

А.Г.Муравьев

**МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА В МОНОДИСПЕРСНОМ СЛОЕ
ПРИ ДВИЖЕНИИ ФАЗ В РЕЖИМЕ ИДЕАЛЬНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ**

On the basis of known model of mass transfer inside a drop, bubble or particle for a monodisperse layer in the case of full mixing of a continuous phase the model of mass transfer is constructed when phases move in a regime of ideal replacement. The resistances of phases are comparable. Mass transfer in a continuous phase are described with the help of mass – transfer coefficient.

1. Введение

Одним из способов моделирования тепломассообмена в дисперсном слое является решение задачи тепломассопереноса на единичном включении дисперсной фазы (для определенности будем в дальнейшем называть его частицей) с последующим осреднением полученных данных по слою. При соизмеримых фазовых сопротивлениях необходимо решить сопряженную задачу, т. е. систему дифференциальных уравнений переноса внутри и вне частицы. Если же тепло- и массоперенос в сплошной фазе можно описать с помощью коэффициентов тепло- и массоотдачи, то решается внутренняя задача с граничными условиями третьего рода.

Разработан метод [1], с помощью которого по известному решению внутренней задачи с граничными условиями первого рода, т. е. при постоянных значениях концентрации или температуры на межфазной поверхности, можно найти изменение с течением времени средней по объему частицы концентрации целевого компонента или температуры для аналогичной задачи, но с граничными условиями третьего рода, т. е. для случая соизмеримых фазовых сопротивлений. С помощью данного метода были получены аналитические решения указанных задач при развитом циркуляционном движении фазы внутри пузырька и капли [2], при учете турбулентного перемешивания внутри пузырька [1] и капли [3], а также при совместном протекании тепломассообмена на капле в процессах испарительного охлаждения [4] и абсорбции [5,6]. Однако для всех этих задач концентрация целевого компонента и температура в сплошной фазе вдали от частицы считались постоянными, что справедливо для случая полного перемешивания в сплошной фазе.

В работе [7] рассматриваемый метод получил дальнейшее продолжение. Предложен способ учета изменения концентрации целевого компонента в сплошной фазе вдали от частицы и построена модель массопереноса в процессе экстракции в полидисперсном слое, когда перенос вещества в сплошной фазе описывается однопараметрической диффузионной моделью. Эта задача предполагает численное решение. В работе [8] получено аналитическое решение задачи массопереноса на частице при соизмеримых фазовых сопротивлениях для случая прямого движения фаз в монодисперсном слое в режиме идеального вытеснения. В статье поставленная в [8] задача обобщается с учетом противоточного движения фаз.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача массообмена между частицей дисперсной фазы и сплошной средой при движении последней в режиме идеального вытеснения. Процесс теплообмена на частице можно рассматривать как частный случай массообмена при условии, что концентрация (температура) на межфазной поверхности непрерывна, т. е. коэффициент фазового равновесия равен единице. Предполагается, что известно изменение с течением времени средней по объему частицы концентрации целевого компонента внутри частицы при постоянном значении концентрации целевого компонента в глубине сплошной фазы для случая,

когда массоперенос в сплошной фазе описывается с помощью коэффициента массоотдачи. Слой считается монодисперсным. Частица имеет сферическую форму. Взаимодействием частиц можно пренебречь. Изменение мольных потоков фаз по высоте слоя не учитывается. Обозначим мольную долю целевого компонента внутри частицы при входе в слой x_{d0} (она считается постоянной), а мольную долю целевого компонента в сплошной фазе в этом же сечении слоя — x_{cn} . В случае прямоточного движения фаз эта величина известна. В случае противоточного движения фаз считается известной мольная доля целевого компонента в сплошной фазе x_{ck} в том сечении слоя, в котором дисперсная фаза покидает его со средней по объему данной фазы мольной долей x_{dk} . Предполагается, что мольные доли целевого компонента на поверхности частицы в дисперсной x_{df} и сплошной x_{cf} фазах зависят только от времени и связаны между собой равновесной зависимостью $x_{cf} = mx_{df}$, где m — константа фазового равновесия. Массоперенос в сплошной фазе описывается с помощью осредненного по поверхности частицы коэффициента массоотдачи β , который считается постоянным. Необходимо определить, как меняется со временем средняя по объему частицы мольная доля целевого компонента x_{dcp} .

