УДК 517.954

**Данг Хань Хой**

# О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ ЕСТЕСТВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГОМЕРНОМ ТОРЕ

In the paper periodic solutions of some nonlinear evolutionary equations over multidimensional torus are stadied. The obtained results would be fruitful for simulation of time–periodic processes in various technical control systems.

В работе рассматривается задача о периодических решениях уравнений

$$(L-i\lambda)u \equiv (\frac{\partial}{\partial t}+aA-i\lambda)u(x,t)=\varepsilon G\circ H(u), \quad a\neq 0, \lambda\in R, i^2=-1, \tag{1}$$

с условием периодичности по $t: u|_{t=0}=u|_{t=b}$ на римановом многообразии *X*. Здесь $u(x,t)$ — комплексная дифференциальная форма на *X*; $Gu(x,t)=\int\limits_{\Pi^n} g(x,y)u(y,t)dy$ — интегральный оператор; $A=i(d+\delta)$ — так называемый естественный дифференциальный оператор на *X*, $H: u\to H(u)$ — оператор на *X*, удовлетворяющий условию Липшица с константой *h*. Рассмотрены случаи, когда *X* есть *n*-мерный тор $\Pi^n, n\geq 2.$ Полученные результаты полезны для моделирования периодических процессов в различных управляемых технических системах.

Настоящая статья продолжает работу [1].

Обозначим через *X* *n*-мерное риманово многообразие класса $C^\infty$, которое всегда предполагается ориентированным и замкнутым. Пусть $\xi=\oplus_{p=0}^{n}\xi^p=\oplus_{p=0}^{n}\Lambda^p(T^*X)\otimes C$ — комплексифицированное кокасательное расслоение многообразия *X*, $C^\infty(\xi), H^k(\xi)$ — пространство гладких дифференциальных форм и пространство Соболева дифференциальных форм над $X$ соответственно (см. [2]), $d$ — внешний дифференциальный оператор, а $\delta=d^*$ — его формально сопряженный оператор относительно скалярного произведения в $C^\infty(\xi)$, индуцированного римановой структурой на *X*. Известно что $(d+\delta)$ — эллиптический дифференциальный оператор первого порядка.

Рассмотрим случай, когда $X=\Pi^n=R^n/(2Z)^n$ является *n*-мерным тором. В этом случае значения

$$\lambda_{km\eta}=i\pi\left(\frac{2m}{b}+\eta a\sqrt{k_1^2+\ldots+k_n^2}\right)=i\pi\left(\frac{2m}{b}+\eta a\,|\,k\,|\right),$$

где $\eta=\pm 1, a\neq 0, \lambda$ — вещественные числа, являются собственными числами оператора $L=\frac{\partial}{\partial t}+aA$ на пространстве $L_2([0,b],H^0(\xi))=\widetilde{H}.$ Причем, эти собственные числа имеют конечную кратность, и им соответствует ортонормированный базис собственных векторов (см.[3]). Спектр $\sigma(L)$ оператора *L* есть замыкание $\{\lambda_{km\eta}\}$, которое лежит на мнимой оси и совпадает с $iR$ (т.е. множество чисел $\lambda_{km\eta}$ всюду плотно на мнимой оси). Предположим, что $i\lambda\neq\lambda_{km\eta}\ \ \forall k\in Z^n, m\in Z, \eta,$ тогда определен обратный оператор $(L-i\lambda)^{-1}$, но этот оператор не ограничен, так как ряд Фурье для элемента $u=(L-i\lambda)^{-1}\nu(x,t)$ содержит малые знаменатели $\lambda_{km\eta}-i\lambda$.

Пусть числа $a, \lambda$ фиксированы. Все величины, зависящие от этих чисел, будем считать постоянными. Для положительных чисел $\sigma$ и $C$ через $A_\sigma(C)$ обозначим множество таких положительных чисел $b$, для которых при всех $m$ и $\eta, k \neq 0, k \in Z^n$, выполнено неравенство

$$|\lambda_{km\eta} - i\lambda| = \left|\pi\left(\frac{2m}{b} + \eta a|k|\right) - \lambda\right| \geq \frac{C}{|k|^{1+\sigma}}. \qquad (2)$$

Через $A_\sigma$ обозначим объединение по $C > 0$ множеств $A_\sigma(C)$. Если неравенство (2) выполнено для некоторого $b$ при всех $m, \eta$ и $k$, то оно выполнено и при $m = 0$, откуда получаем необходимое условие непустоты множества $A_\sigma(C): C \leq |k|^{1+\sigma} |\pm a\pi|k| - \lambda| \, \forall k \neq 0$. Обозначим наименьшее значение величины $|\pm a\pi|k| - \lambda|$ через $d$. Из условия $\lambda_{km\eta} \neq \lambda$ следует, что $d > 0$. Будем считать, что число $C$ удовлетворяет условию $C \leq d/2$. Обратим внимание на то, что величина $d$ не зависит от $b$.

