

УДК 372.851

В.А.Федина

О СОДЕРЖАНИИ ПОНЯТИЯ «КАЧЕСТВЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА»

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена, Санкт-Петербург, VFedina@yandex.ru

A concept of a «qualitative mathematical problem» is specified taking into account different approaches to the definition of a concept «a qualitative problem» in the context of physics and mathematics teaching methodology. A class of qualitative problem is singles out.

Ключевые слова: качественная математическая задача, методики обучения

Понятие «качественная задача» получило широкое распространение в методике преподавания естественнонаучных дисциплин. Так, качественные за-

дачи более 200 лет применяются в процессе обучения физике. Появление и массовое использование данного термина в методике преподавания физики связано

с тем, что установление свойств объектов и соотношений между ними может осуществляться на одном из двух уровней — качественном или количественном. Первому уровню исследования объекта соответствуют качественные физические задачи, в отличие от количественных (расчетных). Качественные задачи решаются устно, поэтому все внимание учащихся концентрируется на смысловом характере связей между понятиями, явлениями. В процессе решения качественных задач физические законы используются не в формально-математической форме, а в форме словесных рассуждений.

В работе М.В.Исупова и Ю.А.Саурова [1] проведен анализ понятия «качественная задача». Из него следует, что по характеру и методу решения большинство исследователей подразделяют учебные физические задачи на качественные и количественные, не считая нужным, однако, давать точное определение понятию «качественная задача». Проведенное авторами анкетирование показало, что большинство учителей и методистов относят к качественным такие задачи, которые не содержат числовых значений в условии. Однако, как замечают исследователи, характер условия задачи не всегда соответствует характеру ее решения. Некоторые расчетные задачи имеют условие, в котором числовые величины заданы косвенно. Такие задачи решаются по формулам, т.е. являются количественными задачами, но без числовых данных. Вот простой пример: «Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, если наполняющий его гелий заменить водородом?». Наоборот, есть задачи с численными данными, решаемые качественными методами: «Парашютист весом 700 Н равномерно опускается. Чему равна сила сопротивления воздуха, действующая на парашютиста?». Этот пример иллюстрирует неточность, в частности, такой формулировки: «Качественными называют задачи, при решении которых устанавливают только качественную зависимость между физическими величинами». Однако решение ряда задач, в которых требуется найти значение некоторой величины, можно осуществить при использовании только качественных методов. Вот еще один пример: «Чему равна равнодействующая всех сил, действующих на автомобиль, равномерно движущийся по горизонтальной дороге?». Для ответа на вопрос не нужно делать каких-либо математических действий, достаточно провести простые рассуждения: автомобиль движется равномерно и прямолинейно, значит, действие на него всех сил скомпенсировано, т.е. равнодействующая всех сил равна нулю.

Одно из первых определений качественных задач дал М.Е.Тулчинский: «Задача, в которой ставится для разрешения одна из проблем, связанная с качественной стороной рассматриваемого физического явления, которая решается путем логических умозаключений, основывающихся на законах физики, построения чертежа или выполнения эксперимента, но без применения математических действий, называется качественной задачей» [2].

Б.Мирзоев, подробно проанализировав различные подходы к рассмотрению определения «качест-

венной задачи» через ее «внешние» характеристики (форма условия, метод решения и характер цели), показывает, что наличие или отсутствие числовых данных, а также характер поставленной цели не предопределяет уровень исследования объекта. Необходимым и достаточным условием для качественной задачи, считает он, является требование отсутствия расчетов в процессе решения, независимо от того, в числах или буквах эти расчеты производятся. В то же время он отмечает, что и в процессе решения качественных задач иногда требуется делать расчеты, а в некоторых задачах и небольшие формульные выкладки [3].

М.В.Исупов и Ю.А.Сауров называют качественную такую задачу, решение которой осуществляется путем построения логической цепочки рассуждений и не требует обязательных математических выкладок и вычислений, а используемые вычисления не образуют строгую и полную логическую систему формальных выводов. Все формульные преобразования используются только для качественного анализа, а расчеты осуществляются для количественной прикидки [1].

