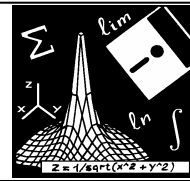


ИНФОРМАТИКА И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА



УДК 517.95

П.В.Аниськова

ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

New estimates are found for the maximal time of existence of a smooth solution to Cauchy problem for a first-order quasilinear equation. The case of the power-like flux function and the linear source term are considered.

Введение

Во многих случаях математические модели явлений, исследуемых в естествознании, приводят к квазилинейным уравнениям первого порядка, т. е. к уравнениям вида

$$u_t + \varphi(u)_x = \psi(t, x, u). \quad (1)$$

Естественна постановка задачи Коши, которая формулируется как задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющая начальному условию

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_0(x) \in C^1(R). \quad (2)$$

Одним из примеров уравнения вида (1) является известное уравнение Хопфа (см. [1]), описывающее одномерное движение идеального газа: $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$, где неизвестная функция $u(t, x)$ — скорость частицы газа, находящейся в момент времени t в точке x . В случае, когда имеются внешние силы, в правой части уравнения Хопфа появляется неоднородный член $\psi(t, x, u)$.

Как известно, даже в случае гладких начальных данных $u_0(x)$, функции потока $\varphi(u)$ и правой части $\psi(t, x, u)$ задача (1), (2) может не иметь глобального классического решения. Это обусловлено тем, что характеристики задачи могут пересекаться за конечное время. Поэтому нелокальная постановка задачи (1), (2) приводит к необходимости введения обобщенных решений, содержательная теория которых развита в работах С.Н.Кружкова (см., напр., [2]).

Однако проблема нахождения максимального времени существования гладкого решения задачи (1), (2) остается актуальной для многочисленных приложений. В настоящей работе эта проблема решена для некоторых частных случаев, когда функция потока φ и источник ψ имеют специальный вид.

Основные теоремы

В однородном случае $\psi(t, x, u) = 0$ известно выражение для оптимальной ширины слоя $T = -\frac{1}{M}$, где $-M = \inf_{y \in R} \varphi''(u_0(y)) \cdot u_0'(y)$, $T = +\infty$, если $M \geq 0$ (см. [3]).

Нами получены некоторые обобщения этого результата на неоднородный случай. Здесь характеристики уже не являются прямыми линиями, что значительно усложняет нашу

задачу. Удалось найти простое выражение для оптимальной ширины слоя T в случае степенной функции потока вида $\varphi(u) = c|u|^{\alpha-1}u$ или $\varphi(u) = c|u|^\alpha$, $c = \text{const}$, и линейной функции $\psi = au + b$.

Теорема 1. Пусть $b = 0$ и $u_0(x) \in C^1(R)$,

$$-M = \inf_{y \in R} \varphi''(u_0(y)) \cdot u_0'(y).$$

Тогда 1) при $M = +\infty$ гладкого решения задачи (1), (2) не существует ни в каком слое;

2) если $M \leq 0$ или $M \leq a(1 - \alpha)$, $a < 0$, то решение существует и единственно в слое Π_∞ , т.е. $T = +\infty$;

3) при $M > \max\{a(1 - \alpha), 0\}$ решение существует и единственно в слое $\Pi_T = [0, T) \times R$, где

$$T = \frac{1}{a(\alpha - 1)} \ln \left(\frac{a(\alpha - 1)}{M} + 1 \right). \quad (3)$$

Далее будем исследовать уравнение $u_t + \varphi(u)_x = au + b$, где a и $b \neq 0$, а функция потока $\varphi(u) = cu^2/2$ (случай общих потоков не поддается простому анализу).

Теорема 2. Пусть a и b отличны от нуля и $\varphi(u) = cu^2/2$,

$$-M = \inf_{y \in R} c \cdot u_0'(y).$$

Тогда 1) при $M = +\infty$ гладкого решения задачи (1), (2) не существует ни в каком слое;

2) если $M \leq 0$ или $M \leq -a$ и $a < 0$, то решение существует в слое Π_∞ , т.е. $T = +\infty$;

3) при $M > \max\{-a, 0\}$ решение существует в слое $\Pi_T = [0, T) \times R$ и

$$T = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a}{M} + 1 \right).$$

Заметим, что полученное выражение для T совпадает с (3) при $\alpha = 2$.

Сохраняя условие $\varphi(u) = cu^2/2$, рассмотрим случай $a = 0$.

Теорема 3. Пусть $a = 0$, т.е. $u_t + \varphi(u)_x = b$ и функция потока $\varphi(u) = cu^2/2$,

$$-M = \inf_{y \in R} c \cdot u_0'(y), \quad c = \varphi''(u_0(y)).$$

Тогда 1) при $M = +\infty$ гладкого решения не существует ни в каком слое;

2) при $M \leq 0$ решение существует и единственно в слое Π_∞ , т.е. $T = +\infty$;

3) при $M > 0$ решение существует и единственно в слое $\Pi_T = [0, T) \times R$, где

$$T = \frac{1}{M}.$$

В общем случае произвольной функции потока $\varphi(u)$ и неоднородности ψ не существует простого выражения для определения максимального времени существования гладкого решения.

1. Hopf E. // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V.3. P. 201-230.
2. Кружков С.Н. // Мат. сб. 1970. Т.81. № 2. С.228-255.
3. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. Уравнения с частными производными первого порядка (учебн. пособие). М.: Изд-во МГУ, 1992. 96 с.