3. Построение математической модели

Перейдем к формулировке задачи в безразмерном виде. Введем безразмерное время $t = D_d \tau / R^2$, где τ — размерное время; D_d — коэффициент диффузии в дисперсной фазе; R — радиус частицы. Затем так определим безразмерную среднюю по объему частицы мольную долю целевого компонента Φ_d , чтобы ее начальное значение было равно нулю: $\Phi_d = (x_{dcp} - x_{d0}) / (x_{c0}/m - x_{d0})$, где x_{c0} — известное начальное значение мольной доли целевого компонента в сплошной фазе при вводе ее в слой, $x_{c0} = x_{cn}$ для прямоточного движения фаз и $x_{c0} = x_{ck}$ — для противоточного. При этом на поверхности частицы безразмерная мольная доля целевого компонента Φ_f определяется выражением $\Phi_f = (x_{df} - x_{d0}) / (x_{c0}/m - x_{d0})$.

Введем функцию $\Phi_{dx0} = (x_{dx0} - x_{d0}) / (x_{c0}/m - x_{d0})$, где x_{dx0} — зависящая от координат и времени мольная доля целевого компонента внутри частицы для сформулированной нами задачи, но для случая постоянного значения мольной доли целевого компонента в глубине сплошной фазы x_{c0} . Граничным условием на межфазной поверхности в этом случае является обычное граничное условие третьего рода: $D_d C_d \partial x_{dx0} / \partial r = \beta C_c m (x_{df0} - x_{c0}/m)$, где C_d, C_c — мольные концентрации в дисперсной и сплошной фазах соответственно; x_{df0} — значение функции x_{d0} на поверхности частицы; r — полярный радиус. В безразмерном виде данное граничное условие будет выглядеть следующим образом:

$$\gamma \frac{\partial \Phi_{dx0}}{\partial \rho} + \Phi_{df0} = 1, \quad (1)$$

где $\gamma = D_d C_d / C_c m R \beta$; $\Phi_{df0} = (x_{df0} - x_{d0}) / (x_{c0}/m - x_{d0})$; $\rho = r/R$.

Напишем граничное условие на межфазной поверхности для сформулированной нами задачи: $D_d C_d \partial x_d / \partial r = \beta C_c m (x_{df} - x_c/m)$, где x_d — зависящая от координат и времени мольная доля целевого компонента внутри частицы для сформулированной нами задачи; x_c — мольная доля целевого компонента в глубине сплошной фазы, движущейся в режиме идеального вытеснения. В безразмерном виде данное граничное условие можно представить следующим образом:

$$\gamma \frac{\partial \Phi_{dx}}{\partial \rho} + \Phi_{df} = \Phi_c, \quad (2)$$

где $\Phi_{dx} = (x_d - x_{d0}) / (x_{c0}/m - x_{d0})$; $\Phi_c = (x_c/m - x_{d0}) / (x_{c0}/m - x_{d0})$.

Сравнивая выражения (1) и (2) легко сделать вывод, что функцию Φ_{dx} можно найти с помощью формулы Дюамеля [9], зная функции Φ_{dx0} и Φ_c :

$$\Phi_{dx} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Phi_c(\lambda) \Phi_{dx0}(x, t - \lambda) d\lambda, \quad (3)$$

где x — совокупность пространственных координат. Осреднив левую и правую части выражения (3) по объему частицы и проведя дифференцирование по параметру t , получаем:

$$\Phi_d = \int_0^t \Phi_c(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{d0}(t - \lambda) d\lambda, \quad (4)$$

