

С.А.Попов, А.Ф.Корчагин

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СХЕМЫ МНОГОПОЛЮСНИКОВ С ПОМОЩЬЮ МНОГООТКЛИКОВЫХ МОДЕЛЕЙ

A method is presented to evaluate the parameters of the multiterminal networks and their statistical characteristics on the basis of multiresponce regression models. The task of the multiterminal network parameters calculation is formulated in this case as a problem of coefficients estimates determination of the multiresponce model on the experimental data.

Введение

Большинство параметров эквивалентных схем определяются в статическом режиме расчетным путем по результатам измерений вольтамперных характеристик (ВАХ). Однако используемые до настоящего времени методики определения этих параметров не позволяют получать все параметры с достаточной точностью, а для некоторых параметров вообще не разработаны методики их оценивания по экспериментальным данным. Основные недостатки известных методов оценивания параметров состоят в том, что они не являются универсальными, не обеспечивают достаточную точность, не позволяют оптимизировать число измерений, не дают статистических характеристик полученных оценок параметров. Кроме того, некоторые методики оценивания параметров для упрощения расчетов используют различного рода допущения, например деление ВАХ на участки, в пределах которых некоторыми параметрами пренебрегают. В ряде ситуаций такой подход приводит к большим погрешностям оценивания параметров. Отсутствие статистических характеристик получаемых оценок фактически не дает возможности сравнения величин параметров индивидуальных приборов и не позволяет проводить сравнение параметров по партиям приборов.

Описываемый метод оценивания всех статических параметров эквивалентных схем и их статистических характеристик с помощью многооткликковых моделей позволяет получать оценки всех параметров и их статистические характеристики [1,2]. Задача расчета параметров в этом случае формулируется как задача определения статистических оценок параметров многооткликковой регрессионной модели по экспериментальным данным.

Многооткликковые модели для идентификации параметров многополюсников

Использование многооткликковых моделей для расчета параметров многополюсников требует решения нескольких проблем, связанных с конкретными свойствами исследуемых приборов. Эти проблемы включают анализ вида вольтамперной характеристики данного прибора и ее расчет, анализ ошибок наблюдений напряжений или токов, построение плана эксперимента для расчета параметров математической модели и выбор начальных приближений этих параметров.

Структурная математическая модель ВАХ многополюсника, получаемая на основании его эквивалентной схемы, представляется системой уравнений Кирхгофа в виде

$$F(B, U, I) = 0, \quad (1)$$

где $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}^T$ — вектор независимых напряжений; $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}^T$ — вектор наблюдаемых токов; $B = \{b_1, \dots, b_l\}^T$ — вектор параметров модели; $F(B, U, I)$ — вектор неявных функций ВАХ, известных с точностью до параметров.

Система нелинейных уравнений (1) решается методом Ньютона [3] путем линейного разложения нелинейной функции $F(B, X, Y)$ в виде итерационной процедуры

$$I^{s+1} = I^s - F(B, U, I^s) [Q(B, U, I^s)]^{-1}, \quad (2)$$

где $Q(B, U, I) = \frac{\partial F(B, U, I)}{\partial I}$ — матрица производных уравнений Кирхгофа по зависимым переменным.

Для получения максимально правдоподобных оценок параметров модели (1) использовался метод Гаусса [4] в виде:

$$\hat{B}^{s+1} = \hat{B}^s + V_B^s \sum_{j=1}^n P(\hat{B}^s, U_j, I_j) V_E^{-1} \{I_j - I_j^*\}, \quad (3)$$

где s — номер итерации; n — количество наблюдений; I^* — вектор расчетных значений тока в соответствии с выражением (2); V_B — ковариационная матрица оценок параметров; V_E — ковариационная матрица ошибок наблюдений.

Матрица производных $\frac{\partial I}{\partial B}$ от всех зависимых переменных по параметрам эквивалентной схемы определяется как производная неявной функции:

$$\frac{\partial I}{\partial B} = P(B, U, I) = \frac{\partial F(B, U, I)}{\partial B} [Q(B, U, I)]^{-1}.$$

Оценка ковариационной матрицы ошибок наблюдений в точке I^* рассчитывается по r повторяющимся наблюдениям как

$$S_E = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r (I_i - I^*)(I_i - I^*)^T.$$

В качестве оценки ковариационной матрицы ошибок наблюдений V_E в формуле (3) использовалась средневзвешенная ковариационная матрица по k наблюдениям в виде

$$\bar{S}_E = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k S_{Ej}. \quad (4)$$

Для проверки адекватности модели использовалась T^2 -статистика в виде

$$T_1^2 = \frac{m}{mn-l} \sum_{j=1}^n R_j^T S_E^{-1} R_j, \quad (5)$$

где n — число наблюдений, а R — вектор остатков модели.

