УДК 519.853.4

А.С.Тихомиров

О МОДЕЛИРОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ С МОНОТОННЫМИ СИММЕТРИЧНЫМИ ПЛОТНОСТЯМИ

The method of modeling arbitrary vectors with monotone symmetrical densities. The algorithm is based on conception of arbitrary vectors spreading in the mixture of steady spreading in spheres.

Введение

Рассмотрим k-мерное евклидово пространство $\mathbf{R}^k$ со следующими вариантами метрик $\rho(x,y)$:

$$\rho_v(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i-y_i|^v\right)^{1/v},\quad \rho_\infty(x,y)=\max_{1\le i\le k}|x_i-y_i|,$$

где $v\ge 1$ — любое фиксированное число, $x=(x_1,...,x_k)$ и $y=(y_1,...,y_k)$. Замкнутый шар радиуса $r>0$ с центром в точке $x\in\mathbf{R}^k$ обозначим $S_r(x)=\{y\in\mathbf{R}^k:\rho(x,y)\le r\}$ и положим

$$\varphi(r)=\mathrm{mes}(S_r(x))=Ar^k, \tag{1}$$

где mes означает k-мерную меру Лебега, A — константа, зависящая от размерности пространства и метрики ρ.

Опишем метод моделирования k-мерного случайного вектора ξ в $\mathbf{R}^k$, распределение вероятностей $P(x,dy)$ которого обладает монотонной симметричной плотностью вида

$$p(x,y)=g(\rho(x,y)), \tag{2}$$

где ρ — метрика, а g — невозрастающая неотрицательная функция, определенная на полуоси $(0,+\infty)$. Легко видеть, что тогда $p(x,x+y)=p(0,y)$ при всех $y\ne 0$, $x\in\mathbf{R}^k$. Функцию g (в соответствии с лит. [см.]) будем называть *формой поиска*, а также формой плотности p. Чтобы функция p, определенная в (2), была плотностью, форма поиска g должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{(0,+\infty)} g(r)d\varphi(r)=1. \tag{3}$$

Интеграл в левой части (3) и последующих формулах понимается в смысле Лебега — Стилтьеса. Не умаляя общности будем считать, что функция g непрерывна слева.

Простейшим из таких распределений является равномерное распределение $U_a(x,dy)$ в шаре $S_a(x)$ радиуса $a>0$ с центром в точке $x\in\mathbf{R}^k$:

$$U_a(x,dy)=\mathrm{mes}(dy\cap S_a(x))/\mathrm{mes}(S_a(x)). \tag{4}$$

Форма g_a для такого распределения имеет вид

$$g_a(r)=\mathbf{1}_{(0,a]}(r)/\mathrm{mes}(S_a(x)),$$

где $\mathbf{1}_{(0,a]}$ означает индикатор промежутка $(0,a]$.

Поскольку в пространстве $(\mathbf{R}^k,\rho_\infty)$ моделировать распределение $U_a(x,dy)$ очень просто, возникает мысль представить любое распределение с монотонной симметричной плотностью (2) в виде смеси равномерных распределений в шарах. Хотя в других метриках моделирование $U_a(x,dy)$ может быть (при больших размерностях k) достаточно сложным, мы приведем решение этой задачи в общем случае.

Результаты

Теорема. Пусть распределение вероятностей $P(x,dy)$ имеет монотонную симметричную плотность вида $p(x,y)=g(\rho(x,y))$, где ρ — метрика, а g — невозрастающая непрерывная слева форма поиска. Тогда

$$P(x,dy)=\int_{(0,+\infty)}U_r(x,dy)\varphi(r)d(-g(r)). \tag{5}$$

Доказательство. В силу симметрии распределений $P(x,dy)$ и $U_r(x,dy)$ равенство (5) достаточно проверить для шаров $S_a(x)$ с центром в x. Ясно, что

$$P(x,S_a(x))=\int_{(0,a)}g(r)d\varphi(r).$$

Применяя интегрирование по частям, получим формулу

$$\int_{(0,a)}\varphi(r)d(-g(r))=\int_{(0,a)}g(r)d\varphi(r)-\varphi(a)g(a). \tag{6}$$

Отметим, что по условию нормировки (3) верно неравенство $g(a)\varphi(a)\le 1$. Поэтому $g(a)\le 1/\varphi(a)$ и $g(+\infty)=0$. Используя формулы (1), (4), (6) и равенство $g(+\infty)=0$, преобразуем правую часть формулы (5):

$$\int_{(0,+\infty)}U_r(x,S_a(x))\varphi(r)d(-g(r))=\int_{(0,a)}\varphi(r)d(-g(r))+\int_{[a,+\infty)}\frac{\varphi(a)}{\varphi(r)}\varphi(r)d(-g(r))=$$

$$=\int_{(0,a)}g(r)d\varphi(r)-\varphi(a)g(a)+\varphi(a)(g(a)-g(+\infty))=\int_{(0,a)}g(r)d\varphi(r).$$

Теорема доказана.

