

А.А.Васильев, А.Н.Кудинов

МНОГОПОЛЕВЫЕ КОНТИНУАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В МОДЕЛИРОВАНИИ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ СТРУКТУРНЫХ СИСТЕМ

The multifield approach for modelling of the quasi-one-dimensional structural systems is presented. We demonstrate that the method can be used for deriving of the multifield approximated solutions for modelling of discrete solitons in nonlinear systems and generalised continual models which are sufficiently exact at modelling not only long wavelength but also quickly oscillating decaying displacements near defects.

Введение

Континуальные модели эффективно используются для моделирования дискретных систем, составленных из большого количества повторяющихся структурных элементов. Необходимость моделирования эффектов, которые не отражают классические континуальные модели, привела к разработке ряда моделей обобщенной континуальной механики [1]. Как правило, в основе их построения лежит изменение или обобщение тех или иных базовых гипотез классической механики [2]. Классические континуальные модели хорошо описывают длинноволновые плавно-изменяющиеся деформации дискретных систем и могут применяться для их моделирования. Однако они неприменимы или дают значительные ошибки при моделировании коротковолновых полей. Разработка методов и моделей для учета и моделирования таких эффектов представляется актуальной.

Обычно классические модели строятся на основе минимальной ячейки периодичности. Представленный нами метод многополевых континуальных приближений базируется на отказе от этого не самоочевидного предположения. Система моделей строится на основе рассмотрения в качестве ячеек периодичности макроячеек, получаемых удвоением минимальной ячейки периодичности, с использованием удвоенного количества полевых вектор-функций для аппроксимационного описания деформаций моделируемой системы.

В динамике структурных систем многополевые модели разрабатывались и использовались, например, при моделировании одномерных дискретных систем [3], слоистых сред [4], в задачах устойчивости [5]. В статье рассматривается моделирование квазиодномерных систем, т.е. систем, образованных смещением объемной ячейки периодичности вдоль прямой оси.

Дискретная модель квазиодномерной системы. Многополевые модели

В качестве базовых уравнений квазиодномерной системы рассматриваем матричные уравнения динамики ячейки периодичности вида

$$M_1 \ddot{\bar{U}}_{n+1} + M_0 \ddot{\bar{U}}_n + M_{-1} \ddot{\bar{U}}_{n-1} + K_1 \bar{U}_{n+1} + K_0 \bar{U}_n + K_{-1} \bar{U}_{n-1} = 0,$$

где $\bar{U}_n = \{\bar{u}_{n,i}\}_{i=1, \dots, N}$ — обобщенный вектор смещений узлов n -й ячейки, составленный из векторов смещений N ее узлов. Предполагаем, что выполнены обычные для матриц жесткости и масс соотношения симметрии: $K_0 = K_0^T$, $K_1 = K_{-1}^T$, $M_0 = M_0^T$, $M_1 = M_{-1}^T$.

В однополевой модели в качестве базовой выбираем минимальную ячейку периодичности. Для аппроксимации перемещений в ее узлах вводим вектор-функцию $\bar{U}(x) = \{\bar{u}_i(x)\}_{i=1, \dots, N}$, размерность которой равна числу степеней свободы ячейки. Разложением перемещений в ряд Тейлора в дискретных уравнениях получаем уравнения движения дифференциальные по x . Предполагая, что смещения в соответствующих узлах ячеек вдоль системы изменяются плавно, и ограничиваясь в разложениях производными конечного порядка, получаем приближенные модели.

Для построения двухполевой модели в качестве ячейки периодичности рассматриваем макроячейку, составленную из двух элементарных ячеек. Обозначив обобщенный вектор смещений узлов четных ячеек \bar{U} , а нечетных — \bar{V} , выписываем уравнения движения n -й макроячейки в виде

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{\bar{V}}_{m+1} + M_0 \ddot{\bar{U}}_m + M_{-1} \ddot{\bar{V}}_{m-1} + K_1 \bar{V}_{m+1} + K_0 \bar{U}_m + K_{-1} \bar{V}_{m-1} &= 0, \\ M_1 \ddot{\bar{U}}_{m+2} + M_0 \ddot{\bar{V}}_{m+1} + M_{-1} \ddot{\bar{U}}_m + K_1 \bar{U}_{m+2} + K_0 \bar{V}_{m+1} + K_{-1} \bar{U}_m &= 0, \end{aligned}$$

где $m = 2n$. Полевые уравнения для вектор-функций $\bar{U}(x)$ и $\bar{V}(x)$ строим на основе этих уравнений с использованием изложенной выше процедуры континуального перехода.