Некоторые исследователи различают качественные задачи и качественные вопросы. Так, М.Е.Тулчинский называл качественным вопросом задачу в одно действие. «Качественный вопрос предполагает ответ, основывающийся на применении одного какого-нибудь физического закона, свойства тела или определения физической величины» [4]. С точки зрения Б.Мирзоева, главной отличительной особенностью качественных вопросов является то, что в них не содержится никакой информации, необходимой для формулировки ответа [5]. С этим трудно полностью согласиться, ведь в качественных вопросах также содержится характеристика заданной ситуации, пусть краткая, но достаточная для получения ответа. На наш взгляд, качественные вопросы в отличие от задач подразумевают знание ответа на вопрос, а не его получение, т.е. имеют репродуктивный характер.

Многие исследователи выделяют третий тип задач, относящийся к пограничной зоне между качественными и количественными задачами, — задачи-оценки. В таких задачах изначально не задаются никакие числовые данные, но подразумевается количественное решение. Условие в задачах-оценках представляет собой реальную ситуацию, что приближает их к качественным задачам. Например: «Оцените, скорость струи пара, выходящего из носика кипящего чайника». Так же, как и при решении качественных задач, здесь нужно понять рассматриваемое явление и построить для него простую модель. Однако несмотря на отсутствие числовых данных решение нужно получить хоть и приближенное, но численное. А приближенность ответа связана, с одной стороны, с оценочным характером модели, а с другой стороны, с тем, что ученик сам выбирает из собственного опыта необходимые для решения числовые значения величин, которые у разных учеников, естественно, могут отличаться. Таким образом, задачи-оценки, являясь симбиозом качественных и количественных задач,

приближают учащихся к решению реальных научных проблем, в которых требуется и анализ физического явления, и создание модели этого явления, и ее приближенное количественное описание [6].

Термин «качественная математическая задача» в литературе по методике обучения математике встречается крайне редко, и все же даже эпизодическое использование его говорит о наличии особого рода задач, применяемых на практике. В рамках теории и методики обучения математике осмыслить понятие «качественная задача» пытались ряд ученых.

В.В.Фирсов рассматривал качественные задачи как средство развития статистического мышления учащихся. Умение решать качественные статистические задачи он характеризует как умение делать качественные статистические выводы на базе данной статистической информации, руководствуясь правдоподобными соображениями, основанными на интуиции [7]. Е.А.Бунимович отмечает, что задачами качественного характера являются те задачи, на которые могут дать ответ все школьники вне зависимости от уровня их вероятностно-статистической подготовки [8].

Наиболее полную из имеющихся характеристик качественных математических задач дает П.Ю.Германович, называя их вопросами и задачами на соображение. «Некнижные» вопросы по теории требуют от ученика осмысленно распорядиться имеющимся у него запасом знаний и умело выбрать необходимое теоретическое положение, чтобы затем на его основе сделать 2-3 умозаключения, приводящие к правильному ответу на вопрос. Отличительной чертой этих упражнений Германович считает то, что они не требуют или почти не требуют вычислений и преобразований «в уме», но вместе с тем, побуждая ученика к сосредоточенному размышлению, существенно содействуют углубленному пониманию теории и навыкам в ее применении [9]. А.П.Карп выделяет такие черты качественной задачи как ее простоту и возможность использования в качестве средства выявления понимания учащимися изученного материала [10].

В.В.Крылов рассматривает качественные задачи как средство установления содержательных взаимосвязей учебного материала по элементарной математике и как средство создания условий для понимания математики. Он выделяет некоторые существенные черты качественных задач:

1) выполнение их не носит алгоритмического характера, для субъекта они являются нестандартными, т. е. решающий не обладает готовым способом их решения;

2) процесс выполнения не требует громоздких алгебраических преобразований, значительных арифметических вычислений, сложных доказательств, длинных, многоходовых рассуждений;

3) выполнение таких заданий требует от решающих наличия понимания математики и способствует совершенствованию имеющегося понимания [11], — и приходит к выводу, что качественная задача является простой и эвристической.