Согласно (5) для моделирования $P(x,dy)$ нам достаточно уметь моделировать одномерное распределение с функцией распределения

$$F(r)=\int_{(0,r)}\varphi(t)d(-g(t)) \tag{7}$$

и равномерное распределение в шаре $U_r(x,dy)$. При некоторых g моделировать распределение с функцией распределения (7) можно стандартным методом обратных функций. Приведем соответствующий пример.

Пример

Пусть $0<\beta<\gamma\le\Gamma<+\infty$, $0<\theta\le\gamma^{-k}$ и

$$g(r)=\frac{1}{A\lambda}\begin{cases}\beta^{-k} \text{ при } 0<r\le\beta,\\ r^{-k} \text{ при } \beta<r\le\gamma,\\ \theta \text{ при } \gamma<r\le\Gamma,\\ 0 \text{ при } r>\Gamma,\end{cases} \tag{8}$$

где константа A задается формулой (1), а λ — нормирующая константа. Из формулы (3) сразу следует, что $\lambda=1+k\ln(\gamma/\beta)+\theta(\Gamma^k-\gamma^k)$. Отметим, что именно такой вид имеют I-оптимальные формы поиска [см. лит.].

Подставив формулы (8) и (1) в формулу (7), получим следующее утверждение.

Предложение 1. Для формы поиска (8) функция распределения (7) имеет вид

$$F(r)=\begin{cases}0 \text{ при } r\le\beta,\\ k\ln(r/\beta)/\lambda \text{ при } \beta<r\le\gamma,\\ \left(k\ln(\gamma/\beta)+1-\theta\gamma^k\right)/\lambda \text{ при } \gamma<r\le\Gamma,\\ 1 \text{ при } r>\Gamma.\end{cases} \tag{9}$$

Для моделирования воспользуемся методом обратных функций. При $0 < y < 1$ зададим функцию G следующим образом:

$$G(y) = \inf\{r : F(r) > y\}. \tag{10}$$

Обозначим через α равномерно распределенную на интервале $(0, 1)$ случайную величину и воспользуемся тем, что функцией распределения случайной величины $G(\alpha)$ является F.

Применяя формулы (9) и (10), получим следующее утверждение.

Предложение 2. Для функции распределения (9) функция (10) задается одной из следующих формул.

1) Если $\theta < \gamma^{-k}$,

$$G(y) = \begin{cases} \beta \exp(\lambda y/k) \text{ при } 0 < y < k\ln(\gamma/\beta)/\lambda, \\ \gamma \text{ при } k\ln(\gamma/\beta)/\lambda \le y < \left(k\ln(\gamma/\beta) + 1 - \theta\gamma^k\right)/\lambda, \\ \Gamma \text{ при } \left(k\ln(\gamma/\beta) + 1 - \theta\gamma^k\right)/\lambda \le y < 1. \end{cases} \tag{11}$$

2) Если $\theta = \gamma^{-k}$,

$$G(y) = \begin{cases} \beta \exp(\lambda y/k) \text{ при } \quad 0 < y < k\ln(\gamma/\beta)/\lambda, \\ \Gamma \text{ при } \quad k\ln(\gamma/\beta)/\lambda \le y < 1. \end{cases} \tag{12}$$

Пусть $\theta < \gamma^{-k}$. Используя формулу (11), приходим к алгоритму моделирования случайного вектора ξ, имеющего плотность распределения вероятностей с формой (8).

Алгоритм 1

Шаг 1. Получить α.

Шаг 2. Если $\alpha \ge \left(k\ln(\gamma/\beta) + 1 - \theta\gamma^k\right)/\lambda$, то $r \leftarrow \Gamma$,

иначе если $\alpha \ge k\ln(\gamma/\beta)/\lambda$, , то $r \leftarrow \gamma$, иначе $r \leftarrow \beta\exp(\lambda\alpha/k)$.

Шаг 3. $\xi \leftarrow U_r(x, dy)$; STOP.

Обозначение «$\xi \leftarrow U_r(x, dy)$» читается как «получить реализацию случайного вектора ξ с распределением $U_r(x, dy)$» (в данном случае нужно получить реализацию равномерно распределенного в шаре $S_r(x)$ случайного вектора). Как и ранее, через α обозначена равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ случайная величина.

В случае $\theta = \gamma^{-k}$, применив формулу (12), получим более простой алгоритм моделирования случайного вектора ξ, имеющего плотность распределения вероятностей с формой (8).

Алгоритм 2

Шаг 1. Получить α.

Шаг 2. Если $\alpha \ge k\ln(\gamma/\beta)/\lambda$, то $r \leftarrow \Gamma$, иначе $r \leftarrow \beta\exp(\lambda\alpha/k)$.

Шаг 3. $\xi \leftarrow U_r(x, dy)$; STOP.

Ясно, что представленные алгоритмы легко программируются. При этом оба алгоритма лишь немного сложнее исходной процедуры моделирования равномерного распределения в шаре. Таким образом, получены простые и легко реализуемые на компьютере алгоритмы моделирования рассмотренных в [лит.] случайных поисков.

Тихомиров А.С., Некруткин В.В. Марковский монотонный поиск экстремума. Обзор некоторых теоретических результатов // Математические модели. Теория и приложения / Под ред. М.К.Чиркова. Вып.4. СПб.: НИИХ СПбГУ, 2004. С.3–47.