2^m -полевая модель строится аналогично на базе макроячейки из 2^m элементарных ячеек с использованием 2^m вектор-функций.

Таким образом, формируется иерархическая система континуальных моделей, все более точно отражающих динамические свойства моделируемой дискретной системы. Для систем рассматриваемого вида можно доказать, что двухполевая модель совпадает с однополевой, имея ту же точность аппроксимации для длинноволновых полей, и уточняет однополевую модель для коротковолновых полей, для которых однополевая (классическая) модель обычно неприменима. Модели более высоких уровней, обладая этим качеством, дают уточнение для средних длин волн.

**Дисперсионные соотношения дискретной и многополевых моделей.
Нахождение и анализ обобщенных динамических характеристик**

Подстановки $\bar{U}_n = \bar{w} \exp i(kan - \omega t)$, $\bar{U}(x) = \bar{w} \exp i(kx - \omega t)$ в дискретные и полевые уравнения приводят к системам вида

$$[-\omega^2 M(k) + K(k)] \bar{w} = 0.$$

Равенство нулю определителей дает дисперсионные соотношения $\omega^2 = \omega^2(k)$. Сравнительный анализ моделей обычно проводят на основе сравнения их дисперсионных соотношений сравнением рядов Тейлора для $\omega^2(k)$. Фактически проводится сравнение производных $\omega^2(k)$ по волновому числу при $k = 0$, которые, таким образом, являются динамическими характеристиками системы. Часто им может быть дана физическая интерпретация, в частности как характеристик скорости распространения возмущений, дисперсии.

Сформулируем матричный алгоритм для нахождения динамических характеристик. В качестве базовой «задачи для ячейки» рассматриваем задачу на собственные значения для матриц обобщенной ячейки периодичности

$$[-\omega^2 M(k) + K(k)] \bar{w} = 0, \quad (M(k) \bar{w}_m, \bar{w}_s) = \delta_{ms}.$$

На основе ее решения далее рекуррентно находим производные различных порядков. В частности, можно показать, что если среди собственных чисел нет кратных, M_0 диагональная, а M_1 и M_{-1} равны нулю, то производные находятся последовательно по формулам:

$$\begin{aligned} [\omega_m^2]^{(r)} &= \left(K^{(r)} \bar{w}_m + \sum_{s=1}^{r-1} C_r^s \left[K^{(r-s)} - (\omega_m^2)^{(r-s)} M \right] \bar{w}_m^{(s)}, \bar{w}_m \right), \\ \bar{w}_m^{(r)} &= \sum_{n=1}^{N_s} \beta_{mn} \bar{w}_n, \quad \beta_{mm} = -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{r-1} C_r^s (M \bar{w}_m^{(s)}, \bar{w}_m^{(r-s)}), \\ \beta_{mn} &= \frac{1}{\omega_m^2 - \omega_n^2} \left(K^{(r)} \bar{w}_n + \sum_{s=1}^{r-1} C_r^s \left[K^{(r-s)} - (\omega_m^2)^{(r-s)} M \right] \bar{w}_m^{(s)}, \bar{w}_n \right). \end{aligned} \tag{1}$$

В случае не диагональной матрицы масс для кратных собственных чисел выражения имеют структуру соотношений (1). Находя производные по параметрам ячеек, получаем возмож-

ность анализировать чувствительность динамических характеристик системы к изменению параметров структурных элементов. Реализация алгоритма для макроячеек позволяет находить и анализировать динамические характеристики не только длинноволновых процессов.

