin\frac{7\pi}{6}}$;

16.13 $z = \dfrac{\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2i}$; **16.14** $z = \dfrac{7\left(\cos 70^\circ + i\sin 70^\circ\right)}{4i\left(\cos 40^\circ - i\sin 40^\circ\right)}$;

16.15 $z = \dfrac{\sin\frac{3\pi}{5} + i\left(1-\cos\frac{3\pi}{5}\right)}{i+1}$; **16.16** $z = \dfrac{3\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}{5i\left(\cos\frac{3\pi}{8} - i\sin\frac{3\pi}{8}\right)}$;

16.17 $z = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(2+2i\sqrt{3}\right)}{1-i}$;

16.18 $z = \dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{i}$;

16.19 $z = \dfrac{-1-i}{-\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}}$; **16.20** $z = \dfrac{i\left(\cos\frac{11\pi}{3} - i\sin\frac{11\pi}{3}\right)}{-\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}}$.

17. Записать комплексное число z в тригонометрической и показательной форме.

17.1 $z = 5\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}}(\sqrt{3}-i)^{100}$; **17.2** $z = 0.2\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{6}}\left(\dfrac{i\sqrt{3}+1}{i-1}\right)^6$;

17.3 $z = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{2}}\dfrac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}, \quad n \in N$; **17.4** $z = (\operatorname{tg} 2 - i)^4\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2}}$;

17.5 $z = \mathrm{e}^{\pi i}\left(\sin\dfrac{6\pi}{5} + i\left(1+\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)^5$;

17.6 $z = 5\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}} \cdot 0.2\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{6}}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} - i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$;

17.7 $z = \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{12}}\right)^{-3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; **17.8** $z = (\sqrt{3}-i)^6$;

17.9 $z = \dfrac{\mathrm{e}^{2\pi i}}{\cos 12^\circ + i\sin 12^\circ}$; **17.10** $z = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{3}}(1+i\sqrt{3})^7}{i}$;

17.11 $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{1}{8}i\right)^{60}$; **17.12** $z = \dfrac{(-\sqrt{3}+i)\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{12}}}{1-i}$;

17.13 $z = (-1+i)^{200}$; **17.14** $z = 6i\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}(1-i\sqrt{3})^{50}$;

17.15 $z = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{12}}\dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2}{i+1}$;

17.16 $z = \mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{2}}\left(\sin\dfrac{3\pi}{4} + i\left(1+\cos\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)^4$;

17.17 $z = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}}\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{6}}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$; **17.18** $z = (1-i\sqrt{3})^7\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{3}}\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{6}}i$;

17.19 $z = \dfrac{(2+2i)^3 \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{12}}}{3i+\sqrt{3}}$;

17.20 $z = \left(\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{6}}\right)^{-2} \left(-\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

18. Решить уравнение

18.1 $z^n = \bar{z}, \quad n \in N$;
18.2 $z^2 = \bar{z}^3$;
18.3 $z^6 + 64 = 0$;
18.4 $z^5 = 1 + \sqrt{3}$;
18.5 $z^4 + 1 = 0$;
18.6 $z^3 = 1 + i$;
18.7 $z^4 - 144 = 0$;
18.8 $z^6 = \sqrt{3} - i$;
18.9 $z^4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$;
18.10 $z^5 = -3 - 3\sqrt{3}i$;
18.11 $z^3 = -\sqrt{3} - 3i$;
18.12 $z^6 + 2 - 2i = 0$;
18.13 $z^6 + 6i = 6$;
18.14 $z^5 + \sqrt{3} = 0$;
18.15 $z^4 + 16 = 0$;
18.16 $z^6 - 64i = 0$;
18.17 $z^4 = 4 + 4i$;
18.18 $z^3 = \bar{z}^2$;
18.19 $\bar{z} = z^4$;
18.20 $z^4 - 16i = 0$.

19. Решить уравнение

19.1 $|z| + z = 2 + i$;
19.2 $z - |z| = 4 + 3i$;
19.3 $z^2 + |z| = 0$;
19.4 $|z| + 2z = 1 - i$;
19.5 $3z - |z| = 3 + i$;
19.6 $z^2 + 4|z| = 0$;
19.7 $|z| - 4z = 1 + i$;
19.8 $4z^2 - |z| = 0$;
19.9 $|z| + z = 2 - 2i$;
19.10 $2|z| - z = 2 + i$;
19.11 $z - |z| = 4 - 3i$;
19.12 $z^2 - |z| = 0$;
19.13 $4z - 3|z| = 4 - 3i$;
19.14 $|z| + z = 1 - 3i$;
19.15 $z^2 - 3|z| = 0$;
19.16 $|z| + 2z = 1 - 2i$;
19.17 $|z| - z = 2 - i$;
19.18 $z - 2|z| = 2 - 3i$;
19.19 $2z^2 + |z| = 0$;
19.20 $|z| + z = 2 + 2i$.