При выполнении гипотезы о нулевых математических ожиданиях остатков модели эта статистика приблизительно имеет распределение Фишера со степенями свободы $f_1 = n - l / m$ и $f_2 = a - 1$.

Для проверки однородности ковариационных матриц (4) рассчитывается статистика

$$T_2^2 = \max_j \text{Tr}\{S_{Ej} \bar{S}_E^{-1}\},$$

которая при однородных ковариационных матрицах имеет приблизительно распределение Фишера с числом степеней свободы $f_1 = r - 1$ и $f_2 = k(r - 1)$.

Реализация метода построения многооткликовых моделей и планирование последовательного эксперимента

Исследования, проведенные методом статистического моделирования, показали, что итерационная процедура (2) для исследуемого случая имеет высокую скорость сходимости и обеспечивает устойчивое и точное решение системы (1) в диапазоне реальных значений параметров B . Особенности реализации итерационной процедуры (3) для расчета SPICE-параметров состоят в следующем.

На первых шагах итерационной процедуры оценки параметров могут изменяться в значительной степени, что может приводить к переполнению при расчете экспонент и к останову процедуры при вычислении логарифмов.

Параметры имеют ограничения, обусловленные их физическим смыслом. Если эти ограничения нарушаются, то процедура расчета останавливается.

В связи с этим вводятся ограничения на возможные значения параметров моделей в виде системы неравенств. Эти ограничения должны быть максимально широкими, чтобы они включали возможные значения параметров. Наличие таких широких ограничений не позволяет задавать начальные приближения оценок параметров достаточно точно, а в этом случае итерационный процесс для определения оценок часто либо расходится, либо заканчивается в локальном минимуме. Поэтому для расчета оценок параметров в этом случае предложена гибридная схема расчета, совмещающая метод статистического моделирования и метод Гаусса следующим образом.

1. На основе априорной информации задаются интервалы допустимых значений параметров.

2. Методом статистического моделирования генерируются начальные приближения параметров в заданных пределах в соответствии с равномерным распределением.

3. Полученные значения используются в качестве начальных приближений для расчета оценок коэффициентов методом Гаусса.

4. Для полученных оценок рассчитывается значение статистики (5), которое используется в качестве критерия получения реальных оценок. Для адекватной модели величина T_1^2 (5) не должна превышать $1 + 3,36/\sqrt{n}$ (при доверительной вероятности 0,99).

5. Операции 2-4 повторяются, пока величина T_1^2 не окажется менее $1 + 3,36/\sqrt{n}$.

Оценивание значений отклика является основной целью построения математической модели. Ковариационная матрица ошибок оценивания тока в точке U_0 задается выражением

$$V_I = P^T(B, U_0)V_BP(B, U_0) + V_E. \quad (6)$$

Для обеспечения необходимой точности оценок параметров после получения оценок для заданного количества наблюдений выполняется процедура последовательного планирования эксперимента. В качестве критерия оптимальности плана использовалась величина определителя ковариационной матрицы оценок параметров [5]. Порядок измерений и расчетов для определения оценок параметров с заданной точностью с использованием процедуры последовательного планирования может быть представлен следующим образом.

1. При заданной дисперсии относительной ошибки оценивания тока в центре плана эксперимента и при заданном распределении параметров определяется требуемая величина определителя ковариационной матрицы оценок параметров.

2. Для заданной дисперсии ошибки наблюдения тока методом статистического моделирования определяется минимально необходимое количество наблюдений n , обеспечивающее устойчивость итерационного процесса расчета оценок параметров при равномерном плане эксперимента.

3. Задается начальный равномерный план эксперимента O^s ($s = 0$) с количеством точек плана n .

4. В соответствии с этим планом выполняются измерения токов, рассчитываются оценки параметров модели, соответствующие ковариационные матрицы и критерий оптимальности плана.

5. К плану добавляется еще одна точка в середине диапазона изменения измеряемых величин.

