

А.С.Ионов, Г.А.Петров

ПОСТРОЕНИЕ ОСНОВ АЛГЕБРЫ КОМПЛЕКСНОЙ ЛОГИКИ НА БАЗЕ РАСШИРЕНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

The problem of creating fundamentals of complex events algebra described by the authors developing on complex logic, is solving. Notions of negative, imaginary, and complex sets are introduced for this purpose. Operations on complex terms — four-valued primary, twelve-valued reversed, and 144-valued complete complex logic are given, physical interpretation of indicated terms is presented.

Введение

Целью настоящей статьи является разработка алгебры комплексной логики и ее расширений на основе нового подхода к математической теории множеств. Комплексная логика [1-4] является обобщением булевой алгебры на случай неадекватных, т. е. содержащих возможную ошибку, объектов. К таким объектам можно отнести все, связанное с человеческим интеллектом, в том числе и саму комплексную логику. При этом традиционная классическая логика оказывается применима лишь для адекватных (не содержащих ошибок, идеализированных) объектов и, таким образом, является частным случаем комплексной логики, подобно тому, как действительные числа являются частным случаем комплексных.

Традиционная теория множеств была создана в XIX в. с целью разработки оснований математического анализа. Предметом этой теории стали адекватные (положительные) множества — аналог положительных чисел. Соответствующая алгебра множеств является частным случаем теории булевых алгебр, основанных на булевой двоичной логике. Применение комплексной логики позволяет расширить круг анализируемых объектов.

1. Понятие и свойства отрицательных и действительных множеств

Пусть S^+ — традиционное (положительное) непустое множество. Определим *отрицательное* множество S^- как результат операции «вычитания» S^+ из пустого множества $\emptyset$:

$$S^- = \emptyset - S^+$$

Физической интерпретацией отрицательного множества является положительное множество, которого уже нет, т. е. можно сказать, что отрицательное множество существует в прошедшем времени, тогда как положительное — в настоящем.

Действительное множество в общем случае включает в себя как положительное, так и отрицательное множество (см. рис.1).

Проиллюстрируем общий вид действительного множества на примере вычитания двух простейших числовых множеств: $\{1, 2, 3\} - \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 4^-, 5^-\}$, где 4^- , 5^- —

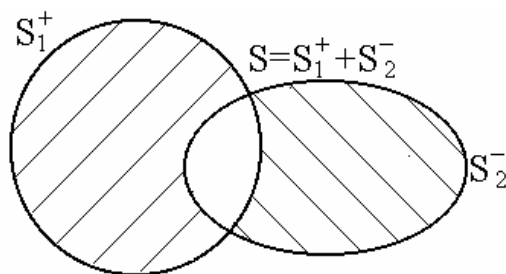


Рис.1. Пример действительного множества

элементы отрицательного множества. Что касается свойств отрицательных и действительных множеств, то они полностью аналогичны свойствам традиционных положительных множеств с учетом знака множества или его части. Так, например, для логической суммы (объединения) действительных множеств справедливо равенство

$$S + S^- = S - S^+.$$

Аналогично для логического умножения (пересечения) положительных и отрицательных множеств справедливо (по аналогии с положительными и отрицательными числами): $S_1^+ \cap S_2^- = S_3^-$, а также $S_1^- \cap S_2^+ = S_3^+$. Приведем соответствующие примеры для числовых множеств: $\{1, 2\} \cap \{1^-, 2^-, 3^-\} = \{1^-, 2^-\}$ и $\{1^-, 2^-, 3^-\} \cap \{3^-, 4^-, 5^-\} = \{3^-\}$.

2. Понятие и свойства комплексных множеств, действия над ними

Будем называть *комплексным* множеством упорядоченную пару S действительных множеств A и B :

$$S = \{A, B\}.$$

Другая запись комплексного множества:

$$S = A + B^*,$$

где B^* — *мнимое* множество, определяемое следующим образом:

$$B^* B^* = B^-.$$

Легко заметить в определении мнимого множества аналогию с определением мнимой единицы i в теории комплексных чисел. Множество A — действительная (реальная) часть комплексного множества, а B^* — мнимая часть. По определению мнимое множество может быть как положительным, так и отрицательным.

