Министерство образования и науки Российской Федерации
Новгородский государственный университет
имени Ярослава Мудрого

Л.Е. Бритвина

ОСНОВЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Великий Новгород
2008

УДК

Печатается по решению

РИС НовГУ

Рецензенты:

Бритвина Л.Е.

Основы операционного исчисления: Учеб.-метод. пособие/ НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Великий Новгород, 2008. – 61 с.

В данном пособии рассматриваются основные понятия и приложения операционного исчисления. Его материал согласован с учебной программой по курсу "Дополнительные главы математического анализа". Оно также дополняет учебные курсы по методам математической физики основными результатами операционного исчисления.

Рекомендуется студентам и аспирантам физико-математических специальностей, может быть использовано преподавателями вузов.

УДК

© Новгородский государственный университет, 2008

© Бритвина Л.Е., 2008

Операционное исчисление – раздел математического анализа, метод которого позволяет в ряде случаев посредством простых правил решать сложные задачи. В основе метода лежит идея замены изучаемых функций (оригиналов) некоторыми другими функциями (изображениями), получаемыми из первых по определенным правилам.

Одним из важнейших источников современного операционного исчисления явилось формальное символическое исчисление, история которого ведет свое начало от немецкого математика, философа, физика, изобретателя, юриста, историка, языковеда Готфрида Вильгельма Лейбница (1646-1716). Своего апогея символическое исчисление достигло в конце XIX века в трудах английского ученого и инженера Оливера Хевисайда (1850-1925), давшего ему новые приложения. Дальнейшее развитие операционного исчисления состояло в обосновании концепций Хевисайда.

Сторонниками операционного исчисления в начале XX века было показано, что в его основе лежит применение преобразования Лапласа.

В настоящее время операционное исчисление и его многочисленные приложения получили широкое распространение. Интегральное преобразование Лапласа является наиболее изученным и часто применяеным для решения прикладных задач из всех интегральных преобразований.

С помощью операционного исчисления (преобразования Лапласа) получены решения важных практических задач механики, электротехники, математической физики, теории автоматического регулирования и т.д.

Данная работа не претендует на полноту и глубину изложения и обоснования используемых фактов и является учебно-методическим пособием по дополнительным главам математического анализа. Оно также дополняет учебные курсы по методам математической физики основными результатами операционного исчисления.

1 Функция-оригинал и функция-изображение

Определение 1. Комплекснозначная в общем случае функция $f(t)$ вещественного переменного называется *функцией-оригиналом*, если она удовлетворяет условиям:

1. Однозначна и кусочно непрерывна для любого t, $-\infty < t < \infty$, т.е. она может иметь разрывы только первого рода, причем каждый конечный интервал содержит лишь конечное число точек разрыва.

2. $f(t) \equiv 0$ для $t < 0$.

3. При $t \to +\infty$ растет не быстрее показательной функции, то есть имеет место оценка

$$|f(t)| \leq M\,\mathbf{e}^{\gamma t}, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

   где M и γ вещественные постоянные, $M > 0$.

Заметим, что часто в условии 1 в зависимости от поставленной задачи от $f(t)$ требуются более сильные ограничения, например, существование производных при $t > 0$ до определенного порядка. Условие 2 означает, что преобразуемая функция либо продолжается для $t < 0$, если она там неопределена, либо ее значения заменяются на нулевые. Например, преобразовывая $y(t) = \cos t$, полагаем, что $y(t) = 0$ при $t < 0$ и $y(t) = \cos t$ при $t \geq 0$. В третьем условии иногда требуется уточненная оценка.

Точная нижняя граница значений γ называется *показателем степени роста* $f(t)$ и будет обозначаться γ_0.

Используется и другое эквивалентное определение функции-оригинала (см. пример 2).

Определение 2. *Функцией-оригиналом* называется комплекснозначная функция $f(t)$, непрерывная на интервале $0 \leq t < +\infty$, если существует действительное число γ_0 (показатель степени роста $f(t)$) такое, что интеграл

$$J = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t} \, |f(t)| dt \tag{1.2}$$

сходится при $\gamma > \gamma_0$ и расходится при $\gamma < \gamma_0$.

Если рассматриваемый интеграл сходится при всех действительных γ, то показатель степени роста γ_0 считают равным $-\infty$; если же он расходится при всех действительных γ, то полагают $\gamma_0 = +\infty$ и говорят, что функция имеет неограниченный рост.

Изображением функции $f(t)$ назовем функию $F(p)$ комплексной переменной $p = \gamma + i\delta$, определяемую формулой:

$$F(p) = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-pt} \, f(t) dt. \tag{1.3}$$

Интеграл в правой части этого равенства называют *интегралом Лапласа*, а переход от оригинала к его изображению – *преобразованием Лапласа*.

Возможны и другие термины: $F(p)$ – образ, $f(t)$ – прообраз.

Требования на $f(t)$ обеспечивают существование интеграла в (1.3) для p из некоторой области.

Тот факт, что $F(p)$ является изображением $f(t)$ символически записывают так:

$$f(t) \risingdotseq F(p)$$

и называют *операционным* (или *операторным*) равенством.

Употребляют и другие обозначения, например,

$$F(p) = \mathrm{L}[f(t)], \quad F(p) \rightarrow f(t).$$

Пример 1 *Показать, что функция*

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad t < 0, \\ 1 & \textit{при} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

является функцией-оригиналом. $\eta(t)$ называется функцией Хевисайда, единичной функцией или функцией включения.

Решение. Пользуясь первым определением функции-оригинала, заключаем, что все три условия для этой функции выполнены:

1) функция $\eta(t)$ однозначна и кусочно-непрерывна для любого t, $-\infty < t < \infty$;

2) $\eta(t) \equiv 0$ при всех $t < 0$;

3) $|\eta(t)|$ является постоянным при $t > 0$, равным единице, поэтому $|\eta(t)| \leq 1 \cdot \mathbf{e}^{\gamma t} = \mathbf{e}^{\gamma t}$ ($M = 1$, $\gamma \geq 0$ в условии $|f(t)| \leq M\,\mathbf{e}^{\gamma t}$; нижней гранью чисел $\gamma \geq 0$ является число $\gamma_0 = 0$, при этом $|\eta(t)| \leq 1 \cdot \mathbf{e}^{0t} = 1$).

К такому же выводу приходим, принимая во внимание второе определение:

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,|f(t)|dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,|\eta(t)|dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,dt = \mathbf{e}^{-\gamma t}\left(-\frac{1}{\gamma}\right)\bigg|_0^\infty = \frac{1}{\gamma}$$

при $\gamma > 0$, так как $\mathbf{e}^{-\gamma t} \to 0$ при $t \to +\infty$. Когда $\gamma \leq 0$ интеграл расходится.

Следовательно, функция Хевисайда является оригиналом с показателем роста $\gamma_0 = 0$.

Пример 2 *Пользуясь определением 2, показать, что комплекснозначная функция $f(t)$, удовлетворяющая при всех t неравенству $|f(t)| < M\,\mathbf{e}^{at}$, где $M > 0$, $a \geq 0$, является оригиналом.*

Решение. В соответствии с условием получаем оценку для интеграла (1.2):

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,|f(t)|dt < M\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-(\gamma-a)t}\,dt.$$

Интеграл в правой части неравенства сходится при $\gamma - a > 0$, т.е. при $\gamma > a$, поэтому сходится и интеграл в левой части при $\gamma > a$. При $\gamma \leq a$ интеграл расходится. Функция $f(t)$ является оригиналом.

Пример 3 *Установить, является ли оригиналом функция* $f(t) = 1/t$.

Решение. Интеграл (1.2) в данном случае принимает вид

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,|f(t)|dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,\frac{dt}{t}.$$

Так как при $\gamma \geq 0$ $\lim\limits_{t\to 0} \mathbf{e}^{-\gamma t}\,\frac{1}{t} : \frac{1}{t} = 1$, то на основании признака сравнения для несобственных интегралов интеграл $\int\limits_0^A \mathbf{e}^{-\gamma t}\,\frac{dt}{t}$ будет расходящимся, как и интеграл $\int\limits_0^A \frac{dt}{t}$. Итак, рассматриваемый интеграл расходится при $\gamma \geq 0$. При $\gamma < 0$ интеграл также расходится.

Следовательно, функция $f(t) = 1/t$ не является оригиналом.

Пример 4 *Показать, что функция*

$$f(t) = \begin{cases} \mathbf{e}^{3t}\sin 2t & \text{\textit{при}}\quad t > 0, \\ 0 & \text{\textit{при}}\quad t < 0. \end{cases}$$

является функцией-оригиналом.

Решение. Убедимся, что все три условия, определяющие функцию-оригинал, выполняются для данной функции:

1) функция $f(t)$ однозначна и кусочно-непрерывна для любого t, $-\infty < t < \infty$;

2) $f(t) \equiv 0$ при всех $t < 0$ в соответствии с определением функции;

3) $|\,\mathbf{e}^{3t}\sin 2t| \leq \mathbf{e}^{3t}$ для любых вещественных t, так что в качестве M можно взять число, большее или равное единице, $\gamma_0 = 3$.

Пример 5 *Установить, является ли оригиналом функция*

$$f(t) = \mathbf{e}^{(3+2i)t}\,.$$

Решение. Интеграл (1.2) в данном случае принимает вид

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,|f(t)|dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,|\,\mathbf{e}^{(3+2i)t}\,|dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,\mathbf{e}^{3t}\,|\,\mathbf{e}^{2it}\,|dt.$$

Чтобы найти модуль функции $\mathbf{e}^{2it}$, воспользуемся формулой Эйлера, которая в данное задаче принимает вид $\mathbf{e}^{2it} = \cos 2t + i\sin 2t$, и формулой для модуля комплексного числа; получим

$$|\,\mathbf{e}^{2it}\,| = \sqrt{\cos^2 2t + \sin^2 2t} = 1.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,\mathbf{e}^{3t}\,|\,\mathbf{e}^{2it}\,|dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-(\gamma-3)t}\,dt.$$

Последний интеграл сходится при $\gamma > 3$ и расходится при $\gamma \le 3$, поэтому данная функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $\gamma_0 = 3$.

Пример 6 *Установить, является ли оригиналом функция*

$$f(t) = \sin\frac{1}{t}.$$

Решение. Оценим интеграл (1.2) для данного случая:

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,|f(t)|dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,|\sin\frac{1}{t}|dt \le \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,dt.$$

Последний интеграл сходится при всех $\gamma > 0$ и расходится при $\gamma \le 0$. Следовательно, данная функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $\gamma_0 = 0$.

Пример 7 *Установить, является ли оригиналом функция $f(t) = \mathbf{e}^{\alpha t}$, где $\alpha = a + ib$ – любое комплексное число.*

Решение. Рассмотрим интеграл вида (1.2):

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,|f(t)|dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,|\,\mathbf{e}^{\alpha t}\,|dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,\mathbf{e}^{at}\,|\,\mathbf{e}^{ibt}\,|dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-(\gamma-a)t}\,dt.$$

Интеграл сходится при $\gamma > a$ и расходится при $\gamma \le a$. Итак, функция $f(t) = \mathbf{e}^{\alpha t}$ является оригиналом с показателем роста $\gamma_0 = a = \operatorname{Re}\alpha$.

Пример 8 *Установить, является ли оригиналом функция* $f(t) = \mathbf{e}^{t^2}$.

Решение. Рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,|f(t)|dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\gamma t}\,\mathbf{e}^{t^2}\,dt.$$

Поскольку при любом фиксированном γ, начиная с некоторого достаточно большого t,

$$\mathbf{e}^{-\gamma t}\,\mathbf{e}^{t^2} > 1,$$

то последний интеграл расходится при всех γ. Значит, $f(t) = \mathbf{e}^{t^2}$ не является оригиналом ($\gamma_0 = +\infty$).

Задачи

В задачах 1-10 установите, какие из функций являются оригиналами и найдите показателии их роста.