где Φ_{d0} — среднее по объему частицы значение функции Φ_{dx0} . Функция Φ_c в данном выражении неизвестна. Свяжем ее с искомой функцией Φ_d . Пусть дифференциальный участок высоты дисперсного слоя dh частицы преодолевают за время dt , и средняя по объему частиц мольная доля целевого компонента изменяется при этом на dx_{dcp} . Тогда изменение мольной доли целевого компонента в глубине сплошной фазы dx_c по высоте dh или по времени dt можно найти из обычного балансового соотношения на малом участке высоты слоя: $W_d C_d dx_{dcp} = (-1)^k W_c C_c dx_c$, где W_d и W_c — соответственно объемные потоки дисперсной и сплошной фаз, движущиеся в слое; $k = 1$ для проточного движения фаз, $k = 2$ для противоточного движения фаз. Если проинтегрировать данное выражение от места вхождения в слой дисперсной фазы до произвольной высоты h , на которую частица поднимется за безразмерное время t , то получится соотношение $W_d C_d (x_{dcp} - x_{d0}) = (-1)^k W_c C_c (x_c - x_{ci})$, или в безразмерном виде

$$\Phi_c = \theta \Phi_d + \Phi_{ci}, \quad (5)$$

где $\Phi_{\bar{m}} = (x_{\bar{m}} / m - x_{d0}) / (x_{c0} / m - x_{d0})$; $\theta = (-1)^k W_d C_d / m W_c C_c$.

Теперь выражение (4) можно представить следующим образом:

$$\Phi_d = \int_0^t (\theta \Phi_d(\lambda) + \Phi_{ci}) \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{d0}(t - \lambda) d\lambda \quad (6)$$

суть интегро-дифференциальное уравнение для определения искомой функции Φ_d . Функция Φ_{d0} считается известной. Если дифференциальное уравнение конвективного массопереноса внутри частицы решается методом разделения переменных, то обычно эта функция представляется в виде $\Phi_{d0} = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} B_i \exp(-v_i t)$, где B_i, v_i — постоянные коэффициенты, определяемые в рамках конкретных моделей. Тогда выражение (6) можно представить в виде

$$\Phi_d = \int_0^t (\theta \Phi_d(\lambda) + \Phi_{ci}) \sum_{i=1}^{\infty} B_i v_i \exp(-v_i(t - \lambda)) d\lambda. \quad (7)$$

4. Решение уравнений математической модели

Уравнение (7) решается с помощью преобразования Лапласа. После достаточно простых алгебраических преобразований функцию Φ_d можно представить следующим образом:

$$F_d(\sigma) = \frac{\frac{\Phi_{\bar{m}}}{\sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i v_i}{\sigma + v_i}}{1 - \theta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i v_i}{\sigma + v_i}}, \quad (8)$$

где σ — комплексная переменная преобразования Лапласа. Выражение (8) представляет собой дробную рациональную функцию, которую можно разложить на элементарные дробы

би, определив предварительно корни полинома, стоящего в знаменателе. Обозначим эти корни η_i . Они находятся при решении относительно переменной σ уравнения

$$1 - \theta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i v_i}{\sigma + v_i} = 0.$$

Если $\theta \neq 1$, то функцию $F_d(\sigma)$ можно представить в виде суммы элементарных дробей:

$$F_d(\sigma) = \frac{N_0}{\sigma} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_i}{\sigma + \eta_i}, \quad (9)$$

где N_0, N_i — коэффициенты, которые можно найти следующим образом. Так как выражения (8) и (9) равны при любых значениях переменной σ , то умножим их правые части на σ и

приравняем при $\sigma = 0$. Учтем, что $\sum_{i=1}^{\infty} B_i = 1$, так как $\Phi_{d0} = 0$ в начальный момент времени.

