

А.С.Ионов, Г.А.Петров

К ПОСТРОЕНИЮ ОСНОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КОМПЛЕКСНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СОБЫТИЙ

The paper deals with constructing the probability theory fundamentals for complex logic events described by complex logic. For this purpose the definition «complex logic event» is introduced and such events of the first and second orders are analyzed. Test results for the computer game that models complex logic events with human participation are adduced.

Введение

Целью настоящей статьи является разработка подходов к теории вероятностей комплексных событий на основе разрабатываемой авторами алгебры комплексной логики и введенных ими же ранее понятий комплексных множеств [1-4].

Классическая теория вероятностей разработана для действительных (реальных) событий. Предметом этой теории являются адекватные (положительные) события (множества), которые являются аналогом положительных чисел. Применение комплексной логики позволяет расширить круг анализируемых объектов теории вероятностей за счет введения новых понятий комплексных логических событий.

1. Понятие о комплексных логических событиях

Традиционное определение случайного события S_1 осуществляется с помощью области (множества) внутри достоверного события, заключающегося в попадании «брошаемой» материальной точки в область, ограниченную прямоугольником (рис.1). При этом \bar{S}_1 — событие, противоположное S_1 . В соответствии с [4], S_1 может быть положительным, отрицательным или пустым действительным множеством. В зависимости от этого назовем попадание точки в область S_1 положительным, отрицательным или пустым действительным событием.

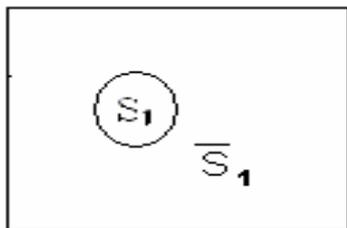


Рис.1. Действительное логическое событие

Будем понимать под действительным логическим событием S_1 такое действительное событие, которому поставлен в соответствие логический термин принятой алгебры логики. Например, для булевой алгебры логики можно поставить в соответствие $S_1 = \text{TRUE}$, $\bar{S}_1 = \text{FALSE}$.

Основой для введения понятия комплексного логического события являются:

— сформулированный в [3] комплексный логический закон тождества $A = A + A'$, согласно которому любой объект складывается из того, что он есть (A) и его восприятия A' ;

— данное в [4] определение комплексного множества как упорядоченной пары действительных множеств.

Введем, таким образом, понятие комплексного логического события S как упорядоченного множества $S = \{S_1, S_2\}$ действительных логических событий S_1 и S_2 , где событие S_1 — действительная часть комплексного события, а событие S_2 — восприятие события S_1 , соответствующее мнимой части комплексного события S . Поясним это на примере событий, описываемых булевской логикой, для которой 1 — достоверное, а 0 — невозможное событие.

Пусть $S_1 = \text{TRUE} = 1$ — событие, заключающееся в попадании стрелка в мишень, ограниченную областью S_1 рис.1, а $\overline{S_1} = \text{FALSE} = 0$ — событие, заключающееся в непопадании стрелком в мишень. Восприятие результатов стрельбы (S_2 и $\overline{S_2}$) также может принимать



Рис.2. Комплексная плоскость с логическими событиями

логические значения TRUE и FALSE. Четыре возможные при этом комплексные события можно отразить на комплексной плоскости рис.2, где положительное направление оси Re соответствует событию S_1 , положительное направление оси Im — событию S_2 , а отрицательные направления этих осей — событиям $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$.

Поясним содержание комплексных логических событий рис.2:

- П = ПРАВДОПОДОБИЕ = (1,1) — попадание принимается за попадание;
 - Л = ЛОЖЬ = (0,1) — промах принимается за попадание;
 - И = ИСТИНА = (0,0) — промах принимается за промах;
 - О = ОШИБКА = (1,0) — попадание принимается за промах.
- (1)

Пусть вероятность попадания в мишень $P(S_1) = 0,8$, тогда вероятность промаха $P(\overline{S_1}) = 0,2$. Пусть вероятность восприятия результатов стрельбы как попадания $P(S_2) = 0,7$, а как промаха — $P(\overline{S_2}) = 0,3$. Тогда комплексные вероятности четырех введенных комплексных событий можно выразить так: $P(\text{П}) = (0,8; 0,7)$; $P(\text{Л}) = (0,2; 0,7)$; $P(\text{И}) = (0,2; 0,3)$; $P(\text{О}) = (0,8; 0,3)$, т.е. как упорядоченные пары действительных вероятностей.