1. $f(t) = \mathbf{e}^{(5+2i)t}$.
2. $f(t) = \mathbf{e}^{(2-i)t}$.
3. $f(t) = t\sin\frac{1}{t}$.
4. $f(t) = \frac{1}{t\sqrt{t}}$.
5. $f(t) = \operatorname{ch}(4-3i)t$.
6. $f(t) = \sin(2-i)t$.
7. $f(t) = \mathbf{e}^{t^3}$.
8. $f(t) = \frac{1}{t-1}$.
9. $f(t) = t^3$.
10. $f(t) = \mathbf{e}^{1/(t-1)^2}$.

Вопросы

1. Что называют функцией-оригиналом?

2. Что называют показателем роста функции $f(t)$?

3. Как определяется единичная функция Хевисайда?

4. Как определяется изображение функции $f(t)$?

5. Что называют интегралом Лапласа?

6. Что называют преобразованием Лапласа?

7. Что называют операционным равенством?

2 Условия существования изобращения и формула обращения

Первые же вопросы, возникающие после введения преобразования Лапласа, – вопросы о сходимости интеграла и об области определения изображения.

Ранее было сказано, что требования на функцию-оригинал $f(t)$ обеспечивают существование интеграла в (1.3) для p из некоторой области. Это утверждение базируется на следующих теоремах.

Так как изображение $F(p)$ является функцией комплексного переменного, то доказательства представленных в данном пункте теорем возможны только на основе теории аналитических функций комплексного переменного. Изложение данного материала выходит за рамки данного пособия, поэтому приведем основные утверждения без доказательств. Подробно читатель может ознакомиться с данным материалом в работах [,,].

Теорема 1 *Если функция-оригинал $f(t)$ имеет показатель степени роста γ_0, то интеграл (1.3) сходится абсолютно всюду в полуплоско-*

сти $\operatorname{Re} p > \gamma_0$, *при этом сходимость равномерная в любой области* $\operatorname{Re} p \geq \gamma > \gamma_0$

Из данной теоремы непосредственно следует

Теорема 2 *Если функция-оригинал* $f(t)$ *имеет показатель степени роста* γ_0, *то в области* $\operatorname{Re} p > \gamma_0$ *функция-изображение* $F(p)$ *определена, непрерывна и аналитична по* p.

В приложениях используется следующее необходимое условие существования функции-изображения (см. пример 26).

Теорема 3 *Если* $F(p)$ *изображение* $f(t)$ *с показателем степени роста* $\gamma_0 \geq 0$, *то* $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$

Более подробно с необходимыми и достаточными условиями можно познакомиться в [].

Формула (1.3) дает нам правило, по которому осуществляется переход от оригинала к его изображению. Обратный переход осуществляется с помощью формулы обращения преобразования Лапласа.

Непосредственное нахождение оригинала по изображению $F(p)$ основывается на следующей теореме.

Теорема 4 *Если функция-оригинал* $f(t)$ *с показателем степени роста* $\gamma_0 \geq 0$ *удовлетворяет условиям Дирихле, то имеет место формула обращения*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p)\, \mathbf{e}^{pt}\, dp, \tag{2.1}$$

где по определению

$$\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p)\, \mathbf{e}^{pt}\, dp = \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} F(p)\, \mathbf{e}^{pt}\, dp,$$

а $\gamma > \gamma_0$ может быть выбрано произвольно. Равенство (2.1) выполняется в каждой точке t, в которой функция $f(t)$ непрерывна.

Напомним, функция удовлетворяет условиям Дирихле, если она
1. кусочно-непрерывна;
2. кусочно-монотонна.

Интеграл в правой части формулы обращения (2.1) называют *интегралом Меллина*, а саму формулу – *формулой Римана – Меллина.*

Можно показать (см., например []), что каждая функция-оригинал однозначно восстанавливается по своему изображению с точностью до значений в точках разрыва.

При восстановлении функций-оригиналов по изображению обычно используют таблицу оригиналов и изображений (см. пункт 8). Использование формулы ображения – дело трудное. Однако с ее помощью можно получить несколько практических результатов, которые называются теоремами разложения и которые могут помочь в задаче восстановления оригиналов. Частично данный материал изложен и продемонстрирован на примерах в пункте 6 (подробно см. в []).

3 Простейшие примеры преобразований

Приведем несколько примеров нахождения изображений функций. В дальнейшем будет составлена таблица изображений наиболее часто встречающихся функций.

3.1 Функция Хевисайда (единичная функция)

Пусть

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ 1 & \text{при} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Показатель степени роста $\eta(t)$ равен 0 (см. пример 1).

$$\eta(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-pt}\, dt = \mathbf{e}^{-pt} \left(-\frac{1}{p}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{p}. \tag{3.1}$$

Здесь мы предположили, что $\operatorname{Re} p > 0$, а значит

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{e}^{-pt} = 0.$$

Любую функцию с "темным прошлым"при $t < 0$, но кусочно непрерывную и показательного роста при $t > 0$ умножением на $\eta(t)$ превращаем в функцию- оригинал, при этом сам множитель $\eta(t)$ для простоты опускается. Например, $f(t) = \cos\omega t$ означает, что $f(t) = \eta(t)\cos\omega t$. Привлекаются и функции вида $\eta(t-a)$, $a > 0$,

$$\eta(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < a, \\ 1 & \text{при} \quad t \geq a, \end{cases}$$

а также кратные $\eta(t)$:

$$f(t) = b\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ b & \text{при} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

3.2 Показательная функция

Построим изображение $f(t) = \mathbf{e}^{\alpha t}$, α – комплексное число.

$$\mathbf{e}^{\alpha t} \risingdotseq \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-pt}\, \mathbf{e}^{\alpha t}\, dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-(p-\alpha)t}\, dt = \left(-\frac{1}{p-\alpha}\right) \mathbf{e}^{-(p-\alpha)}\Bigg|_0^\infty.$$

Последний интеграл сходится для любого p, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$, в итоге

$$\mathbf{e}^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}; \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha. \tag{3.2}$$

3.3 Степенная функция

Найдем преобразование $f(t) = t^\nu$. Требования на оригинал вводят ограничение $\nu \geq 0$, однако интеграл (1.3) сходится в точке $t = 0$ и при $\nu > -1$, что позволяет построить изображение t^ν для $\nu > -1$.

$$t^\nu \doteqdot \int_0^\infty \mathbf{e}^{-pt}\, t^\nu dt, \quad \operatorname{Re} p > \gamma_0 = 0.$$

Пусть вначале $p = x$ – вещественное, тогда

$$F(x) = \int_0^\infty \mathbf{e}^{-xt}\, t^\nu dt = \frac{1}{x^{\nu+1}} \int_0^\infty s^\nu\, \mathbf{e}^{-s}\, ds, \quad s = xt.$$

Интеграл справа является значением эйлерова интеграла $\Gamma(\alpha)$ в точке $\alpha = \nu + 1$. Теперь $F(x) = \Gamma(\nu+1)x^{-(\nu+1)}$. Функцию $F(x)$ можно продолжить аналитически с луча $x > 0$ на всю правую полуплоскость $\operatorname{Re} p > 0$, полагая $F(p) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$. При дробных ν получается многозначная аналитическая функция, поэтому выбирается однозначная ветвь, как правило, в плоскости с разрезом по отрицательной части оси x, положительная при $p = 1$. Итак,

$$t^\nu \doteqdot \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \qquad \operatorname{Re} p > 0,\ \nu > -1. \tag{3.3}$$

Если $\nu = n$ – целое, то, учитывая, что $\Gamma(n+1) = n!$, имеем

$$t^\nu \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}}. \tag{3.4}$$

Задачи

В задачах 1-4 найти изображения $F(p)$ оригиналов $f(t)$.

1. $f(t) = t.$
2. $f(t) = \mathbf{e}^{(1-i)t}.$
3. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 < t < a, \\ 0 & \text{при} \quad t \geq a. \end{cases}$
4. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} & \text{при} \quad 0 \leq t \leq a, \\ 1 & \text{при} \quad t > a. \end{cases}$

Вопросы

1. Чему равно изображение единичной функции Хевисайда?

2. Чему равно изображение функции $f(t) = \mathbf{e}^{\alpha t}$?

3. Чему равно изображение функции $f(t) = t^{\nu},\ \nu > -1$?

4 Основные правила, формулы и теоремы операционного исчисления

В данном разделе мы приведем основные факты операционного исчисления. При этом многие теоремы будут сопровождать примеры, которые вместе с предыдущими составят основную таблицу.

4.1 Свойство линейности и однородности

Теорема 5 *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$, α и β комплексные постоянные, то*

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p). \tag{4.1}$$

Соотношение (4.1) следует из определения интегрального преобразования Лапласа. Оно, естественно, распространяется на конечное число слагаемых, функция в правой части определена в области $Rep > A_0$, где A_0 – максимум показателей роста функций-оригиналов левой части.

Пример 9 *Найти изображения тригонометрических и гиперболических функций $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $\operatorname{sh}\omega t$, $\operatorname{ch}\omega t$, ω –комплесная постоянная.*

Решение. Пользуясь теоремой 5 и формулой (3.2), находим

1. $$\sin\omega t = \frac{1}{2i}\left(\mathbf{e}^{i\omega t} - \mathbf{e}^{-i\omega t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}; \quad (4.2)$$

   $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|$,

2. $$\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{i\omega t} + \mathbf{e}^{-i\omega t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}; \quad (4.3)$$

   $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|$,

3. $$\operatorname{sh}\omega t = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{\omega t} - \mathbf{e}^{-\omega t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2-\omega^2}; \quad (4.4)$$

   $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re}\omega|$,

4. $$\operatorname{ch}\omega t = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{\omega t} + \mathbf{e}^{-\omega t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega}\right) = \frac{p}{p^2-\omega^2}; \quad (4.5)$$

   $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re}\omega|$.

Пример 10 *Найти изображение функции* $f(t) = \operatorname{ch} 2t + 2\,\mathbf{e}^{-3t} + 1$.

Решение. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и формулами (3.1), (3.2), (4.5), находим

$$f(t) = \operatorname{ch} 2t + 2\,\mathbf{e}^{-3t} + 1 \risingdotseq \frac{p}{p^2-4} + \frac{2}{p+3} + \frac{1}{p}.$$

Пример 11 *Найти изображение функции* $f(t) = \sin t \cdot \sin 3t$.

Решение. Преобразуя данную функцию и применяя теорему 5 и формулу (4.3), получаем

$$f(t) = \sin t \cdot \sin 3t = \frac{1}{2}(\cos 2t - \cos 4t) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+4} - \frac{p}{p^2+16}\right).$$

Пример 12 *Найти изображение функции* $\sin(t-1)\eta(t)$.

Решение. Поскольку $\sin(t-1)\eta(t) = (\sin(t)\cos 1 - \cos(t)\sin 1)\eta(t)$, $\cos 1$, $\sin 1$ – постоянные, то по свойству линейности с учетом формул (4.2)-(4.3) получаем

$$\sin(t-1)\eta(t-1) \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}\cos 1 - \frac{p}{p^2+1}\sin 1.$$

4.2 Теорема подобия

Теорема 6 *Пусть* $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\alpha > 0$, *тогда*

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{4.6}$$

Доказательство. В изображении функции $f(\alpha t)$ делая замену $t = \tau/\alpha$, получаем

$$f(\alpha t) \risingdotseq \int\limits_0^{\infty} \mathbf{e}^{-pt} f(\alpha t) dt = \int\limits_0^{\infty} \mathbf{e}^{-\frac{p}{\alpha}\tau} f(\tau) \frac{d\tau}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Теорема подобия справедлива и для комплексных α. Обоснование этого факта мы опускаем, см [].

Пример 13 *Найти изображение* $\sin \omega t$, *зная изображение* $\sin t$, ω – *комплесная постоянная.*

Решение. Поскольку $sint \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, то в соответствии с теоремой подобия получаем

$$\sin \omega t \risingdotseq \frac{1}{\omega} \frac{1}{(p/\omega)^2 + 1} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

4.3 Теорема запаздывания

Теорема 7 *Пусть* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *тогда для* $t_0 > 0$

$$f(t - t_0) \risingdotseq \mathbf{e}^{-pt_0} F(p). \tag{4.7}$$

Под функцией-оригиналом $f(t - t_0)$ понимается функция, равная 0 при $t < t_0$ и $f(t - t_0)$ при $t \geq t_0$, то есть, $f(t - t_0)$ – сдвиг оригинала $f(t)$ вправо на t_0. Преобразуем $f(t - t_0)$

$$f(t - t_0) \risingdotseq \int\limits_0^{\infty} \mathbf{e}^{-pt} f(t - t_0) dt = \int\limits_{t_0}^{\infty} \mathbf{e}^{-pt} f(t - t_0) dt.$$

Сделаем в последнем интеграле замену $t - t_0 = \tau$.

$$f(t - t_0) \risingdotseq \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-p(t_0+\tau)} f(\tau) d\tau = \mathbf{e}^{-pt_0} \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \mathbf{e}^{-pt_0} F(p).$$

Теорема доказана.