Тогда $N_0 = \Phi_{\tilde{m}} / (1 - \theta)$. Коэффициенты N_k находятся аналогично. Для этого нужно умножить правые части выражений (8) и (9) на $\sigma + \eta_k$ и приравнять их при $\sigma = -\eta_k$. Тогда для коэффициентов N_k получается следующее выражение

$$N_k = \left(\frac{\Phi_{\tilde{m}}}{1 - \theta} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{1 - \frac{\eta_k}{v_i}} \right) \left(1 - \frac{\eta_k}{v_k} \right) \left[\prod_{m=1}^{k-1} \frac{1 - \frac{\eta_k}{v_m}}{1 - \frac{\eta_k}{\eta_m}} \right] \left[\prod_{m=k+1}^{\infty} \frac{1 - \frac{\eta_k}{v_m}}{1 - \frac{\eta_k}{\eta_m}} \right]. \quad (10)$$

Оригинал суммы полученных элементарных дробей (9) легко найти по таблицам преобразований Лапласа. В результате функция Φ_d приводится к следующему виду:

$$\Phi_d = \frac{\Phi_{\tilde{m}}}{1 - \theta} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} M_k \exp(-\eta_k t) \right), \quad (11)$$

где $M_k = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{1 - \frac{\eta_k}{v_i}} \right) \left(1 - \frac{\eta_k}{v_k} \right) \left[\prod_{m=1}^{k-1} \frac{1 - \frac{\eta_k}{v_m}}{1 - \frac{\eta_k}{\eta_m}} \right] \left[\prod_{m=k+1}^{\infty} \frac{1 - \frac{\eta_k}{v_m}}{1 - \frac{\eta_k}{\eta_m}} \right]$.

Используя соотношение (5), находим

$$\Phi_c = \frac{\Phi_{\tilde{m}}}{1 - \theta} \left(1 - \theta \sum_{k=1}^{\infty} M_k \exp(-\eta_k t) \right). \quad (12)$$

5. Аналитические зависимости для безразмерных концентраций в случаях прямотока и противотока

При прямоточном движении фаз $\theta < 0$, $\Phi_{cn} = 1$. В этом случае значения функций Φ_d и Φ_c в произвольный момент времени t можно определить непосредственно по формулам (11) и (12). Безразмерную среднюю по объему частиц мольную долю целевого компонента в дисперсной фазе на выходе из слоя $\Phi_{d\bar{e}} = \Phi_d(t_{\bar{e}})$ можно найти с помощью следующего соотношения:

$$\Phi_{d\bar{e}} = \frac{1}{1 - \theta} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} M_j \exp(-\eta_j t_{\bar{e}}) \right), \quad (13)$$

где $t_{\bar{e}}$ — безразмерное время нахождения частиц в слое.

При противоточном движении фаз $\theta > 0$, $\Phi_{ck} = (x_{ck}/m - x_{d0})/(x_{c0}/m - x_{d0}) = 1$, Φ_{cn} неизвестно. Пусть $\theta \neq 1$. Выражение (5) в месте выхода дисперсной фазы из слоя принимает вид

$$\Phi_{ci} = 1 - \theta \Phi_{d\dot{\epsilon}}. \quad (14)$$

Подставляя соотношение (14) в формулу (11) в момент времени t_k , получим

$$\Phi_{d\dot{\epsilon}} = \frac{\left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} M_j \text{âxp}(-\eta_j t_{\dot{\epsilon}})\right)}{\left(1 - \theta \sum_{j=1}^{\infty} M_j \text{âxp}(-\eta_j t_{\dot{\epsilon}})\right)}. \quad (15)$$

Для определения величин Φ_d и Φ_c в произвольном сечении слоя в выражения (11) и (12) необходимо подставить соотношения (14) и (15).