Физическая интерпретация мнимого множества — это множество, которого еще нет, т. е. оно существует как потенциальное в будущем времени. Таким образом, комплексное множество может выражать связь объектов, существующих одновременно в прошедшем, настоящем и будущем.

Геометрическая интерпретация комплексного множества показана на рис.2.



Рис.2. Геометрическое представление комплексного множества S

Зададим теперь действия над комплексными множествами.

1) Два комплексных множества $S_1 = \{A_1, B_1\}$ и $S_2 = \{A_2, B_2\}$ равны тогда и только тогда, когда $A_1 = A_2$ и $B_1 = B_2$.

2) Сумма двух комплексных множеств

$$S_1 + S_2 = \{A_1, B_1\} + \{A_2, B_2\} = \{A_1 + A_2, B_1 + B_2\}. \quad (1)$$

На рис.3 показана геометрическая интерпретация суммы двух комплексных множеств, все части которых отрицательные.

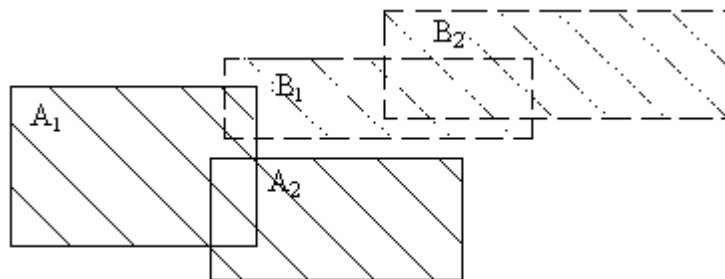


Рис.3. Пример суммирования комплексных множеств

3) *Произведение* двух комплексных множеств определяется аналогично произведению комплексных чисел:

$$S_1 \cap S_2 = \{A_1 \cap A_2 - B_1 \cap B_2, A_1 \cap B_2 + A_2 \cap B_1\}. \quad (2)$$

Геометрическая интерпретация произведения двух комплексных множеств с отрицательными реальной и мнимой частями показана на рис. 4, где в результате получается чисто действительное множество.

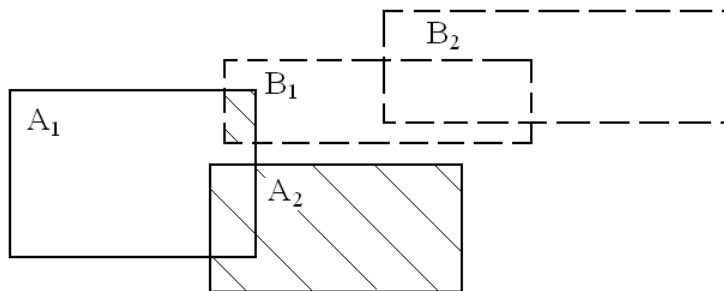


Рис.4. Пример умножения комплексных множеств

4) *Обращение* комплексного множества S является результатом обмена местами значений его реальной и мнимой частей:

$$S' = \{A, B\}' = \{B, A\}. \quad (3)$$

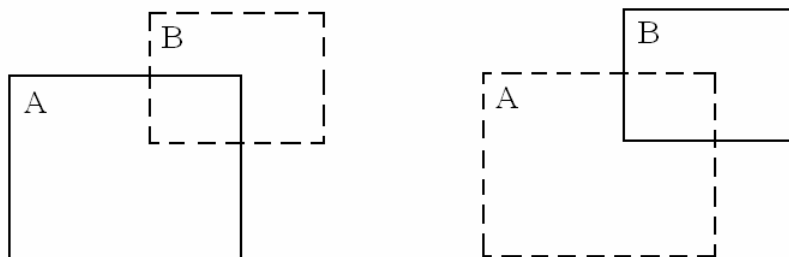


Рис.5. Пример обращения комплексного множества

5) *Отрицание* комплексного множества является результатом изменения знака его частей на противоположный:

$$-S = -\{A, B\} = \{A, B\}^- = \{-A, -B\} = \{A^-, B^-\}. \quad (4)$$

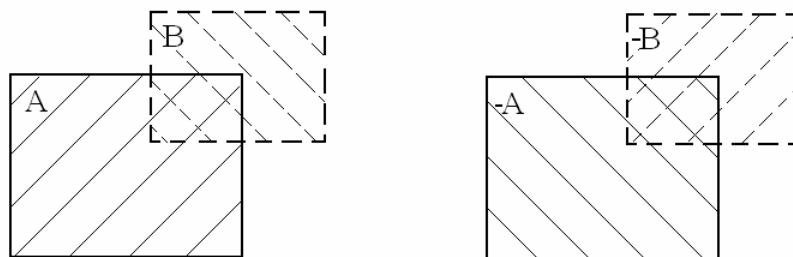


Рис.6. Пример отрицания комплексного множества

3. Алгебра комплексных событий и комплексная логика

Традиционное оценивание событий одномерной двоичной логикой с помощью понятий TRUE (истина) и FALSE (ложь) для комплексного случая нуждается в расширении на мнимую область.

Рассмотрим существо предлагаемого подхода [3] к идентификации комплексных событий на примере простейшего случая двумерной комплексной логики. Специфика в том, что объектом исследования такой логики является субъект (мышление) в традиционном понимании, а субъектом — объект (например, человек). Чтобы разрешить указанное противоречие, объект идентификации рассматривается вместе (в комплексе) с идентифицирующим субъектом, а основой логики такого рассмотрения является комплексное представление ошибки O в виде

$$O = Re + iIm,$$

где Re — действительная (продукт человеческого подсознания), а Im — идентифицированная сознанием (мнимая, мысленная) составляющие ошибки. Составляющие ошибки могут присутствовать ($Re, Im = TRUE = 1$) или отсутствовать ($Re, Im = FALSE = 0$). На основе этого формируются четыре комплексных термина:

ПРАВДОПОДОБИЕ	$(1 + i1)$ — утверждение присутствия ошибки (1 принимается за 1);	
ЛОЖЬ	$(0 + i1)$ — утверждение отсутствия ошибки; (0 принимается за 1);	
ИСТИНА	$(0 + i0)$ — отрицание отсутствия ошибки (0 принимается за 0);	(5)
ОШИБКА	$(1 + i0)$ — отрицание присутствия ошибки. (1 принимается за 0).	

Таким образом, с точки зрения комплексной логики, истинное утверждение отрицает отсутствие ошибки (в том числе и в нем самом). Приведем геометрическую интерпретацию соответствующих типов событий в двумерной комплексной логике как квадрантов на плоскости (рис. 7):



Рис. 7. Плоскость четырехзначной комплексной логики

Физической интерпретацией четырехзначной комплексной логики является мышление человека при работе с компьютерной программой, дающей истинные (TRUE) и ложные (FALSE) ответы в заранее непредсказуемой для субъекта последовательности (например, с вероятностью 50%).

Для построения алгебры комплексных событий необходимо наряду с достоверным (1) и невозможным (0) событиями ввести антидостоверное событие (-1), соответствующее всем возможным исходам в отрицательном множестве. Зададим -1 как элемент класса объектов, удовлетворяющих условиям:

$$A(-1) = -A; A + (-1) = -1.$$

Введем теперь алгебру комплексной логики как комплексное множество специального вида, включающее в себя как действительные элементы — наибольший элемент 1, нулевой элемент 0, наименьший элемент -1 , так и комплексные элементы, заданные определением (5).

Алгебра содержит вместе с каждым своим действительным элементом x его отрицание $-x$, удовлетворяющее следующим соотношениям:

$$x(-x) = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$x(-x) = -1 \text{ при } x \neq 0,$$

$$x + (-x) = 0.$$

Для действительных элементов 0, 1, -1 выполняются операции сложения, вычитания и умножения, заданные следующей таблицей:

Таблица 1

Сл.	0	1	-1	Выч.	0	1	-1	Умн.	0	1	-1
0	0	1	-1	0	0	-1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	-1
-1	-1	0	-1	-1	-1	0	0	-1	0	-1	1

Таким образом, алгебра первичной комплексной логики для комплексных событий (5) определяется операциями сложения (1), умножения (2), обращения (3) и отрицания (4) комплексных множеств и введенными в таблице 1 операциями над действительными элементами.