Пример 14 *Найти изображение функции Хевисайда $\eta(t - \alpha)$, $\alpha > 0$.*

Решение. Применим теорему 7

$$\eta(t - \alpha) \risingdotseq \mathbf{e}^{-p\alpha} \frac{1}{p}. \tag{4.8}$$

Пример 15 *Найти изображение функции $f(t)$ равной единице при $2 \leq t \leq 4$ и нулю для остальных t, см. рис. 1.*

Рис.1.1. Случай ...

Решение. Данный оригинал можно представить в виде

$$f(t) = \eta(t - 2) - \eta(t - 4).$$

Теперь, применяя теорему запаздывания, получаем

$$\eta(t - 2) - \eta(t - 4) \risingdotseq \frac{\mathbf{e}^{-2p} - \mathbf{e}^{-4p}}{p} = \frac{2\,\mathbf{e}^{-3p}}{p} \operatorname{sh} p.$$

Пример 16 *Найти изображение функции $f(\alpha t - t_0)$, $\alpha > 0$, $t_0 > 0$, если $f(t) \risingdotseq F(p)$*

Решение.

$$f(\alpha t - t_0) \risingdotseq \int\limits_{t_0/\alpha}^\infty \mathbf{e}^{-pt} f(\alpha t - t_0) dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-p(t_0+\tau)/\alpha} f(\tau) \frac{d\tau}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \mathbf{e}^{-\frac{t_0}{\alpha} p}.$$

Пример 17 *Найти изображение функций* $\sin(\omega t - \varepsilon_0)$ *и* $\cos(\omega t - \varepsilon_0)$, $\omega > 0$, $\varepsilon_0 > 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sin(\omega t - \varepsilon_0) &\risingdotseq \mathbf{e}^{-\frac{\varepsilon_0}{\omega}p}\,\frac{\omega}{p^2+\omega^2}; \\ \cos(\omega t - \varepsilon_0) &\risingdotseq \mathbf{e}^{-\frac{\varepsilon_0}{\omega}p}\,\frac{p}{p^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Пример 18 *Найти изображение функций (рис. 2):*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{h}{l}t & \text{\textit{при}} \quad 0 \le t < l; \\ \frac{h}{l}(2l - t) & \text{\textit{при}} \quad l \le t \le 2l; \\ 0 & \text{\textit{при}} \quad t < 0 \text{ \textit{и} } t > 2l. \end{cases}$$

Решение. Используя функцию Хевисайда, запишем $f(t)$ в виде

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{h}{l}t\eta(t) - \frac{h}{l}t\eta(t-l) + \frac{h}{l}(2l-t)\eta(t-l) - \frac{h}{l}(2l-t)\eta(t-2l) = \\ &= \frac{h}{l}\left[t\eta(t) - 2(t-l)\eta(t-l) + (t-2l)\eta(t-2l)\right]. \end{aligned}$$

Теперь, применяя теорему запаздывания, имеем

$$f(t) \risingdotseq \frac{h}{l}\left[\frac{1}{p^2} - 2\,\mathbf{e}^{-pt}\,\frac{1}{p^2} + \mathbf{e}^{-2pt}\,\frac{1}{p^2}\right] = \frac{h}{l}\frac{(1-\mathbf{e}^{-pt})^2}{p^2}.$$

Пример 19 *Найти изображение функции* $\sin(t-1)\eta(t-1)$.

Решение. Вид функции показывает, что здесь имеется запаздывание аргумента на величину $\theta = 1$. С помощью теоремы запаздывания и формулы (4.2), когда $\omega = 1$, получаем (ср. с примером 12)

$$\sin(t-1)\eta(t-1) \risingdotseq \frac{\mathbf{e}^{-p}}{p^2+1}.$$

4.4 Теорема смещения

Теорема 8 *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и α – комплексное число, то*

$$\mathbf{e}^{-\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p+\alpha). \tag{4.9}$$

Действительно,

$$\mathbf{e}^{-\alpha t} f(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-\alpha t}\,\mathbf{e}^{-pt} f(t)dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-(p+\alpha)t} f(t)dt = F(p+\alpha).$$

Если γ_0 – показатель степени роста $f(t)$, то $F(p+\alpha)$ определена и аналитическая в области $\operatorname{Re} p > \gamma_0 - \operatorname{Re}\alpha$.

Рассмотрим несколько полезных примеров

Пример 20 *Найти изображения функций $\mathbf{e}^{-\alpha t}\sin\omega t$, $\mathbf{e}^{-\alpha t}\cos\omega t$, $\mathbf{e}^{-\alpha t}\operatorname{sh}\omega t$, $\mathbf{e}^{-\alpha t}\operatorname{ch}\omega t$, $t^n\,\mathbf{e}^{-\alpha t}$, ω и α –комплесные постоянные.*

Решение. Пользуясь теоремой 8, находим

1. $\mathbf{e}^{-\alpha t}\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega| - \operatorname{Re}\alpha;$
2. $\mathbf{e}^{-\alpha t}\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega| - \operatorname{Re}\alpha;$
3. $\mathbf{e}^{-\alpha t}\operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2-\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re}\omega| - \operatorname{Re}\alpha;$
4. $\mathbf{e}^{-\alpha t}\operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re}\omega| - \operatorname{Re}\alpha;$
5. $t^n\,\mathbf{e}^{-\alpha t} \risingdotseq \dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha.$

4.5 Дифференцирование оригинала (изображение производной)

Теорема 9 *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $f'(t)$ – функция-оригинал, то*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0), \qquad \operatorname{Re} p > \gamma_0, \tag{4.10}$$

где γ_0 – показатель степени роста $f(t)$.

Доказательство. Пусть $f(t)$ и $f'(t)$ – функции-оригиналы, они будут иметь одинаковый порядок роста – γ_0. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} f'(t) &\risingdotseq \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-pt} f'(t)dt = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-pt} df(t) = \\ &= f(t)\,\mathbf{e}^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-pt} f(t)dt = pF(p) - f(0). \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\lim\limits_{t\to\infty} |f(t)\,\mathbf{e}^{-pt}| = 0$ при $\operatorname{Re} p > \gamma_0$.

Теорема 9 переносится на производные высших порядков. Так, если $f(t)$, $f'(t)$ и $f''(t)$ – функции-оригиналы, то

$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \qquad \operatorname{Re} p > \gamma_0. \tag{4.11}$$

Для n-ой производной

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \quad \operatorname{Re} p > \gamma_0. \tag{4.12}$$

Полученные формулы, как мы увидим ниже, играют важную роль в приложениях.

Пример 21 *Найти изображение функции $f(t) = \sin^2 t$ с помощью дифференцирования оригинала.*

Решение. Воспользуемся формулой (4.10). Поскольку $f(0) = 0$, то формула принимает вид $f'(t) \risingdotseq pF(p)$. Так как $f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$, то $f'(t) = \sin 2t \risingdotseq pF(p)$. На основании формулы (4.2) получаем $\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}$, поэтому

$$\frac{2}{p^2+4} = pF(p),$$

Откуда

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)}, \qquad \sin^2 t \risingdotseq \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

4.6 Изображение интеграла

Теорема 10 *Пусть* $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > \gamma_0$, *тогда*

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}F(p), \qquad \operatorname{Re} p > \gamma_0. \tag{4.13}$$

Пример 22 *Найти изображение функции* $\int\limits_0^t e^\tau d\tau$.

Решение. В соответствии с формулой (3.2) при $\alpha = 1$ получим $e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$. На основании формулы (4.13) найдем, что

$$\int\limits_0^t e^\tau d\tau \risingdotseq \frac{1}{p(p-1)}.$$

Пример 23 *Найти изображение функции* $f(t) = t^n$, *где* n *– натуральное число, пользуясь правилом интегрирования оригинала.*

Решение. Из операторного равенства $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$, пользуясь формулой (4.13) находим

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^t 1d\tau &= t \risingdotseq \frac{1}{p^2}, \\
\int\limits_0^t \tau d\tau &= \frac{t^2}{1\cdot 2} \risingdotseq \frac{1}{p^3}, \\
\int\limits_0^t \frac{\tau^2}{1\cdot 2}d\tau &= \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3} \risingdotseq \frac{1}{p^4}; \\
\int\limits_0^t \frac{\tau^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}d\tau &= \frac{t^n}{1\cdot 2\cdots n} \risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}} \\
t^n &\risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}.
\end{aligned}$$

4.7 Дифференцирование изображения

Теорема 11 *Пусть* $F(p) \risingdotseq f(t)$, $\operatorname{Re} p > \gamma_0$, *тогда*

$$F'(p) \risingdotseq -tf(t), \qquad \operatorname{Re} p > \gamma_0. \tag{4.14}$$

Доказательство. Функция $F(p)$, аналитическая в области $\operatorname{Re} p > \gamma_0$ имеет производные любого порядка для указанных значений p, в частности $F'(p)$.

$$F'(p) = \left(\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-pt} f(t)dt\right)'_p = -\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-pt} f(t)tdt \risingdotseq -tf(t).$$

Нетрудно получить соотношение для $F^{(n)}(p)$:

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t). \tag{4.15}$$

Формулы (4.14) и (4.15) имеют важное значение при нахождении как прямого так и обратного преобразований.

Пример 24 *Найти изображения функций* $t\sin\omega t$ *и* $t\cos\omega t$.

Решение. Пользуясь формулами (4.2)-(4.3) и теоремой 11, получим

$$\begin{aligned} -t\sin\omega t &\risingdotseq -\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}, \\ -t\cos\omega t &\risingdotseq \frac{p^2+\omega^2-2p^2}{(p^2+\omega^2)^2} = \frac{-p^2+\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} t\sin\omega t &\risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|, \\ t\cos\omega t &\risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|. \end{aligned}$$

Пример 25 *Найти изображения функций* $t^n\,\mathbf{e}^{\alpha t}$, *где* n *– натуральное число.*

Решение. Из соотношения (3.2) n-кратным дифференцированием изображения (см. формулу (4.15)) получаем

$$t^n\,\mathbf{e}^{\alpha t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha.$$

Используя теорему 9, можно получить формулы преобразования большого числа функций, являющихся решениями линейных однородных дифференциальных уравнений для $t \geq 0$. Привлечение формулы (4.15) позволяет рассмотреть частные решения с коэффициентами вида $a_k t^k$ при $k = 1, 2, \ldots$. Большие значения k делают практически невозможным найти образ $F(p)$, как решение уравнения высокой степени с переменными коэффициентами. Рассмотрим

Пример 26 *Найти преобразование бесселевой функции $J_0(t)$. Через $J_0(t)$ обозначается ограниченное в нуле решение уравнения*

$$ty'' + y' + ty = 0, \tag{4.16}$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Считая $t \geq 0$, преобразуем функции, входящие в левую часть (4.16) с учетом соотношений (4.10), (4.11) и (4.14). Введем обозначение $y(t) \risingdotseq Y(p)$, тогда

$$\begin{aligned} &'(t) \risingdotseq pY(p) - 1; \qquad && y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - p; \\ &t(t) \risingdotseq -Y'(p); && ty''(t) \risingdotseq -(p^2Y(p) - p)'. \end{aligned}$$

Теперь уравнение (4.16) преобразуется к виду

$$-p^2Y'(p) - 2pY(p) + 1 + pY(p) - 1 - Y'(p) = 0.$$

$$(p^2 + 1)Y'(p) + pY(p) = 0.$$

Откуда $Y(p) = \frac{C}{\sqrt{p^2+1}}$.

