

Данг Хань Хой

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЕСТЕСТВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

The problem on existence and uniqueness of periodic solution of operator equation is investigated. Adduced are sufficient conditions of solution of this problem in case when the left operator in the equation is model, and the right operator satisfies the Lipshitz condition with the constant that depends upon the problem data. On the base of this general result, the solution of the nonlinear right-part differential operator equation in a class of smooth differential forms determined on the n -measured tore and sphere.

Введение

В работе рассматривается задача о периодических решениях уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_0 Lu - a_1 u = h(u), \quad (1)$$

где a_0, a_1 — заданные числа; $L = d + \delta$ — так называемый естественный дифференциальный оператор на римановом многообразии X ; u — комплексная дифференциальная форма на X с коэффициентами, зависящая от t ; $h : u \rightarrow h(u)$ — оператор на X .

Задача имеет модельный характер и примыкает к исследованиям А.А.Дезина по общей теории граничных задач [1,2]. Некоторые краевые задачи для уравнений вида (1) рассматривались в [3,4]. В продолжение работы [5] в первой части изложена общая схема исследования задачи о периодических решениях нелинейного дифференциально-операторного уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Au = h(u), \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u|_{t=b}, \quad (3)$$

где A есть M -оператор (см. [1,2]); $h : \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$ — нелинейный оператор на $\tilde{H}$. Найдены условия на операторы A и h , при которых задача (2), (3) имеет единственное решение. Во второй части эта схема применяется к естественным дифференциальным уравнениям на торах T^n и на сферах S^n .

1. Общая схема исследования периодических решений

Пусть H — сепарабельное бесконечное гильбертово пространство над полем C , A — линейный оператор в H . Оператор A будем называть M -оператором (модельным), если у него существует система собственных векторов f_k , образующих базис Рисса в H . Соответствующие собственные значения обозначим λ_k .

Пусть $\tilde{H} = H \otimes L_2[0, b]$ и H_L — подпространство пространства $\tilde{H}$, состоящее из таких элементов, у которых при разложении в ряд

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) f_k$$

коэффициенты $u_k(t)$ абсолютно непрерывны, удовлетворяют условию периодичности

$$u_k(0) = u_k(b),$$

и выполнены условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^b |u'_k(t) - \lambda_k u_k(t)|^2 dt < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^b |u'_k(t)|^2 dt < \infty.$$

Задаче (2), (3) поставим в соответствие оператор $\mathcal{L}$, определенный на $H_{\mathcal{L}}$ формулой

$$\mathcal{L} u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - Au \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (u'_k(t) - \lambda_k u_k(t)) f_k.$$

Элемент u в $H_{\mathcal{L}}$, который удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}u = h(u)$, будем называть обобщенным решением задачи (2), (3). Введем обозначения

$$\Lambda_b = \left\{ k \mid \lambda_k \frac{b}{2\pi i} \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \rho = \inf_{k \notin \Lambda_b} |\exp \lambda_k b - 1|.$$

Пусть A есть M -оператор и $\Lambda_b = \emptyset$, $\rho > 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}$ имеет обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}: \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$. Если оператор $\mathcal{L}^{-1} \circ h: \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$ есть сжатое отображение, то существует единственное решение $u_0 \in H_{\mathcal{L}}$, определенное условием $\mathcal{L}^{-1} \circ h(u_0) = u_0$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть оператор A есть M -оператор, $\Lambda_b = \emptyset$, $\rho > 0$. Тогда

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq C \frac{b}{\rho} N(\rho),$$

где C — константа, зависящая от свойств базиса Рисса собственных векторов оператора A (в случае, когда этот базис ортогонален, $C = 1$), и

$$N(\rho) = \sqrt{\frac{\rho^2 + 2\rho}{2\ln(1+\rho)}}.$$

Кроме того, если реальные части собственных значений оператора A неположительны, т.е.

$$\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0, \quad \text{то } \|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{Cb}{\rho}.$$