*Теорема 1.* Пусть оператор $L$ задан выражением (1), $i\lambda \neq \lambda_{km\eta}$ для всех целых $m$ и $k \in Z^n, \eta, b \in A_\sigma(C), 0 < \sigma < \frac{1}{2}$. Положим $\delta = \delta(b) = \min\limits_n \left|\frac{2n\pi}{b} - \lambda\right| \leq \frac{\pi}{b}$. Пусть $2^n \times 2^n$ матрица $g(x, y)$ задана на $\Pi^n \times \Pi^n$ и имеет непрерывные производные по $x$ до $2n$-го порядка. Если $G$ — интегральный оператор на пространстве $\widetilde{H}$ с матричным ядром $g(x, y)$, то оператор $(L - i\lambda)^{-1} \circ G$ ограничен и для его нормы имеет место оценка

$$\left\|(L - i\lambda)^{-1} \circ G\right\| \leq \sqrt{\frac{\|G\|^2}{\delta^2} + \frac{M^2 A}{C^2}}, \qquad (3)$$

где $A = \sum\limits_{k \in Z^n} \frac{2^{2n}|k|^{2+2\sigma}}{(|k_1|+1)^4 (|k_2|+1)^4 \ldots (|k_n|+1)^4}$, $M = \max_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{n0} \leq n} \left\|G^{2n_0}_{x^{j_1 2} x^{j_2 2} \ldots x^{j_{n_0} 2}}\right\|$.

*Следствие 1.* Если для некоторого значения $b$ выполнены условия теоремы 1, то при всех $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих неравенству $\varepsilon < \left(h\sqrt{\frac{\|G\|^2}{\delta^2} + \frac{M^2 A}{C^2}}\right)^{-1}$, существует единственное периодическое решение уравнения (1) с периодом $b$.

*Следствие 2.* Если $\lambda \neq 0$, то для почти всех $b$ существует $\varepsilon(b) > 0$ такое, что при условии $\varepsilon < \varepsilon(b)$ существует и притом единственное периодическое решение уравнения (1), при этом $\varepsilon(b) < \left(h\sqrt{\frac{\|G\|^2}{\delta(b)} + \frac{M^2 A}{C^2}}\right)^{-1}$.

Обозначим через $B(\varepsilon_0)$ множество, состоящее из чисел $b$, для которых выполнено неравенство $\varepsilon_0 h\sqrt{2} \max\left\{\frac{\|G\|}{\delta(b)}, \frac{M\sqrt{A}}{C(b)}\right\} \leq 1$. По теореме 1 и следствию 1 при $b \in B(\varepsilon_0)$ имеет место утверждение о существовании и единственности периодического решения при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$. Изучим сначала свойства множества $A_\sigma(C)$.

*Теорема 2.* Множество $A_\sigma(C)$ принадлежит отрезку $[0, p_1]$, где $p_1 = \frac{\pi}{C}$ и является замкнутым нигде не плотным множеством, инвариантным относительно отображений

$b \to \frac{b}{n}$ для всех натуральных $n$. Для заданного отрезка $[p, p+l]$ длины $l > 0$ и $p > 0$ мера Лебега множества $A_\sigma(C \cap [p, p+l])$ положительна при условии $C < \frac{l}{S_0(p+l)}$, где число $S_0(r)$ задано формулой $S_0(r) = cr^{1+\sigma}\left(r + \frac{\pi}{d}\right)$. Для отрезка $[0,l]$ всегда $\mu([0,l] \cap A_\sigma(C)) > 0$, при этом верна оценка $\mu([0,l] \cap A_\sigma(C)) \geq \max_{0<\rho\leq l} \rho(1 - CV_0(\rho))$, где $V_0(r) = c\left(r + \frac{\pi}{d}\right)r^\sigma$, $c = \text{const}$.

*Следствие 3.* Множество $A_\sigma$ является множеством полной меры, т.е. его дополнение на полупрямой $R^+$ является множеством нулевой меры.

В оценку (3) нормы оператора (1) входит величина $\delta$, также зависящая от $b$ (напомним, что $\delta = \delta(b) = \min_n \left| \frac{2n\pi}{b} - \lambda \right|$). Обозначим $K = K(\varepsilon) = \varepsilon h\sqrt{2}\|G\|$ и пусть $B_1(K)$ есть множество, состоящее из тех $b$, для которых выполнено неравенство $\frac{K}{\delta} \leq 1$.

*Лемма 1.* Если $3K > |\lambda|$, то множество $B_1(K)$ является полуинтервалом $(0, \frac{2\pi}{|\lambda| + K}]$. Если $3K \leq |\lambda|$, то множество $B_1(K)$ представляет собой объединение полуинтервалов $(0, \frac{2\pi}{|\lambda| + K}]$ и конечного числа непересекающихся отрезков вида $[\frac{2n\pi}{|\lambda| - K}, \frac{2(n+1)\pi}{|\lambda| + K}]$, где $1 \leq n \leq \frac{|\lambda| - K}{2K}$.

Из теоремы 2 (при $C = \varepsilon_0 Mh\sqrt{2A}$ ) и леммы 1 вытекает следующая

*Теорема 3.* Если $\varepsilon_0$ достаточно малое положительное число, то множество $B(\varepsilon_0)$ является замкнутым, ограниченным и нигде не плотным множеством положительной меры.

В частном случае рассмотрим уравнение вида

$$(-\Delta + 1)(L - i\lambda)u = \varepsilon H(u), \quad \lambda \in R, \tag{4}$$

где $L$ и $H$ описаны выше, а $\Delta$ — оператор Лапласа. Очевидно, у $(-\Delta + 1)$ существует обратный оператор $G = (-\Delta + 1)^{-1}$, который является интегральным оператором вида $Gu = \int g(x - y)u(y)dy$. Поэтому уравнение (4) может быть сведено к общему уравнению вида (1).

Пользуясь случаем, автор выражает свою искреннюю благодарность проф. А.Б.Антоневичу и проф. Е.Ю.Панову за внимание к работе.

1. Данг Хань Хой // Тез. докл. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы». М., 2004. С.48.
2. Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. М.: Мир, 1970. С.69-79.
1. Данг Хань Хой и Фам Нгок Тхао. // Acta Math. Viet. 1988. V.13. №2. С.31-44.