Для определения постоянной C воспользуемся теоремой ххх, применяя необходимое условие изображения производной $y'(t)$. Так как $y'(t) \fallingdotseq pY(p) - y(0)$, то $\lim\limits_{x\to\infty} xY(x) = y(0) = 1$; $x = \operatorname{Re} p$.

Теперь ясно, что $C = 1$, а значит

$$J_0(t) \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}};\ \operatorname{Re} p > 0.$$

4.8 Интегрирование изображения

Теорема 12 *Если $f(t) \fallingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p > \gamma_0$ и интеграл $\int\limits_p^\infty F(q)dq$ сходится, то*

$$\int\limits_p^\infty F(q)dq \fallingdotseq \frac{f(t)}{t}. \tag{4.17}$$

Пример 27 *Найти изображения функций $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.*

Решение. На основании операторного равенства $\sin t \fallingdotseq \frac{1}{p^2+1}$ и правила интегрирования изображения, находим

$$\frac{\sin t}{t} \fallingdotseq \int\limits_p^{+\infty} \frac{dq}{1+q^2} = \arctan q\Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p,$$

$$\frac{\sin t}{t} \fallingdotseq \operatorname{arcctg} p. \tag{4.18}$$

Пример 28 *Найти изображения интегрального синуса $\operatorname{Si}(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$.*

Решение. Воспользуемся результатом предыдущего примера, формулой (4.18), и теоремой 10, тогда

$$\operatorname{Si}(t) \fallingdotseq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}.$$

4.9 Свертка и ее изображение

Сверткой двух функций-оригиналов $f(t)$ и $g(t)$, обозначаемой $(f * g)(t)$, назовем интеграл вида

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{4.19}$$

Нетрудно показать, что $\varphi(t) = (f*g)(t)$ является оригиналом. Очевидно, φ кусочно непрерывна на всей оси и равна нулю для $t < 0$. Определим показатель роста $\varphi(t)$. Пусть

$$|f(t)| \le M_1 \mathbf{e}^{at}, \quad |g(t)| \le M_2 \mathbf{e}^{bt}, \quad a, b \ge 0,\ t > 0,$$

тогда

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\le \int\limits_0^t |f(\tau)| \cdot |g(t-\tau)| d\tau \le M_1 M_2 \int\limits_0^t \mathbf{e}^{a\tau} \mathbf{e}^{b(t-\tau)}\, d\tau = \\ &= M_1 M_2 \mathbf{e}^{bt} \int\limits_0^t \mathbf{e}^{\tau(a-b)}\, d\tau = M_1 M_2 \frac{\mathbf{e}^{at} - \mathbf{e}^{bt}}{a-b} \le 2\frac{M_1 M_2}{|a-b|} \mathbf{e}^{ct}, \end{aligned}$$

где $c = \max\{a; b\}$.

Свертка функций обладает свойствами коммутативности, $f*g = g*f$, и ассоциативности, $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Справедлива следующия

Теорема 13 *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$, то*

$$f * g \risingdotseq F(p) \cdot G(p), \quad \operatorname{Re} p > c, \tag{4.20}$$

где c – максимум показателей роста $f(t)$ и $g(t)$.

Доказательство. В изображении $f * g$ поменяем сначала порядок интегрирования

$$f * g \risingdotseq \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-pt} \left(\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right) dt = \int\limits_0^\infty f(\tau) \left(\int\limits_\tau^\infty \mathbf{e}^{-pt} g(t-\tau)dt \right) d\tau,$$

а затем во внутреннем интеграле сделаем замену $t = s + \tau$, $s = t - \tau$,

$$f*g \risingdotseq \int\limits_0^\infty f(\tau) \left(\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-p(s+\tau)}\, g(s) ds \right) d\tau = \int\limits_0^\infty f(\tau)\, \mathbf{e}^{-p\tau}\, d\tau \cdot \int\limits_0^\infty g(s)\, \mathbf{e}^{-ps}\, ds = F \cdot G.$$

Возможность изменения порядка интегрирования при $\operatorname{Re} p > c$ можно обосновать, используя абсолютную и равномерную сходимость несобственного интеграла от свертки.

Теорему 13 называют теоремой свертывания, теоремой умножения или теоремой Бореля. Операцию получения свертки называют свертыванеием функций.

Пользуясь правилом дифференцирования оригинала, получаем следующую запись теоремы умножения:

$$pF(p)G(p) \risingdotseq \frac{d}{dt} \int\limits_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \tag{4.21}$$

Интеграл в правой части этой формулы называют интегралом Дюамеля. Если выполнить дифференцирование в интеграле Дюамеля, то теорема свертывания примет вид

$$pF(p)G(p) \risingdotseq f(t)g(0) + \int\limits_0^t f(\tau) g'(t - \tau) d\tau$$

или, учитывая свойство коммутативности,

$$pF(p)G(p) \risingdotseq g(t)f(0) + \int\limits_0^t g(\tau) f'(t - \tau) d\tau.$$

Последние две записи теоремы умножения можно видоизменить, если учесть, что

$$\int\limits_0^t f(\tau) g'(t - \tau) d\tau = \int\limits_0^t g'(\tau) f(t - \tau) d\tau,$$

$$\int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau = \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Формула (**??**) применяется при решении интегральных уравнений типа свертки, и нередко при нахождении оригинала по его образу.

Пример 29 *Найти свертку оригиналов* $f(t) = t$, $g(t) = \cos(t)$ *и изображение свертки.*

Решение.По определению свертки

$$\begin{aligned} t * \cos t &= \int_0^t (t-\tau)\cos\tau d\tau = \int_0^t (t-\tau)d(\sin\tau) = \\ &= (t-\tau)\sin\tau\Big|_0^t + \int_0^t \sin\tau d\tau = -\cos\tau\Big|_0^t = 1-\cos t. \end{aligned}$$

Найдем изображение свертки, пользуясь теоремой умножения. Изображения заданных оригиналов таковы:

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2}, \quad \cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1},$$

поэтому

$$1-\cos t \risingdotseq \frac{1}{p^2}\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

Тот же результат получаем, пользуясь свойством линейности,

$$1-\cos t \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

Пример 30 *Найти свертку оригиналов* $f(t) = t$, $g(t) = \mathbf{e}^t$ *и изображение свертки.*

Решение.По определению свертки

$$\begin{aligned} t * \mathbf{e}^t &= \int_0^t (t-\tau)\,\mathbf{e}^\tau\,d\tau = \int_0^t (t-\tau)d(\mathbf{e}^\tau) = \\ &= (t-\tau)\,\mathbf{e}^\tau\Big|_0^t + \int_0^t \mathbf{e}^\tau\,d\tau = 0 - t + \mathbf{e}^\tau\Big|_0^t = \mathbf{e}^t - t - 1. \end{aligned}$$

Найдем изображение свертки, пользуясь теоремой умножения. Изображения заданных оригиналов таковы:

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2}, \quad \mathbf{e}^t \risingdotseq \frac{1}{p-1},$$

поэтому

$$\mathbf{e}^t - t - 1 \risingdotseq \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Тот же результат получаем, пользуясь свойством линейности,

$$\mathbf{e}^t - t - 1 \risingdotseq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

4.10 Теорема об изображении периодического оригинала

Теорема 14 *Если $f(t)$ – оригинал с периодом $\omega > 0$, то его изображение выражается формулой*

$$F(p) = \frac{\varphi(p)}{1 - \mathbf{e}^{-\omega p}}, \tag{4.22}$$

где

$$\varphi(p) = \int\limits_0^{\omega} \mathbf{e}^{-pt} f(t) dt. \tag{4.23}$$

Пример 31 *Найти изображение функции $f(t) = |\sin t|$.*

Решение. Поскольку $|\sin t|$ – периодическая функция с периодом $\omega = \pi$, то изображение $F(p) = \frac{\varphi(p)}{1-\mathbf{e}^{-\pi p}}$, где

$$\varphi(p) = \int\limits_0^{\pi} \mathbf{e}^{-pt} |\sin t| dt = \int\limits_0^{\pi} \mathbf{e}^{-pt} \sin t dt.$$

Дважды проинтегрировав по частям, получим

$$\varphi(p) = -\mathbf{e}^{-pt} \frac{\cos t + p \sin t}{p^2+1}\bigg|_0^{\pi} = \frac{\mathbf{e}^{-\pi p} + 1}{p^2+1}.$$

Следовательно,

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{\mathbf{e}^{-\pi p} + 1}{1 - \mathbf{e}^{-\pi p}}.$$

Пример 32 *Найти изображение периодического оригинала $f(t)$ с периодом $\omega = 2\pi$, который равен $\sin t$ при $0 < t < \pi$ и нулю при $\pi < t < 2\pi$.*

Решение. Оригинал для $t > 0$ можно записать так: $f(t) = \sin t \cdot \eta(\sin t)$. Искомое изображение имеет вид $F(p) = \frac{\varphi(p)}{1-\mathbf{e}^{-2\pi p}}$, где

$$\varphi(p) = \int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{-pt} \sin t \cdot \eta(\sin t) dt = \int_0^{\pi} \mathbf{e}^{-pt} \sin t dt = \frac{\mathbf{e}^{-\pi p} + 1}{p^2 + 1}.$$

Итак,

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{\mathbf{e}^{-\pi p} + 1}{1 - \mathbf{e}^{-2\pi p}} = \frac{1}{(p^2+1)(1-\mathbf{e}^{-\pi p})}.$$

Задачи

В задачах 1-6, используя свойство линейности преобразования Лапласа, найдите изображения $F(p)$ соответствующих оригиналов $f(t)$.

1. $f(t) = \operatorname{sh} 2t + 5\,\mathbf{e}^{3t} + 1$.
2. $f(t) = \mathbf{e}^{-t} + 2\,\mathbf{e}^{-3t} + t^3$.
3. $f(t) = \sin 6t \sin 4t$.
4. $f(t) = \cos 2t \cos 3t$.
5. $f(t) = \cos 5t \sin 3t$.
6. $f(t) = \sin^2 t$.

В задачах 7-10, применяя правило дифференцирования, найдите изображения $F(p)$ оригиналов $f(t)$.

7. $f(t) = t \operatorname{sh} \omega t$.
8. $f(t) = t \operatorname{ch} \omega t$.
9. $f(t) = t^2\,\mathbf{e}^{3t}$.
10. $f(t) = t^3\,\mathbf{e}^{2t}$.

В задачах 11-14, используя правило интегрирования изображения, найдите изображения $F(p)$ оригиналов $f(t)$.

11. $f(t) = \frac{\mathbf{e}^t - 1}{t}$.
12. $f(t) = \frac{\cos t - 1}{t}$.
13. $f(t) = \frac{\mathbf{e}^{\alpha t} - \mathbf{e}^{\beta t}}{t}$.
14. $f(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}$.

В задачах 15-18 с помощью дифференцирования оригинала, найти изображения следующих функций.

15. $f(t) = \mathbf{e}^{-at}\cos t.$ 16. $f(t) = \mathbf{e}^{-at}\sin t.$

17. $f(t) = \mathbf{e}^{-at}\operatorname{ch}\lambda t.$ 18. $f(t) = \mathbf{e}^{-at}\operatorname{sh}\lambda t.$

В задачах 19-22 с помощью правила интегрирования оригинала найдите изображения следующих функций.

19. $f(t) = \int\limits_0^t (u - \cos u)du.$ 20. $f(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin u}{u}du.$

21. $f(t) = \int\limits_0^t (\sin u + u^2)du.$ 22. $f(t) = \int\limits_0^t \mathbf{e}^{-u} u^3 du.$

В задачах 23-30 найдите изображения $F(p)$ следующих функций

23. $f(t) = \operatorname{ch} 3t + 3\,\mathbf{e}^{(-2t)} + 1.$ 24. $f(t) = \cos^2 t.$

25. $f(t) = t\sin^3 t.$ 26. $f(t) = t\,\mathbf{e}^t.$

27. $f(t) = t^2\cos t.$ 28. $f(t) = t(e^t + \operatorname{ch} t).$

29. $f(t) = \int\limits_0^t \sin\tau d\tau.$ 30. $f(t) = \int\limits_0^t \operatorname{ch}\omega\tau d\tau.$

31. Применяя теорему подобия, найдите изображение $\cos\beta t$, зная изображение $\cos t$.