Заметим, что в случае независимости событий S_1 и S_2 можно определить действительные вероятности комплексных событий как произведения вероятностей действительных и мнимых частей события, т.е.: $P_{\text{П}} = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$; $P_{\text{Л}} = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14$; $P_{\text{И}} = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$; $P_{\text{О}} = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24$.

Таким образом, в отличие от действительных достоверных событий, которые делятся на два противоположных в соответствии с рис.1, комплексное логическое событие складывается из четырех комплексных событий, описываемых (1). Совокупную вероятность этих событий для нашего примера со стрельбой по мишени можно отразить в виде секторов диаграммы рис. 3.

Рассмотрим комплексное логическое событие с точки зрения булевой логики, делящей события на достоверные и невозможные. Для этого применим операции комплексной алгебры логики [4]. В соответствии с аксиоматикой комплексной логики [1-3] достоверным комплексным событием является наличие логической ошибки, которую можно выразить произведением

$$Л \cdot О = (0,1)(1,0) = (0,1) = Л, \quad (2)$$

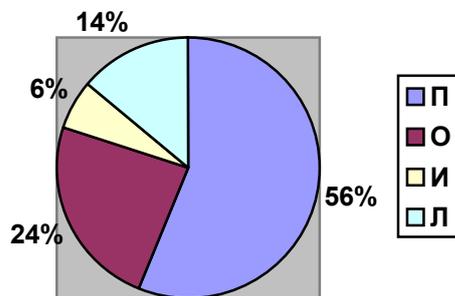


Рис.3. Диаграмма вероятностей составляющих комплексного события

т.е. достоверным событием является ложное комплексное событие. Напротив, комплексным невозможным событием является истинное комплексное событие, являющееся результатом произведения событий, в которых логическая ошибка отсутствует:

$$И*П = (0,0)(1,1) = (0,0) = И. \quad (3)$$

2. Комплексные логические события высших порядков и их анализ

Рассмотрим теперь случай, когда события S_1 и S_2 сами являются комплексными событиями на примере восприятия человеком данных компьютерной игры с экрана компьютера. В качестве такой игры использовалась разработанная авторами программа XR угадывания человеком загаданного компьютером случайного целого числа от 1 до 99 в условиях, когда компьютер дает ложные ответы с вероятностью 50%. Ответы компьютер выбирает из множества {МАЛО, МНОГО} в зависимости от того, меньше или больше загаданного вводимое человеком число. Игра (испытание) продолжается до тех пор, пока искомое число не будет угадано, о чем компьютер «честно» сообщает человеку.

Ответы компьютера могут быть адекватными (МАЛО выдается за МАЛО и МНОГО за МНОГО) и неадекватными (МАЛО выдается за МНОГО и МНОГО за МАЛО), причем при игре человек ничего не знает об «искренности» компьютера.

Сформулируем данные ответы математически. Пусть МАЛО соответствует логическому 0, а МНОГО — логической 1. Обозначим адекватные ответы компьютера через $TRUE^2$, а неадекватные — через $FALSE^2$. Тогда в соответствии с (2) и (3) справедливы равенства

$$\begin{aligned} S_1 &= TRUE^2 = И * П = (МАЛО, МАЛО)(МНОГО, МНОГО) = (0,0), \\ S_1 &= FALSE^2 = Л * О = (МАЛО, МНОГО)(МНОГО, МАЛО) = (0,1), \end{aligned} \quad (4)$$

и комплексная логическая плоскость рис.2 преобразуется с учетом того, что события S_2 и $\overline{S_2}$ (восприятие человеком ответов компьютера) также могут принимать значения из (4). Таким образом, будем иметь четыре комплексных логических события второго порядка:

$$\begin{aligned} П &= ((0,0)(0,0)) \text{ — адекватный ответ компьютера принимается человеком за адекватный;} \\ Л &= ((0,1)(0,0)) \text{ — неадекватный ответ компьютера принимается человеком за адекватный;} \\ И &= ((0,1)(0,1)) \text{ — неадекватный ответ компьютера принимается человеком за неадекватный;} \\ О &= ((0,0)(0,1)) \text{ — адекватный ответ компьютера принимается человеком за неадекватный.} \end{aligned} \quad (5)$$

В процессе статистических испытаний программы XR, моделирующей рассмотренные комплексные логические события второго порядка, участвовали по четыре игрока мужского и женского пола, а также специальная компьютерная программа угадывания чисел в условиях логической неопределенности ответов. Каждым из участников игры было проведено по 100 испытаний (циклов угадывания), в результате которых получены статистические закономерности, отражающие вероятность комплексных логических событий (5), учитывающих восприятие участниками неадекватных на 50% ответов компьютера.

