

А.В.Ласунский

АНАЛОГ ПОНЯТИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ РАЗДЕЛЕННОСТИ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

The linear systems of difference equations with completely bounded matrix of coefficients are studied in this article. The notion of separated linear system of difference equations is introduced. This notion is the analog of the notion of integral separation in the theory of linear systems of differential equations. The properties of such systems are studied. In particular the diagonability of separated linear systems of difference equations is proved.

В теории линейных систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n \quad (1)$$

с непрерывной, ограниченной матрицей $A(t)$ хорошо известны понятия разделенности, интегральной разделенности, их связь с устойчивостью показателей Ляпунова решений системы. Понятие интегральной разделенности было введено Б.Ф.Быловым [1]. Он доказал, что интегрально разделенная система (1) приводима к диагональной системе.

Дискретным аналогом линейной системы дифференциальных уравнений (1) является линейная система разностных уравнений

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad (2)$$

где $x \in R^n$, $\det A(t) \neq 0$, $t \in Z^+$.

Уравнения в конечных разностях в их различных формах давно изучаются во многих разделах математики. Эти уравнения оказались весьма удобной моделью для описания дискретных динамических систем, для моделирования импульсных систем. Теорию устойчивости дискретных систем впервые, по-видимому, изучал Вольфганг Хан [2].

Рассмотрим линейную систему разностных уравнений (2) с вполне ограниченной матрицей $A(t)$ размера $n \times n$, переменная t принимает значения $0, 1, 2, \dots$. Следуя работе [3], матрицу $A(t)$ будем называть вполне ограниченной, если $\sup_t \|A(t)\| < \infty$ и $\sup_t \|A^{-1}(t)\| < \infty$.

Введем следующие понятия.

Определение 1. Функции $a(t)$ и $b(t)$ дискретного аргумента t , не обращающиеся в ноль, разделены, если существует число $\lambda > 1$ такое, что

$$|a(t)| \geq \lambda \cdot |b(t)|, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, из последнего неравенства следует, что $\prod_{k=s}^{t-1} \left| \frac{a(k)}{b(k)} \right| \geq \lambda^{t-s}$.

Определение 2. Функции $a(t)$ и $b(t)$ дискретного аргумента t , не обращающиеся в ноль, мультипликативно разделены, если существуют числа $d \in (0; 1]$ и $\lambda > 1$ такие, что для

$$\text{всех } t \geq s \geq 0 \quad \prod_{k=s}^{t-1} \left| \frac{a(k)}{b(k)} \right| \geq d \cdot \lambda^{t-s}.$$

Ясно, что из условия разделенности следует мультипликативная разделенность. Обратное неверно, что ясно из следующего простого примера. Функции $a(t) = 2$, $b(t) = 2^{(-1)^t}$ не разделены, но мультипликативно разделены с константами $d = \frac{1}{2}$, $\lambda = 2$. Действительно,

$$\prod_{k=s}^{t-1} \frac{2}{2^{(-1)^k}} = \frac{2^{t-s}}{\sum_{k=s}^{t-1} (-1)^k} \geq \frac{1}{2} \cdot 2^{t-s}, \quad \text{так как множество значений суммы } \sum_{k=s}^{t-1} (-1)^k \text{ совпадает}$$

со множеством $\{-1; 0\}$ или $\{0; 1\}$.

Определение 3. Линейная система (2) разделена (в смысле Б.Ф.Былова), если у этой системы существует базис $x_1(t), \dots, x_n(t)$, для которого при всех $t \geq s \geq 0$ выполняется неравенство

$$\frac{\|x_{i+1}(t)\|}{\|x_{i+1}(s)\|} \cdot \frac{\|x_i(t)\|}{\|x_i(s)\|} \geq d \cdot \lambda^{t-s}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

с некоторыми константами $d \in (0; 1]$, $\lambda > 1$.

Для оценки роста решений системы (2) на бесконечности изучались различные показатели роста. Рассмотрим только два из них:

1) $\chi = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|x(t)\|$ — показатель Ляпунова;

2) $\nu = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\|x(t+1)\|}{\|x(t)\|}$ — показатель Перрона.