О.Н.Троицкая считает, что качественной задачей делает не метод ее решения, а характер требования

(вопроса) задачи, которым определяется необходимость исследования качественных свойств объектов и процессов, описываемых задачей ситуацией. Причем привлечение субъекта действия в ситуацию с элементом случайного открывает ряд дополнительных возможностей для постановки задач с качественными требованиями: оценить правильность поведения субъекта действия, помочь субъекту действия принять правильное (оптимальное) решение, вскрыть основания принятых субъектом действия решений и т. п. Кроме того, предметом качественного анализа, по мнению Троицкой, может быть описание ситуации с элементом случайного, составляющее формулировку задачи, а именно: корректность использования научных терминов, смысловое значение житейских терминов, соответствие смыслового значения использованных терминов содержанию обозначаемых ими научных понятий.

Таким образом, под качественной стохастической задачей О.Н.Троицкая понимает «задачу, содержащую описание жизненной ситуации с элементом случайного и допускающую исследование качественных свойств этого элемента, действий субъекта в этой ситуации или описания самой ситуации на научном и житейском уровнях» [12].

Расширяя и уточняя рассмотренные характеристики качественной задачи, мы под *качественной математической задачей* будем понимать задачу, решение которой направлено на получение, объяснение и обоснование требуемого результата на основе использования свойств математических объектов путем рассуждений без использования громоздких алгебраических или арифметических выкладок.

Нам представляется, что есть математические задачи, которые требуют качественной оценки, а есть задачи, требующие количественной оценки.

Качественная оценка: требование задачи указывает на необходимость качественного анализа некоторой ситуации и принятия решения (в формулировке задачи встречаются следующие обороты речи: «нужно ли», «выгодно ли», «хватит ли», «успеет ли», «сможет ли», «что необходимо предпринять для того, чтобы...» и т. п.).

Количественная оценка заключается в определении числовых пределов, в которых находится некоторая величина (оценка площади некоторой фигуры площадями «максимальной вписанной» и «минимальной описанной» фигур; оценка значения некоторого выражения на основе определения синуса или косинуса; оценка количества корней уравнения с параметром) или указании приближенного (нахождение некоторой величины по графику) либо даже точного значения некоторой величины (по графику производной функции определить в скольких точках касательная к графику функции параллельна оси OX).

Решение задач-оценок от решения других математических задач, на наш взгляд, отличается наличием одной из следующих характеристик:

1) необходимость сравнить некоторые объекты (значения величин, свойства фигур и т.д.); имеются в виду те случаи, когда объекты являются однородными;

2) необходимость сопоставить некоторые объекты (например, графическое и словесное описание некоторого процесса);

3) необходимость сделать вывод относительно корректности используемого для решения некоторой проблемы (задачи) метода.

Пересечением множеств качественных математических задач и задач-оценок является множество качественных задач на оценку.

1. Исупов М.В., Сауров Ю.А. Формирование отношения школьников к решению качественных задач // Познание процессов обучения физике: Сб. статей. Вып. 3 / Под ред. Ю.А.Саурова. Киров: ВГПУ, 2002. С. 6-8.
2. Тульчинский М.Е. Сборник качественных задач по физике для средней школы: Пособие для учителя. М.: Просвещение, 1965. С.2.

3. Мирзоев Б. // Физика в школе. 1982. №1. С.45-48.
4. Тульчинский М.Е. Указ. соч. С.5.
5. Мирзоев Б. Указ. соч. С.46.
6. Меледин Г.В. // Квант. 1983. №7. С.26-33.
7. Фирсов В.В. // Математика в школе. 2006. №6. С.2-8.
8. Бунимович Е.А. // Математика в школе. 2002. №4. С.52-58.
9. Германович П.Ю. Вопросы и задачи на соображение для 8-10 классов. М.: Учпедгиз, 1957. С.3.
10. Карп А.П. Даю уроки математики...: Кн. для учителя: Из опыта работы. М.: Просвещение, 1992. С.17.
11. Крылов В.В. Об уточнении типологии математических задач // Методические аспекты реализации гуманитарного потенциала математического образования: Сб. науч. работ, представленных на 53 Герценовские чтения / Под ред. В.В.Орлова. СПб.: РГПУ, 2000. С.27.
12. Троицкая О.Н. Качественные задачи как ведущее средство «окультуривания» житейских вероятностных представлений учащихся // Современные методы физико-математических наук: Тр. Междунар. конф. (9-14 октября 2006 г., Опел) — http://window.edu.ru/window_catalog/pdf2txt?p_id=270538p_page=21