На рис.4-7 представлены усредненные распределения вероятностей P частот g комплексных событий (5) для мужского (М), женского (Ж) и компьютерного (К) интеллектов. Заметим, что последний реализован в виде программы, использующей известный метод половинного деления интервала угадывания с добавлением случайных скачков в случае, когда угадывание заходит в логический тупик. Данная программа не повторяет своих ответов компьютеру.

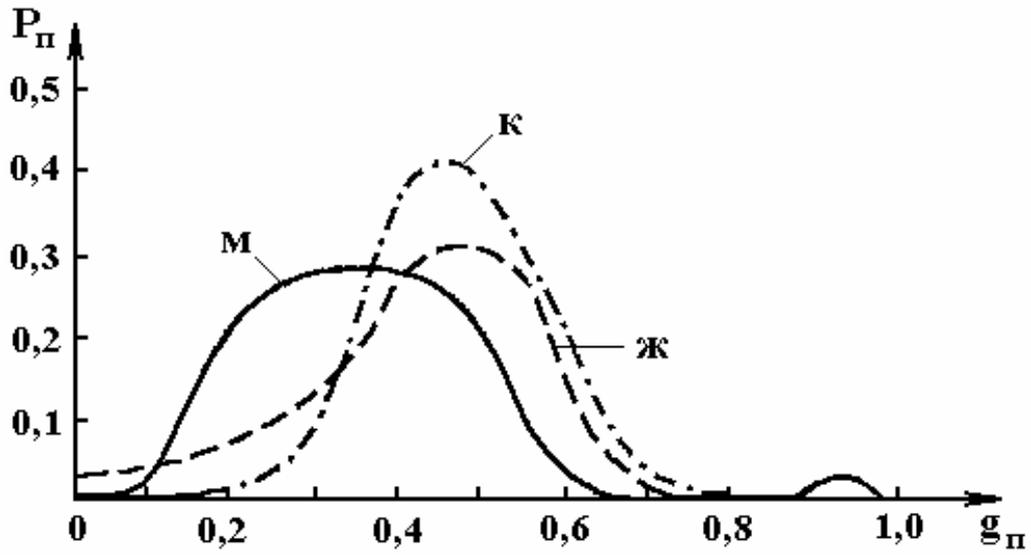


Рис.4. Распределение вероятности частоты комплексного события ПРАВДОПОДОБИЕ

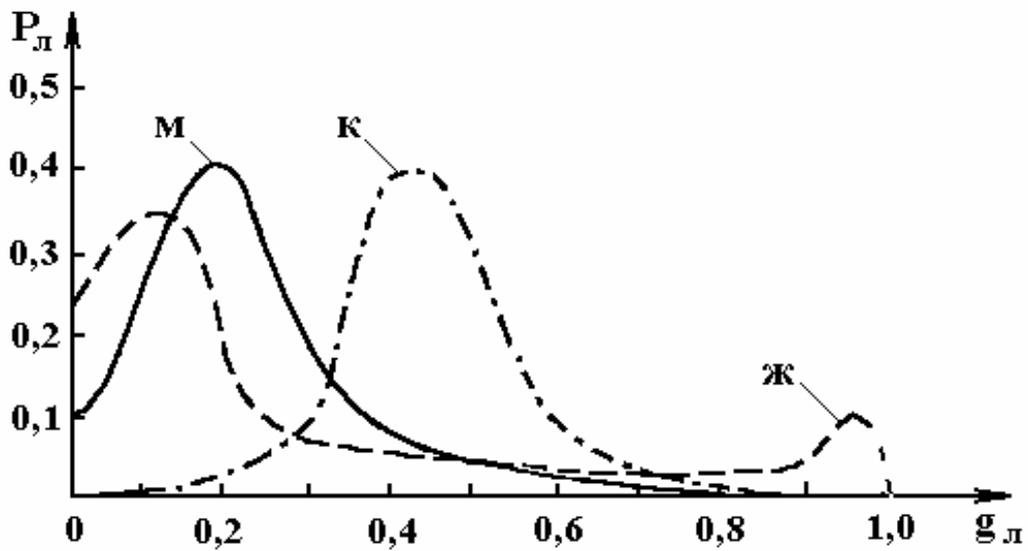


Рис.5. Распределение вероятности частоты комплексного события ЛОЖЬ

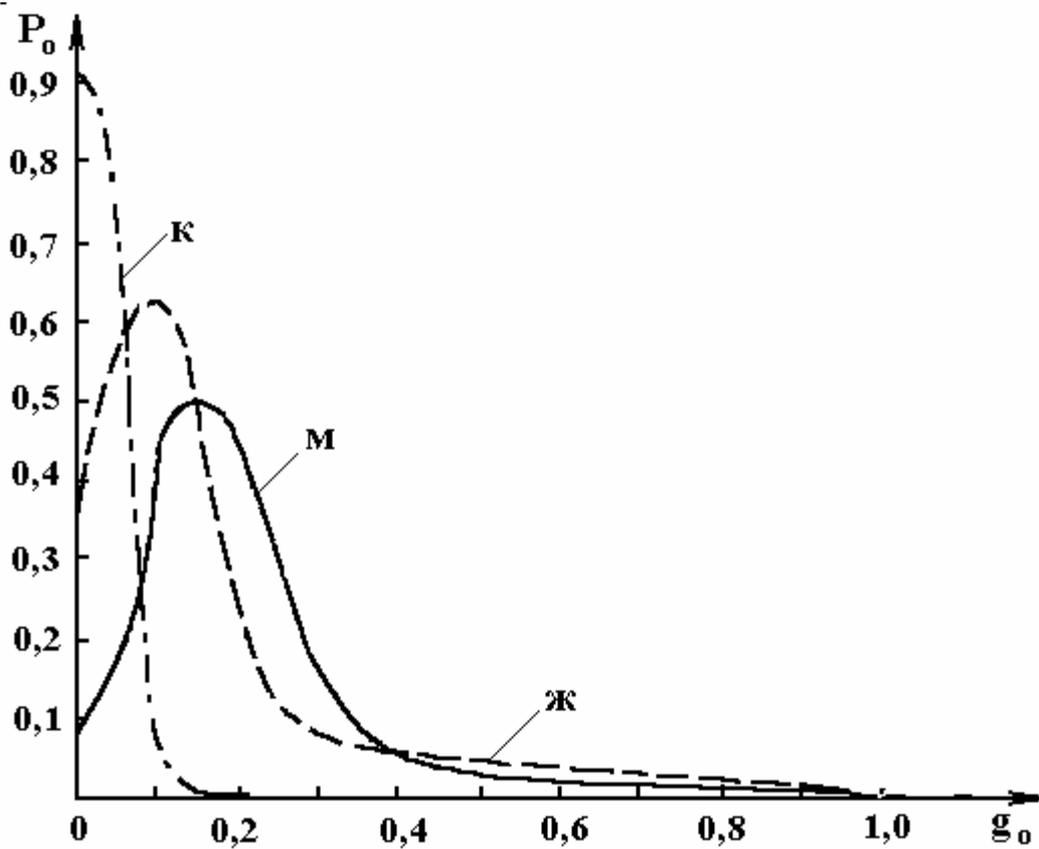


Рис.6. Распределение вероятности частоты комплексного события ИСТИНА

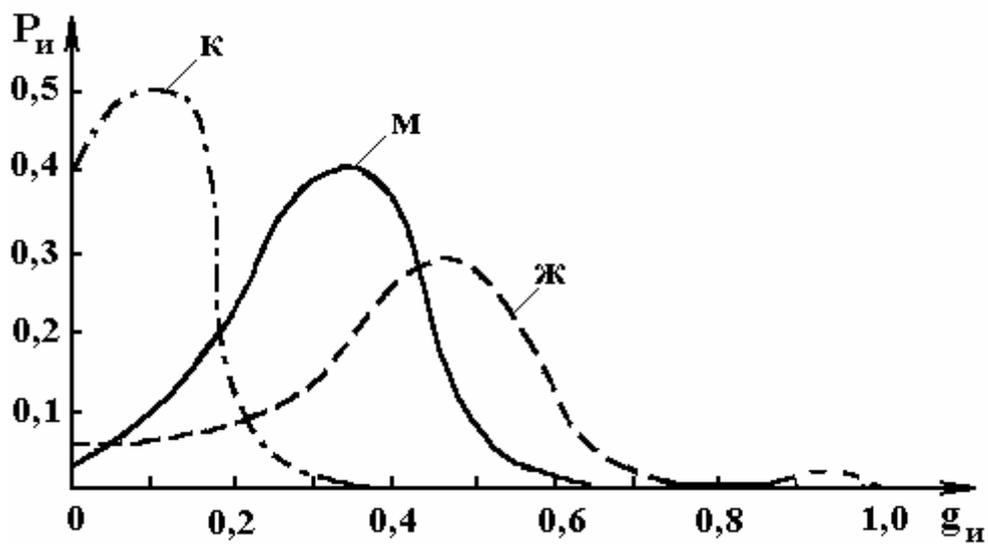


Рис.7. Распределение вероятности частоты комплексного события ОШИБКА

Из рис.4 и 6 видно, что распределение частот правдоподобных и истинных логических событий напоминает нормальное распределение. Распределение же частот ложных и ошибочных событий (рис.5 и 7) близко к распределению Пуассона. Кроме того, заметно, что психологическое восприятие