6. Отыскивается $(n+1)$ -я точка эксперимента ($s = s+1$) U_{n+s} такая, что добавление этой точки в имеющийся план эксперимента O^{s+1} обеспечивает максимальное повышение точности оценивания, т.е.

$$D = \min_{U \in \Sigma_U} \det[V_B(O^{s+1} = O^s + U_{n+s}^o, B)]. \quad (7)$$

7. В полученной точке плана выполняются измерения.

8. Критерием останова служит заданная предельная величина целевой функции — величина определителя ковариационной матрицы оценок параметров $D_{\max}$. Если $D > D_{\max}$, то в план добавляется следующая точка.

Результаты экстракции параметров SPICE-модели биполярных транзисторов

Описанный метод определения параметров эквивалентной схемы использовался для экстракции параметров SPICE-модели биполярных транзисторов. Всего определялись 18 параметров. Методом статистических испытаний строилась зависимость максимально допустимой дисперсии относительной ошибки наблюдения тока от количества наблюдений для получения реальных оценок параметров (рис.1). Использовался равномерный план эксперимента.

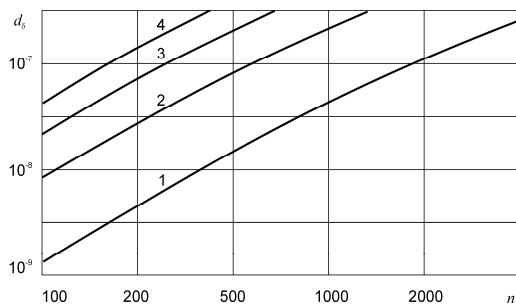


Рис.1. Зависимость дисперсии относительной ошибки наблюдений d_b от количества наблюдений n для различных моделей ВАХ транзистора: 1 — полная модель, включающая все 18 параметров; 2 — модель без параметра n_k ; 3 — модель без параметров n_k и V_{AF} ; 4 — модель без параметров n_k , V_{AF} и V_{AR}

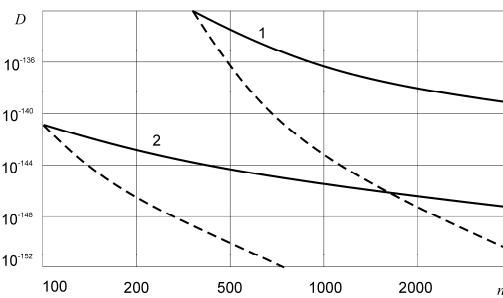


Рис.2. Зависимость определителя ковариационной матрицы D оценок коэффициентов модели ВАХ транзистора от количества наблюдений для равномерного плана (сплошная линия) и для последовательного плана (пунктирная линия) при дисперсии относительной ошибки наблюдения, равной 10^{-8} (1) и 10^{-9} (2)

На рис.1 приведены зависимости для различных видов модели ВАХ: для полной модели и для моделей, предполагающих, что некоторые, наименее точно определяемые параметры, известны априорно. Эти зависимости используются для определения минимально необходимого количества наблюдений для начала процедуры последовательного планирования.

На рис.2. показаны зависимости величины D (7) от количества наблюдений для равномерного и последовательного планов эксперимента.

На рис.3 показана зависимость дисперсии относительной погрешности оценивания тока d_i в центре плана от величины определителя ковариационной матрицы D , построенные на основании выражения (6). При этом в качестве ковариационной матрицы в выражении (6) использовалась диагональная матрица, диагональные элементы которой принимались равными априорным дисперсиям оценок параметров модели ВАХ. Рис.3 позволяет по заданной максимально допустимой дисперсии прогнозирования тока определить требуемую величину определителя ковариационной матрицы оценок параметров, а по рис.2 можно оценить необходимое количество наблюдений.

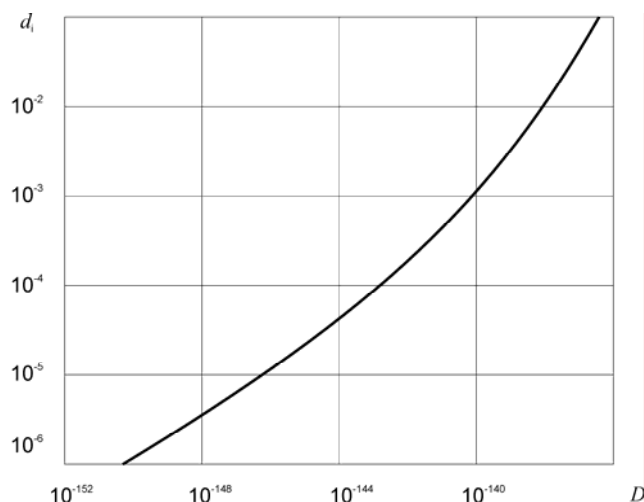


Рис.3. Зависимость величины определителя ковариационной матрицы оценок параметров D в центре плана эксперимента от дисперсии относительной ошибки d_i оценивания тока транзистора