32. Используя теорему запаздывания, найдите изображение оригинала

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < a, \\ 1 & \text{при} \quad t \geq a. \end{cases}$$

В задачах 33-34 с помощью теоремы смещения найдите изображения функций

33. $f(t) = \mathbf{e}^{at}\operatorname{sh}\beta t.$ 34. $f(t) = \mathbf{e}^{at}\operatorname{ch}\beta t.$

В задачах 35-39 найдите свертки функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ и изображения сверток

35. $f_1(t) = \eta(t)$, $f_2(t) = \sin t$. 36. $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \sin t$.
37. $f_1(t) = \mathbf{e}^t$, $f_2(t) = \mathbf{e}^{-t}$. 38. $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \cos t$.
39. $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$.

В задачах 40-43, применив теорему умножения изображений, найдите оригиналы $f(t)$ по их изображениям $F(p)$.

40. $F(p) = \dfrac{1}{p^2-1}$. 41. $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+1)}$.
42. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$. 43. $F(p) = \dfrac{1}{p^3(p-1)}$.

В задачах 44-47, применив формулу Дюамеля, найдите оригиналы $f(t)$ по их изображениям $F(p)$.

40. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$. 41. $F(p) = \dfrac{p^3}{(p^2-1)(p^2+1)}$.
42. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p-1)(p^2+1)}$. 43. $F(p) = \dfrac{1}{p^3(p^2+1)}$.

Вопросы

1. Сформулируйте свойство линейности.
2. По каким формулам осуществляется дифференцирование оригинала?
3. Какой вид принимают формулы дифференцирования оригинала в случае, когда функция и ее производные до $(n-1)$-го порядка равны нулю?
4. Как осуществляется интегрирование оригинала?
5. По какой формуле осуществляется дифференцирование изображения?
6. Как осуществляется интегрирование изображения?

7. Какой вид имеют предельные соотношения?

8. Запишите изображения для тригонометрических функций $\sin\alpha t$, $\cos\alpha t$.

9. Какой вид имеют изображения для гиперболических функций $\operatorname{sh}\alpha t$, $\operatorname{ch}\alpha t$?

10. Какой вид имеет изображение для функции $f(t) = t^n\,\mathbf{e}^{\alpha t}$, где n – натуральное число?

11. Какой вид имеет изображение для функции $f(t) = \frac{\sin t}{t}$?

12. Чему равно значение интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$?

13. Выполняются ли предельные соотношения для функций $\eta(t)$, $\mathbf{e}^{\alpha t}$, где α – вещественное число?

14. Как формулируется теорема подобия?

15. Какой вид имеет формула, отображающая теорему подобия?

16. Как формулируется теорема смещения?

17. Какой вид имеет формула, отображающая теорему смещения?

18. Как формулируется теорема запаздывания?

19. Какой вид имеет формула, отображающая теорему запаздывания?

20. Как формулируется теорема умножения?

21. Какой вид имеет формула, отображающая теорему умножения?

22. Что называют сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$?

23. Каую формулировку можно придать теореме умножения, используя понятие свертывания функций?

24. Что называют интегралом Дюамеля?

25. Каково содержание теоремы об изображении периодического оригинала?

26. Как формулируется теорема разложения?

5 Преобразование Лапласа функции двух переменных

Пусть $f(x,t)$ функция двух переменных, определенная для $x>0$ и $t>0$, и при любом фиксированном x по t удовлетворяет условиям функции-оригинала, тогда преобразование Лапласа $F(x,p)$ функции $f(x,t)$ по переменной t определяется равенством

$$F(x,p)=\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-pt} f(x,t)dt.$$

Определенное так преобразование Лапласа обладает свойствами преобразования одного переменного, например, если производные $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, удовлетворяют требованиям к оригиналам, то имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &\risingdotseq pF(x,p)-f(x,0),\\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &\risingdotseq p^2F(x,p)-pf(x,0)-\frac{\partial f}{\partial t}(x,0).\end{aligned}$$

Аналогично для производных более высокого порядка.

Найдем, пользуясь определением, преобразование Лапласа (по t) производных $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и т.д.

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\risingdotseq\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-pt}\,\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt,$$

но этот интеграл есть производная по x функции $F(x,p)$ (предполагается, что операция дифференцирования под знаком интеграла допустима). Следовательно,

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \risingdotseq \frac{\partial F(x,p)}{\partial x}.$$

Аналогично, $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \risingdotseq \frac{\partial^2 F(x,p)}{\partial x^2}$ и т.д.

6 Определение оригинала по известному изображению

Во многих задачах, решаемых операционным методом, возникает проблема нахождения функции-оригинала по известной функции-изображению. Для этого применяют следующие приемы.

1. Применение обратного преобразования Лапласа.

2. Применение в обратном порядке основных формул преобразования.

3. Если функция-изображение $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильная рациональная дробь, то используют приемы разложения функции на простейшие и формулу преобразования свертки.

Продемонстрируем первый и третий способы на примерах.

Для вычисления интеграла по прямой в комплексной плоскости при нахождении обратного преобразования Лапласа воспользуемся второй теоремой разложения, которая утверждает, что при определенных условиях, наложенных на $F(p)$, оригиналом для $F(p)$ служит функция

$$f(p) = \sum_{p_k} \operatorname*{res}_{p_k} \left[F(p)\,\mathbf{e}^{pt}\right], \tag{6.1}$$

где сумма берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

В частности, если $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильная рациональная дробь, то оригиналом ее служит функция

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left\{F(p)\,\mathbf{e}^{pt}(p-p_k)^{r_k}\right\}, \qquad (6.2)$$

где p_k – полюсы $F(p)$ кратности r_k и сумма берется по всем полюсам $F(p)$ (p_k – корни функции $R(p)$).

Если все полюсы p_k функции $F(p)$ простые, то формула (6.2) упрощается и принимает вид

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}\,\mathbf{e}^{p_k t}. \qquad (6.3)$$

Пример 33 *Найти оригинал $f(t)$ по его изображению*

$$F(p)=\frac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}.$$

Решение. Здесь корни знаменателя $R(p)=(p-1)(p+1)^2$ и их кратности таковы: $p_1=1$, $r_1=1$; $p_2=-1$, $r_2=2$. Для функции $F(p)$ $p_1=1$ – полюс первого порядка, $p_2=-1$ – полюс второго порядка. Формула (6.1) в данном случае принимает вид

$$f(t)=\operatorname*{res}_{1}F(p)\,\mathbf{e}^{pt}+\operatorname*{res}_{-1}F(p)\,\mathbf{e}^{pt},$$

Так как

$$\begin{aligned}
\operatorname*{res}_{1}F(p)\,\mathbf{e}^{pt} &= \lim_{p\to1}\left[\frac{p^2+p+1}{(p+1)^2}\,\mathbf{e}^{pt}\right]=\frac{3}{4}\,\mathbf{e}^{t},\\
\operatorname*{res}_{-1}F(p)\,\mathbf{e}^{pt} &= \lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\left(\frac{p^2+p+1}{p-1}\,\mathbf{e}^{pt}\right)=\\
&= \lim_{p\to-1}\left[\frac{(2p+1)(p-1)-(p^2+p+1)}{(p-1)^2}\,\mathbf{e}^{pt}+\frac{p^2+p+1}{p-1}t\,\mathbf{e}^{pt}\right]=\\
&= \lim_{p\to-1}\left[\frac{p^2-2p-2}{(p-1)^2}\,\mathbf{e}^{pt}+\frac{p^2+p+1}{p-1}t\,\mathbf{e}^{pt}\right]=\frac{1}{4}\,\mathbf{e}^{-t}-\frac{1}{2}t\,\mathbf{e}^{-t},
\end{aligned}$$

то

$$f(t)=\frac{3}{4}\,\mathbf{e}^{t}+\frac{1}{4}\,\mathbf{e}^{-t}-\frac{1}{2}t\,\mathbf{e}^{-t}.$$

Пример 34 *Найти оригинал $f(t)$ по его изображению*

$$F(p) = \frac{p}{(p^2-1)^2}.$$

Решение. Функция $F(p)$ имеет полюсы $p_1 = 1$ и $p_2 = -1$, каждый второго порядка, т.е. $r_1 = 2$, $r_2 = 2$. Воспользуемся формулой (6.2), для чегосначала определим выражение в фигурных скобках:

$$\begin{aligned}
F(p)\,\mathbf{e}^{pt}(p-p_1)^{r_1} &= F(p)\,\mathbf{e}^{pt}(p-1)^2 = \frac{p}{(p^2-1)^2}\,\mathbf{e}^{pt}(p-1)^2 = \frac{p\,\mathbf{e}^{pt}}{(p+1)^2},\\
F(p)\,\mathbf{e}^{pt}(p-p_2)^{r_2} &= F(p)\,\mathbf{e}^{pt}(p+1)^2 = \frac{p}{(p^2-1)^2}\,\mathbf{e}^{pt}(p+1)^2 = \frac{p\,\mathbf{e}^{pt}}{(p-1)^2}.
\end{aligned}$$

Формула (6.2) принимает вид

$$f(t) = \lim_{p\to 1}\left[\frac{p\,\mathbf{e}^{pt}}{(p+1)^2}\right]'_p + \lim_{p\to -1}\left[\frac{p\,\mathbf{e}^{pt}}{(p-1)^2}\right]'_p.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 1}\left[\frac{p\,\mathbf{e}^{pt}}{(p+1)^2}\right]'_p &= \lim_{p\to 1}\left[\frac{(\mathbf{e}^{pt}+pt\,\mathbf{e}^{pt})(p+1)^2 - 2(p+1)p\,\mathbf{e}^{pt}}{(p+1)^4}\right] =\\
&= \frac{(\mathbf{e}^{t}+t\,\mathbf{e}^{t})2^2 - 2\cdot 2\cdot 1\,\mathbf{e}^{t}}{2^4} = \frac{4t\,\mathbf{e}^{t}}{16} = \frac{1}{4}t\,\mathbf{e}^{t},\\
\lim_{p\to -1}\left[\frac{p\,\mathbf{e}^{pt}}{(p-1)^2}\right]'_p &= \lim_{p\to -1}\left[\frac{(\mathbf{e}^{pt}+pt\,\mathbf{e}^{pt})(p-1)^2 - 2(p-1)p\,\mathbf{e}^{pt}}{(p-1)^4}\right] =\\
&= \frac{(\mathbf{e}^{-t}-t\,\mathbf{e}^{-t})(-2)^2 - 2\cdot(-2)\cdot(-1)\,\mathbf{e}^{-t}}{2^4} =\\
&= \frac{-4t\,\mathbf{e}^{-t}}{16} = -\frac{1}{4}t\,\mathbf{e}^{-t},
\end{aligned}$$

то

$$f(t) = \frac{1}{4}t\,\mathbf{e}^{t} - \frac{1}{4}t\,\mathbf{e}^{-t} = \frac{1}{2}t\left(\frac{\mathbf{e}^{t}-\mathbf{e}^{-t}}{2}\right) = \frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}\,t.$$

Пример 35 *Найти оригинал $f(t)$ по его изображению*

$$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+2)(p-3)}.$$

Решение. Все корни знаменателя являются простыми: $p_1 = 1$, $r_1 = 1$; $p_2 = -2$, $r_2 = 1$; $p_3 = 3$, $r_3 = 1$. Для нахождения оригинала $f(t)$ воспользуемя формулой (6.3). В данном случае $Q(p) = p + 1$, $R(p) = (p-1)(p+2)(p-3) = p^3 - 2p^2 - 5p + 6$, $R'(p) = 3p^2 - 4p - 5$. В соответствии с формулой (6.3) находим оригинал

$$f(t) = -\frac{1}{3}\,\mathbf{e}^{t} - \frac{1}{15}\,\mathbf{e}^{-2t} + \frac{2}{5}\,\mathbf{e}^{3t}\,.$$

Прежде чем переходить к рассмотрению третьего способа получения функции-оригинала, рассмотрим применение теоремы свертывания.