неопределенности мужчинами и женщинами довольно значительно отличается друг от друга и от восприятия компьютерной программы с «железной» логикой угадывания. Это проявляется, в частности, и в том, что для правдоподобных событий у мужчин и ложных и истинных у женщин наблюдаются выбросы вероятности частоты событий, близкой к 1. Данные выбросы можно объяснить психологическими особенностями реакции игроков, проявляющейся, например, в повторении одинаковых или близких друг к другу чисел при ответах компьютеру без учета его ответов в случае усталости людей или по каким-то иным причинам.

Диаграмма, показывающая распределение по видам интеллекта наиболее вероятных частот рассмотренных комплексных логических событий представлена на рис.8.

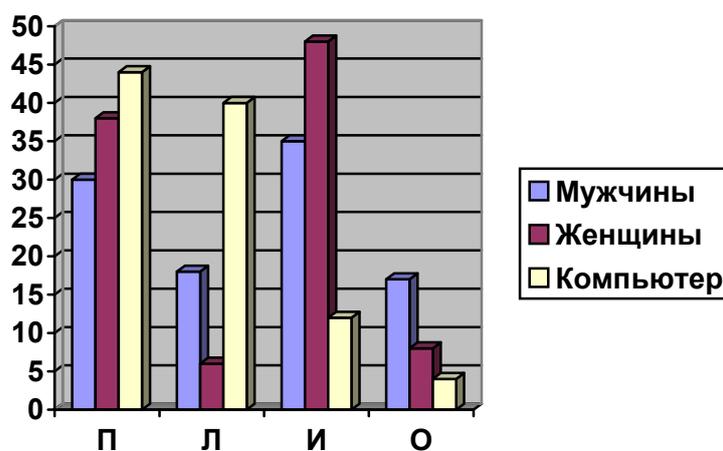


Рис.8. Распределение наиболее вероятных частот комплексных событий

Отметим, что компьютер первым угадал заданное программой XR число в 54% испытаний для мужчин и в 57% испытаний для женщин. Среднее число попыток успешного угадывания для мужчин составило 31, для женщин 32, для компьютера 36 итераций. Отметим также, что программа XR размещена в разделе НАУКА сайта www.polg2.narod.ru.

3. Заключение

В данной статье введено понятие комплексных логических событий и проанализированы такие события первого и второго порядков на конкретных примерах. В частности, приведены статистические результаты работы с игровой программой XR, моделирующей человеческий и компьютерный интеллекты в рассмотренном логическом аспекте, основанном на применении разрабатываемой авторами комплексной логики к теории случайных событий. Дальнейшие исследования могут быть связаны, с одной стороны, с анализом комплексных случайных событий четвертого и более высоких порядков, а с другой, — с анализом пустых и отрицательных комплексных событий. Все это может стать основой для создания теории вероятностей комплексных случайных событий.

1. Ионов А.С. // Деп. в ВИНТИ №7018-B88 от 16.09.88. 13 с.
2. Ионов А.С., Петров Г.А. // Сб. тр. Междунар. науч. конф. «Математические методы в технике и технологиях». Т.1. В.Новгород, 1999. С.94-96.
3. Ионов А.С., Петров Г.А. // Вестник НовГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки. 2001. № 17. С.48-52.
4. Ионов А.С., Петров Г.А. // Вестник НовГУ. Сер.: Математика и информатика. 2002. № 22. С. 10-16.