20. Изобразить множество точек на комплексной плоскости

20.1 $|z - 4| < 4$;
20.2 $1 \le |z + 3 - i| \le 3$;
20.3 $-2 < \operatorname{Re} z < 2$;
20.4 $0 < \operatorname{Im} z \le 3$;
20.5 $-\dfrac{\pi}{6} \le \arg z < \dfrac{\pi}{4}$;
20.6 $\left|\dfrac{z+3}{z-3}\right| \le 1$;
20.7 $|z + i - 1| = 5$;
20.8 $|z^2 + 1| \le 1$;
20.9 $0 < |z + \bar{z} + i| < 1$;
20.10 $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{4}$;
20.11 $-1 \le \operatorname{Re}\dfrac{1}{z} \le 1$;
20.12 $0 \le \operatorname{Im}\dfrac{1}{z} < 5$;
20.13 $-\dfrac{\pi}{3} < \arg\dfrac{1}{z} \le \dfrac{\pi}{6}$;
20.14 $\left|\dfrac{z+3}{\bar{z}+3}\right| \le 1$;
20.15 $|z\bar{z} - 2 - 2i| = 4$;
20.16 $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} \bar{z}$;
20.17 $\operatorname{Im} z\bar{z} = 4$;
20.18 $0 < \arg z^2 < \dfrac{\pi}{3}$;
20.19 $\operatorname{Im} z^2 \ge 5$;
20.20 $0 < |z^2 - 4| \le 4$.

Дополнительные задания

1. Решить уравнение:
   $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0.$

2. Решить уравнение:
   $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0.$

3. Найти комплексное число z, изображением которого является точка отрезка $z_1 z_2$, отстоящая от z_2 вдвое дальше, чем от z_1.

4. В какой вектор перейдет вектор $a + ib$ при зеркальном отображении его относительно биссектрисы первой четверти?

5. Пользуясь формулой Муавра выразить $\cos 50\alpha$, $\sin 100\alpha$, $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$ (n – натуральное) через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

6. Обобщить формулы Виета на случай уравнения n-степени.

7. Найти целое число n, если $(1+i)^n = (1-i)^n$.

8. Решить уравнение:
   $(x+i)^n - (x-i)^n = 0, \quad (x$ – действительное$).$

9. Решить уравнение:
   $\cos x + i\sin x = \sin x + i\cos x.$

10. Доказать, что многочлен
    $(\cos\alpha + x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha - x\sin n\alpha$
    делится на $x^2 + 1$.

11. Доказать, что многочлен
    $x^n \sin\alpha - \lambda^{n-1} x \sin n\alpha + \lambda^n \sin(n-1)\alpha$
    делится на $x^2 - 2\lambda x\cos\alpha + \lambda^2$.

12. Доказать, что
    $\left(\dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^n = \dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\,n\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\,n\alpha}.$

13. Докажите для комплексных чисел формулы разности n-ых степеней и бинома Ньютона:
    $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1});$
    $(a+b)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}.$

14. Исходя из геометрических рассуждений, доказать неравенства:
    $\left|\dfrac{z}{|z|-1}\right| \le |\arg z|, \quad |z-1| \le \big|\,|z|-1\big| + |z|\,|\arg z|.$

15. Доказать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2
$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.
Какую известную из геометрии теорему о диагоналях параллелограмма выражает это соотношение?

16. Доказать тождество
$|1-\overline{z_1}z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$.

17. Доказать неравенство
$|z_1+z_2|\geq\dfrac{1}{2}(|z_1|+|z_2|)\left|\dfrac{z_1}{|z_1|}+\dfrac{z_2}{|z_2|}\right|$.

18. Существуют ли два неравных комплексных числа, каждое из которых равно квадрату другого? Кубу другого? Сколько таких пар чисел имеется?

19. Показать, что если x_1, x_2 и x_3 – корни уравнения $x^3-1=0$, то справедливы следующие равенства:
$x_1+x_2+x_3=0;\quad x_1x_2x_3=1$.
Дать геометрическую интерпретацию этому утверждению.

20. x_1, x_2 и x_3 – корни уравнения $x^3-1=0$. Чему равно выражение
$\dfrac{1}{x_1^nx_2^n}+\dfrac{1}{x_2^nx_3^n}+\dfrac{1}{x_3^nx_1^n}$?