Преобразование $y(t) = \lambda^t \cdot x(t)$, $\lambda \neq 0$, линейной системы (2) назовем λ -преобразованием. Это преобразование приводит систему (2) к виду $y(t+1) = \lambda \cdot A(t)y(t)$.

Отметим, что при λ -преобразовании показатели Ляпунова и Перрона преобразуются следующим образом:

$$\chi[y(t)] = \ln |\lambda| + \chi[x(t)], \quad \nu[y(t)] = |\lambda| \cdot \nu[x(t)].$$

Та Ли показал [4], что всякая система (2) преобразованием $y(t) = U(t)x(t)$ с вполне ограниченной матрицей $U(t)$ приводима к системе $y(t+1) = B(t)y(t)$ с треугольной матрицей $B(t)$. Аналогичным результатом в теории линейных систем дифференциальных уравнений является теорема Перрона о триангуляции линейной системы (1). Необходимые и достаточные условия приводимости системы (1) к блочно-треугольному виду легко переносятся на случай линейных систем разностных уравнений.

Теорема 1. Линейная система (2) приводима к блочно-треугольному виду тогда и только тогда, когда система (2) имеет базис $X(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ такой, что

$$\frac{G(X)}{G(X_1) \dots G(X_r)} \geq \rho > 0,$$

где $G(X)$ — определитель Грама.

Доказательство этой теоремы можно провести аналогично доказательствам теорем 20.3.1 и 20.3.2 [5]. Укажем только отличия в доказательствах.

Достаточность теоремы. Проведя процесс ортогонализации Шмидта для каждой совокупности векторов $X_i(t)$ из фундаментальной матрицы $X(t)$, получим представление $X(t) = V(t)R(t)$, где $V(t)$ — унитарная (в вещественном случае ортогональная), а $R(t)$ — блочно-треугольная матрицы. Преобразование $x(t) = V(t)y(t)$ искомое, оно приводит систему (2) к виду $y(t+1) = B(t)y(t)$ с матрицей $B(t) = Y(t+1)Y^{-1}(t) = R(t+1) \cdot R^{-1}(t)$. Матрица $B(t)$ блочно-треугольная, как и матрица $R(t)$. Матрица $V(t)$ вполне ограничена.

При доказательстве необходимости нужно воспользоваться аналогом формулы Остроградского — Лиувилля для линейных систем разностных уравнений

$$\det X(t) = \det X(0) \cdot \prod_{k=0}^{t-1} \det A(k).$$

Пусть преобразование $x = Ly = [L_1, \dots, L_r] y$ приводит систему (2) к блочно-треугольному виду $y(t+1) = B(t)y(t)$. Последняя система распадается на r независимых систем $y(t+1) = B_k(t)y(t)$, $k = 1, 2, \dots, r$.

Пусть $Y = [Y_1, \dots, Y_r]$ — канонический базис преобразованной системы. Базис Y при преобразовании L переходит в базис $X = LY$, причем блоку Y_k отвечает блок $X_k = L_k Y_k = L Y_k$. Далее имеем

$$G(X_k) = \det(X_k^* X_k) = \det(Y_k^* L_k^* L_k Y_k) = |\det Y_k|^2 \cdot G(L_k) = \left(\prod_{i=0}^{t-1} \det B_k(i) \right)^2 \cdot G(L_k),$$

$$G(X) = |\det X|^2 = |\det L|^2 \cdot |\det Y|^2 = \left(\prod_{i=0}^{t-1} \det B(i) \right)^2 G(L),$$

$$\text{поэтому } \frac{G(X)}{\prod_{k=1}^r G(X_k)} = \frac{\left(\prod_{i=0}^{t-1} \det B(i) \right)^2 \cdot G(L)}{\prod_{k=1}^r \left(\prod_{i=0}^{t-1} \det B_k(i) \right)^2 \cdot G(L_k)} = \frac{G(L)}{\prod_{k=1}^r G(L_k)} \geq \rho > 0. \quad (\text{Мы воспользовались}$$

$$\text{тем, что } \det B(t) = \prod_{k=1}^r \det B_k(t)).$$

Последнее неравенство вытекает из вполне ограниченности матрицы $L(t)$.

Теорема 2. Линейная система (2), разделенная в смысле Б.Ф.Былова, приводима к системе с диагональной матрицей коэффициентов.