6. Противоточное движение фаз при $\theta = 1$

При $\theta = 1$ один из корней выражения, стоящего в знаменателе формулы (8), будет равен 0, поэтому если обозначить остальные корни этого выражения $-\alpha_i$, $i = 2, 3, \dots, \infty$, то его можно представить в виде

$$F_d(\sigma) = \Phi_{\ddot{m}} \left(\frac{P_0}{\sigma} - \frac{P_1}{\sigma^2} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{P_i}{\sigma + \alpha_i} \right). \quad (16)$$

Коэффициенты P_0, P_1, P_i находятся аналогично тому, как были найдены коэффициенты N_0 и N_k , но с учетом однородности начального условия задачи.

Если в левой и правой частях выражения (16) выполнить обратное преобразование Лапласа, то функцию Φ_d можно представить в виде

$$\Phi_d = \Phi_{\ddot{m}} \left(P_1 t + \sum_{k=2}^{\infty} P_k (1 - \text{âxp}(-\alpha_k t)) \right), \quad (17)$$

$$\text{где } P_k = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{1 - \frac{\alpha_k}{v_i}} \right) \left(1 - \frac{v_k}{\alpha_k} \right) \left(1 - \frac{v_1}{\alpha_k} \right) \left[\prod_{m=2}^{k-1} \frac{1 - \frac{v_m}{\alpha_k}}{1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_k}} \right] \left[\prod_{m=k+1}^{\infty} \frac{1 - \frac{v_m}{\alpha_k}}{1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_k}} \right];$$

$$P_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{v_i}} \text{ в соответствии с начальным условием } P_0 = \sum_{k=2}^{\infty} P_k.$$

Выражение (14) в данном случае приобретает вид $\Phi_{ci} = 1 - \Phi_{d\dot{\epsilon}}$, после подстановки его в формулу (17) можно найти значение $\Phi_{d\dot{\epsilon}}$:

$$\Phi_{d\dot{\epsilon}} = \frac{\left(P_1 t_{\dot{\epsilon}} + \sum_{k=2}^{\infty} P_k (1 - \text{âxp}(-\alpha_k t_{\dot{\epsilon}})) \right)}{\left(1 + P_1 t_{\dot{\epsilon}} + \sum_{k=2}^{\infty} P_k (1 - \text{âxp}(-\alpha_k t_{\dot{\epsilon}})) \right)}. \quad (18)$$

Теперь можно рассчитать величину функции Φ_d в произвольном сечении слоя:

$$\Phi_d = (1 - \Phi_{d\dot{\epsilon}}) \left(P_1 t + \sum_{k=2}^{\infty} P_k (1 - \text{âxp}(-\alpha_k t)) \right).$$

Подставив это выражение в формулу (5) и учтя соответствующие значения констант $\theta = 1$ и $\Phi_{ci} = 1 - \Phi_{d\dot{\epsilon}}$, можно в этом же сечении слоя определить значение функции Φ_c .

7. Анализ полученного решения

Решение поставленной нами задачи в режиме идеального вытеснения будет зависеть от параметров, которые входят в решения аналогичной задачи при полном перемешивании сплошной фазы, и параметра θ . При противоточном движении фаз добавляется еще параметр t_k , который характеризует время нахождения частиц в слое или высоту слоя H . Последние величины связаны соотношением $t_e = (D_d/R^2)[H/(U - W_c/(1 - \varepsilon_d)S_D)]$, где U — скорость движения частиц относительно сплошной фазы; ε_d — относительная доля объема дисперсной фазы к общему объему слоя; S_D — площадь поперечного сечения слоя. Очевидно, кстати, что высота нахождения частицы в слое h связана с безразмерным временем t этим же самым соотношением.

Проанализируем зависимости функций Φ_d и Φ_c от безразмерного времени t при различных значениях параметров θ и t_k . Для определенности рассмотрим случай, когда массоперенос в дисперсной фазе можно описать моделью Кронига — Бринка [10], т.е. при развитом циркуляционном движении внутри частицы. Параметр γ , характеризующий долю фазовых сопротивлений, возьмем равным 0,003, когда сопротивления соизмеримы. При расчетах в сумме, входящей в выражение для Φ_{d0} , брались семь первых членов. Для сравнения представлена зависимость от t функции Φ_{d0} , т.е. при полном перемешивании в сплошной фазе. Эту зависимость также можно рассматривать как частный случай общей зависимости при $\theta = 0$.