4. Расширения комплексной логики

Для дальнейшей классификации комплексных событий сформируем комплексную ошибку в соответствии с рис.7 таким образом, что по оси Re' откладываются три новых значения обращенных логических ошибок $1'$, $0'$, $-1'$:

$$-1' = (1, 0) = \text{ОШИБКА} = -\text{FALSE}';$$

$$1' = (0, 1) = \text{ЛОЖЬ} = \text{FALSE}'; \quad (6)$$

$$0' = (0, 0)(1, 1) = ((0 - 1), (0 + 0)) = (-1, 0) = \text{TRUE}'.$$

Последнее множество $0'$ комплексных ошибок возникает, когда TRUE принимают за TRUE (ПРАВДОПОДОБИЕ) и FALSE принимают за FALSE (ИСТИНА). Заметим, что вычисление $0' = (1, 1)(0, 0)$ с помощью обратного произведения дает уже существующий термин ИСТИНА. Таким образом, остается принять единственное значение $0' = (-1, 0)$.

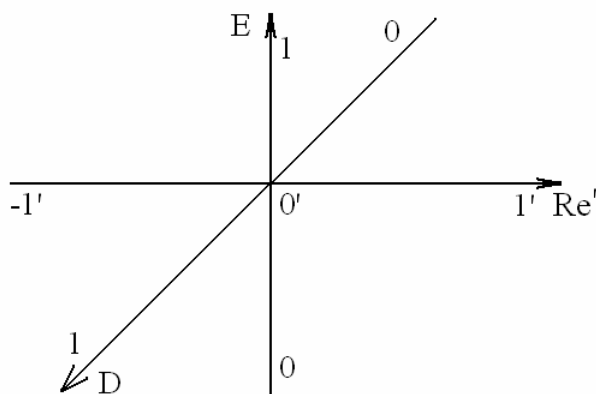


Рис.8. Пространство 12-значной обращенной комплексной логики

В соответствии с (6) может быть построено обращенное комплексное пространство (рис.8), в котором размещаются уже не четыре, а 12 логических терминов. На рис.8 ось E соответствует эталону (намерению), а ось D — действию.

Дадим физическую интерпретацию вводимым 12 логическим терминам обращенной комплексной логики, используя ощущение

ния, действия и мысли гипотетического субъекта, стоящего на автобусной остановке, на которой могут останавливаться автобусы двух маршрутов: 4 и 9, идущие в разных направлениях.

Пусть выполняются следующие условия:

- субъект может ошибаться, принимая один автобус за другой;
- автобус маршрута 4 соответствует логическому термину TRUE;
- автобус маршрута 9 соответствует логическому термину FALSE;
- субъект может иметь намерение ехать на автобусе маршрута 4 или 9 (значения 1 или 0 оси E);
- субъект может поступать в соответствии с логикой своих намерений или против нее (значения 1 или 0 оси D).

Тогда физический смысл 12-значной комплексной логики может быть проиллюстрирован с помощью таблицы 2, где каждый термин для удобства восприятия назван именем одного из 12 месяцев года. Значения $1'$, $0'$, $-1'$ оси Re' даны в формулах в раскрытом виде, а значения осей E и D сгруппированы в комплексную форму, как и все выражение.