Пример 36 *Найти оригинал $f(t)$ по его изображению*

$$F(p) = \frac{A}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

Решение. Преобразуем $F(p)$ так, чтобы использовать изображение функции $\varphi(t) = \sin \omega t$.

$$\begin{aligned} \frac{A}{(p^2+\omega^2)^2} &= \frac{A}{\omega^2} \cdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \cdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \risingdotseq \\ &\risingdotseq \frac{A}{\omega^2} \int\limits_0^t \sin \omega\tau \cdot \sin \omega(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Вычисляя интеграл справа, получаем

$$\frac{A}{(p^2+\omega^2)^2} \risingdotseq \frac{A}{2\omega^2} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - t \cos \omega t \right).$$

Рассмотрим теперь примеры, когда $F(p)$ – рациональная функция более сложного вида. В этом случае ее предварительно разлагают на простейшие дроби методом неопределенных коэффициентов, как это делают в теории интегрирования. Поясним данный прием вначале характерными примерами.

Пример 37 *Слагаемое вида $\frac{A}{p-\alpha}$ имеет оригинал $f(t) = A\,\mathbf{e}^{\alpha t}$.*

Пример 38 *Слагаемое вида* $\frac{A}{(p-\alpha)^n} \risingdotseq \frac{A}{(n-1)!}\,\mathbf{e}^{\alpha t}\cdot t^{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$.

Пример 39 *Найдем оригинал функции* $\frac{Mp+N}{p^2+2\lambda p+\mu}$, $\lambda^2 - \mu < 0$.

Решение. Полагая $\mu - \lambda^2 = \omega^2$, преобразуем дробь к виду

$$\begin{aligned}\frac{Mp+N}{p^2+2\lambda p+\mu} &= \frac{M(p+\lambda)+N-\lambda M}{(p+\lambda)^2+\omega^2} = \\ &= M\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2} + \frac{N-\lambda M}{\omega}\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

Теперь

$$\frac{Mp+N}{p^2+2\lambda p+\mu} \risingdotseq M\,\mathbf{e}^{-\lambda t}\cos\omega t + \frac{N-\lambda M}{\omega}\cdot\mathbf{e}^{-\lambda t}\sin\omega t.$$

Пример 40 *Найдем оригинал функции* $\frac{Mp+N}{(p^2+2\lambda p+\mu)^2}$, $\lambda^2 - \mu < 0$.

Решение. Аналогично, полагая $\mu - \lambda^2 = \omega^2$, преобразуем дробь к виду

$$\begin{aligned}\frac{Mp+N}{(p^2+2\lambda p+\mu)^2} &= \frac{M(p+\lambda)+N-\lambda M}{[(p+\lambda)^2+\omega^2]^2} = \\ &= \frac{M}{\omega}\frac{(p+\lambda)\omega}{[(p+\lambda)^2+\omega^2]^2} + \frac{N-\lambda M}{\omega^2}\cdot\frac{\omega^2}{[(p+\lambda)^2+\omega^2]^2}.\end{aligned}$$

Используя теперь формулы изображения $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, теоремы о смещении и свертке, получаем

$$\begin{aligned}\frac{Mp+N}{(p^2+2\lambda p+\mu)^2} &\risingdotseq \frac{M}{\omega}\left(\mathbf{e}^{-\lambda t}\cos\omega t\right) * \left(\mathbf{e}^{-\lambda t}\sin\omega t\right) + \\ &+ \frac{N-\lambda M}{\omega^2}\left(\mathbf{e}^{-\lambda t}\sin\omega t\right) * \left(\mathbf{e}^{-\lambda t}\sin\omega t\right).\end{aligned}$$

Если $Q(p)$ имеет комплексные нули более высоких порядков, то можно применить многократные свертки.

Пример 41

$$\frac{p+1}{(p^2+1)^3} \risingdotseq \cos t * \sin t * \sin t + \sin t * \sin t * \sin t.$$

Пример 42 *Найти оригинал* $f(t)$, *если* $F(p) = \frac{p+3}{p^4-1}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{p+3}{p^4-1} &= \frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2+1} = \frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+3}{p^2+1} \fallingdotseq \\ &\fallingdotseq \mathbf{e}^t - \frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{-t} - \frac{1}{2}(\cos t + 3\sin t).\end{aligned}$$

Пример 43 *Найти оригинал $f(t)$ по его изображению*

$$F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}.$$

Решение. Разлагаем $F(p)$ на сумму простейших дробей

$$\begin{aligned}\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} &= \frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4} = \\ &= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{20}\cdot\frac{p-4}{p^2+4} \fallingdotseq \\ &\fallingdotseq -\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\,\mathbf{e}^t+\frac{1}{20}(\cos 2t - 2\sin 2t).\end{aligned}$$

Пример 44 *Найти оригинал $f(t)$ по его изображению*

$$F(p) = \frac{1}{(p-2)^2(p^2+1)}.$$

Решение. Разложение $F(p)$ на сумму простейших дробей имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{1}{(p-2)^2(p^2+1)} &= \frac{A}{p-2}+\frac{B}{(p-2)^2}+\frac{Cp+D}{p^2+1} = \\ &= -\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{1}{25}\cdot\frac{4p+3}{p^2+1} \fallingdotseq \\ &\fallingdotseq -\frac{4}{25}\,\mathbf{e}^{2t}+\frac{1}{5}t\,\mathbf{e}^{2t}+\frac{1}{25}(4\cos t + 3\sin t).\end{aligned}$$

Пример 45 *Найти оригинал $f(t)$ по его изображению*

$$F(p) = \frac{p^2-2p+3}{p(p^2+2)}.$$

Решение. Разлагаем $F(p)$ на сумму простейших дробей

$$\begin{aligned}\frac{p^2-2p+3}{p(p^2+2)} &= \frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2}-2\cdot\frac{1}{p^2+2} \fallingdotseq \\ &\fallingdotseq \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t.\end{aligned}$$

Пример 46 *Найти оригинал $f(t)$ по его изображению*

$$F(p) = \frac{\mathbf{e}^{-p}}{p+1}.$$

Решение. Наличие множителя $\mathbf{e}^{-p}$ указывает на необходимость применения теоремы запаздывания.

$$\frac{\mathbf{e}^{-p}}{p+1} \risingdotseq \mathbf{e}^{-(t-1)}\,\eta(t-1).$$

Пример 47 *Найти оригинал $f_1(t)$ по его изображению*

$$F_1(p) = \frac{1}{p^2+6p+10}.$$

Решение. Поскольку $p^2+6p+10 = (p^2+6p+9)+1 = (p+3)^2+1$, то условие можно представить в виде

$$F_1(p) = F(p-(-3)) = F(p+3) = \frac{1}{(p+3)^2+1}$$

и воспользоваться теоремой смещения. Тогда получаем

$$F_1(p) = F(p-(-3)) \risingdotseq \mathbf{e}^{-3t} f(t), \quad f(t) \risingdotseq F(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Так как

$$\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t,$$

то оригиналом для $F_1(p)$ является функция

$$f_1(t) = \mathbf{e}^{-3t}\sin t.$$

Пример 48 *Найти оригинал $f_1(t)$ по его изображению*

$$F_1(p) = \frac{p^2+2}{p^3+3p^2+5p+2}.$$

Решение. Преобразуем правую часть этой формулы к виду

$$F_1(p) = \frac{p^2+2}{p^3+3p^2+5p+2} = \frac{(p+1)^2-2(p+1)+3}{(p+1)[(p+1)^2+2]}$$

и условие запишем так

$$F_1(p) = F(p-(-1)) = F(p+1) = \frac{(p+1)^2 - 2(p+1) + 3}{(p+1)[(p+1)^2+2]}$$

Воспользуемся теоремой смещения, тогда

$$F_1(p) = F(p-(-1)) \risingdotseq \mathbf{e}^{-t} f(t),$$

где

$$f(t) \risingdotseq F(p) = \frac{p^2 - 2p + 3}{p(p^2+2)}.$$

Оригиналом для последнего изображения $F(p)$ является функция $f(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$ (см. пример 45) Подставляя данный результат, получаем искомый оригинал

$$f_1(t) = \mathbf{e}^{-t}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right).$$

Задачи

Найдите оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)$

1. $F(p) = \dfrac{1}{p^2+3p+2}.$
2. $F(p) = \dfrac{1}{p^2+5p+4}.$
3. $F(p) = \dfrac{1}{p^2+2p+2}.$
4. $F(p) = \dfrac{1}{p^2-4p+5}.$
5. $F(p) = \dfrac{1}{p^3+2p^2+p}.$
6. $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)^2}.$
7. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)^2}.$
8. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}.$
9. $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p-1)(p^2+4)}.$
10. $F(p) = \dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}.$
11. $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}.$
12. $F(p) = \dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}.$
13. $F(p) = \dfrac{p^2-p+2}{p^3-p^2-6p}.$
14. $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p+3)^3}.$
15. $F(p) = \dfrac{p^2+1}{p^2(p-1)^2}.$
16. $F(p) = \dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}.$

7 Изображения некоторых специальных функций

7.1 Бесселевы функции

Рассмотрим бесселеву функцию целого порядка $J_n(t)$, то есть регулярное решение уравнения Бесселя

$$t^2y''(t) + ty'(t) + (t^2 - n^2)y(t) = 0,$$

представимое рядом

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

Выше мы показали, что $J_0 \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0$ (см. пример 26). Найдем изображение $J_1(t)$, воспользовавшись тождеством $J_1(t) = -J_0'(t)$ и теоремой 9.

$$\begin{aligned} J_1(t) &= -J_0'(t) \risingdotseq -\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} - J_0(0)\right) = 1 - \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = \\ &= \frac{\sqrt{p^2+1} - p}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}(\sqrt{p^2+1}+p)}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Методом индукции можно показать, что

$$J_n(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1} - p)^n}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}(\sqrt{p^2+1}+p)^n}. \tag{7.2}$$

Найдем изображение функции $y(t) = J_0(2\sqrt{t})$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$(ty')' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \tag{7.3}$$

Преобразуем это равенство по Лапласу, для этого введем обозначение $y(t) \risingdotseq Y(p)$, тогда

$$\begin{aligned} y'(t) \risingdotseq pY(p) - 1; \quad ty'(t) &\risingdotseq -(pY(p)-1)' = -(pY(p))'; \\ (ty'(t))' &\risingdotseq -p(pY(p))'. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(ty')' + y \risingdotseq -p^2 Y' - pY + Y = 0, \quad \text{или} \quad \frac{Y'}{Y} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Находим, что $Y(p) = \frac{C}{p}\,\mathbf{e}^{1/p}$.

Для нахождения постоянной C воспользуемся предельным соотношением

$$\lim_{x\to\infty}(xY(x) - Y(0)) = 0, \quad x = \operatorname{Re} p,$$

откуда $C = Y(0) = 1$ и

$$J_0(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p}\,\mathbf{e}^{-1/p}\,. \tag{7.4}$$

Подобным образом можно показать, что

$$t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}}\,\mathbf{e}^{-1/p}\,. \tag{7.5}$$

Предоставляем читателю самостоятельно доказать эту формулу.

7.2 Интеграл вероятности (интеграл ошибок)

Этим термином называется функция

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \mathbf{e}^{-\tau^2}\,d\tau, \quad |t| < \infty. \tag{7.6}$$

Множитель $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ нормирует (7.6), с учетом интеграла Пуассона $\operatorname{erf}(\infty) = 1$. Найдем преобразование Лапласа интеграла ошибок. Сначала вычислим изображение функции $y(t) = \mathbf{e}^{-t^2}$, которая удовлетворяет уравнению

$$y' + 2ty = 0, \qquad y(0) = 1. \tag{7.7}$$

Преобразуем его по Лапласу, полагая $y(t) \risingdotseq Y(p)$

$$pY(p) - y(0) - 2Y'(p) = 0, \quad y(0) = 1.$$
$$Y'(p) - \frac{p}{2}Y(p) = -\frac{1}{2},$$

умножая это равенство на $\mu(p) = \exp\left[-\frac{p^2}{4}\right]$, интегрирующий множитель, после интегрирования получаем

$$\mathbf{e}^{-p^2/4}\, Y(p) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^p \mathbf{e}^{-q^2/4}\, dq + C.$$

Для нахождения C устремим $x \to \infty$, $x = \operatorname{Re} p$, тогда

$$\lim_{x\to\infty} Y(p) = 0, \quad \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-q^2/4}\, dq = 2\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-r^2}\, dr = \sqrt{\pi},$$

то $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Итак,

$$Y(p) = \mathbf{e}^{p^2/4}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int\limits_0^{p/2} \mathbf{e}^{-r^2}\, dr\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathbf{e}^{p^2/4}\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{p}{2}\right)\right).$$

Используя теорему 10 (изображение интеграла), получаем

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t y(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\,\mathbf{e}^{p^2/4}\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{p}{2}\right)\right). \qquad (7.8)$$

8 Таблица изображений

Для удобства и по традиции приведем небольшую таблицу изображений наиболее популярных функций.