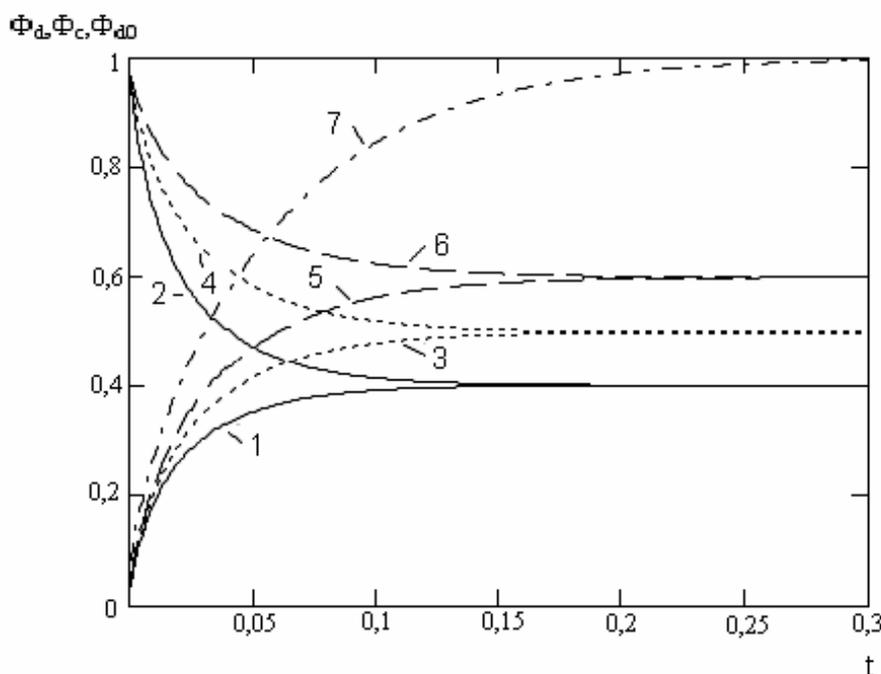


Рис.1. Прямоточное движение фаз. Зависимости соответственно $\Phi_d(t)$ и $\Phi_c(t)$ при $\theta = -3/2$ (кривые 1,2), $\theta = -1$ (3,4), $\theta = -2/3$ (5,6); зависимость $\Phi_{d0}(t)$ — кривая 7

На рис.1 представлены зависимости Φ_d , Φ_c , Φ_{d0} от t для прямоточного движения фаз. Видно, что функции Φ_d и Φ_c стремятся к своему предельному значению $1/(1 - \theta)$ и приближаются к нему тем быстрее, чем меньше значение параметра θ .