Доказательство. Проведем аналогию с доказательством Б.Ф.Былова соответствующей теоремы для линейных систем дифференциальных уравнений [1].

Система (2) диагонализуема тогда и только тогда, когда у нее существует базис $X(t)$, для которого

$$\frac{G(X)}{\|x_1(t)\|^2 \dots \|x_n(t)\|^2} \geq \rho > 0.$$

Это же условие можно переформулировать в терминах углов между подпространствами

$$\frac{G(X)}{\prod_{i=1}^n \|x_i(t)\|^2} = \prod_{i=1}^{n-1} \sin^2 \beta_i \geq \rho > 0, \quad (4)$$

где $\beta_i = \angle(L_i, x_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, а L_i — i -мерное линейное пространство, натянутое на векторы $x_1(t), \dots, x_i(t)$. Доказательство теоремы свелось к доказательству отделенности от нуля всех углов β_i .

Вектор-функции $x(t)$ сопоставим функцию $p_x(t) = \frac{\|x(t+1)\|}{\|x(t)\|}$, что даст для фундаментальной системы $x_1, \dots, x_n$ функции $p_1, \dots, p_n$, причем

$$\|x_i(t)\| = \|x_i(s)\| \prod_{k=s}^{t-1} p_i(k). \quad (5)$$

Из неравенства (3) следует, что $\prod_{k=s}^{t-1} \frac{p_{i+1}(k)}{p_i(k)} \geq d \cdot \lambda^{t-s}$, т.е. функции $p_i(t)$ мультипликативно разделены. Доказательство удобно провести сначала для случая

$$\inf_{i,t \in \mathbb{Z}_+} p_i(t) = \lambda_0 > 1, \quad (6)$$

от которого в дальнейшем можно отказаться. Отметим, что равенство $\inf_{t \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|x(t+1)\|}{\|x(t)\|} = 0$ невозможно, что вытекает из вполне ограниченности матрицы $A(t)$, так как

$$\frac{\|x(t+1)\|}{\|x(t)\|} \geq \frac{1}{\|A^{-1}(t)\|} \geq \alpha > 0.$$

Случай $\inf_{i,t \in \mathbb{Z}_+} p_i(t) \in (0;1]$ приводится к строгому неравенству (6) λ -преобразованием $y(t) = \lambda^t \cdot x(t)$, где λ — достаточно большое число, обеспечивающее $\lambda \cdot \inf_{i,t \in \mathbb{Z}_+} p_i(t) = \lambda_0 > 1$.

Это преобразование не влияет на углы, поэтому неравенство (4) остается выполненным.

Индукцией по k аналогично доказательству [1] легко показать, что для всех $x \in L_k$ справедливы неравенства

$$\frac{G(x_1, \dots, x_k)}{\prod_{i=1}^k \|x_i\|^2} \geq \rho > 0 \quad (7)$$

и

$$\frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} \leq B_k \cdot \prod_{i=s}^{t-1} p_k(i). \quad (8)$$

Приведем, например, обоснование справедливости неравенства (7). При $k=1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть для всех $k=1,2,\dots,m$ справедливы неравенства (7) и (8). Пусть $k=m+1$ и нарушается неравенство (7). Тогда существует последовательность $t_i \rightarrow \infty$ и последовательность решений $x'_i(t_i) \in L_m$ и $x_{m+1}(t_i)$ таких, что

$$\beta_m(t_i) = \angle(x'_i(t_i), x_{m+1}(t_i)) \rightarrow 0.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\|x'_i(t_i)\| = \|x_{m+1}(t_i)\| = 1$. Отсюда $\|x_{m+1}(t_i) - x'_i(t_i)\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и для любого натурального T

$$\|x_{m+1}(t_i + T) - x'_i(t_i + T)\| \rightarrow 0. \quad (10)$$

В то же время в силу предположения (8) и тождества (5)

$$\begin{aligned} \|x_{m+1}(t_i + T) - x'_i(t_i + T)\| &\geq \|x_{m+1}(t_i + T)\| - \|x'_i(t_i + T)\| \geq \prod_{k=t_i}^{t_i+T-1} p_{m+1}(k) - B_m \prod_{k=t_i}^{t_i+T-1} p_m(k) = \\ &= \prod_{k=t_i}^{t_i+T-1} p_{m+1}(k) \cdot \left(1 - B_m \cdot \prod_{k=t_i}^{t_i+T-1} \frac{p_m(k)}{p_{m+1}(k)} \right) \geq \lambda_0^T \cdot \left(1 - \frac{B_m}{d} \lambda^{-T} \right) > 1, \end{aligned}$$

если T достаточно большое число. Полученное неравенство противоречит (10), которое вызвано предположением (9).