Таблица 2

№	Термин компл. логики \ (сокращ.)	Формула $((Re'), (E,D))$	Ось Re' (ошибка)	Ось E (эталон)	Ось D (поступил/нет в соотв. с логикой)
1	ЯНВАРЬ (ЯНВ)	$((0,1), (1,1))$	Принял 9 за 4	Нужен 4	Да: сел в 9
2	ФЕВРАЛЬ (ФЕВ)	$((-1,0), (1,1))$	Принял 4 за 4	Нужен 4	Да: сел в 4
3	МАРТ (МАР)	$((1,0), (1,1))$	Принял 4 за 9	Нужен 4	Да: не сел в 4
4	АПРЕЛЬ (АПР)	$((1,0), (0,1))$	Принял 4 за 9	Нужен 9	Да: сел в 4
5	МАЙ (МАЙ)	$((-1,0), (0,1))$	Принял 9 за 9	Нужен 9	Да: сел в 9
6	ИЮНЬ (ИЮН)	$((0,1), (0,1))$	Принял 9 за 4	Нужен 9	Да: не сел в 9
7	ИЮЛЬ (ИЮЛ)	$((0,1), (1,0))$	Принял 9 за 4	Нужен 4	Нет: не сел в 9
8	АВГУСТ (АВГ)	$((-1,0), (1,0))$	Принял 4 за 4	Нужен 4	Нет: не сел в 4
9	СЕНТЯБРЬ (СЕН)	$((1,0), (1,0))$	Принял 4 за 9	Нужен 4	Нет: сел в 4
10	ОКТАБРЬ (ОКТ)	$((1,0), (0,0))$	Принял 4 за 9	Нужен 9	Нет: не сел в 4
11	НОЯБРЬ (НОЯ)	$((-1,0), (0,0))$	Принял 9 за 9	Нужен 9	Нет: не сел в 9
12	ДЕКАБРЬ (ДЕК)	$((0,1), (0,0))$	Принял 9 за 4	Нужен 9	Нет: сел в 9

Алгебра обращенной 12-значной комплексной логики вытекает из введенной выше алгебры первичной комплексной логики. Заметим, что другой возможной интерпретацией

12 терминов этой логики являются 12 музыкальных тонов (звуков октавы) европейского лада от ноты ДО до ноты СИ.

Последней из поддающихся физической интерпретации обобщений комплексной логики является комплексная логика, названная нами *полной* и учитывающая не только то, что реально происходит с субъектом (табл. 2), но и то, что он при этом думает. Полная комплексная логика имеет $(12)(12)=144$ комплексных логических состояния (термина) от (ЯНВ, ЯНВ) до (ДЕК, ДЕК). Приведем пример интерпретации одного из 144 указанных терминов.

Возьмем, например, термин (ИЮН, АВГ). В соответствии с табл. 2 этот термин имеет математический вид $((0,1), (0,1)), ((-1,0), (1,0))$ и означает, что гипотетический субъект, стоящий на остановке, *реально* (ИЮН) ждет автобус 9, принимает подошедший 9 за 4 и не садится в 9, а *думает* (АВГ) при этом, что ему нужен 4, что он принимает подошедший 4 за 4, и что он не сел в автобус 4.

Отметим, что алгебра 144-значной полной комплексной логики также вытекает из операций, определенных выше для алгебры первичной комплексной логики. Кроме того, приведенная структура терминов полной комплексной логики полностью соответствует структуре комплексной единицы информации, введенной в [1] и названной *ната* (от латинского *naturalis* — природный, естественный). 144-значная ната информации является, таким образом, комплексным аналогом традиционного двужначного бита и в этом качестве может быть использована при построении соответствующей комплексной теории информации.

Заключение

Предпринята попытка создания основ алгебры комплексной логики на базе теории комплексных множеств как расширения традиционной теории множеств. Наивно было бы думать, что строгое и полное изложение этих основ возможно в рамках одной статьи, однако авторы надеются на то, что им удалось донести суть предлагаемых подходов к обобщению булевой алгебры на новый класс неадекватных объектов с использованием разрабатываемой ими комплексной логики.

1. Ионов А.С. // Деп. в ВИНТИ №7018-B88 от 16.09.88. 13 с.
2. Ионов А.С., Петров Г.А. Сб. тр. Междунар. науч. конф. «Математические методы в технике и технологиях». Т.1. В. Новгород, 1999. С.94-96.
3. Ионов А.С., Петров Г.А. // Вестник НовГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки, 2001. №17. С.48-52.
4. Ионов А.С. // Деп. в ВИНТИ №1650-2001В от 12.07.01. 8 с.