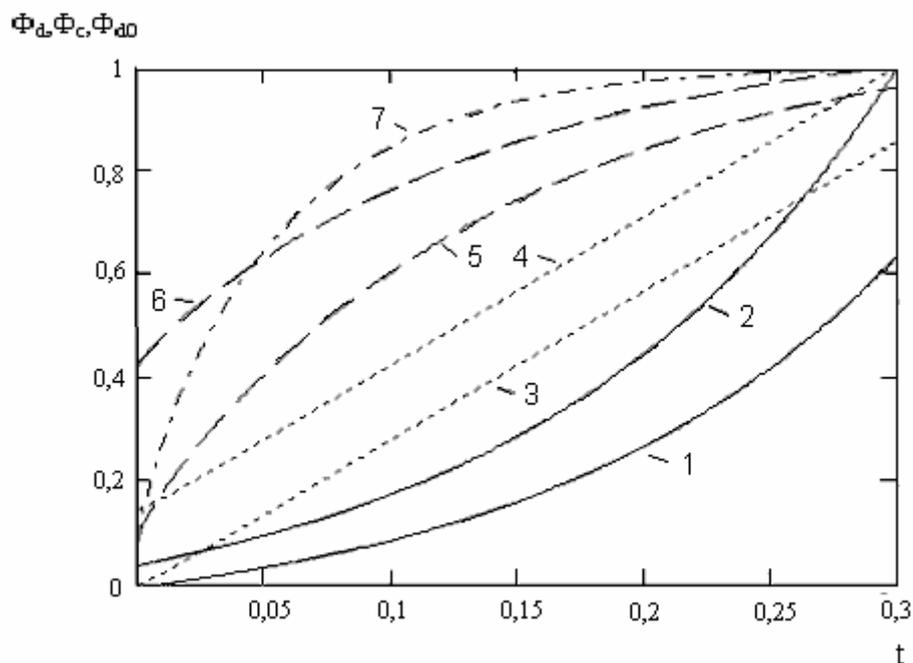


Рис.2. Противоточное движение фаз. $t_k = 0,3$. Зависимости соответственно $\Phi_d(t)$ и $\Phi_c(t)$ при $\theta = 3/2$ (кривые 1,2), $\theta = 1$ (3,4), $\theta = 2/3$ (5,6); зависимость $\Phi_{d0}(t)$ — кривая 7

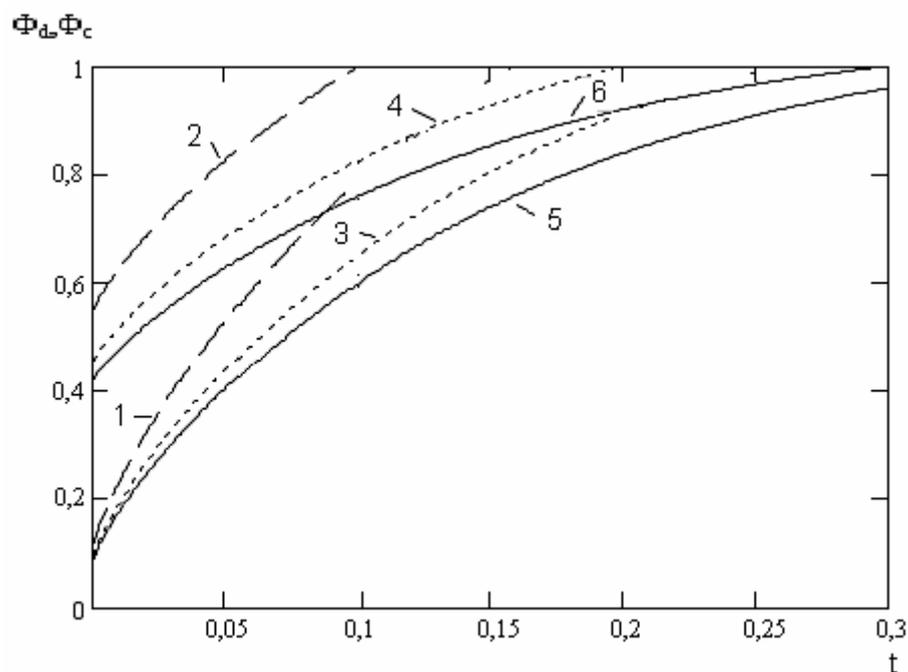


Рис.3. Противоточное движение фаз. $\theta = 2/3$. Зависимости соответственно $\Phi_d(t)$ и $\Phi_c(t)$ при $t_k = 0,1$ (кривые 1,2), $t_k = 0,2$ (3,4), $t_k = 0,3$ (5,6)

На рис.2 представлены зависимости Φ_d , Φ_c , Φ_{d0} от t для противоточного движения фаз при различных значениях параметра θ . Линии 1,3,5,7 показывают, как меняется вид