I. $\eta(t-\alpha) \risingdotseq \frac{\mathbf{e}^{-\alpha p}}{p}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\alpha \geq 0$;

II. $t^\nu \risingdotseq \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\nu > -1$;

III. $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0$;

IV. $\mathbf{e}^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$;

V. $\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;

VI. $\cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$;

VII. $\operatorname{sh} \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \omega|$;

VIII. $\operatorname{ch} \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} \omega|$;

IX. $t^n\, \mathbf{e}^{-\alpha t} \risingdotseq \frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$;

X. $t \sin \omega t \risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$;

XI. $t \cos \omega t \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$;

XII. $\mathbf{e}^{-\alpha t} \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$;

XIII. $\mathbf{e}^{-\alpha t} \cos \omega t \risingdotseq \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$;

XIV. $J_n(t) \risingdotseq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$;

XV. $t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}}\, \mathbf{e}^{-1/p}$, $n = 0, 1, \ldots$;

XVI. $\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi} t \sqrt{t}} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \risingdotseq \mathbf{e}^{-\alpha\sqrt{p}}$;

XVII. $1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) \risingdotseq \frac{\mathbf{e}^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}$.

9 Приложения операционного исчисления

9.1 Линейные дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами

Методы операционного исчисления применяются при интегрировании дифференциальных уравнений и их систем. С помощью этих методов интегрирование некоторых классов линейных дифференциальных уравнений сводится к решению алгебраических уравнений; из алгебраического уравнения находят изображение решения данного уравнения, после чего по изображению воостанавливают само решение.

Пусть требуется найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \tag{9.1}$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0. \tag{9.2}$$

Предположим, что искомая функция $y = y(t)$, ее производные $y'(t)$, $y''(t), \ldots, y^{(n)}$ и данная функция $f(t)$ являются оригиналами. Обозначим изображения функций $y(t)$ и $f(t)$ соответственно через $Y(p)$ и $F(p)$. Пользуясь правилом дифференцирования оригинала (см. теорему 9), находим

$$y \fallingdotseq Y,\ y' \fallingdotseq pY,\ y'' \fallingdotseq p^2 Y, \ldots,\ y^{(n-1)} \fallingdotseq p^{n-1} Y,\ y^{(n-1)} \fallingdotseq p^n Y.$$

На основании свойства линейности (см. теорему 5) получим уравнение в изображениях

$$p^n Y + a_1 p^{n-1} Y + \ldots + a_n Y = F,$$

которое соответствует данному дифференциальному уравнению. Изображение Y искомого решения имеет вид

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}. \tag{9.3}$$

Найдя изображение $F(p)$ функции $f(t)$, получим изображение $Y(p)$ искомой функции $y(t)$ и вопрос будет сведен к отысканию соответствующего оригинала, который является решением данного дифференциального уравнения (9.1) и удовлетворяет условиям (9.2).

При интегрировании дифференциальных уравнений находит применение интеграл Дюамеля (4.21).

Пусть необходимо найти решение дифференциального уравнения (9.1) при $f(t) = 1$, удовлетворяющего условиям (9.2).

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} z' + a_n z = 1, \tag{9.4}$$

$$z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-1)}(0) = 0. \tag{9.5}$$

Обозначим изображение решения $z(t)$ через $Z(p)$, получим уравнение в изображениях

$$p^n Z + a_1 p^{n-1} Z + \ldots + a_{n-1} p Z + a_n Z = \frac{1}{p}, \tag{9.6}$$

откуда

$$Z(p) = \frac{1}{p(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)}. \tag{9.7}$$

Из этого равенства и равенства (9.3) находим, что

$$Y(p) = pF(p)Z(p).$$

Пользуясь интегралом Дюамеля, получаем

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int\limits_0^t f(\tau) z(t-\tau) d\tau, \tag{9.8}$$

или

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int\limits_0^t z(\tau) f(t-\tau) d\tau. \tag{9.9}$$

Таким образом, когда известно решение уравнения (9.1) при $f(t) = 1$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, то можно сразу найти в квадратурах решение этого уравнение для любой функции $f(t)$ при тех же начальных условиях.

Замечание 1. Если начальные условия не являются нулевыми, то изображения производных находят с помощью формулы (4.12).

Для примера рассмотрим неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t),$$

где a, b – заданные постоянные, $f(t)$ – данная функция, удовлетворяющая условиям функции-оригинала. Решим для данного уравнения задачу Коши при $t \geq 0$ с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_1.$$

Преобразуем обе части уравнения по Лапласу, обозначая $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, с учетом (4.12)

$$p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + apY(p) - ay(0) + bY(p) = F(p).$$

В результате получилось линейное алгебраическое уравнение относительно $Y(p)$. Подставляя начальные значения $y(t)$, имеем

$$Y(p) = \frac{F(p) + (p+a)y_0 + y_1}{p^2 + ap + b}.$$

Отсюда, применяя один из способов обращения, находим $y(t)$.

Замечание 2. Если за начальный момент взято значение $t_0 \neq 0$, а не $t = 0$, то вводят новую переменную τ по формуле $\tau = t - t_0$, $t = \tau + t_0$, тогда $\tau = 0$ при $t = t_0$.

Пример 49 *Найти частное решение уравнения*

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = f(t); \quad y(0) = y'(0) = 0,\, t \geq 0.$$

Решение. Переходим к изображениям

$$\begin{aligned} &p^2 Y(p) + \omega^2 Y(p) = F(p), \\ &Y(p) = \frac{F(p)}{p^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot F(p). \end{aligned}$$

Само решение $y(t)$ запишется в виде свертки $f(t)$ и $\sin \omega t \risingdotseq \omega(p^2 + \omega^2)^{-1}$:

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^t \sin \omega(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Этот результат легко получить и вариацией постоянных, но операционный метод не сложнее и может применяться для кусочно-непрерывной $f(t)$.

Пример 50 *Найти решение уравнения* $y''(t) - y'(t) = 1$, *удовлетворяющее условиям* $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение. Обозначим через $Y(p)$ изображение функции $y(t)$, тогда $y'(t) \risingdotseq pY(p)$, $y''(t) \risingdotseq p^2 Y(p)$. Поскольку $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$, то уравнение в изображениях имеет вид

$$p^2 Y(p) - pY(p) = \frac{1}{p},$$

откуда

$$Y(p) = \frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{1 - p^2 + p^2}{p^2(p-1)} = -\frac{1+p}{p^2} + \frac{1}{p-1} = -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}.$$

Возвращаясь к оригиналу получаем искомое решение $y(t) = e^t - t - 1$. Легко проверить, что эта функция удовлетворяет данному уравнению и нулевым начальным данным.

Пример 51 *Найти решение уравнения*

$$y''(t) + y(t) = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

где $f(t) = 0$, *если* $t \in (-\infty, 2) \cup [4, \infty)$ *и* $f(t) = 1$, *для* $t \in [2, 4)$

Решение. В пространстве изображений данное уравнение имеет вид

$$p^2 Y(p) + Y(p) = \frac{1}{p}(\mathbf{e}^{-2p} - \mathbf{e}^{-4p});$$

$$Y(p) = (\mathbf{e}^{-2p} - \mathbf{e}^{-4p})\frac{1}{p(p^2+1)} = (\mathbf{e}^{-2p} - \mathbf{e}^{-4p}) \cdot \frac{1}{p} - \frac{(\mathbf{e}^{-2p} - \mathbf{e}^{-4p}) \cdot p}{p^2+1}.$$

Возвращаясь к оригиналу получаем искомое решение

$$y(t) = \eta(t-2) - \eta(t-4) + \cos(t-4) - \cos(t-2),$$

или

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 2, \\ 1 - \cos(t-2) & \text{при} \quad 2 \geq t \geq 4, \\ \cos(t-4) - \cos(t-2) & \text{при} \quad t \leq 4. \end{cases}$$

Пример 52 *Найти решение уравнения* $y''(t) + y(t) = 2\cos t$, *удовлетворяющее условиям* $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Решение. Обозначим через $Y(p)$ изображение функции $y(t)$, тогда $y'(t) \risingdotseq pY(p)$, $y''(t) \risingdotseq p^2 Y(p) + 1$. Поскольку $\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}$, то уравнение в изображениях принимает вид

$$p^2 Y(p) + 1 + Y(p) = \frac{2p}{p^2+1},$$

откуда

$$Y(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Следовательно,

$$y(t) = t \sin t - \sin t.$$

Пример 53 *Проинтегрировать уравнение* $y''(t) + 4y(t) = 8\sin 2t$ *при начальных условиях* $y(0) = C_1$, $y'(0) = C_2$.

Решение. Обозначим через $Y(p)$ изображение решения $y(t)$, тогда $y'(t) \risingdotseq pY(p) - C_1$, $y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - C_1p - C_2$. Так как $\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}$, то операторное уравнение принимает вид

$$p^2Y(p) - {}_1 - {}_2 + 4Y(p) = \frac{16}{p^2+4},$$

откуда

$$Y(p) = \frac{16}{(p^2+4)^2} + {}_1\frac{p}{p^2+4} + {}_2\frac{1}{p^2+4}.$$

Находя оригиналы каждого из слагаемых в правой части, получаем искомое решение

$$y(t) = C_1\cos 2t + \frac{C_2}{2}\sin 2t + \sin 2t - 2t\cos 2t,$$

или

$$y(t) = C_1\cos 2t + C\sin 2t - 2t\cos 2t, \quad C = \frac{C_2}{2} + 1.$$

Пример 54 *Проинтегрировать уравнение* $y''(t) + y'(t) = t$ *при начальных условиях* $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение. Найдем сначала решение уравнения $z'' + z' = 1$ при нулевых начальных условиях. Данное уравнение в изображениях имеет вид

$$p^2Z(p) + pZ(p) = \frac{1}{p},$$

откуда

$$Z(p) = \frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p},$$

$$z(t) = \mathbf{e}^{-t} + t - 1.$$

На основании формулы (9.9) получаем:

$$y(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t (\mathbf{e}^{-\tau} + \tau - 1)(t-\tau)d\tau = \frac{t^2}{2} - t - \mathbf{e}^{-t} + 1.$$

Пример 55 *Найти решение уравнения $y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 2\,\mathbf{e}^{4t}$, удовлетворяющее условиям $y(0) = y'(0) = 0$.*

Решение. Операторное уравнение в данном случае принимает вид

$$p^2Y(p) - pY(p) - 6Y(p) = \frac{2}{p-4},$$

откуда

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{2}{(p-4)(p^2-p-6)} = \frac{2}{(p-4)(p-3)(p+2)} = \\ &= \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{p+2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{p-3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p-4}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомое решение определяется формулой

$$y(t) = \frac{1}{15}\,\mathbf{e}^{-2t} - \frac{2}{5}\,\mathbf{e}^{3t} + \frac{1}{3}\,\mathbf{e}^{4t}.$$

Пример 56 *Найти решение задачи Коши $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = t\,\mathbf{e}^{3t}$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.*

Решение. В отличие от предыдущих примеров, здесь за начальный момент взято значение $t = 1$, а не $t = 0$. Введем новую переменную $\tau = t - 1$, откуда $t = \tau + 1$. С учетом последнего равенства искомая функция $y(t) = y(\tau + 1) = z(\tau)$, при этом уравнение и начальные условия запишутся так

$$z''(\tau) - 3z'(\tau) + 2z(\tau) = (\tau + 1)\,\mathbf{e}^3\,\mathbf{e}^{3\tau}, \quad z(0) = z'(0) = 1.$$