Нахождение и возможности анализа динамических характеристик покажем на примере квазиодномерной шарнирной стержневой системы, представленной на рис.1. В линейном приближении уравнения для продольных перемещений центров масс сечений U_n и изменений их толщины v_n имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{U}_n - (G_1 + G_2 A^2)(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + G_2 AB(v_{n+1} - v_{n-1}) &= 0, \\ m\ddot{v}_n - G_2 AB(U_{n+1} - U_{n-1}) + G_2 B^2(v_{n+1} + 2v_n + v_{n-1}) + 2G_3 v_n &= 0, \end{aligned}$$

где $B = b/r$; $A = a/r$; $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $G_1 = E_1/a$; $G_2 = E_2/r$; $G_3 = E_3/b$; E_i — жесткости; a , r , b — длины соединяющих стержней (рис.1).

«Задача для ячейки» состоит в решении задачи на собственные значения для матриц

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad K(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4G_2 B^2 + 2G_3 \end{bmatrix}.$$

Она имеет решение

$$\begin{aligned} \omega_0^2(0) &= 0, \\ \omega_1^2(0) &= (4G_2 B^2 + 2G_3)/m, \quad \bar{w}_0(0) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{w}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где (ω_0^2, \bar{w}_0) соответствует смещению центра масс поперечного сечения, а (ω_1^2, \bar{w}_1) — изменению его толщины. Используя решение задачи для ячейки и соотношение (1) для второй производной акустической ветви

$$[\omega_0^2]'' \Big|_{k=0} = (K''(0)\bar{w}_0, \bar{w}_0) - 2(K'(0)\bar{w}_0, \bar{w}_1)(K'(0)\bar{w}_1, \bar{w}_0)/\omega_1^2, \quad (2)$$

находим эффективное значение скорости распространения возмущений

$$c^2 = \frac{1}{2} [\omega_0^2]'' \Big|_{k=0} = a^2 \frac{1}{m} \left[G_1 + \frac{G_2 G_3 A^2}{2G_2 B^2 + G_3} \right].$$

Важно отметить, что соотношения (1), (2) позволяют не только найти осредненное значение c^2 , но и отражают влияние на нее и вклад в ее значение внутренних степеней свободы ячейки — продольных смещений центров масс \bar{w}_0 и изменений толщины сечений \bar{w}_1 .

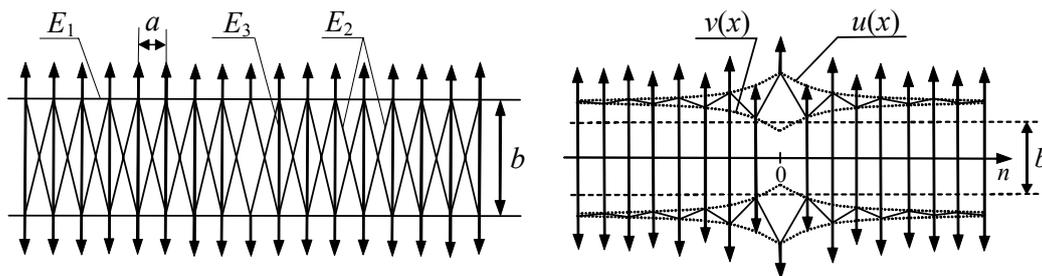


Рис.1

Рис.2

Моделирование локализованных быстро осциллирующих полей

Возможность построения обобщенных континуальных моделей, отражающих не только длинноволновые поля макросмещений, но и быстроосциллирующие погранслойные поля (в окрестности границ, трещин, дефектов, локальных нагрузок), покажем на примере

моделирования деформаций двухрядной системы с разрывом в ячейке с номером $n = 0$, нагруженной силами растяжения f (рис.2).

Уравнения статики для нахождения поперечных смещений узлов при предположении, что можно пренебречь их смещениями вдоль оси, имеют вид

$$\begin{aligned} G_2 B^2 (v_{n+1} + 2v_n + v_{n-1}) + 2G_3 v_n &= f, \quad n \neq 0, \\ G_2 B^2 (v_1 + 2v_0 + v_{-1}) &= f, \quad n = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Симметричное относительно разрыва статическое решение, $v_{-n} = v_n$, представляется в виде суммы основного длинноволнового решения $W = f / (4G_2 B^2 + 2G_3)$ и коротковолновой экспоненциально затухающей составляющей вблизи разрыва

$$v_n = W + (-1)^n \frac{c}{1 - e^{-\lambda}} W e^{-\lambda n}, \quad n \geq 0. \quad (4)$$

Параметр $\lambda > 0$, характеризующий степень локализации, является решением уравнения $\text{ch}\lambda = 1 + c$, $c = G_3 / (G_2 B^2)$.