зависимости $\Phi_d(t)$ при уменьшении θ от $3/2$ до 0 . При $\theta > 1$ линия выпуклая вниз, при $\theta = 1$ линия близка к прямой, при $0 \leq \theta < 1$ линия выпуклая вверх. Когда $\theta \leq 1$, при достаточно больших временах нахождения частицы в слое мольная доля целевого компонента в дисперсной фазе на выходе из слоя приближается к равновесному значению относительно состава сплошной фазы, входящей в слой, т.е. $\lim_{t_\varepsilon \rightarrow \infty} \Phi_d(t_\varepsilon) = 1$. Если же $\theta > 1$, то поток сплошной фазы, подаваемый в слой, недостаточен, чтобы мольная доля целевого компонента в дисперсной фазе на выходе из слоя достигла равновесного значения. В этом случае $\lim_{t_\varepsilon \rightarrow \infty} \Phi_d(t_\varepsilon) = 1/\theta$. При анализе зависимости поведения функции $\Phi_c(t)$ от параметра θ можно сделать следующий вывод: если $\theta > 1$, то $\lim_{t_\varepsilon \rightarrow \infty} \Phi_c(0) = 0$;

$$\text{если } 0 \leq \theta < 1, \text{ то } \lim_{t_\varepsilon \rightarrow \infty} \Phi_c(0) = 1 - \theta.$$

На рис. 3 представлены зависимости Φ_d и Φ_c от t для противоточного движения фаз при различных значениях параметра t_k . Анализ данных зависимостей показывает, что при увеличении параметра t_k интенсивность процесса массообмена на частице падает, но изменение концентрации целевого компонента в дисперсной и сплошной фазах при прохождении ими слоя увеличивается. Так, при $t_k = 0,1$ $\Phi_d = 0,79$; при $t_k = 0,2$ $\Phi_d = 0,91$; при $t_k = 0,3$ $\Phi_d = 0,96$.

8. Заключение

В статье получены аналитические зависимости, позволяющие рассчитать в произвольном сечении монодисперсного слоя мольную долю целевого компонента в дисперсной и сплошной фазах, если они движутся в режиме идеального вытеснения. При этом предполагается, что для частицы известно решение задачи массопереноса с граничным условием третьего рода при условии полного перемешивания в сплошной фазе. Полученное решение для проточного движения фаз зависит от параметра θ , а для противоточного движения фаз от параметров θ и t_k . Представлены примеры зависимостей $\Phi_d(t)$ и $\Phi_c(t)$ при различных значениях указанных параметров.

Полученные зависимости могут быть использованы для создания инженерных методов расчета некоторых массообменных аппаратов.

1. Муравьев А.Г. Дис. ... канд. техн. наук. Ленинград, 1985. 131 с.
2. Муравьев А. Г., Протоdjяконов И.О., Размолодин Л.П., Коротков А.Л. // ЖПХ. 1985. Т.58. №8. С.1799-1803.
3. Муравьев А.Г. // Математическое моделирование и цифровая обработка изображений: Межвуз. сб. Новгород: НПИ, 1991.С.29-34.
4. Муравьев А.Г. // Вестник НовГУ. Сер.: Естеств. и техн. науки. 1999. №13. С.21-24.
5. Муравьев А.Г. // V Минский междунар. форум по тепло- и массообмену: Тез. докл. и сообщ. Т. 2. Минск, 2004. С.67-69.
6. Муравьев А.Г. // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-17: Сб. тр. XVII Междунар. науч. конф. Т.3. Кострома, 2004. С.177-180.
7. Абдуллаев Р.Х., Исмайллов Р.Ш., Мамедов Г.А., Сыщиков Ю.В. // ТОХТ. 1992. Т.26. №5. С.649-654.
8. Муравьев А.Г. // Науч. тр. IV Междунар. семинара «Современные проблемы прочности» им. В.А.Лихачева. Т.2. Старая Русса, 2000. С.232-235.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1974. 832 с.
1. Kronig R., Brink J.C. // Appl. Sci. Res. 1950. V.A2. №2. P.142-148.