Теорема 3. Разделенная система (2) приводима к диагональной системе

$$y(t+1) = \text{diag}[p_1(t), \dots, p_n(t)] y = P(t)y, \quad (11)$$

причем $p_i(t) = \frac{\|x_i(t+1)\|}{\|x_i(t)\|}$, $i=1,2,\dots,n$, и диагональ мультипликативно разделена.

Доказательство. Пусть $X(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ — фундаментальная матрица системы (2), для которой выполнено условие разделенности (3).

Применяя утверждение об обращении теоремы Перрона о триангуляции линейной системы, мы приходим к выводу, что разделенная система (2) диагоналізуема с помощью некоторого преобразования $x = U(t)y$ с вполне ограниченной матрицей $U(t)$, которая строится на основании $X(t)$ процессом ортогонализации Шмидта. Отсюда

$$U(t) = \left\{ \frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_2}{\|x_2\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}, \quad X(t) = U(t) \operatorname{diag}[\|x_1\|, \dots, \|x_n\|]. \quad (12)$$

Пусть $Y(t)$ базис системы (11) такой, что $X(t) = U(t)Y(t)$, откуда в силу (12) имеем

$$Y(t) = \operatorname{diag}[\|x_1\|, \dots, \|x_n\|] \quad \text{и} \quad P(t) = Y(t+1) \cdot Y^{-1}(t) = \operatorname{diag} \left[\frac{\|x_1(t+1)\|}{\|x_1(t)\|}, \dots, \frac{\|x_n(t+1)\|}{\|x_n(t)\|} \right].$$

Мультипликативная разделенность диагонали следует из неравенства (3). Действительно,

$$\prod_{k=s}^{t-1} \left| \frac{p_{i+1}(k)}{p_i(k)} \right| = \prod_{k=s}^{t-1} \frac{\|x_{i+1}(k+1)\| \cdot \|x_i(k)\|}{\|x_{i+1}(k)\| \cdot \|x_i(k+1)\|} = \frac{\|x_{i+1}(t)\|}{\|x_{i+1}(s)\|} \cdot \frac{\|x_i(t)\|}{\|x_i(s)\|} \geq d \cdot \lambda^{t-s}.$$

Легко убедиться в том, что последнее утверждение справедливо и в обратную сторону.

Теорема 4. Если коэффициенты диагональной системы

$$x(t+1) = \operatorname{diag}[p_1(t), \dots, p_n(t)]x(t) \quad (13)$$

мультипликативно разделены, то система разделена.

Доказательство. Рассмотрим канонический базис системы (13)

$$X(t) = \operatorname{diag} \left[\prod_{k=0}^{t-1} p_1(k), \dots, \prod_{k=0}^{t-1} p_n(k) \right]. \quad \text{Для этого базиса имеем}$$

$$\frac{\|x_{i+1}(t)\|}{\|x_{i+1}(s)\|} \cdot \frac{\|x_i(t)\|}{\|x_i(s)\|} = \prod_{k=s}^{t-1} \left| \frac{p_{i+1}(k)}{p_i(k)} \right| \geq d \cdot \lambda^{t-s}.$$

В заключение отметим простейшие свойства разделенных систем разностных уравнений, которые аналогичны соответствующим свойствам интегрально разделенных систем дифференциальных уравнений [6,7].

1. Разделенная система (2) имеет различные характеристические показатели.