Найдем решение полученного уравнения:

$$z(\tau) \risingdotseq Z(p), \quad z'(\tau) \risingdotseq pZ(p) - 1, \quad z''(\tau) \risingdotseq p^2Z(p) - p - 1;$$

$$(\tau + 1)\,\mathbf{e}^{3\tau} = \tau\,\mathbf{e}^{3\tau} + \mathbf{e}^{3\tau} \risingdotseq \frac{1}{(p-3)^2} + \frac{1}{p-3} = \frac{p-2}{(p-3)^2};$$

$$(p^3 - 3p + 2)Z(p) = \mathbf{e}^3\,\frac{p-2}{(p-3)^2} + p - 2;$$

$$Z(p) = \mathbf{e}^3 \frac{1}{(p-1)(p-3)^2} + \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно,

$$z(\tau) = \frac{1}{4}\,\mathbf{e}^3(\mathbf{e}^{\tau} - \mathbf{e}^{3\tau} + 2\tau\,\mathbf{e}^{3\tau}) + \mathbf{e}^{\tau} = \left(\frac{\mathbf{e}^3}{4} + 1\right)\mathbf{e}^{\tau} + \frac{2\tau - 1}{4}\,\mathbf{e}^{3(\tau+1)}.$$

Возвращаясь к переменной t, получаем решение исходной задачи Коши

$$y(t) = \frac{\mathbf{e}^3 + 4}{4\,\mathbf{e}}\,\mathbf{e}^{t} + \frac{2t - 3}{4}\,\mathbf{e}^{3t}.$$

Пример 57 *Найти решение уравнения* $y''(t) + y'(t) = t$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Решение. Положим $t = \tau + 1$, $y(t) = y(\tau + 1) = z(\tau)$, тогда уравнение и начальные условия примут вид

$$z''(\tau) + z'(\tau) = \tau + 1, \quad z(0) = 1,\ z'(0) = 0.$$

Составим операторное уравнение для этого дифференциального уравнения:

$$z(\tau) \risingdotseq Z(p), \quad z'(\tau) \risingdotseq pZ(p) - 1, \quad z''(\tau) \risingdotseq p^2 Z(p) - p;$$

$$p^2 Z(p) - p + pZ(p) - 1 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p};$$

$$Z(p) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p}.$$

Переходя к оригиналам, получаем

$$z(\tau) = 1 + \frac{\tau^2}{2}.$$

Возвращаясь к переменной t, получаем решение исходной задачи Коши

$$y(t) = 1 + \frac{(t-1)^2}{2}.$$

Преобразование Лапласа можно применять и для решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример 58 *Найти решение системы*

$$\begin{cases} y' - 3y - 2z &= 4\,\mathbf{e}^{5t} \\ z' - y - 2z &= 0, \end{cases}$$

при начальных условиях $y(0) = z(0) = 0$, $t \geq 0$.

Решение. Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $z(t) \risingdotseq Z(p)$. Переход к изображениям переводит систему дифференциальных уравнений в алгебраическую систему

$$\begin{aligned} pY(p) - 3Y(p) - 2Z(p) &= \frac{4}{p-5} \\ pZ(p) - Y(p) - 2Z(p) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{4(p-2)}{(p-5)(p^2-5p+4)}; \qquad Z(p) = \frac{4}{(p-5)(p^2-5p+4)}.$$

Обращая преобразования, получаем

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{3}(\mathbf{e}^t + 8\,\mathbf{e}^{4t}) + 3\,\mathbf{e}^{5t} \\ z(t) &= \frac{1}{3}(\mathbf{e}^t + 4\,\mathbf{e}^{4t}) + \mathbf{e}^{5t}. \end{aligned}$$

Пример 59 *Найти решение системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} y' + 3y + z &= 0 \\ z' - y + z &= 0, \end{cases}$$

при начальных условиях $y(0) = z(0) = 1$, $t \geq 0$.

Решение. Введем обозначения $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $z(t) \risingdotseq Z(p)$, тогда система в изображениях примет вид

$$\begin{aligned} pY(p) - 1 + 3Y(p) + Z(p) &= 0 \\ pZ(p) - 1 - Y(p) + Z(p) &= 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (p+3)Y(p)+Z(p) &= 1 \\ -Y(p)+(\ +1)Z(p) &= 1. \end{aligned}$$

Решение этой системы получим с помощью формул Крамера $Y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$, $Z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$, где Δ – определитель системы, Δ_y, Δ_z – определители, полученные из определителя системы заменой коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами. Поскольку

$$\Delta=(p+2)^2, \qquad \Delta_y=p, \qquad \Delta_z=p+4,$$

то

$$Y(p)=\frac{p}{(p+2)^2}, \qquad Z(p)=\frac{p+4}{(p+2)^2}.$$

Следовательно,

$$y(t)=\mathbf{e}^{-2t}(1-2t), \qquad z(t)=\mathbf{e}^{-2t}(1+2t).$$

9.2 Интегральные уравнения типа свертки

9.2.1 Уравнения в свертках второго рода

Уравнением в свертках второго рода назовем следующее равенство

$$ay(t)+b\int\limits_0^t k(t-\tau)y(\tau)d\tau=f(t), \quad t\geq 0,$$

где a и b – постоянные не равные нулю, $k(t)$ и $f(t)$ известные функции-оригиналы. Преобразуем его по Лапласу, предполагая $y(t)\risingdotseq Y(p)$, $k(t)\risingdotseq K(p)$ и $f(t)\risingdotseq F(p)$.

$$aY(p)+bK(p)Y(p)=K(p),$$

откуда

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{F(p)}{a+bK(p)}=\frac{1}{a}\cdot\frac{F(p)(a+bK(p))-bF(p)K(p)}{a+bK(p)}= \\ &= \frac{1}{a}F(p)-\frac{b}{a}\frac{K(p)}{a+bK(p)}F(p)=\frac{1}{a}F(p)-\frac{b}{a}\Phi(p)F(p). \end{aligned}$$

Здесь $\Phi(p) = \frac{K(p)}{a+bK(p)} \risingdotseq \phi(t)$. В итоге

$$y(t) = \frac{1}{a}f(t) - \frac{b}{a}\int\limits_0^t \phi(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

9.2.2 Уравнения в свертках первого рода

Это уравнения вида

$$\int\limits_0^t k(t-\tau)y(\tau)d\tau = f(t), \quad t \geq 0,$$

где $k(t)$ и $f(t)$ известные функции-оригиналы. После преобразования имеем

$$K(p)Y(p) = K(p), \qquad Y(p) = F(p)\cdot[K(p)]^{-1}.$$

Решение $y(t)$ нельзя представить в виде свертки, ибо $[K(p)]^{-1}$ не имеет оригинал (неограничена для больших p, так как $K(p) \to 0$ при $p \to \infty$). Поэтому $y(t)$ находят каким-нибудь другим способом.

Пример 60 *Решить уравнение*

$$\int\limits_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau = 1 - \cos t, \quad t \geq 0.$$

Решение.

$$\begin{aligned} Y(p)\cdot\frac{1}{p^2+1} &= \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p(p^2+1)} \\ Y(p) &= \frac{1}{p}, \qquad y(t) = \eta(t). \end{aligned}$$

9.3 Уравнения математической физики

Рассмотрим в области $x > 0$, $t > 0$ уравнение

$$a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_{tt} + c(x,t)u_x + d(x,t)u_t + e(x,t)u = f(x,t). \quad (9.10)$$

Из многочисленных интегральных преобразований для множества $(0, \infty)$ преобразование Лапласа, (чаще всего по t) применяют нередко из-за хорошей теоретической базы. Есть и принципиальные причины, например коэффициенты в (9.10) зависят только от x или, что важнее, функция $u(x,t)$ ищется в классах неинтегрируемых на ∞ функциях.

Пример 61 *Найти решение уравнения*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad x > 0, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее условиям $u|_{t=0} = 0$, $u|_{x=0} = \varphi(t)$, $u|_{x=\infty} = 0$.

Решение. Эту задачу можно решить синус-преобразованием Фурье, но мы продемонстрируем операционный метод. Пусть $u(x,t) \risingdotseq Y(x,p)$, тогда $u_{xx}(x,t) \risingdotseq Y_{xx}(x,p)$ при этом $Y(0,p) = \Phi(p) \risingdotseq \varphi(t)$. $u_t(x,t) \risingdotseq pY(x,p) - u(x,0)$. Но $u(x,0) = 0$, и окончательно уравнение в пространстве образов имеет вид:

$$Y_{xx}(x,p) - \frac{p}{a^2} Y(x,p) = 0,$$

откуда

$$Y(x,p) = C_1(p) \cdot \mathbf{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2(p) \cdot \mathbf{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} Y(x,p) = 0$, то $C_1(p) \equiv 0$. Учитывая условие при $x = 0$, находим, что $C_2(p) = \Phi(p)$. Итак, $Y(x,p) = \Phi(p)\,\mathbf{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$. Обратное преобразование вычислим как свертку $\varphi(t)$ и $f(t) \risingdotseq \mathbf{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$. По формуле XVI находим $f(t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}t\sqrt{t}} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$. Решение исходного уравнения

$$u(x,t) = (\varphi * f)(t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \varphi(\tau) \cdot (t-\tau)^{-3/2} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\tau.$$

9.4 Вычисление несобственных интегралов

Сначала докажем утверждение.

Теорема 15 (Парсеваль) *Пусть $f(t)$ и $g(t)$ функции-оригиналы, а $F(p)$ и $G(p)$ их изображения, $\operatorname{Re} p \geq 0$. Если $f(t)G(t)$ и $g(t)F(t)$ интегрируемы, то*

$$\int\limits_0^\infty f(t)G(t)dt = \int\limits_0^\infty F(t)g(t)dt. \tag{9.11}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty f(t)G(t)dt &= \int\limits_0^\infty f(t)\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-t\tau}\, g(\tau)d\tau dt = \int\limits_0^\infty g(\tau)\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{-t\tau}\, f(t)dtd\tau = \\ &= \int\limits_0^\infty g(\tau)F(\tau)d\tau = \int\limits_0^\infty g(t)F(t)dt.\end{aligned}$$

Обоснование возможности перемены порядка интегрирование мы предоставляем читателю.

Следствие. *Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\operatorname{Re} p = x \geq 0$. Если $f(t)/t$ и $F(x)$ интегрируемы на $[0, \infty)$, то*

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int\limits_0^\infty F(x)dx.$$

Это соотношение следует из теоремы Парсеваля, если положить $g(t) = \eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p} = G(p)$.

Пример 62 *Интеграл Дирихле:*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 63 *Вычислить интеграл, $\alpha > 0$, $\omega > 0$:*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - \cos\omega t}{t}dt = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{x+\alpha} - \frac{x}{x^2+\omega^2}\right)dx = \ln\frac{x+2}{\sqrt{x^2+\omega^2}}\Bigg|_0^\infty = \ln\frac{\omega}{\alpha}.$$

Пример 64

$$\int_0^\infty \frac{J_1(t)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}dx = (x-\sqrt{x^2+1})\Big|_0^\infty = 1.$$

Задачи

В задачах 1-10 найдите частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

1. $y'' - 2y' = \mathbf{e}^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$
2. $y'' + 4y = \sin 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
3. $y'' + 2y' + 2y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$
4. $y'' + 3y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
5. $y'' + 2y' + y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$
6. $y'' + y' = t^2 + 2t, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2.$
7. $y'' + y = \cos t, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$
8. $y'' - 2y' - 3y = 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$
9. $y'' + 2y' - 3y = \mathbf{e}^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
10. $y'' + 9y' = \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

В задачах 11-18 решите задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$11.\quad \begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

$$12.\quad \begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

$$13.\quad \begin{cases} x' + x - y = \mathbf{e}^t, \\ y' + y - x = \mathbf{e}^t, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

$$14.\quad \begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' - 2x + 6y = 0, \end{cases} \qquad x(0) = 3, \quad y(0) = 15.$$

$$15.\quad \begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t, \end{cases} \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

$$16.\quad \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases} \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$$

$$17.\quad \begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$$

$$18.\quad \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0.$$

Список литературы

[1] Гусак А.А., Бричикова Е.А., Гусак Г.М. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление. Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 208 с.