21. Написать в комплексной форме уравнение прямой $Ax+By+C=0$.

22. Написать в комплексной форме уравнения следующих линий:
   (a) равнобочной гиперболы $x^2-y^2=a^2$,
   (b) окружности $x^2+y^2+2x=0$.

23. На плоскости известно положение точки, соответствующей комплексному числу z. Как с помощью циркуля и линейки отыскать на той же плоскости точку, соответствующую комплексному числу $\dfrac{1}{z}$?

24. Вычислить суммы:
   (a) $\cos\alpha-\cos2\alpha+\cos3\alpha-\ldots+\cos99\alpha$,
   (b) $\sin\alpha-\sin2\alpha+\sin3\alpha-\ldots+\sin99\alpha$,
   (c) $1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\ldots+\cos n\alpha$,
   (d) $\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos6\alpha+\ldots+\cos100\alpha$,
   (e) $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha\ldots+\sin n\alpha$,
   (f) $1+C_n^1\cos\alpha+C_n^2\cos2\alpha+\ldots+C_n^n\cos n\alpha$.

Список литературы

[1] **Балк, М.Б.** Задачник-практикум по теории аналитических функций / М.Б. Балк, В.А. Петров, А.А. Полухин. – М.: Просвещение, 1976. – 136 с.

[2] **Гончаров, В.Л.** Теория функций комплексного переменного. – М.: Учпедгиз, 1955. – 352 с.

[3] **Гусак, А.А.** Теория функций комплексной переменной и операционное исчесление: справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак, Е.А. Бричикова, Г.М. Гусак. – Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 208 с.

[4] **Евграфов, М.А.** Сборник задач по теории аналитических функций / М.А. Евграфов, К.А. Бежанов, Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин; под общ. ред. М.А.Евграфова. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

[5] **Краснов, М.Л.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: задачи и упражнения / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1971. – 256 с.

[6] **Кудрявцев, Л.Д.** Сборник задач по математическому анализу: в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин; под общ. ред. Л.Д. Кудрявцева. – Изд. 2-е, перераб. – М.: Физматлит, 2003.
Т. 1: Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. – 496 с.

[7] **Курс лекций по теории функций комплексного переменного** / Под. ред. В.С. Абрамовича, Г.И. Савельева, Ю.Г. Овсеенко. – Новочеркасск: Ред.-изд. отдел НПИ, 1962. – 191 с.

[8] **Маркушевич, А.И.** Комплексные числа и конформные отображения. – М.: Гостехиздат, 1954. – 52 с.

[9] **Пантелеев, А.В.** Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М.: Высшая школа, 2001. – 445 с.

[10] **Сборник индивидуальных заданий по высшей математике.** В 3 ч. Ч. 2 / Под ред. А.П.Рябушко. — Мн.: Выш. школа, 1991. -– 352 с.

[11] **Фукс, Б.А.** Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б.А. Фукс, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1964. – 388 с.

[12] **Эйдерман, В.Я.** Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. – М.:Физматлит, 2002. – 256 с.

Дополнительная литература:

[13] **Ангилейко, И.М.** Задачи по теории функций комплексного переменного / И.М. Ангилейко, Р.В. Козлова. – Мн.: Выш. школа, 1976. – 128 с.

[14] **Евграфов, М.А.** Аналитические функции. – М.: Наука, 1991. – 448 с.

[15] **Кочетков, Е.С.** Алгебра и элементарные функции: в 2 ч. Ч. 2 / Е.С. Кочетков, Е.С. Кочеткова. – М.: Просвещение, 1967. – 286 с.

[16] **Ларичев, П.А.** Сборник задач по алгебре: в 2 ч. Ч. 2. – М.: Учпедгиз, 1960. – 223 с.

[17] **Лаврентьев, М.А.** Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1965. – 716 с.

[18] **Маркушевич, А.И.** Теория аналитических функций: в 2 т. Т. 1. – М.: Мир, 1978. – 487 с.

[19] **Свешников, А.Г.** Теория функций комплексного переменного / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Физматлит, 2005. – 336 с.

[20] **Сидоров, Ю.В.** Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1982. – 488 с.

[21] **Хапланов, М.Г.** Теория функций комплексного переменного: краткий курс. – М.: Просвещение, 1981. – 208 с.

[22] **Шабат, Б.В.** Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

[23] **Яглом, И.М.** Комплексные числа и их применение в геометрии. – М.:Физматгиз, 1963. – 192 с.