Как видно, подобный подход снижает необходимое количество измерений в десятки раз по сравнению с равномерным планом. Для каждого прибора после расчета коэффициентов модели выполнялась проверка адекватности модели в соответствии с критерием (5). Для этого на основании расчетной величины T_1^2 определялась величина P -уровня по формуле

$$T_1^2 = F_{P, f_1, f_2},$$

где F_{P, f_1, f_2} — квантиль распределения Фишера, соответствующий вероятности P со степенями свободы $f_1 = n - l / m$ и $f_2 = k(a - 1)$.

На рис.4 приведено распределение P -уровня по партии приборов объемом 38 приборов КТ315А. Для получения нормального распределения строилось распределение величины $\ln(P)$.

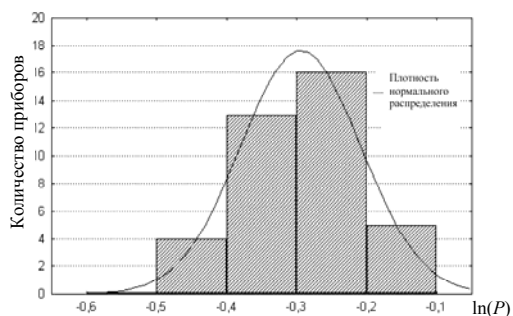


Рис.4. Распределение величины $\ln(P)$ по партии приборов

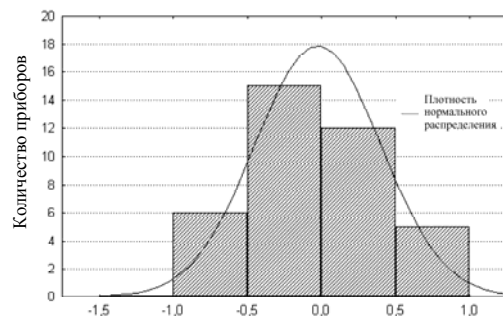


Рис.5. Распределение величины z по партии приборов

Полученное распределение хорошо описывается нормальным законом, что подтверждается критерием Колмогорова — Смирнова. На основании нормального распределения рассчитывался нижний предел 95%-го доверительного интервала величины P , который составил 0,906, что означает адекватность всех моделей на уровне значимости 0,05. Кроме проверки адекватности проводился анализ остатков модели и выполнялась проверка нормальности их распределения для всех параметров, строились диаграммы рассеяния и графики распределения остатков для визуального контроля нормальности остатков и выполнялась проверка однородности ковариационных матриц ошибок наблюдений.

Для сравнения результатов экстракции расчетные значения параметров x_c сравнивались с экспериментальными значениями x_m , которые можно было измерить непосредственно. По этим данным рассчитывалась статистика $z = \frac{x_m - x_c}{s_i}$, где s_i — стандартное отклонение. На рис.5 приведено распределение величины z , полученное по партии приборов для параметра I_s .

Заключение

Описываемый метод определения параметров эквивалентных схем с использованием многооткликовых регрессионных моделей позволяет рассчитать все параметры в едином процессе с заданной точностью. Для этого разработана двухступенчатая процедура расчета оценок параметров. На первом этапе этой процедуры формируется равномерный план эксперимента, а начальные приближения параметров задаются методом статистического моделирования при заданных ограничениях, что дает возможность получить реальные значения параметров. На втором этапе используется последовательное планирование эксперимента до достижения требуемой точности оценок параметров. Использование процедуры последовательного планирования позволяет повысить точность оценивания в десятки раз.

1. Попов С.А., Корчагин А.Ф. // Измерительная техника. № 4. 2003. С. 47-51.
2. Попов С.А., Корчагин А.Ф. // Сб. тр. VII Междунар. семинара «Современные проблемы прочности» им. В.А.Лихачева. В.Новгород, 2003. С.184-190
3. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.
4. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика, 1979. 349 с.
5. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971. 312 с.