Классическое однополюсное уравнение $(4G_2 B^2 + 2G_3)w(x) = f$ дает только основное решение W , но не дает погранслойных. Построим двухполюсную модель. Введя макроячейку из двух элементарных ячеек и используя для построения модели две функции $u(x)$ и $v(x)$ (рис.2) в предположении, что $u(x)|_{x=2ma} = v_{2m}$ и $v(x)|_{x=(2m+1)a} = v_{2m+1}$, из разностных уравнений для макроячейки разложением в ряд Тейлора получаем уравнения двухполюсной модели

$$\begin{aligned} G_2 B^2 (2v + a^2 v'') + 2(G_2 B^2 + G_3) u &= f, \\ 2(G_2 B^2 + G_3) v + G_2 B^2 (2u + a^2 u'') &= f. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (3) для нахождения симметричного относительно $x = 0$ решения дают условие

$$G_2 B^2 [2v(x) + 2av'(x) + 2u(x)] \Big|_{x=0} = f. \quad (6)$$

Решение задачи (5), (6) имеет вид

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} W + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu W e^{-\mu \frac{x}{a}}, \quad \mu = \sqrt{2c}, \quad x \geq 0.$$

В удаленных от разрыва областях, $|n| \gg 1$, дискретное (3) и двухполюсное (4) решения совпадают. Ключевым параметром системы является коэффициент μ , определяющий длину области затухания погранслойных эффектов. Отметим, что уравнение $\mu^2 - 2c = 0$ для этого коэффициента в двухполюсной модели является разложением в ряд Тейлора уравнения $\text{ch}\lambda = 1 + c$ для коэффициента дискретной системы λ . Рис.2 иллюстрирует моделирование длинноволновых и коротковолновых (вдали и вблизи разрыва) смещений в узлах системы с использованием двух аппроксимирующих полей.

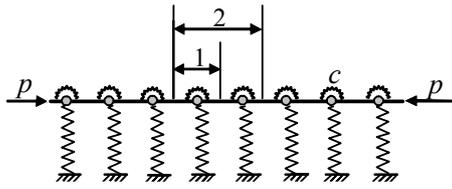
Моделирование динамики коротковолновых структурных переходов

Рассмотрим задачу динамики нагруженного сжимающей силой многозвенника на нелинейно-упругих опорах (рис.3). Это простейшая модель поверхностного или внутреннего слоя при термомеханических напряжениях, молекулярной цепочки в кристалле [6].

Уравнения динамики смещений узлов имеют вид

$$m \ddot{u}_n + ca \Delta^4 u_n + p \Delta^2 u_n + k_0 (u_n/a) + k_1 (u_n/a)^3 = 0, \quad (7)$$

где u_n — смещение n -го узла, m — масса; c — жесткости шарниров; k_0, k_1 — коэффициенты жесткости опор; a — длины звеньев.



1 — ячейка; 2 — макроячейка

Рис.3

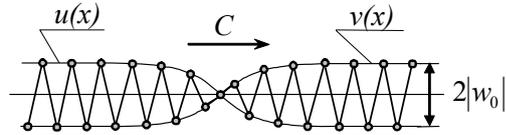


Рис.4

Однополевая классическая континуальная модель не имеет коротковолновых решений дискретной системы. Для построения двухполевой модели обозначаем перемещения нечетных и четных шарниров буквами u, v соответственно. Перепишем уравнения динамики для макроячейки из двух узлов в виде

$$m\ddot{u}_n + ca \frac{u_{n+2} - 4v_{n+1} + 6u_n - 4v_{n-1} + u_{n-2}}{a^4} + p \frac{v_{n+1} - 2u_n + v_{n-1}}{a^2} + k_0 \frac{u_n}{a} + k_1 \left(\frac{u_n}{a} \right)^3 = 0,$$

$$m\ddot{v}_{n+1} + ca \frac{v_{n+3} - 4u_{n+2} + 6v_{n+1} - 4u_n + v_{n-1}}{a^4} + p \frac{u_{n+2} - 2v_{n+1} + u_n}{a^2} + k_0 \frac{v_{n+1}}{a} + k_1 \left(\frac{v_{n+1}}{a} \right)^3 = 0,$$

где $n = 2m$; m — номер ячейки.