Теорема 2. Пусть оператор A есть M -оператор и $\Lambda_b = \emptyset$, $\rho > 0$. Предположим также, что оператор $h = h(u)$ удовлетворяет следующему условию Липшица: $\exists q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, такое, что

$$\forall u, v \in \tilde{H} \quad \|h(u) - h(v)\| \leq \frac{\rho q}{bC} \frac{1}{N(\rho)} \|u - v\|. \quad (4)$$

В случае, когда $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$, $k = 0, 1, \dots$, условие (4) можно ослабить: $\exists q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, такое, что $\forall u, v \in \tilde{H} \quad \|h(u) - h(v)\| \leq \frac{\rho q}{bC} \|u - v\|$. Тогда задача (2), (3) имеет единственное решение.

2. Периодические решения нелинейных естественных дифференциальных уравнений на римановых многообразиях

Обозначим через X риманово многообразие класса C^{∞} , которое всегда предполагается ориентированным и замкнутым. Пусть $\xi = \bigoplus_{p=0}^n \xi^p = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(T^*X) \otimes C$ — комплексифицированное кокасательное расслоение многообразия X ; $C^{\infty}(\xi)$, $H^k(\xi)$ — пространство гладких дифференциальных форм и пространство Соболева дифференциальных форм над X соответственно [6]. Через A обозначим оператор $i(d + \delta)$, где d — внешний дифференциальный оператор, а $\delta = d^*$ — его формально сопряженный относительно скалярного произведения в $C^{\infty}(\xi)$, индуцированного римановой структурой на X . Тогда $L = d + \delta$ — эллиптический дифференциальный оператор первого порядка на X (см. [6]), его спектр хорошо известен в случаях, когда X является тором или сферой (см. [7, 8]).

Рассмотрим на n -мерном торе Π^n граничную задачу для нелинейного уравнения

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - (a_0 L + a_1)u = h(u) \quad (5)$$

с условием периодичности

$$u|_{t=0} = u|_{t=b}, \quad (6)$$

где $h: \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$ — нелинейный оператор на $\tilde{H} = L_2[0, b] \otimes H^0(\xi); t \in [0, b]; a_0, a_1$ — комплексные числа.

Пусть сначала $n = 1$, $X = \Pi^1$ — окружность (одномерный тор). Следующий результат вытекает из теорем 1, 2.

Теорема 3. Пусть выполняется одно из следующих условий:

$$(i) \operatorname{Re} a_0 \neq 0, a_1 + a_0 \pi k \neq \frac{2\pi m i}{b} \quad \forall k, m \in \mathbb{Z};$$

$$(ii) \operatorname{Re} a_0 = 0, \operatorname{Re} a_1 \neq 0;$$

$$(iii) \operatorname{Re} a_0 = \operatorname{Re} a_1 = 0, \operatorname{Im} a_0 b \text{ — рациональное число, } a_1 + a_0 \pi k \neq \frac{2\pi m i}{b} \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $\Lambda_b = \emptyset$ и $\rho = \inf_{k \in \Lambda_b} |\exp(a_0 \pi k + a_1) b - 1| > 0$.

Предположим также, что оператор h удовлетворяет условию Липшица: $\exists q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$, такое, что

$$\forall u, v \in \tilde{H} \quad \|h(u) - h(v)\| \leq \frac{\rho q}{b} \frac{1}{N(\rho)} \|u - v\|. \quad (7)$$

Тогда задача (5), (6) имеет единственное решение.

Замечание. При выполнении условия (iii) неравенство (7) заменяется неравенством

$$\|h(u) - h(v)\| \leq \frac{\rho q}{b} \|u - v\|.$$

В общем многомерном случае $n \geq 2$ верна следующая теорема.