Действительно, полагая в неравенстве (3) $s = 0$, получаем $\|x_{i+1}(t)\| \geq C \cdot \|x_i(t)\| \cdot \lambda^t$,

$$C = \frac{d\|x_{i+1}(0)\|}{\|x_i(0)\|}, \quad \text{откуда} \quad \ln\|x_{i+1}(t)\| \geq \ln C + \ln\|x_i(t)\| + t \cdot \ln \lambda, \quad \chi[x_{i+1}(t)] \geq \chi[x_i(t)] + \ln \lambda > \chi[x_i(t)].$$

2. Фундаментальная система, удовлетворяющая условию разделенности (3), нормальна.

Свойство очевидно, так как в силу предыдущего свойства понижающая комбинация невозможна.

3. Разделенность системы инвариантна относительно вполне ограниченных преобразований.

Действительно, пусть преобразование $x(t) = U(t)y(t)$ с вполне ограниченной матрицей $U(t)$ приводит систему (2) к виду $y(t+1) = B(t)y(t)$. Пусть $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — фундаментальная система решений системы (2), удовлетворяющая условию разделенности. Рассмотрим решения $y_i(t) = U(t)x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$. Так как при вполне ограниченных преобразованиях характеристические показатели не меняются, то в силу свойства 1 решения $y_i(t)$ образуют фундаментальную систему решений преобразованной системы. Проверим, что решения $y_i(t)$ удовлетворяют условию разделенности. Пусть постоянная $K \geq 1$ такова, что $\|U(t)\| \leq K$, $\|U^{-1}(t)\| \leq K$. Имеем

$x_i(t) = U(t)y_i(t)$, $y_i(t) = U^{-1}(t)x_i(t)$, откуда $\|x_i(t)\| \leq K \cdot \|y_i(t)\|$ и $\|y_i(t)\| \leq K\|x_i(t)\|$. Далее имеем $\frac{\|y_{i+1}(t)\|}{\|y_{i+1}(s)\|} \cdot \frac{\|y_i(t)\|}{\|y_i(s)\|} \geq \frac{\|x_{i+1}(t)\|}{K^2 \cdot \|x_{i+1}(s)\|} \cdot \frac{K^2 \cdot \|x_i(t)\|}{\|x_i(s)\|} \geq d_1 \cdot \lambda^{t-s}$, где $d_1 = d \cdot K^{-4}$, причем $d_1 \in (0;1]$.

4. Разделенная система (2) правильна тогда и только тогда, когда все ее решения имеют строгие характеристические показатели.

Справедливость этого свойства вытекает из инвариантности свойства правильности относительно вполне ограниченных преобразований, свойства диагонализуемости разделенной системы и критерия Ляпунова правильности треугольной (в частности диагональной) системы разностных уравнений.

Замечание. Отметим, что лишь наличие строгих характеристических показателей без каких-нибудь дополнительных требований не влечет правильность системы [8].

5. Если решения $x_i(t)$ разделенной системы (2) имеют строгие показатели Перрона, то система (2) правильна.

Действительно, приведем разделенную систему (2) к диагональному виду

$$y(t+1) = \text{diag}\left(\frac{\|x_1(t+1)\|}{\|x_1(t)\|}, \dots, \frac{\|x_n(t+1)\|}{\|x_n(t)\|}\right)y(t) = P(t)y(t).$$

По условию существуют $v[x_i(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\|x_i(t+1)\|}{\|x_i(t)\|}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Как показано в работе [9], тогда существуют строгие характеристические показатели $\chi[x_i(t)] = \ln v[x_i(t)]$, $i = 1, \dots, n$. Так

как $\chi[x_i(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \cdot \ln \left| \prod_{k=0}^{t-1} p_i(k) \right|$, то система (2) правильна по критерию Ляпунова.

1. Былов Б.Ф. // Мат. сб. 1965. Т. 67. № 3. С. 338-344.
2. Hahn W. Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov. Springer Verlag. Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1959. 248 p.
3. Демидович В.Б. // Дифф. уравнения. 1974. Т. 10. № 12. С. 2267-2278.
4. Ta Li // Acta Math. 1934. V.63. № 1. 99-141.
5. Былов Б.Ф. и др. Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. С.267-269.
6. Ласунский А.В. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1987. 101 с.
7. Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: СПбГУ, 1992. С.177-178.
8. Демидович В.Б. // Дифф. уравнения. 1975. Т.11. № 6. С. 1091-1107.
9. Ласунский А.В. // Дифф. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1931-1932.