В соответствии с общей методикой вводим две полевые функции $u(x), v(x)$. Предполагая, что в узлах многозвенника $u(x)|_{x=2ma} = u_{2m}, v(x)|_{x=(2m+1)a} = v_{2m+1}$, от разностных уравнений (5) переходим к функционально-разностным, и далее, используя разложение в ряд Тейлора с учетом производных по x не выше второго порядка, получаем два дифференциальных уравнения для функций $u(x), v(x)$.

Ищем аппроксимационное коротковолновое решение вида $u(x) = -v(x) = w(x)$, где $w(x)$ — медленноизменяющаяся функция. Для ее нахождения получаем уравнение

$$mw'' - mDw_{xx} - Aw + Bw^3 = 0, \tag{8}$$

где $mD = p - 8ca/a^2$; $A = 4p/a^2 - 16ca/a^4 + k_0/a$; $B = k_1/a^3$.

Уравнение (8) имеет стационарные решения $w_0 = \pm\sqrt{A/B}$, $A > 0$, которые дают точные стационарные коротковолновые решения $u_n = -v_n = w_0$ уравнений дискретной системы (7). Динамический переход между этими состояниями ищем в виде бегущей волны $w(x, t) = W(x - Ct)$. Подстановка этого выражения в (8) приводит к уравнению

$$m(D - C^2) W'' = -AW + BW^3,$$

которое имеет решение $W(\xi) = w_0 \text{th} \left(\frac{x - x_0 - Ct}{\sqrt{2}R} \right)$, где $R^2 \equiv m(D - C^2)/A > 0$.

Таким образом, удастся найти аппроксимационное решение для смещений в узлах дискретной системы типа многополевого кинка (рис.4), соединяющего равновесные решения и движущегося вдоль системы со скоростью C , $C^2 < D$. Решение может использоваться при предварительном качественном анализе, а также в качестве начального приближения при численном моделировании.

Заключение

В статье представлена методика и основные соотношения метода построения обобщенных континуальных моделей квазиодномерных дискретных периодических систем, в которой цепочка моделей, все более точно отражающих свойства моделируемой дискретной

системы, строится на основе удвоения ячейки периодичности и, соответственно, количества полей, используемых для описания деформаций системы. Решены задачи, демонстрирующие методику многополевого подхода, возможности метода для построения континуальных моделей, отражающих не только длинноволновые поля макросмещений, но и быстроосциллирующие погранслойные поля, нахождения аналитических приближенных коротковолновых решений динамики нелинейных систем. Результаты могут быть использованы для моделирования структурных систем с учетом структурных эффектов на основе построения моделей необходимой сложности и точности, при разработке численно-аналитических алгоритмов компьютерного моделирования, нахождения аналитических приближений для предварительного качественного анализа, вычислительных экспериментов.

1. Mechanics of generalised continua. Proceedings of the IUTAM-Symposium on the generalised Cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications. 1967. Ed. E.Kroner. Springer-Verlag, 1968. 368 с.
2. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1970. 136 с.
3. Ильюшина Е.А. // ПММ. 1969. Т. 33. № 5. С. 917-923.
4. Ильюшина Е.А. // ПММ. 1972. Т. 36. № 6. С. 1086-1093.
5. Кудинов А.Н., Васильев А.А. // Сб. тр. Междунар. конф. «Применение математического моделирования для решения задач в науке и технике» (ММНТ'96). Ижевск, 1996. С. 258-261.
6. Dmitriev S.V., Shigenari T., Vasiliev A.A., Abe K. // Phys. Rev. B. 1997. V. 55. № 13. P. 8155-8164.