Теорема 3'. Пусть выполняется одно из следующих условий:

$$(i) \operatorname{Re} a_0 \neq 0, a_1 \neq \pi \left(\pm a_0 \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2} - \frac{2m i}{b} \right) \quad \forall m \in \mathbb{Z}, k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n;$$

$$(ii) \operatorname{Re} a_0 = 0, \operatorname{Re} a_1 \neq 0.$$

$$\text{Тогда } \Lambda_b = \left\{ k \mid \left(\pm a_0 \pi \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2} + a_1 \right) \frac{b}{2\pi i} \in \mathbb{Z} \right\} = \emptyset,$$

$$\rho = \inf_{k \in \Lambda_b} \left| \exp \left(\pm a_0 \pi \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2} + a_1 \right) b - 1 \right| > 0.$$

Предположим также, что оператор h удовлетворяет условию Липшица: $\exists q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$, такое, что

$$\forall u, v \in \tilde{H} \quad \|h(u) - h(v)\| \leq \frac{\rho q}{b} \frac{1}{N(\rho)} \|u - v\|.$$

Тогда задача (5), (6) имеет единственное решение.

Рассмотрим на сфере S^n краевую задачу

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - (a_0 L + a_1)u = h(u), \quad (8)$$

$$u|_{t=0} = u|_{t=b}, \quad (9)$$

где $h: \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$ — нелинейный оператор на $\tilde{H} = L_2[0, b] \otimes H^0(\xi), t \in [0, b]; a_0, a_1$ — комплексные числа; $n \geq 2$. Верна следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполняется одно из следующих условий:

(i) $\operatorname{Re} a_0 \neq 0, (a_1 \pm a_0 \sqrt{k(k+n-1)})b \neq 2\pi m i \quad \forall k \in N, m \in Z;$

(ii) $\operatorname{Re} a_0 = 0, \operatorname{Re} a_1 \neq 0;$

(iii) $\operatorname{Re} a_0 = \operatorname{Re} a_1 = 0, \operatorname{Im} a_0 b$ — рациональное число, $\left(\pm a_0 \left(k + \frac{n-1}{2} \right) + \operatorname{Im} a_1 \right) \neq 2\pi l$

$\forall k \in N; l \in Z, (a_1 \pm a_0 \sqrt{k(k+n-1)})b \neq 2\pi m i \quad \forall k \in N; m \in Z.$

Тогда $\Lambda_b = \emptyset, \rho = \inf_{k \in N} \left| \exp \left(\pm a_0 \sqrt{k(k+n-1)} + a_1 \right) b - 1 \right| > 0.$

Предположим также, что оператор h удовлетворяет условию Липшица: $\exists q \in R, 0 < q < 1$, такое, что

$$\forall u, v \in \tilde{H} \quad \|h(u) - h(v)\| \leq \frac{\rho q}{b} \frac{1}{N(\rho)} \|u - v\|. \quad (10)$$

Тогда задача (8), (9) имеет единственное решение. При выполнении условия (iii) (10)

заменяется неравенством $\|h(u) - h(v)\| \leq \frac{\rho q}{b} \|u - v\|.$

Таким образом, на основе общей схемы исследования периодических решений доказывается разрешимость дифференциально-операторного уравнения с нелинейной правой частью в классе гладких дифференциальных форм, определенных на n -мерных торе и сфере.

Пользуясь случаем, автор выражает свою искреннюю благодарность проф. Фам Нгок Тхао за консультации и проф. Е.Ю.Панову, под руководством которого выполнена эта работа.

1. Дезин А.А. К теории операторов вида $\partial/\partial t - A$ // ДАН СССР. 1965. Т. 164. № 5. С.963-966.
2. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980. С.40.
3. Фам Нгок Тхао // Дифф. уравнения. 1969. Т.5. № 1. С.186-198.
4. Фам Нгок Тхао // Дифф. уравнения. 1970. Т.6. № 5. С.877-888.
5. Антонец А.Б., Данг Хань Хой // Дифф. уравнения. 1989. Т.25. № 10. С.1731-1736.
6. Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. М.: Мир, 1970. С.69-79.
7. Данг Хань Хой, Фам Нгок Тхао // Acta Math.Viet. 1988.V.13. № 2. P.31-44.
8. Данг Хань Хой // Proceeding of conference. University of Hanoi, Faculty of Mathematics, Mechanics and Informatics. Hanoi, 1987. P.5-13.